

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

C. MARLE

Sur l'établissement des équations de l'hydrodynamique des fluides relativistes dissipatifs. I. - L'équation de Boltzmann relativiste

Annales de l'I. H. P., section A, tome 10, n° 1 (1969), p. 67-126

http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1969__10_1_67_0

© Gauthier-Villars, 1969, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section A » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Sur l'établissement des équations de l'hydrodynamique des fluides relativistes dissipatifs

I. — L'équation de Boltzmann relativiste

par

C. MARLE

Laboratoire de Physique mathématique, Collège de France.

RÉSUMÉ. — Nous étudions dans cet article la description d'un gaz relativiste par des fonctions de distribution des impulsions des particules qui le constituent (une pour chaque espèce de particules). Ces fonctions sont solution d'équations de Boltzmann relativistes, dont nous rappelons les principales propriétés. Certains points nouveaux en relativité, mais généralisant de façon naturelle des propriétés connues de l'équation de Boltzmann non relativiste, sont exposés de façon détaillée. Ce sont notamment les suivants :

— Pour que la fonction de distribution tende, à l'équilibre thermodynamique, vers la fonction de distribution de Maxwell, il suffit que la probabilité d'interaction entre deux particules soit non nulle dans des voisinages de deux points quelconques distincts de son domaine de définition. Il est inutile de supposer cette probabilité partout non nulle.

— Si le gaz comporte plusieurs sortes de particules susceptibles d'interaction entraînant la fusion ou la fission de particules, une constante η doit être introduite dans les équations de Boltzmann. Le théorème H de Boltzmann et la formule classique de Sakur-Tétrode permettent de déterminer cette constante :

$$\eta = \frac{c^3}{h^3}$$

— Grâce à l'introduction des phénomènes d'émission stimulée et d'effet Raman stimulé, la fonction de distribution des photons est bien, à l'équilibre thermodynamique, en accord avec la formule de Planck.

— On peut formuler des équations (équations de Krook relativistes) ayant toutes les propriétés essentielles des équations de Boltzmann relativistes, mais plus simples que ces dernières. Ces équations peuvent convenir en première approximation, pour décrire l'évolution d'un gaz relativiste.

Dans un prochain article, les deux méthodes principales de résolution de l'équation de Boltzmann (celle de Chapman-Enskog et celle de Grad) seront adaptées au cas relativiste et les équations de l'hydrodynamique des fluides relativistes ainsi obtenues seront étudiées.

SUMMARY. — This paper is about the description of a relativistic gas in terms of one-particle distribution functions for the momenta of the constituting particles (one for each species of particles). These functions are solutions of the Boltzmann relativistic equations, the main properties of which we briefly remind. Some points, which appear new in the relativistic theory, but are natural generalizations of known properties of the Boltzmann non-relativistic equations, are presented in a detailed manner. They are mainly the following ones:

— So that the distribution function converges to the Maxwell relativistic distribution function, at thermodynamic equilibrium, it is sufficient that the probability interaction between two particles be not zero in neighbourhoods of two distinct points of its domain of definition. It is not necessary to assume this probability everywhere not zero.

— If there are interaction processes which cause fusion or fission of particles, a constant η must be introduced into the Boltzmann equations. The Boltzmann H-theorem and the classical Sakur-Tetrode formula allow to determine the value of this constant:

$$\eta = \frac{c^3}{h^3}$$

— By taking into account phenomena of stimulated emission and stimulated Raman effect, one obtains at thermodynamic equilibrium a photon distribution function in agreement with the classical Planck formula.

— One may formulate equations (Krook relativistic equations) simpler than the Boltzmann relativistic equations, but having all the essential properties of these equations. They can be convenient to describe, as a first approximation, the behavior of a relativistic gas.

In a next paper, the two main methods to resolve the Boltzmann equation (Chapman-Enskog and Grad's) will be adapted to the relativistic case, and the resulting equations for relativistic hydrodynamics will be studied.

I. INTRODUCTION

1. Présentation de l'étude.

La théorie de l'hydrodynamique des fluides relativistes parfaits a atteint un haut degré de développement : les équations qu'il convient d'employer sont universellement acceptées et la cohérence des résultats qui en découlent est telle qu'il n'y a aucune raison de mettre en doute leur validité.

Mais dès que, dans la théorie, on tente d'introduire des phénomènes dissipatifs tels que transfert de chaleur, viscosité ou diffusion, des difficultés se présentent. Il est possible de trouver de nombreuses équations différentes pour décrire ces phénomènes, qui toutes, dans le cas limite où la vitesse de la lumière tendrait vers l'infini, se réduisent aux équations classiques. Les auteurs qui ont étudié ce problème ne s'accordent pas tous sur le choix même des équations à adopter. D'autre part, presque toutes les descriptions mathématiques qui ont été proposées conduisent à un système d'équations aux dérivées partielles de type parabolique et laissent prévoir la possibilité de transmettre dans le fluide des signaux à vitesse infinie. C'est là une propriété bien connue des équations non relativistes classiques décrivant ces phénomènes, mais il est peu satisfaisant pour l'esprit de voir qu'elle existe toujours dans les diverses généralisations relativistes proposées.

Nous pensons que les équations de base de l'hydrodynamique relativiste doivent être établies à partir d'hypothèses simples sur le mouvement, à l'échelle microscopique, des particules constituant le fluide. Ce passage de l'échelle « microscopique » à l'échelle « macroscopique » doit être effectué par une démarche analogue à celle qui, en mécanique des fluides non relativistes, permet de déduire les équations de l'hydrodynamique des hypothèses de la mécanique statistique. Ainsi, le caractère arbitraire des équations adoptées sera supprimé. Il est raisonnable de penser que l'existence des vitesses de propagation infinies sera également supprimée, si le passage de l'échelle microscopique à l'échelle macroscopique est effectué correctement (puisque à l'échelle microscopique, aucune particule

ni aucun signal ne se propage à une vitesse supérieure à celle de la lumière).

La première partie, qui fait l'objet du présent article, est consacrée à l'équation de Boltzmann relativiste. C'est, en effet, la description « microscopique » du fluide dont nous déduirons ensuite les équations de l'hydrodynamique. L'établissement de cette équation est dû à Lichnerowicz et Marrot [17] et l'étude de ses principales propriétés à Chernikov [5] à [8] et Bichteler [3] [4]. Nous rappellerons brièvement les propriétés déjà connues utiles pour la suite et nous exposerons un peu plus en détail les points qui, à notre connaissance, sont nouveaux en relativité. Parmi ceux-ci, les principaux sont :

— La démonstration des équations fonctionnelles vérifiées par les fonctions de distribution (théorèmes 7 et 9);

— La détermination de la constante additive de l'entropie (par rapprochement du résultat obtenu en relativité et de la formule classique de Sakur-Tétrode) et, avec elle, de la constante η laissée indéterminée dans les probabilités de fusion et de fission de particules;

— L'introduction, dans les équations cinétiques, du phénomène d'émission stimulée, qui permet (comme l'avait montré Einstein [9] dès 1917, en raisonnant en théorie cinétique non relativiste) d'obtenir à l'équilibre thermodynamique, une fonction de distribution des photons en accord avec la formule du rayonnement du corps noir de Planck;

— L'établissement des lois de l'équilibre thermodynamique dans un champ de gravitation stationnaire (déjà connues), par une méthode variationnelle;

— L'établissement de l'équation de Krook relativiste (qui est une équation de Boltzmann simplifiée).

2. Notations.

L'espace-temps est une variété différentiable V_4 à 4 dimensions, supposée orientable et de classe C^2 (Lichnerowicz [14]). Elle est munie d'une métrique riemannienne ds^2 de type hyperbolique normal :

$$ds^2 = (\omega^0)^2 - (\omega^1)^2 - (\omega^2)^2 - (\omega^3)^2$$

(les ω^α constituent un système de formes de Pfaff locales linéairement indépendantes) qui, dans un système de coordonnées locales s'écrit :

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$$

Le symbole ∇_α désigne la dérivation covariante, pour la connexion associée à cette métrique.

c désigne la vitesse de la lumière dans le vide.

II. L'ÉQUATION DE BOLTZMANN RELATIVISTE

3. Mouvement des particules.

3.1. HYPOTHÈSES

Un fluide est constitué par une assemblée de particules appartenant à un certain nombre d'espèces, que nous désignons par l'indice i . La masse des particules d'espèce i est m_i , quantité non négative. Nous faisons sur le mouvement des particules les hypothèses suivantes.

L'état d'une particule est complètement déterminé par la donnée de sa position et de son impulsion. Nous renonçons donc à décrire certaines propriétés de structure interne des particules (degrés de liberté interne, orientation du spin...).

Une particule est en mouvement libre pendant un temps grand auprès de la durée d'une interaction avec d'autres particules (le temps est évalué dans le repère lié à la particule). Nous considérons seulement le cas limite où l'interaction est infiniment brève, donc ponctuelle et instantanée, et n'a lieu qu'entre deux particules seulement.

Durant son mouvement libre, la particule parcourt une géodésique de V_4 .

La façon dont deux particules interagissent est une propriété spécifique de ce couple de particules (ou plutôt, du couple des espèces auxquelles elles appartiennent). Quatre types d'interaction sont possibles :

— Collision élastique : avant interaction, les particules appartiennent aux espèces i et j et après interaction aussi.

— Collision inélastique: avant interaction, les particules appartiennent aux espèces i et j et après interaction aux espèces k et l (le couple (k, l) étant différent de (i, j)).

— Fission de particule: avant interaction, il y a une seule particule d'espèce i et après interaction deux particules, d'espèces k et l .

— Fusion de particules: c'est le phénomène inverse de la fission.

Dans tous les cas, l'impulsion totale des particules qui interagissent est la même, avant et après interaction.

Remarque 1. — Nous écrirons les équations du mouvement de chaque particule comme si la métrique était imposée. Puis, nous écrirons les équations

tions d'Einstein à l'échelle macroscopique, en tenant compte du tenseur d'impulsion-énergie moyen du gaz. Écrire les équations d'Einstein à l'échelle microscopique en tenant compte de l'existence de chaque particule individuellement serait plus rigoureux, mais introduirait des difficultés considérables, en raison des singularités causées par des particules ponctuelles.

Remarque 2. — Il serait facile de tenir compte de l'influence d'un champ électromagnétique extérieur sur le mouvement des particules, éventuellement chargées : il suffirait d'écrire, au lieu des équations des géodésiques convenant pour le mouvement « libre », le système différentiel classique de la trajectoire d'une particule dans un champ électromagnétique. Mais il faudrait alors écrire les équations de Maxwell régissant l'évolution du champ électromagnétique seulement à l'échelle macroscopique, en tenant compte des densités de charge et de courant moyennes du gaz. Les interactions électromagnétiques entre deux particules chargées n'étant pas ainsi prises en compte, elles devraient être traitées avec les autres interactions, comme ponctuelles et instantanées, ce qui n'est pas très satisfaisant du point de vue physique.

3.2. L'ESPACE DES PHASES ⁽¹⁾

L'état d'une particule d'espèce i , en un point x de V_4 , est décrit par la donnée de son impulsion p , qui est un vecteur de l'espace T_x tangent en x à V_4 . L'ensemble (x, p) est un point d'un espace fibré P_8 ayant pour base V_4 et pour fibre-type l'espace vectoriel à 4 dimensions R^4 (Lichnerowicz [15]). A tout système de coordonnées locales (x^α) de V_4 , nous faisons correspondre un système de coordonnées locales (x^α, p^α) de P_8 , où les p^α sont les composantes de p dans le repère naturel de T_x associé au système de coordonnées locales (x^α) .

La masse de la particule étant m_i , nous avons :

$$(3.1) \quad F_i \equiv \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} p^\alpha p^\beta = \frac{m_i^2}{2}$$

de sorte que le vecteur p ne peut parcourir T_x tout entier, mais seulement l'hypersurface $\Omega_{m_i x}$ de T_x constituée par la nappe située dans l'avenir de l'hypersurface d'équation $F_i = \frac{m_i^2}{2}$.

⁽¹⁾ Le terme « espace des phases » est employé ici dans un sens assez différent de celui qu'on lui attribue en mécanique statistique classique, car il sert à représenter l'état d'une seule particule, non d'une assemblée de N particules.

L'espace des phases P_7 (que nous noterons parfois P_{7i} pour souligner qu'il est relatif aux particules d'espèce i) est par définition l'espace fibré des points (x, p) , $x \in V_4$, $p \in \Omega_{m_i x}$, ayant pour base V_4 , pour fibre en $x \in \Omega_{m_i x}$ et pour groupe structural le groupe de Lorentz orthochrone.

Les formes élément de volume sur V_4 et T_x sont :

$$(3.2) \quad v = \sqrt{-g} dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$$

$$(3.3) \quad \varpi = \sqrt{-g} dp^0 \wedge dp^1 \wedge dp^2 \wedge dp^3$$

(g désigne le déterminant du tenseur métrique).

Nous définissons la forme élément de volume ω_i de $\Omega_{m_i x}$ par :

$$(3.4) \quad dF_i \wedge \omega_i = \varpi$$

cette égalité devant être entendue pour la restriction à T_x des formes considérées. La forme ω_i ainsi définie n'est pas unique, mais sa restriction à $\Omega_{m_i x}$ l'est.

Nous prenons pour formes élément de volume sur P_8 et P_7 , respectivement :

$$(3.5) \quad v \wedge \varpi$$

$$(3.6) \quad v \wedge \omega_i$$

Il est facile de voir que si nous prenons p^1, p^2, p^3 pour variables sur $\Omega_{m_i x}$, ω_i s'exprime par :

$$(3.7) \quad \omega_i = \frac{\sqrt{-g}}{p_0} dp^1 \wedge dp^2 \wedge dp^3$$

Si $m_i \neq 0$, nous pouvons prendre sur $\Omega_{m_i x}$ des « coordonnées sphériques » ψ, θ et φ ($0 \leq \psi < +\infty$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi < 2\pi$). Les composantes de p dans un repère orthonormé s'expriment par :

$$(3.8) \quad \begin{aligned} p^0 &= m_i \operatorname{ch} \psi \\ p^1 &= m_i \operatorname{sh} \psi \sin \theta \cos \varphi \\ p^2 &= m_i \operatorname{sh} \psi \sin \theta \sin \varphi \\ p^3 &= m_i \operatorname{sh} \psi \cos \theta \end{aligned}$$

et la forme ω_i par :

$$(3.9) \quad \omega_i = m_i^2 \operatorname{sh}^2 \psi \sin \theta d\psi \wedge d\theta \wedge d\varphi$$

Si $m_i = 0$, Ω_{0x} est le demi-cône isotrope d'avenir et les « coordonnées sphériques » sur ce demi-cône sont l, θ et φ ($0 \leq l < +\infty$, $0 \leq \theta \leq \pi$,

$0 \leq \varphi < 2\pi$). Les formules (3.8) et (3.9) doivent être remplacées par :

$$(3.10) \quad \begin{aligned} p^0 &= l \\ p^1 &= l \sin \theta \cos \varphi \\ p^2 &= l \sin \theta \sin \varphi \\ p^3 &= l \cos \theta \end{aligned}$$

$$(3.11) \quad \omega_0 = l \sin \theta \, dl \wedge d\theta \wedge d\varphi$$

Remarque. — Lors de la vérification de l'homogénéité des formules déduites de ce qui précède, il faut prendre garde au fait que dF_i a pour dimension M^2 et que par conséquent ω_i a pour dimension M^2 également (bien qu'étant un élément de volume à 3 dimensions).

3.3. MOUVEMENT LIBRE D'UNE PARTICULE

Le mouvement libre d'une particule d'espèce i peut être représenté par un segment de courbe de P_7 , appelé trajectoire de la particule dans l'espace des phases, solution du système différentiel :

$$(3.12) \quad \begin{aligned} \frac{dx^\alpha}{ds} &= p^\alpha \\ \frac{dp^\alpha}{ds} &= -\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha p^\beta p^\gamma \end{aligned}$$

($\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ étant les coefficients de la connexion associée à la métrique riemannienne de V_4).

Nous désignerons par X le champ de vecteurs de P_7 de composantes :

$$(3.13) \quad X(p^\alpha, -\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha p^\beta p^\gamma)$$

La trajectoire de la particule dans l'espace des phases est une ligne de force de ce champ de vecteurs.

L'espace des phases et le champ de vecteurs X possèdent des propriétés géométriques importantes pour la suite, qui s'expriment par les deux théorèmes suivants :

THÉORÈME 1 (Théorème de Liouville). — La dérivée de Lie (Lichnerowicz [16]) de la forme élément de volume de P_7 par le champ de vecteurs X est nulle :

$$(3.14) \quad \mathfrak{L}(X)(v \wedge \omega) = 0$$

La démonstration est immédiate si on utilise l'identité donnant la dérivée de Lie d'une forme :

$$(3.15) \quad \mathfrak{L}(X) = i(X)d + di(X)$$

d désigne la dérivation extérieure, $i(X)$ le produit intérieur par X . Cette démonstration est d'ailleurs exposée par Chernikov [5].

Remarque. — Le théorème de Liouville est vrai aussi pour le mouvement d'une particule dans un champ électromagnétique. Dans ce cas la deuxième équation du système différentiel (3.12) doit être remplacée par :

$$\frac{dp^\alpha}{ds} = -\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha p^\beta p^\gamma + \frac{e}{c^3} p_\mu F^{\mu\alpha}$$

e désignant la charge de la particule, $F^{\mu\alpha}$ le tenseur champ électromagnétique. Le rôle précédemment joué par le champ de vecteurs X de P_7 est maintenant joué par $X + Y$, Y étant le champ de vecteurs de composantes :

$$Y\left(0, \frac{e}{c^3} p_\mu F^{\mu\alpha}\right)$$

et il est facile de voir que :

$$\mathfrak{L}(Y)(v \wedge \omega) = 0$$

résulte immédiatement de l'antisymétrie de $F^{\mu\alpha}$.

Le second théorème, utilisé implicitement par tous les auteurs qui ont étudié l'équation de Boltzmann relativiste, a été énoncé de façon précise et démontré par Pham Mau Quan [21]. Nous l'énonçons ici en des termes un peu différents et sous une forme un peu plus générale qui sera nécessaire dans la quatrième partie (l'énoncé de Pham Mau Quan, qui suffit pour l'application aux équations de transfert présentée dans le paragraphe 5, correspond au corollaire (3.25)). Nous devons d'abord introduire quelques notions nouvelles.

Soit Z une fonction définie sur une partie de P_7 et à valeurs dans l'espace des vecteurs contravariants de V_4 , astreinte à la condition : la valeur de Z au point (x, p) de P_7 est un vecteur Z^α attaché au point x de V_4 (projection canonique de (x, p)).

Il est possible de faire correspondre à la fonction Z , de manière canonique, un champ de vecteurs tangents à P_7 . Ce champ sera noté $\tilde{Z}$, ses composantes sur les vecteurs de base correspondant aux variables x seront notées $\tilde{Z}^\alpha$ (indices grecs) et celles sur les vecteurs de base correspondant

aux variables p , $\tilde{Z}_i$ (indices latins). Le champ $\tilde{Z}$ est par définition :

$$(3.16) \quad \begin{aligned} \tilde{Z}^\alpha &= Z^\alpha \\ \tilde{Z}^i &= -\Gamma_{\beta\gamma}^i p^\beta Z^\gamma \end{aligned}$$

Il est facile en effet de vérifier que les expressions (3.16) sont bien les composantes d'un vecteur de P_8 . De plus, ce vecteur est tangent à P_7 car (F étant l'expression (3.1)) :

$$i(\tilde{Z})dF = \frac{1}{2} p^\alpha p^\beta Z^\gamma \partial_\gamma g_{\alpha\beta} - \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha p_\alpha p^\beta Z^\gamma = 0$$

en vertu du théorème de Ricci.

Le champ de vecteurs X (3.13) est un exemple de champ construit de cette manière.

Le même processus permet de construire, à partir d'une fonction u définie sur une partie de P_7 , à valeurs dans l'espace des tenseurs de V_4 de variance tensorielle quelconque, astreinte à faire correspondre à (x, p) un tenseur attaché au point x , un champ de tenseurs $\tilde{u}$ de P_7 .

Cas d'une fonction $u^{\alpha_1 \dots \alpha_m}$ à valeurs dans l'espace des tenseurs m fois contravariants :

$$(3.17) \quad \begin{aligned} \tilde{u}^{\alpha_1 \dots \alpha_m} &= u^{\alpha_1 \dots \alpha_m} \\ u^{\alpha_1 \dots i \dots \alpha_m} &= -\Gamma_{\beta\gamma}^i p^\beta u^{\alpha_1 \dots \gamma \dots \alpha_m} \\ u^{\alpha_1 \dots i \dots j \dots \alpha_m} &= (-\Gamma_{\beta\gamma}^i p^\beta)(-\Gamma_{\lambda\mu}^j p^\lambda) u^{\alpha_1 \dots \gamma \dots \mu \dots \alpha_m} \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Cas d'une fonction $v_{\alpha_1 \dots \alpha_m}$ à valeurs dans l'espace des tenseurs m fois covariants : les seules composantes non nulles de $\tilde{v}$ sont :

$$(3.18) \quad \tilde{v}_{\alpha_1 \dots \alpha_m} = v_{\alpha_1 \dots \alpha_m}$$

Si les fonctions Z et u sont différentiables, nous pouvons utiliser la dérivée de Lie $\mathcal{L}(\tilde{Z})\tilde{u}$ pour le champ de vecteurs $\tilde{Z}$ du champ de tenseurs $\tilde{u}$ (Lichnerowicz [16]). Il importe de noter que $\mathcal{L}(\tilde{Z})\tilde{u}$ n'est pas en général un champ de tenseurs de P_8 de forme spéciale en correspondance simple avec une fonction tensorielle (comme c'est le cas pour $\tilde{u}$).

Nous aurons dans la suite à utiliser les formules donnant les composantes de la dérivée de Lie $\mathcal{L}(\tilde{Z})\tilde{w}$ d'un champ $\tilde{w}$ correspondant à une fonction tensorielle $w_{\alpha_1 \dots \alpha_m}$ covariante ne dépendant que des variables x (non des

variables p ; autrement dit, $w_{\alpha_1 \dots \alpha_m}$ est un champ de tenseurs différentiable de V_4 . Il est facile d'établir :

$$(3.19) \quad \begin{cases} [\mathfrak{L}(\tilde{Z})\tilde{w}]_{\alpha_1 \dots \alpha_m} = Z^\lambda \frac{\partial w_{\alpha_1 \dots \alpha_m}}{\partial x^\lambda} + w_{\lambda \alpha_2 \dots \alpha_m} \frac{\partial Z^\lambda}{\partial x^{\alpha_1}} + \dots + w_{\alpha_1 \dots \alpha_{m-1} \lambda} \frac{\partial Z^\lambda}{\partial x^{\alpha_m}} \\ [\mathfrak{L}(\tilde{Z})\tilde{w}]_{\alpha_1 \dots i \dots \alpha_m} = w_{\alpha_1 \dots \lambda \dots \alpha_m} \frac{\partial Z^\lambda}{\partial p^i} \end{cases}$$

toutes les composantes de $\mathfrak{L}(\tilde{Z})\tilde{w}$ comportant plus d'un indice latin étant nulles.

Ces expressions permettent de calculer facilement les composantes ne comportant que des indices grecs (ce sont les seules que nous aurons à utiliser) de $\mathfrak{L}(\tilde{Z})\tilde{u}$, $u^{\alpha_1 \dots \alpha_m}$ étant une fonction tensorielle contravariante différentiable (fonction des variables x et p) : il suffit d'écrire :

$$\mathfrak{L}(\tilde{Z})[u^{\alpha_1 \dots \alpha_m} w_{\alpha_1 \dots \alpha_m}] = \tilde{w}_{\alpha_1 \dots \alpha_m} [\mathfrak{L}(\tilde{Z})\tilde{u}]^{\alpha_1 \dots \alpha_m} + \tilde{u}^{\alpha_1 \dots \alpha_m} [\mathfrak{L}(\tilde{Z})\tilde{w}]_{\alpha_1 \dots \alpha_m} + \tilde{u}^{\alpha_1 \dots i \dots \alpha_m} [\mathfrak{L}(\tilde{Z})\tilde{w}]_{\alpha_1 \dots i \dots \alpha_m}$$

Nous obtenons ainsi :

$$(3.20) \quad \begin{aligned} [\mathfrak{L}(\tilde{Z})\tilde{u}]^{\alpha_1 \dots \alpha_m} &= Z^\lambda \frac{\partial u^{\alpha_1 \dots \alpha_m}}{\partial x^\lambda} - \Gamma_{\beta}^{\lambda}{}_{\gamma} p^\beta Z^\gamma \frac{\partial u^{\alpha_1 \dots \alpha_m}}{\partial p^\lambda} \\ &- u^{\lambda \alpha_2 \dots \alpha_m} \left(\frac{\partial Z^{\alpha_1}}{\partial x^\lambda} - \Gamma_{\beta}^{\mu}{}_{\lambda} p^\beta \frac{\partial Z^{\alpha_1}}{\partial p^\mu} \right) - \dots - u^{\alpha_1 \dots \alpha_{m-1} \lambda} \left(\frac{\partial Z^{\alpha_m}}{\partial x^\lambda} - \Gamma_{\beta}^{\mu}{}_{\lambda} p^\beta \frac{\partial Z^{\alpha_m}}{\partial p^\mu} \right) \end{aligned}$$

Supposons les fonctions $u^{\alpha_1 \dots \alpha_m}$ et Z^α telles que l'intégrale :

$$(3.21) \quad t^{\alpha_1 \dots \alpha_m \lambda} = \int_{\Omega_{mx}} u^{\alpha_1 \dots \alpha_m} Z^\lambda \omega$$

ait un sens et définisse un champ de tenseurs $t^{\alpha_1 \dots \alpha_m \lambda}$ différentiable de V_4 .

THÉOREME 2. — Ce théorème s'exprime par la formule :

$$(3.22) \quad \begin{aligned} \nabla_\lambda t^{\alpha_1 \dots \alpha_m} &= \int_{\Omega_{mx}} \left\{ [\mathfrak{L}(\tilde{Z})\tilde{u}]^{\alpha_1 \dots \alpha_m} + u^{\alpha_1 \dots \alpha_m} \left(\nabla_\lambda Z^\lambda - \Gamma_{\beta}^{\mu}{}_{\lambda} p^\beta \frac{\partial Z^\lambda}{\partial p^\mu} \right) \right. \\ &+ u^{\lambda \alpha_2 \dots \alpha_m} \left(\nabla_\lambda Z^{\alpha_1} - \Gamma_{\beta}^{\mu}{}_{\lambda} p^\beta \frac{\partial Z^{\alpha_1}}{\partial p^\mu} \right) + \dots \\ &\left. + u^{\alpha_1 \dots \alpha_{m-1} \lambda} \left(\nabla_\lambda Z^{\alpha_m} - \Gamma_{\beta}^{\mu}{}_{\lambda} p^\beta \frac{\partial Z^{\alpha_m}}{\partial p^\mu} \right) \right\} \omega \end{aligned}$$

Dans cette formule, ∇_λ appliqué à $t^{\alpha_1 \dots \alpha_m}$ désigne l'opérateur de dérivation covariante. Appliqué à Z^α (qui n'est pas un champ de vecteurs de V_4 puisqu'il dépend de p), il désigne par convention :

$$(3.23) \quad \nabla_\lambda Z^\alpha = \frac{\partial Z^\alpha}{\partial x^\lambda} + \Gamma_\lambda^\alpha{}_\mu Z^\mu$$

Démonstration. — Il suffit de calculer l'intégrale

$$I = \int_D \left\{ \nabla_\lambda \left[w_{\alpha_1 \dots \alpha_m} \int_{\Omega_{mx}} u^{\alpha_1 \dots \alpha_m} Z^\lambda \omega \right] \right\} v$$

D étant un compact de V_4 , $w_{\alpha_1 \dots \alpha_m}$ un champ de tenseurs auxiliaire de V_4 . Nous transformons l'expression de I, par quelques opérations élémentaires (application de la formule de Stokes à D, mise sous forme d'une intégrale sur une hypersurface cylindrique de P_7 , puis application dans l'autre sens de la formule de Stokes dans P_7) :

$$\begin{aligned} I &= \int_{\pi^{-1}D} \mathfrak{L}(\tilde{Z}) [w_{\alpha_1 \dots \alpha_m} \tilde{u}^{\alpha_1 \dots \alpha_m} (v \wedge \omega)] \\ &= \int_D w_{\alpha_1 \dots \alpha_m} \left(\int_{\Omega_{mx}} [\mathfrak{L}(\tilde{Z}) \tilde{u}]^{\alpha_1 \dots \alpha_m} \omega \right) v \\ &\quad + \int_{\pi^{-1}D} u^{\alpha_1 \dots \alpha_m} w_{\alpha_1 \dots \alpha_m} \mathfrak{L}(\tilde{Z})(v \wedge \omega) \\ &\quad + \int_{\pi^{-1}D} \left\{ u^{\alpha_1 \dots \alpha_m} [\mathfrak{L}(\tilde{Z}) \tilde{w}]_{\alpha_1 \dots \alpha_m} + \tilde{u}^{\alpha_1 \dots \alpha_m} [\mathfrak{L}(\tilde{Z}) \tilde{w}]_{\alpha_1 \dots \alpha_m} \right\} v \wedge \omega \end{aligned}$$

$\pi^{-1}D$ désignant l'image réciproque de D dans P_7 , par la projection canonique.

Les formules (3.19) permettent d'évaluer le dernier terme de cette expression. L'évaluation de l'avant-dernier nécessite le calcul de $\mathfrak{L}(\tilde{Z})(v \wedge \omega)$, qui se fait sans difficulté en utilisant (3.15) (et en calculant d'abord $\mathfrak{L}(\tilde{Z})(v \wedge \omega)$) :

$$(3.24) \quad \mathfrak{L}(\tilde{Z})(v \wedge \omega) = \left(\frac{\partial Z^\lambda}{\partial x^\lambda} + \Gamma_\mu^\lambda{}_\lambda Z^\mu - \Gamma_\beta^\mu{}_\gamma p^\beta \frac{\partial Z^\gamma}{\partial p^\mu} \right) v \wedge \omega$$

et nous obtenons finalement (3.22).

COROLLAIRE. — Prenons pour champ de vecteurs $\tilde{Z}$ le champ X (3.13). L'expression (3.22) devient simplement :

$$(3.25) \quad \nabla_\lambda t^{\alpha_1 \dots \alpha_m \lambda} = \int_{\Omega_{mx}} [\mathfrak{L}(X) \tilde{u}]^{\alpha_1 \dots \alpha_m} \omega$$

3.4. COLLISIONS ÉLASTIQUES

D'après les hypothèses du paragraphe 3.1, les impulsions de deux particules (respectivement d'espèce i et j , une des deux au moins étant de masse non nulle), après collision élastique, p'^α et q'^α , peuvent s'exprimer en fonction des impulsions avant collision p^α et q^α et d'un vecteur n^α par (voir Chérnikov [5]) :

$$(3.26) \quad \begin{aligned} p'^\alpha &= p^\alpha + 2(p^\lambda n_\lambda) n^\alpha \\ q'^\alpha &= q^\alpha + 2(q^\lambda n_\lambda) n^\alpha \end{aligned}$$

n^α est un vecteur spatial normal à l'impulsion totale et unitaire :

$$(3.27) \quad (p^\alpha + q^\alpha) n_\alpha = (p'^\alpha + q'^\alpha) n_\alpha = 0$$

$$(3.28) \quad n^\alpha n_\alpha = -1$$

Le vecteur n^α parcourt la sphère unité à 2 dimensions du sous-espace de T_x à 3 dimensions normal à $(p^\alpha + q^\alpha)$. Il suffit d'ailleurs de faire parcourir une demi-sphère à ce vecteur pour obtenir toutes les collisions élastiques possibles, n^α et $-n^\alpha$ conduisant au même résultat.

Remarque 1. — Il existe une interprétation géométrique très simple des formules (3.26) : la collision ne modifie pas les projections de p^α et q^α sur $(p^\alpha + q^\alpha)$ et opère sur les projections de ces vecteurs sur le sous-espace normal à $(p^\alpha + q^\alpha)$, une symétrie par rapport au 2-plan de ce sous-espace normal à n^α . Cette remarque montre que les formules (3.26) s'inversent en gardant la même forme :

$$(3.29) \quad \begin{aligned} p^\alpha &= p'^\alpha + 2(p'^\lambda n_\lambda) n^\alpha \\ q^\alpha &= q'^\alpha + 2(q'^\lambda n_\lambda) n^\alpha \end{aligned}$$

Remarque 2. — Si les deux particules sont de masse nulle, les formules (3.26) couvrent seulement le cas où les impulsions des deux particules ne sont pas colinéaires. Si ces impulsions sont colinéaires, avant collision, elles le sont aussi après collision et sont données par :

$$(3.30) \quad \begin{aligned} p'^\alpha &= \lambda(p^\alpha + q^\alpha) \\ q'^\alpha &= (1 - \lambda)(p^\alpha + q^\alpha) \end{aligned} \quad 0 < \lambda < 1$$

(alors que pour des particules de masse non nulle d'impulsions colinéaires, nous aurions seulement $p'^\alpha = p^\alpha$, $q'^\alpha = q^\alpha$).

3.5. COLLISIONS INÉLASTIQUES

Considérons une collision entre deux particules d'espèces i et j , d'impulsions p^α et q^α , donnant deux particules d'espèces k et l , d'impulsions p'^α et q'^α . Une au moins des particules est de masse non nulle (sans quoi la collision serait élastique), de sorte que l'impulsion totale n'est pas isotrope, mais de genre temps.

Si (p'_0, q'_0) est un ensemble de valeurs possibles des impulsions des particules après collision, tous les autres ensembles de valeurs possibles sont évidemment donnés par la formule (analogue à (3.26)) :

$$(3.31) \quad \begin{aligned} p'^\alpha &= p'^\alpha_0 + 2(p'^\lambda_0 n_\lambda) n^\alpha \\ q'^\alpha &= q'^\alpha_0 + 2(q'^\lambda_0 n_\lambda) n^\alpha \end{aligned}$$

le vecteur n^α obéissant toujours à (3.27) et (3.28).

Comme solution particulière $(p'^\alpha_0, q'^\alpha_0)$ nous pouvons par exemple choisir l'une de celles où les vecteurs p'^α et q'^α sont contenus dans le même 2-plan que p^α et q^α :

$$(3.32) \quad \begin{aligned} p'^\alpha_0 &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{m_k^2 - m_l^2}{\lambda^2} \right) (p^\alpha + q^\alpha) + \mu \gamma^{\alpha\beta} p_\beta \\ q'^\alpha_0 &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{m_l^2 - m_k^2}{\lambda^2} \right) (p^\alpha + q^\alpha) + \mu \gamma^{\alpha\beta} q_\beta \end{aligned}$$

Nous avons posé :

$$(3.33) \quad \lambda^2 = (p^\alpha + q^\alpha)(p_\alpha + q_\alpha)$$

$$(3.34) \quad \gamma^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} - \frac{1}{\lambda^2} (p^\alpha + q^\alpha)(p^\beta + q^\beta)$$

$$(3.35) \quad \mu^2 = \frac{[(\lambda + m_k)^2 - m_l^2][(\lambda - m_k)^2 - m_l^2]}{[(\lambda + m_l)^2 - m_k^2][(\lambda - m_l)^2 - m_k^2]}$$

Remarque 1. — p'_0 et q'_0 n'existent que si l'expression (5.35) de μ^2 est non négative. Le dénominateur de cette expression qui n'est autre que :

$$-\gamma^{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta = -\gamma^{\alpha\beta} q_\alpha q_\beta$$

étant sûrement non négatif, nous devons exprimer que le numérateur est également non négatif. Cela conduit à deux possibilités :

$$(3.36) \quad \lambda \geq m_k + m_l$$

ou bien :

$$0 < \lambda \leq |m_k - m_l|$$

Mais la seconde possibilité doit être exclue car elle conduirait à des vecteurs $p'_0{}^\alpha$ et $q'_0{}^\alpha$ non tous deux dirigés vers l'avenir, de sorte que la condition nécessaire et suffisante pour que le problème ait une solution est (3.36). Il est facile de voir qu'elle se ramène à la condition classique (l'énergie cinétique des particules incidentes dans le repère du centre de masse doit être au moins égale au gain d'énergie de masse dans la transformation opérée par la collision) à la limite non relativiste.

Remarque 2. — Si p^α et q^α sont colinéaires, $\mu\gamma^{\alpha\beta}p_\beta$ et $\mu\gamma^{\alpha\beta}q_\beta$ sont indéterminés et doivent être remplacés dans (3.32) par :

$$[(\lambda + m_k)^2 - m_l^2][(\lambda - m_k)^2 - m_l^2]^{\frac{1}{2}} n_0^\alpha$$

et son opposé, n_0^α étant un vecteur unitaire de genre espace normal à $p^\alpha + q^\alpha$.

Définition. — Supposons les vecteurs p'^α , q'^α et $n'^\alpha = n^\alpha$ donnés. Ils ne peuvent être choisis indépendamment : p'^α et q'^α sont choisis d'abord, puis n'^α est choisi afin de satisfaire (3.27) et (3.28). Les formules inverses de (3.31) et (3.32) permettent alors de calculer p^α et q^α (et $n^\alpha = n'^\alpha$). Nous définissons le jacobien de cette transformation $\frac{D(p', q', n')}{D(p, q, n)}$ par la condition suivante. La forme :

$$(3.37) \quad \frac{D(p', q', n')}{D(p, q, n)} \omega_i \wedge \omega_j \wedge \varepsilon$$

s'obtient en faisant le changement de variables $(p', q', n') \rightarrow (p, q, n)$ dans la forme :

$$(3.38) \quad \omega'_k \wedge \omega'_l \wedge \varepsilon'$$

ω_i , ω_j , ω'_k , ω'_l désignent les formes élément de volume de $\Omega_{m_i x}$, $\Omega_{m_j x}$, $\Omega_{m_k x}$, $\Omega_{m_l x}$ parcourus respectivement par les variables p , q , p' , q' ; ε et ε' désignent l'élément d'aire de la demi-sphère unité, parcourue respectivement par n et n' .

Cette définition n'est que l'adaptation de la notion classique au cas un peu particulier rencontré ici, où les variables p' , q' et n' ne peuvent être choisies indépendamment.

L'interprétation géométrique présentée dans la remarque 1 du paragraphe 3.4 montre immédiatement que :

$$(3.39) \quad \frac{D(p', q', n')}{D(p'_0, q'_0, n'_0)} = 1$$

En particulier, dans le cas de collisions élastiques :

$$(3.40) \quad \frac{D(p', q', n')}{D(p, q, n)} = 1$$

3.6. FUSIONS ET FISSIONS DE PARTICULES

D'après les hypothèses du paragraphe 3.1, les impulsions p' et q' de deux particules d'espèce k et l , provenant de la fission d'une particule d'espèce i de masse non nulle, peuvent s'exprimer au moyen de l'impulsion p de cette particule et d'un vecteur n par les formules :

$$(3.41) \quad \begin{aligned} p'^\alpha &= \frac{m_i^2 + m_k^2 - m_l^2}{2m_i^2} p^\alpha + \frac{\{[m_i^2 - (m_k - m_l)^2][m_i^2 - (m_k + m_l)^2]\}^{1/2} n^\alpha}{2m_i} \\ q'^\alpha &= \frac{m_i^2 - m_k^2 + m_l^2}{2m_i^2} p^\alpha - \frac{\{[m_i^2 - (m_k - m_l)^2][m_i^2 - (m_k + m_l)^2]\}^{1/2} n^\alpha}{2m_i} \end{aligned}$$

Le vecteur n^α est unitaire, de genre espace et normal à p^α :

$$(3.42) \quad p^\alpha n_\alpha = (p'^\alpha - q'^\alpha) n_\alpha = 0$$

$$(3.43) \quad n^\alpha n_\alpha = -1.$$

Ce vecteur doit parcourir toute la sphère unité du sous-espace normal à p^α , pour donner toutes les valeurs possibles de (p'^α, q'^α) .

Le phénomène de fusion est décrit par les formules inverses de (3.41).

Remarque 1. — La fission d'une particule d'espèce i en particules d'espèces k et l n'est possible que si :

$$(3.44) \quad m_i - (m_k + m_l) \geq 0$$

La fusion de deux particules d'espèces k et l , d'impulsions p'^α et q'^α , en une particule d'espèce i , n'est possible que si :

$$(3.45) \quad p'^\alpha q'_\alpha = \frac{1}{2} (m_i^2 - m_k^2 - m_l^2)$$

Remarque 2. — La fission d'une particule de masse nulle d'impulsion p^α ne peut se faire qu'en deux particules de masse nulle, d'impulsions p'^α et q'^α colinéaires à p^α :

$$(3.46) \quad \begin{aligned} p'^\alpha &= \lambda p^\alpha \\ q'^\alpha &= (1 - \lambda) p^\alpha \end{aligned} \quad 0 < \lambda < 1$$

Cette restriction est due au fait que nous avons imposé à toutes les particules d'avoir leur impulsion dirigée vers l'avenir. Il pourrait être intéressant de s'affranchir de cette hypothèse, afin de décrire certains phénomènes, tels que la création par un photon d'une paire électron-positron.

Définition. — Si p'^α et n'^α sont donnés et vérifient :

$$(3.47) \quad p'^\alpha n'_\alpha = - \frac{\{ [m_i^2 - (m_k - m_l)^2][m_i^2 - (m_k + m_l)^2] \}^{1/2}}{2m_i}$$

q'^α est complètement déterminé (par (3.42) et (3.45)) et p^α peut être immédiatement calculé. Nous pouvons donc parler du changement de variables $(p'^\alpha, n'^\alpha) \rightarrow (p^\alpha, n^\alpha)$ (bien que p'^α et n'^α ne puissent être choisis indépendamment). Le jacobien $\frac{D(p', n')}{D(p, n)}$ de cette transformation est défini par la condition suivante. La forme :

$$(3.48) \quad \frac{D(p', n')}{D(p, n)} \omega_i \wedge \varepsilon$$

s'obtient en faisant le changement de variables $(p', n') \rightarrow (p, n)$ dans la forme :

$$(3.49) \quad \omega'_k \wedge \varepsilon'$$

Cette définition est l'analogue de celle présentée dans le paragraphe 3.5 pour le cas de collisions inélastiques.

4. Équation de Boltzmann.

4.1. FONCTION DE DISTRIBUTION ⁽²⁾

La notion de fonction de distribution en relativité, utilisée par de nombreux auteurs, a été définie de façon particulièrement claire et intuitive par Synge [23] [24]. Nous présentons ici cette notion de façon plus systématique et abstraite.

⁽²⁾ Ce terme est employé ici dans un sens différent de celui qu'on lui attribue en théorie des probabilités : il désigne une densité de probabilité à un facteur près, non l'intégrale de cette densité.

La description exacte de l'état et l'évolution d'un gaz de particules toutes identiques, par la donnée des trajectoires de toutes ces particules, est inaccessible et trop précise en pratique. On lui substitue donc une description moins fine, de nature statistique, de la manière suivante :

Soit Σ une hypersurface orientée de P_7 . Considérons la présence d'un point de traversée de cette hypersurface par la trajectoire d'une particule comme un événement aléatoire, et attribuons à cet événement la valeur $+1$ ou -1 suivant que la traversée a lieu dans le sens positif ou négatif, 0 si la trajectoire est tangente à Σ . Ce nombre sera appelé « indice de présence ». Pour toute partie compacte K de Σ , la somme des indices de présence à l'intérieur de K est une variable aléatoire, dont l'espérance mathématique est le flux algébrique probable de particules à travers K . C'est évidemment une mesure additive sur Σ . Si l'ensemble d'éléments aléatoires considérés dans le problème est tel qu'il existe sur Σ une forme différentielle f , de rang 6, dont cette mesure est l'intégrale, nous dirons que le gaz possède sur Σ une fonction de distribution. Nous supposons dans la suite que c'est le cas.

Dans la pratique, l'hypersurface Σ n'est jamais quelconque : elle est toujours telle que sa projection sur V_4 soit de dimension 3. Par conséquent, la forme différentielle f n'intervient pas elle-même pour le calcul du flux probable de particules, car il est clair que ses composantes sur les formes de base :

$$dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge dp^\alpha \wedge dp^\beta \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3)$$

ne jouent aucun rôle. Nous désignerons par Pf la projection de la forme f qui, seule, intervient, c'est-à-dire la somme de ses composantes sur les formes de base

$$dx^\alpha \wedge dx^\beta \wedge dx^\gamma \wedge dp^1 \wedge dp^2 \wedge dp^3$$

THÉORÈME 3. — Il existe une forme différentielle extérieure unique Φ de rang maximum sur P_7 , telle que :

$$(4.1) \quad Pf = Pi(X)\Phi$$

Démonstration. — Il suffit de démontrer :

$$(4.2) \quad Pi(X)f = 0.$$

Or la projection sur V_4 du vecteur X est tangente à la projection sur V_4 des trajectoires des particules (remarquons que X lui-même n'est pas tangent à la trajectoire des particules dans l'espace des phases, si ces particules

interagissent; c'est la raison de l'introduction de la projection P). L'hypersurface Σ étant, par hypothèse, cylindrique, si sa base dans V_4 est engendrée par des lignes tangentes aux projections des vecteurs X , les trajectoires des particules qui rencontrent Σ lui sont tangentes. Les indices de présence correspondants sont nuls et l'espérance mathématique de la somme des indices de présence intérieurs à une partie quelconque de Σ est nulle aussi (4.2), donc (4.1), en résultent.

Définition. — La forme élément de volume de P_7 étant $v \wedge \omega$, posons :

$$(4.3) \quad \Phi = v v \wedge \omega$$

v est la fonction de distribution du gaz de particules considéré. C'est une fonction définie sur P_7 . Nous la supposons continue, et même, dans la plupart des cas, de classe C^1 .

La fonction de distribution possède les propriétés suivantes :

Propriété 1.

L'intégrale :

$$(4.4) \quad \int_C v i(X) v \wedge \omega$$

où C est une partie compacte d'une hypersurface Σ de P_7 dont la projection sur V_4 est de dimension 3, est le flux algébrique probable de particules dont la trajectoire dans l'espace des phases traverse C . Cette propriété résulte directement de ce qui précède. Mais elle n'est plus vraie si la projection de Σ sur V_4 est de dimension 4, sauf si les particules sont sans interaction. Cette restriction ne semble pas avoir été clairement mentionnée précédemment.

Propriété 2.

v est à valeurs non négatives. Prenons en effet une hypersurface dont la projection sur V_4 est de genre espace, et choisissons comme sens de traversée positif celui orienté vers l'avenir. L'intégrale (4.4) est nécessairement non négative, puisque les particules ne peuvent traverser Σ que dans le sens positif. Il en est de même de v , grâce aux conventions faites sur les orientations (projection de X sur V_4 dirigée vers l'avenir).

Propriété 3.

Si C est constitué d'un compact K d'une hypersurface à 3 dimensions de V_4 et, en tout point x de K , d'un compact Π_x de la fibre Ω_{mx} , l'inté-

grale (4.4) conserve un sens lorsque chaque Π_x tend vers Ω_{mx} entier. En effet cette intégrale représente alors un flux algébrique probable de particules traversant K, quelle que soit leur impulsion, qui nécessairement est fini.

Remarque. — Si le gaz comporte plusieurs espèces de particules, il faut définir une fonction de distribution v_i pour chacune d'elles.

4.2. LES ÉQUATIONS DE BOLTZMANN RELATIVISTES

L'équation de Boltzmann relativiste a été établie pour la première fois par Lichnerowicz et Marrot [17]. Nous ne rappellerons pas sa démonstration, qui a été présentée plusieurs fois sous des formes légèrement différentes, notamment par Chernikov [5] et Bichteler [4]. Soulignons cependant le fait que cette équation repose sur les hypothèses physiques rappelées dans le paragraphe 3.1, et, de plus, sur une hypothèse de chaos moléculaire permettant d'évaluer les probabilités d'interaction avec les seules fonctions de distribution d'une particule définies plus haut (sans cette hypothèse, l'emploi de fonctions de distribution pour des couples de particules, dont il faudrait donner une définition précise grâce à un raisonnement analogue à celui du paragraphe 4.1, serait nécessaire).

Pour un gaz à plusieurs constituants, il y a une équation de Boltzmann pour chaque fonction de distribution (supposée de classe C^1) v_i , qui s'écrit :

$$(4.5) \quad \mathfrak{L}(X)v_i \equiv p^\alpha \frac{\partial v_i}{\partial x^\alpha} - \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha p^\beta p^\gamma \frac{\partial v_i}{\partial p^\alpha} = I_{+i} - I_{-i}$$

I_{+i} et I_{-i} sont des fonctions de x^α et p^α , appelées « termes de collision ». Ils représentent les effets des collisions, fusions et fissions. I_{+i} correspond aux phénomènes qui tendent à augmenter le nombre de particules d'espèce i présentes dans un élément de volume de P_7 , I_{-i} à ceux qui tendent à diminuer ce nombre. Ils se décomposent en :

$$(4.6) \quad I_{+i} = \sum_{j,k,l} I_{+i,j}^{k,l} + \sum_{k,l} J_{+i}^{k,l} + \sum_{j,k} J_{+i,j}^k$$

$$(4.7) \quad I_{-i} = \sum_{j,k,l} I_{-i,j}^{k,l} + \sum_{k,l} J_{-i}^{k,l} + \sum_{j,k} J_{-i,j}^k$$

$I_{+i,j}^{k,l}$ représente l'effet des collisions entre particules d'espèces k et l donnant des particules d'espèces i et j , $J_{+i}^{k,l}$ celui des fusions de particules d'espèce k et l donnant une particule d'espèce i , $J_{+i,j}^k$ celui des fissions

de particules d'espèce k donnant des particules d'espèces i et j . De même, $I_{-i,j}^{k,l}$ représente l'effet des collisions entre particules d'espèces i et j donnant des particules d'espèces k et l , $J_{-i}^{k,l}$ des fissions de particules d'espèce i en particules d'espèces k et l , $J_{-i,j}^{k,l}$ celui des fusions de particules d'espèces i et j donnant une particule d'espèce k . Nous les appellerons « termes de collision partiels ». Les deux premiers s'expriment par les intégrales :

$$(4.8) \quad I_{+i,j}^{k,l} = \int v_k(p') v_l(q') A_{k,l}^{i,j}(p', q', n') \frac{D(p', q', n')}{D(p, q, n)} \omega_j \wedge \varepsilon$$

$$(4.9) \quad I_{-i,j}^{k,l} = \int v_i(p) v_j(q) A_{i,j}^{k,l}(p, q, n) \omega_j \wedge \varepsilon$$

Dans ces deux intégrales, les variables d'intégration sont q (impulsion de la particule d'espèce j) et n (vecteur unitaire définissant la collision, utilisé dans les formules (3.31)) et l'intégration est étendue à tout leur domaine utile de variation. $A_{i,j}^{k,l}(p, q, n)$ est proportionnel à la probabilité pour que deux particules d'espèces i et j , d'impulsions respectivement p et q , aient une collision donnant des particules d'espèces k et l , caractérisée par le vecteur n . $A_{k,l}^{i,j}(p', q', n')$ est la même quantité, relative à une collision de particules d'espèces k, l , donnant des particules d'espèces i, j .

Les expressions (4.8) et (4.9) valent en un point x donné de V_4 . La dépendance de x des fonctions de distribution v a été sous-entendue pour alléger l'écriture et le sera de même dans la suite.

La plupart des auteurs qui ont étudié l'équation de Boltzmann relativiste ont exprimé $A_{i,j}^{k,l}$ et $A_{k,l}^{i,j}$ sous une forme différente, en faisant apparaître en facteurs la vitesse relative des particules. Nous n'avons pas jugé cela utile, car $A_{i,j}^{k,l}$ et $A_{k,l}^{i,j}$ sont généralement des fonctions compliquées de cette vitesse relative et de n , de sorte qu'en mettant la vitesse relative en facteurs, on n'épuise pas leur dépendance de cette vitesse.

Les $A_{i,j}^{k,l}$ doivent satisfaire les propriétés suivantes :

Propriété 1.

$A_{i,j}^{k,l}$ est non négatif, car c'est, à un facteur positif près, une probabilité.

Propriété 2.

$A_{i,j}^{k,l}$ possède les symétries :

$$(4.10) \quad A_{i,j}^{k,l}(p, q, n) = A_{i,j}^{l,k}(p, q, n) = A_{j,i}^{k,l}(q, p, n)$$

Cette propriété doit nécessairement être imposée pour compenser l'introduction d'un ordre arbitraire des particules intervenant dans une collision (ce qui fait que dans les sommes des seconds membres de (4.6) et (4.7), les mêmes collisions sont comptées plusieurs fois).

Propriété 3.

$A_{i,j}^{k,l}$ n'est fonction que de :

$$p^\alpha q_\alpha \quad \text{et} \quad |(p^\alpha - q^\alpha)n_\alpha|$$

Cette propriété exprime l'isotropie de l'espace. Pleinement justifiée en relativité restreinte, elle est admissible en relativité générale pour les phénomènes qui ont lieu à une échelle très petite auprès de celle des phénomènes de gravitation. Sans quoi, $A_{i,j}^{k,l}$ pourrait dépendre de l'orientation de p^α , q^α , n^α par rapport aux directions propres du tenseur de courbure.

Propriété 4.

Compte tenu de la définition du paragraphe 5.5 :

$$(4.11) \quad A_{i,j}^{k,l}(p, q, n) = A_{k,l}^{i,j}(p', q', n') \frac{D(p', q', n')}{D(p, q, n)}$$

Cette propriété exprime l'égalité des probabilités de processus inverses. Dans le cas où $i = k$, $j = l$ (collision élastique), elle est conséquence de la propriété 3 et de (3.40).

Grâce à la propriété 4, nous pouvons transformer (4.8) :

$$(4.12) \quad I_{+i,j}^{k,l} = \int v_k(p') v_l(q') A_{i,j}^{k,l}(p, q, n) \omega_j \wedge \varepsilon$$

Les autres termes de collision partiels, correspondant aux phénomènes de fission et fusion, s'expriment par les intégrales :

$$(4.13) \quad J_{+i}^{k,l}(p) = \frac{1}{2} \int v_k(p') v_l(q') B_{i,l}^{k,l} \frac{D(p', n')}{D(p, n)} \varepsilon$$

$$(4.14) \quad J_{-i}^{k,l}(p) = \frac{1}{2} \int v_i(p) \eta B_{i,l}^{k,l} \varepsilon$$

$$(4.15) \quad J_{+k,l}^i(p') = \int v_i(p) \eta B_{i,l}^{k,l} \frac{D(p, n)}{D(p', n)} \varepsilon'$$

$$(4.16) \quad J_{-k,l}^i(p') = \int v_k(p') v_l(q') B_{k,l}^{i,i} \varepsilon'$$

(4.13) et (4.14) sont des fonctions de p , impulsion de la particule d'espèce i , tandis que (4.15) et (4.16) sont fonction de p' , impulsion de la particule d'espèce k . $B_i^{k,l}$ est proportionnel à la probabilité pour qu'une particule d'espèce i se désintègre en particules d'espèces k et l , tandis que $B_{k,l}^i$ est proportionnel à la probabilité pour que des particules d'espèces k et l fusionnent en une particule d'espèce i . La variable d'intégration est, dans ces quatre intégrales, le vecteur n qui caractérise la fusion ou la fission.

Remarque 1. — La présence du facteur $\frac{1}{2}$ dans (4.13) et (4.14) et non dans (4.15) et (4.16) tient au fait que la particule qui subit la fission est seule, tandis que les particules qui apparaissent sont deux.

Remarque 2. — Le facteur η , dans (4.14) et (4.15) est introduit pour des raisons d'homogénéité. Grâce à sa présence, $B_i^{k,l}$ et $B_{k,l}^i$ peuvent avoir même équation aux dimensions ($M^4 L^2$), ce qui est indispensable pour qu'ils vérifient la propriété 8 indiquée plus loin. La dimension de η est, comme celle de v_i , $M^{-3} L^{-3}$. Grâce au théorème H, et à la formule de Sakur-Tétrode, nous pourrions plus loin préciser la valeur de η (formules (5.14), (9.23) et (9.24)).

Les $B_i^{k,l}$ et $B_{k,l}^i$ doivent satisfaire les propriétés suivantes, analogues des propriétés 1 à 4 ci-dessus des $A_{i,j}^{k,l}$.

Propriété 5.

$B_i^{k,l}$ et $B_{k,l}^i$ sont non négatifs.

Propriété 6.

$B_i^{k,l}$ et $B_{k,l}^i$ possèdent les symétries :

$$(4.17) \quad \begin{cases} B_i^{k,l}(p, n) = B_i^{l,k}(p, n) \\ B_{k,l}^i(p', n) = B_{l,k}^i(p', n) \end{cases}$$

Propriété 7.

$B_i^{k,l}$ et $B_{k,l}^i$ qui, *a priori*, pourraient être fonction respectivement de (p, n) , (p', n) , sont en fait des constantes.

Propriété 8.

Compte tenu de la définition du paragraphe 5.6 :

$$(4.18) \quad B_i^{k,l} = B_{k,l}^i \frac{D(p', n')}{D(p, n)}$$

Cette dernière propriété permet de transformer les expressions (4.13) et (4.15) :

$$(4.19) \quad J_{+i}^{k,l}(p) = \frac{1}{2} \int v_k(p') v_l(q') B_i^{k,l} \varepsilon$$

$$(4.20) \quad J_{+k,l}^i(p') = \int v_i(p) \eta B_{k,l}^i \varepsilon'$$

5. Équations de transfert de Maxwell.

Appliquons le corollaire du théorème 2 (formule (3.25)) à une fonction u de la forme :

$$(5.1) \quad u = v_i w$$

la fonction de distribution v_i étant supposée de classe C^1 .

Nous obtenons, compte tenu de l'équation de Boltzmann (4.5) :

$$(5.2) \quad \nabla_\beta t^{\alpha_1 \dots \alpha_m \beta} = \int_{\Omega_{m_i x}} w^{\alpha_1 \dots \alpha_m} (I_{+i} - I_{-i}) \omega_i + \int_{\Omega_{m_i x}} v_i [\mathfrak{L}(X) \tilde{w}]^{\alpha_1 \dots \alpha_m} \omega_i$$

Nous avons posé :

$$(5.3) \quad t^{\alpha_1 \dots \alpha_m \beta} = \int_{\Omega_{m_i x}} v_i w^{\alpha_1 \dots \alpha_m} p^\beta \omega_i$$

(5.2) est l'équation de transfert de Maxwell. Elle prend des formes simples ayant une signification physique intéressante, pour plusieurs choix de la fonction w , que nous allons indiquer.

5.1. BILAN DU NOMBRE DE PARTICULES

Prenons pour w la fonction égale à 1 en tout point (x^α, p^α) de P_7 . Nous avons manifestement :

$$\mathfrak{L}(X) \tilde{w} = 0$$

de sorte que (5.2) donne :

$$(5.4) \quad \nabla_\beta N_i^\beta = \int_{\Omega_{m_i x}} (I_{+i} - I_{-i}) \omega_i$$

avec :

$$(5.5) \quad N_i^\beta = \int v_i p^\beta \omega_i$$

N_i^β est le vecteur flux de particules de l'espèce i . C'est visiblement un vecteur de genre temps orienté vers l'avenir. (5.4) est l'équation de bilan du nombre de particules, d'espèce i .

THÉORÈME 4. — Si les particules d'espèce i ne sont transformées au cours d'aucune collision, N_i^β satisfait :

$$(5.6) \quad \nabla_\beta N_i^\beta = 0$$

La démonstration de ce théorème a été donnée par Chernikov [5]. Elle résulte d'ailleurs directement de (5.4) et des expressions des termes de collision données dans le paragraphe 4.2.

Remarque. — Le théorème 4 peut être généralisé de diverses façons au cas où les particules d'espèce i sont susceptibles d'être transformées par certaines collisions. Si, par exemple, les seules collisions susceptibles de modifier le nombre de particules d'espèces i et k sont les deux processus réciproques :

$$i + j \rightleftharpoons k + l$$

il est facile de voir que

$$(5.7) \quad \nabla_\beta (N_i^\beta + N_k^\beta) = 0$$

5.2. BILAN D'IMPULSION-ÉNERGIE

Prenons pour fonction w la fonction qui, au point (x^α, p^α) de P_7 , fait correspondre le vecteur p^α de T_x . Nous avons :

$$[\mathcal{L}(X)\tilde{p}]^\alpha = 0$$

car cette expression est le crochet du champ X avec lui-même.

La formule (5.2) donne donc :

$$(5.8) \quad \nabla_\beta N_i^{\alpha\beta} = \int_{\Omega_{m_i x}} p^\alpha (I_{+i} - I_{-i}) \omega_i$$

avec :

$$(5.9) \quad T_i^{\alpha\beta} = \int_{\Omega_{m_i x}} v_i p^\alpha p^\beta \omega_i$$

$T_i^{\alpha\beta}$ est le tenseur d'impulsion-énergie macroscopique des particules d'espèce i . Il est symétrique et la forme quadratique qui lui est associée est définie positive (sauf si $v_i \omega_i$ est une mesure concentrée sur un ensemble

de $\Omega_{m_i x}$ ayant un vecteur normal, ce qui n'est pas le cas si, comme nous l'avons supposé, v_i est de classe C^0 au moins). (5.8) est l'équation de bilan d'impulsion-énergie pour la fraction du gaz constituée par les particules d'espèce i .

THÉORÈME 5. — Le tenseur d'impulsion-énergie total :

$$(5.10) \quad T^{\alpha\beta} = \sum_i T_i^{\alpha\beta}$$

vérifie :

$$(5.11) \quad \nabla_\beta T^{\alpha\beta} = 0$$

Ce théorème a été démontré par Chernikov [5]. C'est d'ailleurs une conséquence directe de (5.8) si l'on tient compte des expressions des termes de collision.

5.3. BILAN D'ENTROPIE. THÉORÈME H

Prenons pour fonction w :

$$w = -k \operatorname{Log} \frac{v_i}{\zeta}$$

où k est la constante de Boltzmann et ζ une constante ayant même équation aux dimensions que v_i ($L^{-3}M^{-3}$) destinée à rendre la définition de w indépendante du choix des unités, et dont la valeur sera précisée plus loin. Nous avons :

$$\mathfrak{L}(X)w = -\frac{k}{v_i} \mathfrak{L}(X)v_i = -\frac{k}{v_i} (I_{+i} - I_{-i})$$

d'après (4.5). La formule (5.2) donne donc :

$$(5.12) \quad \nabla_\beta S_i^\beta = -k \int_{\Omega_{m_i x}} \left(1 + \operatorname{Log} \frac{v_i}{\zeta}\right) (I_{+i} - I_{-i}) \omega_i$$

avec :

$$(5.13) \quad S_i^\beta = -k \int_{\Omega_{m_i x}} v_i \operatorname{Log} \frac{v_i}{\zeta} p^\beta \omega_i$$

S_i^β est le flux d'entropie relatif aux particules d'espèce i et (5.12) l'équation de bilan d'entropie pour ces particules.

THÉORÈME 6 (Théorème H de Boltzmann). — Si la valeur choisie pour la constante ζ est :

$$(5.14) \quad \zeta = \eta e$$

(η est la constante intervenant dans les termes de collision correspondant aux fissions et fusions (4.14) et (4.15); e est la base des logarithmes népériens), le flux d'entropie total :

$$(5.15) \quad S^\beta = \sum_i S_i^\beta$$

vérifie :

$$(5.16) \quad \nabla_\beta S^\beta \geq 0$$

Démonstration. — Ce théorème a été démontré par Chernikov [5] dans le cas particulier où il n'y a pas de fission ou de fusion entre particules constituant le gaz. Il est alors inutile d'imposer une valeur précise à ζ (cet auteur a d'ailleurs fait simplement $\zeta = 1$). La démonstration dans le cas général se fait de la même façon : les équations (5.12), compte tenu des expressions (4.9), (4.12), (4.14), (4.16), (4.19), (4.20) des termes de collision, conduisent à :

$$(5.17) \quad \nabla_\beta S^\beta = -\frac{1}{4} \sum_{i,j,k,l} \int \text{Log} \frac{v_i v_j}{v_k v_l} [v_k(p') v_l(q') - v_i(p) v_j(q)] \\ A_{i,j}^{k,l}(p, q, n) \omega_i \wedge \omega_j \wedge \varepsilon \\ - \frac{1}{2} \sum_{i,k,l} \int \text{Log} \frac{v_i \zeta}{v_k v_l e} [v_k(p') v_l(q') - v_i(p) \eta] B_{i,l}^{k,l} \omega_i \wedge \varepsilon$$

Nous avons utilisé les propriétés de symétrie (4.10) et (4.17) et l'égalité des probabilités de processus inverses (4.11) et (4.18).

Le premier terme du second membre de (5.17) est visiblement toujours non négatif. Il en est de même du second si les constantes ζ et η sont liées par (5.14), ce qui établit le théorème.

La formule de Sakur-Tétrode (paragraphe 9.3) permettra de préciser la valeur de ζ , donc aussi, grâce à (5.14), celle de η (formules (9.23) et (9.24)).

Remarque. — L'hypothèse de l'égalité des probabilités de processus inverses (4.11) et (4.18), indispensable pour établir le théorème 6, n'est pas nécessaire pour établir les théorèmes 4 et 5.

III. L'ÉQUILIBRE THERMODYNAMIQUE

6. Équilibre thermodynamique local d'un gaz de particules toutes identiques.

Pour un gaz de particules toutes identiques, de masse m , n'ayant que des collisions élastiques, l'expression (5.17) se réduit à :

$$(6.1) \quad \nabla_p S^\beta = -\frac{1}{4} \int \text{Log} \frac{v(p)v(q)}{v(p')v(q')} [v(p')v(q') - v(p)v(q)] \cdot A(p, q, n) \omega \wedge \omega_1 \wedge \varepsilon \geq 0$$

(ω représente ici l'élément de volume de Ω_{mx} pour la variable p et ω_1 ce même élément de volume, mais pour la variable q).

Cherchons dans quelles conditions le second membre de (6.1) est nul. Nous dirons dans ce cas que le gaz est localement en équilibre thermodynamique (Nous ne supposons pas dans ce paragraphe v de classe C^1 , de sorte que le second membre de (6.1) n'est pas nécessairement égal à $\nabla_p S^\beta$). Nous établirons successivement deux théorèmes qui montrent que cela ne peut avoir lieu que si v est d'une forme bien particulière, appelée fonction de distribution de Maxwell.

6.1. ÉQUATION FONCTIONNELLE VÉRIFIÉE PAR LA FONCTION DE DISTRIBUTION D'ÉQUILIBRE

THÉORÈME 7. — Sous les deux hypothèses suivantes :

— $A(p, q, n)$ est non nul dans deux voisinages, respectivement des systèmes de valeurs des variables (p_1, q_1, n_1) et (p_2, q_2, n_2) avec :

$$p_1 \neq q_1 \quad ; \quad p_2 \neq q_2 \quad ; \quad \lambda_1 = p_1^\alpha q_{1\alpha} > \lambda_2 = p_2^\alpha q_{2\alpha} \quad ; \quad \mu_1 = p_1^\alpha n_{1\alpha} \neq 0 ; \\ \mu_2 = p_2^\alpha n_{2\alpha} \neq 0$$

— La fonction de distribution v est continue et vérifie :

$$v(p_1) \neq 0 \quad v(p_2) \neq 0 \quad v(q_1) \neq 0 \quad v(q_2) \neq 0$$

le second membre de (6.1) est nul (au point x considéré de V_4) si et seulement si $v(p)$ vérifie l'équation fonctionnelle :

$$(6.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} v(p)v(q) = v(p')v(q') \\ \text{pour tous } p, q, p', q' \in \Omega_{mx} \text{ vérifiant } p + q = p' + q' \end{array} \right.$$

Démonstration. — Ce théorème est une évidence si, comme Chernikov [5] l'avait supposé (tout en remarquant que des hypothèses moins restrictives devraient suffire), $A(p, q, n)$ est strictement positif. Nos hypothèses nous permettent seulement d'affirmer qu'il existe au moins deux couples de valeurs de :

$$\lambda = p^\alpha q_\alpha \quad \mu = p^\alpha n_\alpha$$

notés $(\lambda_1, \mu_1), (\lambda_2, \mu_2)$ tels que v vérifie (6.2) pour tous systèmes de vecteurs $p, q, p', q' \in \Omega_{mx}$ vérifiant :

$$(6.3) \quad p + q = p' + q'$$

$$(6.4) \quad p^\alpha q_\alpha = \lambda_i > m^2 \quad (i = 1 \text{ ou } 2, \lambda_1 > \lambda_2)$$

$$(6.5) \quad p^\alpha n_{i\alpha} = \mu_i \neq 0$$

n_i étant le vecteur permettant d'exprimer p' et q' en fonction de p et q grâce aux formules (3.26). Il s'agit donc de s'affranchir des conditions (6.4) et (6.5). Ceci résultera d'une série de lemmes (les hypothèses du théorème 7 sont sous-entendues dans leurs énoncés).

LEMME 1. — La condition (6.5) est superflue.

Nous avons en effet donné, dans la remarque 1, du paragraphe 3.4, une interprétation géométrique simple de la transformation qui fait passer des vecteurs p et q aux vecteurs p' et q' : en projection sur le sous-espace normal à $p + q$, p et q sont représentées par les deux extrémités d'un diamètre d'une sphère à deux dimensions, p' et q' par les extrémités d'un autre diamètre symétrique du précédent par rapport au 2-plan normal à n . La condition (6.5) exprime que l'angle θ de ces deux diamètres, non nul et non égal à π , a une valeur imposée. Mais répétons l'opération : de p' et q' , nous déduisons p'' et q'' , représentés par un nouveau diamètre faisant encore avec le précédent un angle θ et avec le diamètre représentant p et q , un angle compris entre 0 et 2θ . Le système de vecteurs (p, q, p'', q'') , qui n'est plus soumis à la condition (6.5), mais seulement à la condition que l'angle des diamètres, qui les représente soit compris entre 0 et 2θ , vérifie (6.2). Nous voyons qu'il est possible, en répétant un nombre fini de fois cette opération, de s'affranchir complètement de la condition (6.5).

LEMME 2. — v n'est nulle en aucun point de Ω_{mx} .

Soient en effet p'_1 et q'_1 deux vecteurs de Ω_{mx} tels que :

$$p'_1 + q'_1 = p_1 + q_1.$$

Le système de vecteurs (p_1, q_1, p'_1, q'_1) vérifiant (6.3) et (6.4), nous avons :

$$v(p_1)v(q_1) = v(p'_1)v(q'_1)$$

donc d'après les hypothèses du théorème 7 :

$$v(p'_1) \neq 0 \quad v(q'_1) \neq 0$$

Or le vecteur p'_1 peut être choisi arbitrairement parmi les vecteurs de Ω_{mx} vérifiant :

$$(6.6) \quad p_1'^\alpha (p_{1\alpha} + q_{1\alpha}) = m^2 + \lambda_1$$

Choisissons parmi ceux-ci deux vecteurs, p'_1 et p''_1 , vérifiant :

$$p_1'^\alpha p_{1\alpha}'' = \lambda_2$$

ce qui est toujours possible, p'_1 et p''_1 pouvant être choisis afin de donner à $p_1'^\alpha p_{1\alpha}''$ toute valeur comprise entre m^2 et λ_1 et λ_2 étant par hypothèse $< \lambda_1$.

Prenons maintenant deux vecteurs p'_2 et p''_2 de Ω_{mx} vérifiant :

$$(6.7) \quad p'_2 + p''_2 = p'_1 + p''_1$$

Le système de vecteurs $(p'_1, p''_1, p'_2, p''_2)$ vérifiant (6.3) et (6.4), nous avons :

$$v(p'_1)v(p''_1) = v(p'_2)v(p''_2)$$

et par conséquent :

$$v(p'_2) \neq 0 \quad v(p''_2) = 0$$

Or, lorsque p'_1 et p''_1 varient en vérifiant toujours (6.6) et que p'_2 et p''_2 varient en vérifiant (6.7), p'_2 peut occuper une position arbitraire parmi les vecteurs de Ω_{mx} vérifiant :

$$(m^2 + \lambda_1) \leq p_2'^\alpha (p_{1\alpha} + q_{1\alpha}) \leq m^2 + A_2$$

avec :

$$(6.8) \quad A_2 = \lambda_1 + \left[\frac{m^2 + \lambda_1}{m^2 + \lambda_2} \frac{(\lambda_2 - m^2)(\lambda_1 - \lambda_2)}{4} \right]^{\frac{1}{2}}$$

comme le montre un calcul simple.

Prenons maintenant deux vecteurs p'_2 et p''_2 de Ω_{mx} vérifiant :

$$\begin{aligned} p'^{\alpha}_2(p_{\alpha} + q_{\alpha}) &= p''^{\alpha}_2(p_{\alpha} + q_{\alpha}) = m^2 + A_2 \\ p'^{\alpha}_2 p''_{2\alpha} &= \lambda_2 \end{aligned}$$

puis deux vecteurs p'_3 et p''_3 tels que :

$$p'_3 + p''_3 = p'_2 + p''_2.$$

En répétant le raisonnement précédent, nous voyons que :

$$v(p'_3) \neq 0 \quad v(p''_3) \neq 0$$

et que p'_3 peut occuper une position arbitraire parmi les vecteurs de Ω_{mx} vérifiant :

$$m^2 + A_2 \leq p'^{\alpha}_3(p_{1\alpha} + q_{1\alpha}) \leq m^2 + A_3$$

A_3 s'obtenant en remplaçant λ_1 par A_2 dans l'expression (6.8) de A_2 .

En répétant le même raisonnement n fois, nous voyons que $v(p) \neq 0$ pour tout $p \in \Omega_{mx}$ vérifiant :

$$(m^2 + \lambda_1) \leq p^{\alpha}(p_{1\alpha} + q_{1\alpha}) \leq m^2 + A_n$$

A_n vérifiant :

$$(A_n - A_{n-1})^2 = \frac{\lambda_2 - m^2}{4(\lambda_2 + m^2)} (A_{n-1} - \lambda_2)(A_{n-1} + m^2) > \xi(A_{n-1})^2$$

ξ étant un nombre positif, ce qui entraîne :

$$A_n > (1 + \sqrt{\xi})A_{n-1}$$

La suite A_n , minorée par une progression géométrique, est divergente. Nous avons donc montré que $v(p) \neq 0$ pour tout $p \in \Omega_{mx}$ vérifiant :

$$(6.9) \quad m^2 + \lambda_1 \leq p^{\alpha}(p_{1\alpha} + q_{1\alpha})$$

Pour montrer que $v(p) \neq 0$ pour tout $p \in \Omega_{mx}$ vérifiant :

$$(6.10) \quad m^2 + \lambda_1 > p^{\alpha}(p_{1\alpha} + q_{1\alpha})$$

il suffit de reprendre tout le raisonnement en remplaçant les vecteurs p_1 et q_1 par deux nouveaux vecteurs pour lesquels v est non nul en vertu de ce qui

précède, suffisamment éloignés des vecteurs p_1 et q_1 initiaux pour que les vecteurs p vérifiant (6.10) avec les anciens vecteurs p_1 et q_1 , vérifient l'inégalité opposée (6.9) avec les nouveaux. Le lemme 2 est donc établi.

LEMME 3. — La condition (6.4) est superflue.

Pour établir ce lemme, nous allons montrer que si p, q, p' et q' sont des vecteurs de Ω_{mx} vérifiant (6.3) mais non (6.4) il est possible de trouver des vecteurs r et s de Ω_{mx} tels que :

$$(6.11) \quad \begin{aligned} p^\alpha r_\alpha &= \lambda_1 \\ q^\alpha s_\alpha &= \lambda_1 \end{aligned}$$

$$(6.12) \quad \begin{aligned} p + r &= p' + s \\ q + s &= q' + r \end{aligned}$$

Une fois ceci établi, les systèmes de vecteurs (p, r, p', s) et (q, s, q', r) vérifiant (6.4), nous avons :

$$v(p)v(r) = v(p')v(s)$$

$$v(q)v(s) = v(q')v(r)$$

d'où (puisque d'après le lemme 2 $v(r)v(s) \neq 0$) :

$$v(p)v(q) = v(p')v(q').$$

Pour montrer l'existence des vecteurs r et s , raisonnons sur le sous-espace normal à $p + q$, qui n'est autre que l'espace euclidien à 3 dimensions. En projection, les vecteurs p et q sont représentés par deux points P et Q diamétralement opposés sur une sphère centrée à l'origine, de rayon :

$$\rho = m \operatorname{sh} \psi$$

si nous posons

$$p^\alpha q_\alpha = m^2 \operatorname{ch} 2\psi$$

S'ils existent, les vecteurs r et s sont représentés en projection par deux points R et S situés sur une sphère centrée à l'origine, de rayon :

$$\rho_1 = m \operatorname{sh} \varphi$$

φ pouvant être choisi arbitrairement entre certaines limites (précisées ci-dessous (6.13)). Soit θ l'angle (OP, OR). Nous avons d'après (6.11) :

$$p^\alpha r_\alpha = \lambda_1 = m^2 (\operatorname{ch} \psi \operatorname{ch} \varphi - \operatorname{sh} \psi \operatorname{sh} \varphi \cos \theta)$$

ce qui impose la valeur de θ , une fois φ choisi, pourvu que ce dernier soit choisi de façon telle que :

$$(6.13) \quad \text{ch}(\psi - \varphi) < \lambda_1 < \text{ch}(\psi + \varphi)$$

(nous excluons l'égalité afin que θ ne soit ni nul, ni égal à π).

R est donc situé sur le cercle (C_R) intersection de la sphère de rayon ρ_1 et du cône de révolution d'axe OP et de demi-angle au sommet θ . De même S est situé sur le cercle (C_S) intersection de cette sphère et du cône de révolution d'axe OQ et de demi-angle au sommet θ . Choisissons R arbitrairement sur (C_R) et soit T le milieu de PR. D'après (6.12), S est situé sur le cercle (C'_S) intersection de la sphère de rayon ρ_1 et du cône de révolution d'axe OT passant par R. Si (C_S) et (C'_S) se coupent, le point S existe et les vecteurs r et s représentés par les points R et S existent et satisfont (6.11) et (6.12), mais cependant pas pour des vecteurs p' et q' quelconques (puisque ceux-ci doivent être choisis en accord avec r et s). Nous verrons plus loin comment nous affranchir de cette restriction. Montrons qu'il est toujours possible de choisir φ et θ de façon telle que (C_S) et (C'_S) se coupent : cela est presque évident, puisque lorsque φ parcourt l'ensemble de valeurs possibles défini par (6.13) en croissant, θ parcourt l'intervalle $0 < \theta < \pi$ en croissant; le cercle C_S se déforme, en conservant OP pour axe, entre deux positions extrêmes réduites aux points P_1 et Q_1 où OP et OQ coupent la sphère de rayon ρ_1 ; le cercle (C'_S) se déforme entre deux positions extrêmes réduites aux points P_1 et Q_1 dans l'ordre inverse des positions extrêmes de (C_S) . Il existe donc certainement une plage de valeurs de φ pour lesquelles (C_S) et (C'_S) se coupent.

Nous avons donc montré que (6.2) était vérifié bien que p et q ne vérifient pas (6.4), mais pour un choix particulier de p' et q' (déterminés en accord avec r et s). Pour s'affranchir de cette dernière restriction, il suffit d'utiliser le lemme 1. Ceci établit le lemme 3, et du même coup le théorème 7.

6.2. SOLUTIONS DE L'ÉQUATION FONCTIONNELLE

THÉORÈME 8. — Les seules solutions continues par rapport à p de l'équation fonctionnelle (6.2) sont de la forme :

$$(6.13) \quad v(p) = a \exp(-\lambda_x p^x)$$

a étant un scalaire, λ_x un vecteur covariant attaché au point x de V_4 considéré.

Démonstration. — Ce théorème, analogue à celui démontré par Grad [10] pour l'équation de Boltzmann non relativiste, a été établi par Chernikov [5]. Nous présentons ici une démonstration nouvelle.

La fonction, identiquement nulle, solution de (6.2), est bien de la forme (6.13) (avec $a = 0$). Si v n'est pas identiquement nulle, elle n'est, d'après le lemme 2 nulle en aucun point de Ω_{mx} . Nous supposons que c'est le cas.

Grâce à une série de lemmes qui généralisent (6.2), nous allons montrer qu'on peut étendre le domaine de définition de v (initialement Ω_{mx}) à tout l'espace tangent T_x , en lui conservant une propriété analogue à (6.2). Le théorème 8 s'établira alors très simplement.

LEMME 4. — (6.2) équivaut à :

$$(6.14) \quad \left\{ \begin{array}{l} v(p_1)v(p_2)\dots v(p_n) = v(q_1)v(q_2)\dots v(q_n) \\ \text{pour tous } p_1\dots p_n, q_1\dots q_n \in \Omega_{mx} \text{ vérifiant } p_1 + \dots + p_n = q_1 + \dots + q_n \end{array} \right.$$

n entier quelconque ≥ 2 .

En effet, (6.14) a pour conséquence immédiate (6.2). Inversement, démontrons que (6.2) entraîne (6.14) par récurrence. Supposons (6.14) vrai, n ayant une certaine valeur. Soient $p_1, \dots, p_{n+1}, q_1, \dots, q_{n+1} \in \Omega_{mx}$ vérifiant :

$$(6.15) \quad p_1 + \dots + p_{n+1} = q_1 + \dots + q_{n+1}$$

Nous voulons montrer :

$$(6.16) \quad v(p_1) \dots v(p_{n+1}) = v(q_1) \dots v(q_{n+1})$$

Sans nuire à la généralité, nous pouvons supposer :

$$(6.17) \quad p_{i\alpha}(p_1^\alpha + \dots + p_{n+1}^\alpha) = q_{j\alpha}(q_1^\alpha + \dots + q_{n+1}^\alpha) = \lambda$$

λ étant indépendant de i et de j . En effet, la valeur moyenne des produits scalaires (6.17), évidemment égale à λ , est :

$$\frac{1}{n+1}(p_{1\alpha} + \dots + p_{n+1\alpha})(p_1^\alpha + \dots + p_{n+1}^\alpha)$$

S'il existe un indice i_1 pour lequel le produit scalaire au premier membre de (6.17) est supérieur à λ , il existe nécessairement un autre indice i_2 pour

lequel il est inférieur à cette valeur. Remplaçons P_{i1} et p_{i2} par deux nouveaux vecteurs de Ω_{mx} , p'_{i1} et p'_{i2} , tels que :

$$p_{i1} + p_{i2} = p'_{i1} + p'_{i2}$$

Il est toujours possible de choisir p'_{i1} et p'_{i2} de façon telle que

$$p'_{i1\alpha}(p_1^\alpha + \dots + p_{n+1}^\alpha) = \lambda$$

Mais comme, d'après (6.2) :

$$v(p_{i1})v(p_{i2}) = v(p'_{i1})v(p'_{i2})$$

la substitution de p'_{i1} et p'_{i2} à p_{i1} et p_{i2} n'altère pas la valeur du premier membre de (6.16). En répétant $n + 1$ fois cette opération, et en l'effectuant également sur les vecteurs q , nous voyons qu'il est toujours possible de se ramener au cas où (6.17) est vérifié.

Raisonnons maintenant sur les projections des vecteurs $p_1, \dots, p_{n+1}, q_1, \dots, q_{n+1}$, sur le sous-espace normal à $p_1 + \dots + p_{n+1}$. Ce sont des points $P_1, \dots, P_{n+1}, Q_1, \dots, Q_{n+1}$ situés sur une même sphère centrée à l'origine, le barycentre des points P et des points Q étant l'origine.

Le même raisonnement que celui présenté ci-dessus permet de montrer qu'on peut, sans perte de généralité, supposer les points P_i et Q_j tous situés sur un même grand cercle de la sphère. Raisonnons donc désormais sur ce cercle. Prenons un quelconque des points Q_j , par exemple Q_1 . Soient P_i et P_j les deux points P les plus proches de Q_1 , de part et d'autre de ce point. L'arc de cercle $P_i P_j$ est nécessairement $< \pi$, car $n + 1 > 2$, aussi dans le cas contraire le barycentre des points P ne saurait être le centre du cercle. Il existe nécessairement au moins un point Q_k extérieur à cet arc, sans quoi le barycentre des points Q ne saurait être le centre du cercle. Nous avons donc montré l'existence de quatre points P_i, P_j, Q_1, Q_k tels que Q_1 soit sur l'arc $P_i P_j$ et Q_k extérieur à cet arc. Or, il est facile de voir que cette disposition entraîne l'existence de trois vecteurs r, s, t de Ω_{mx} tels que :

$$p_i + p_j = r + t$$

$$q_1 + q_k = s + t$$

ce qui, d'après (6.2), entraîne :

$$v(p_i)v(p_j) = v(r)v(t)$$

$$v(q_1)v(q_k) = v(s)v(t)$$

Substituons ces valeurs dans les deux membres de (6.16), divisons par $v(t)$ et appliquons (6.14) aux $2n$ vecteurs $p_1 \dots p_{i-1}, p_{i+1} \dots p_{j-1}, p_{j+1} \dots p_{n+1}$ r et $q_2 \dots q_{k-1}, q_{k+1} \dots q_{n+1}$ s restants : nous voyons que (6.16) est vérifié.

LEMME 5. — Il existe un scalaire a strictement positif tel que, quels que soient $p_1 \dots p_m$ et $q_1 \dots q_n \in \Omega_{mx}$ vérifiant :

$$(6.18) \quad p_1 + \dots + p_m = q_1 + \dots + q_n$$

(m et n entiers > 1), nous ayons :

$$(6.19) \quad \frac{1}{a^m} v(p_1) \dots v(p_m) = \frac{1}{a^n} v(q_1) \dots v(q_n)$$

Soit en effet un vecteur $p \in \Omega_{mx}$. Nous pouvons d'une infinité de façons trouver deux vecteurs r et s de Ω_{mx} tels que :

$$r + s = p$$

Posons :

$$v(r)v(s) = av(p)$$

a est strictement positif, puisque v l'est. a est de plus indépendant des vecteurs p, r, s . Si, en effet, pour un autre choix p', r', s' de ces vecteurs, nous avons :

$$v(r')v(s') = a'v(p')$$

cela entraîne

$$a'v(p')v(r)v(s) = av(p)v(r')v(s')$$

Mais les vecteurs p', r, s, p, r', s' vérifiant

$$p' + r + s = p + r' + s'$$

le lemme 4 montre que $a' = a$.

En répétant cette opération n fois pour les vecteurs p_i et m fois pour les vecteurs q_j , nous voyons que le lemme 5 est une conséquence du lemme 4.

La démonstration du théorème 8 est maintenant très simple. Posons :

$$(6.20) \quad \text{Log} \frac{v(p)}{a} = F(p)$$

$F(p)$ est définie sur Ω_{mx} , mais il est facile d'étendre sa définition à l'ensemble, dense dans T_x , de vecteurs p de la forme :

$$(6.21) \quad p = \frac{m_1}{n_1} p_1 + \dots + \frac{m_n}{n_n} p_n$$

où les m_i, n_i sont des entiers de signe quelconque et les p_i des vecteurs de Ω_{mx} , en posant :

$$(6.22) \quad F(p) = \sum_i \frac{m_i}{n_i} F(p_i)$$

Cette définition est cohérente, car les lemmes 4 et 5 montrent que si p peut être exprimé de deux façons différentes sous la forme (6.21), la valeur attribuée par (6.22) à $F(p)$ est indépendante du choix de l'expression de p .

D'autre part, si $v(p)$ est continue sur Ω_{mx} , nous pouvons par continuité étendre la définition de $F(p)$ à T_x entier. La propriété (6.22) reste valable à la limite même si les $\frac{m_i}{n_i}$ ne sont plus des fractions rationnelles. $F(p)$ est donc une forme linéaire sur T_x , qui s'exprime par un vecteur covariant λ_α :

$$F(p) = - \lambda_\alpha p^\alpha$$

En revenant à la fonction v , nous voyons que celle-ci est bien de la forme (6.13).

6.3. FONCTION DE DISTRIBUTION DE MAXWELL RELATIVISTE

v étant positive et intégrable sur Ω_{mx} , a est positif et λ_α est un vecteur de genre temps dirigé vers l'avenir. Nous poserons :

$$(6.23) \quad \lambda_\alpha = b U_\alpha \quad b > 0$$

$$(6.24) \quad U_\alpha U^\alpha = 1$$

La fonction de distribution :

$$(6.25) \quad v(p) = a \exp(-b U_\alpha p^\alpha)$$

est appelée fonction de distribution de Maxwell relativiste. Elle a été obtenue pour la première fois par Jüttner [12].

7. Équilibre thermodynamique local d'un gaz à plusieurs constituants.

Les résultats du paragraphe précédent s'étendent sans difficulté au cas d'un gaz comportant plusieurs espèces de particules, susceptibles de collisions élastiques ou inélastiques, de fusion et de fission.

7.1. ÉQUATIONS FONCTIONNELLES VÉRIFIÉES PAR LES FONCTIONS DE DISTRIBUTION D'ÉQUILIBRE

THÉOREME 9. — Soient i, j, k, l, m, n, r des indices désignant certaines espèces de particules, susceptibles de la collision inélastique, $i + j \rightleftharpoons k + l$ et des fusion et fission $m \rightleftharpoons n + r$. Sous les hypothèses suivantes :

— $A_{ij}^{kl}(p_i, p_j, n)$ est non nul dans deux voisinages, respectivement des systèmes de valeurs des variables (p_{i1}, p_{j1}, n_1) et (p_{i2}, p_{j2}, n_2) avec :

$$p_{i1\alpha} p_{j1}^\alpha = \lambda_1 > m_i m_j \quad ; \quad p_{i2\alpha} p_{j2}^\alpha = \lambda_2 > m_i m_j \quad ; \quad \lambda_1 \neq \lambda_2$$

$$p_{i1\alpha} n_{1\alpha} = \mu_1 \neq 0 \quad ; \quad p_{i2\alpha} n_{2\alpha} = \mu_2 \neq 0$$

— $B_m^{n,r}$ (qui, d'après la propriété 7 du paragraphe 4.2 est une constante non négative) est non nulle.

— Les fonctions de distribution $v_i(p_i), v_j(p_j), v_k(p_k), v_l(p_l), v_m(p_m), v_n(p_n)$, sont continues; $v_r(p_r)$ est non nulle au moins en un point de $\Omega_{mr\alpha}$; $v_i(p_i)$ et $v_j(p_j)$ vérifient :

$$v_i(p_{i1}) \neq 0 \quad v_i(p_{i2}) \neq 0 \quad v_j(p_{j1}) \neq 0 \quad v_j(p_{j2}) \neq 0$$

les expressions (qui sont des termes du second membre de (5.17)) :

$$(7.1) \quad -\frac{1}{4} \int \text{Log} \frac{v_i(p_i) v_j(p_j)}{v_k(p_k) v_l(p_l)} [v_k(p_k) v_l(p_l) - v_i(p_i) v_j(p_j)]$$

$$(7.2) \quad -\frac{1}{2} \text{Log} \frac{v_n(p_n) v_r(p_r)}{\eta v_m(p_m)} [\eta v_m(p_m) - v_n(p_n) v_r(p_r)] B_m^{n,r} \omega_m \wedge \varepsilon$$

sont nulles (au point x considéré de V_4) si et seulement si, respectivement :

$$(7.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{pour tous} \\ \text{vérifiant} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} v_k(p_k) v_l(p_l) - v_i(p_i) v_j(p_j) = 0 \\ p_i \in \Omega_{m_i x}, \quad p_j \in \Omega_{m_j x}, \quad p_k \in \Omega_{m_k x}, \quad p_l \in \Omega_{m_l x}, \\ p_i + p_j = p_k + p_l \end{array}$$

$$(7.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{pour tous} \\ \text{vérifiant} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} v_n(p_n)v_r(p_r) = \eta v_m(p_m) \\ p_m \in \Omega_{m,x}, \quad p_n \in \Omega_{n,x}, \quad p_r \in \Omega_{r,x}, \\ p_m = p_n + p_r \end{array}$$

Démonstration. — Le fait que la nullité de (7.1) équivaut à (7.3) se démontre exactement comme le théorème 7. Quant au fait que la nullité de (7.2) équivaut à (7.4), c'est une évidence puisque $B_m^{n,r}$ est une constante non nulle.

THÉORÈME 10. — Sous les hypothèses du théorème 9, (7.3) a pour conséquence :

$$(7.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{pour tous} \\ \text{vérifiant} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} v_i(p)v_i(q) = v_i(p')v_i(q') \\ p, q, p', q' \in \Omega_{m,x} \\ p + q = p' + q' \end{array}$$

et des équations analogues pour v_j, v_k, v_l .

Démonstration. — Le lemme 2 se généralise sans peine et permet de montrer que les fonctions de distribution considérées sont partout strictement positives. Soient p_i, p'_i, p_j, p'_j des vecteurs respectivement de $\Omega_{m,x}$ et $\Omega_{j,x}$, vérifiant :

$$(7.6) \quad p_i + p_j = p'_i + p'_j$$

Si p_i et p_j vérifient la condition (3.36) (avec $\lambda^2 = (p_i^2 + p_j^2)(p_{ix} + p_{jx})$) il existe des vecteurs p_k et p_l respectivement de $\Omega_{k,x}$ et $\Omega_{l,x}$ tels que :

$$p_i + p_j = p'_i + p'_j = p_k + p_l$$

Nous pouvons appliquer (7.3) aux systèmes de vecteurs (p_i, p_j, p_k, p_l) et (p'_i, p'_j, p_k, p_l) et nous en déduisons :

$$(7.7) \quad v_i(p_i)v_j(p_j) = v_i(p'_i)v_j(p'_j)$$

Si p_i et p_j ne vérifient pas (3.36), une démonstration identique à celle du lemme 3 permet de montrer que (7.7) est toujours vrai.

Pour montrer que (7.7) entraîne (7.5), considérons des vecteurs p, q, p', q' de $\Omega_{m,x}$ vérifiant :

$$p + q = p' + q'$$

Une démonstration identique à celle du lemme 3 permet de montrer

qu'il existe, au moins pour un choix convenable de p' et q' , des vecteurs p_j et p'_j de Ω_{m_jx} tels que

$$p + p_j = p' + p'_j$$

$$q + p'_j = q' + p_j$$

D'après (7.7) :

$$v_i(p)v_j(p_j) = v_i(p')v_j(p'_j)$$

$$v_i(q)v_j(p'_j) = v_i(q')v_j(p_j)$$

En faisant le produit membre à membre de ces égalités, et en divisant par $v_j(p_j)$ et $v_j(p'_j)$ (qui comme nous l'avons vu est non nul), nous obtenons (7.5). Enfin, pour nous affranchir de la restriction sur le choix de p' et q' , il suffit d'appliquer le lemme 1.

THÉORÈME 11. — Sous les hypothèses du théorème 9, (7.4) a les deux conséquences suivantes :

— v_m est non nulle sur tout $\Omega_{m_m x}$ si et seulement si v_n et v_r le sont aussi, respectivement sur tout $\Omega_{m_n x}$ et $\Omega_{m_r x}$.

— Si c'est le cas, ces trois fonctions de distribution vérifient chacune une équation fonctionnelle de la forme (7.5).

Démonstration. — Le premier point à démontrer est une conséquence immédiate de (7.4). La démonstration du second est une simple adaptation de celle du théorème 10.

Remarque. — Le théorème 11 est moins général que le théorème 10, car il nécessite l'hypothèse de la non-nullité de v_m sur tout $\Omega_{m_m x}$ (alors que l'hypothèse de la non-nullité de v_i , v_j , en quelques points seulement de $\Omega_{m_i x}$ et $\Omega_{m_j x}$ suffit pour le théorème 10). Pour les applications, cela importe peu, car une espèce de particules susceptible de fission, est généralement susceptible aussi de collisions élastiques ou inélastiques avec d'autres espèces de particules, de sorte qu'on pourra lui appliquer indifféremment l'un ou l'autre de ces théorèmes.

7.2. LOI D'ACTION DE MASSE

Les résultats du paragraphe précédent et le théorème 8 permettent de déterminer facilement la forme des fonctions de distribution en un point x de V_4 où le gaz est localement en équilibre thermodynamique.

Nous supposons que deux espèces de particules i et j présentes dans le gaz peuvent interagir, soit directement, soit indirectement par collision avec des particules d'autres espèces présentes. Si ce n'était pas le cas, on pourrait distinguer plusieurs composantes dans le gaz évoluant indépendamment, les considérations de ce paragraphe s'appliquant à chacune d'entre elles.

D'après le théorème 8, les fonctions de distribution v_i sont de la forme :

$$(7.8) \quad v_i(p) = a_i \exp(-b U_\alpha p^\alpha)$$

le scalaire positif b et le vecteur unitaire U_α étant indépendants de l'espèce de particules considérées (afin de satisfaire (7.3), (7.4), (7.7)).

D'autre part, il existe entre les a_i les relations :

$$(7.9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{si les particules d'espèce } i, j, k, l \text{ sont susceptibles de la collision} \\ i + j \rightleftharpoons k + l, \text{ alors à l'équilibre thermodynamique :} \\ a_i a_j = a_k a_l \end{array} \right.$$

$$(7.10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{si les particules } i, k, l \text{ sont susceptibles de fusion et fission, selon :} \\ i \rightleftharpoons k + l, \text{ alors à l'équilibre thermodynamique :} \\ \eta a_i = a_k a_l \end{array} \right.$$

Les propriétés (7.9) et (7.10) constituent la version relativiste de la classique loi d'action de masse. Nous verrons au paragraphe 9.3 qu'il est possible de les exprimer sous une autre forme en faisant intervenir les potentiels thermodynamiques.

8. Propriétés variationnelles des fonctions de distribution de Maxwell.

L'expression de la fonction de distribution de Maxwell relativiste s'obtient facilement grâce au calcul des variations, comme extrémale d'une certaine intégrale : c'est ainsi que Synge [I] l'établit. Nous allons généraliser ce raisonnement et montrer qu'il conduit non seulement à l'expression des fonctions de distribution, mais aux conditions d'équilibre (7.9) et (7.10) et à d'intéressants renseignements concernant l'équilibre thermodynamique dans un champ de gravitation stationnaire.

Pour alléger l'écriture, considérons un gaz comportant trois sortes de particules indicées a, b, c , susceptibles de fusion et fission selon

$$(8.1) \quad a \rightleftharpoons b + c$$

L'étude du cas général se ferait suivant la même méthode.

D'après les théorèmes 4, 5, 6 :

$$(8.2) \quad \nabla_\alpha (N_a^\alpha + N_b^\alpha) = 0$$

$$(8.3) \quad \nabla_\alpha (N_a^\alpha + N_c^\alpha) = 0$$

$$(8.4) \quad \nabla_\beta T^{\alpha\beta} = \nabla_\beta (T_a^{\alpha\beta} + T_b^{\alpha\beta} + T_c^{\alpha\beta}) = 0$$

$$(8.5) \quad \nabla_\beta S^\beta = \nabla_\beta (S_a^\beta + S_b^\beta + S_c^\beta) \geq 0$$

Supposons le gaz dans un champ de gravitation stationnaire et choisissons un système de coordonnées dans lequel les composantes $g_{\alpha\beta}$ du tenseur métrique sont indépendantes de x^0 . Le champ de vecteurs de composantes :

$$(8.6) \quad \lambda^0 = \lambda, \text{ constante}, \quad \lambda^i = 0 \quad (i = 1, 2, 3)$$

satisfait l'équation de Killing (Lichnerowicz [14]) :

$$(8.7) \quad \nabla_\alpha \lambda_\beta + \nabla_\beta \lambda_\alpha = 0$$

L'équation (8.4) a donc pour conséquence :

$$(8.8) \quad \nabla_\beta (\lambda_\alpha T^{\alpha\beta}) = 0$$

Supposons que les fonctions de distribution v_a, v_b, v_c tendent suffisamment vite vers zéro lorsque x^1, x^2 ou x^3 tendent vers l'infini pour assurer la convergence des intégrales ci-dessous. En intégrant les équations (8.2) à (8.5) dans la partie de V_4 comprise entre deux sections $x^0 = \text{constante}$, et en appliquant la formule de Stokes, nous obtenons :

$$(8.9) \quad \sum_{i=a,b} \int \sqrt{-g} v_i p^0 dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge \omega_i = A + B$$

$$(8.10) \quad \sum_{i=a,c} \int \sqrt{-g} v_i p^0 dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge \omega_i = A + C$$

$$(8.11) \quad \sum_{i=a,b,c} \int \sqrt{-g} v_i p^\alpha \lambda_\alpha dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge \omega_i = E$$

$$(8.12) \quad \sum_{i=a,b,c} \int \sqrt{-g} v_i \text{Log} \frac{v_i}{\zeta} p^0 dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge \omega_i = S$$

où $A + B$, $A + C$ et E sont des constantes, et S une fonction croissante de x^0 . Jaynes [11] a montré, en thermodynamique relativiste, que S est,

au signe près, une mesure de l'information que l'on possède sur l'état du système. Il est donc naturel de chercher les fonctions de distribution v_a , v_b , v_c qui rendent S maximum, compte tenu des liaisons (8.9) à (8.11) car il y a lieu de penser que ce sont elles qui s'établiront au bout d'un temps suffisamment long (c'est-à-dire pour x^0 assez grand). Le calcul des variations donne :

$$(8.13) \quad v_a = a_a \exp(-\mu \lambda_a p^2)$$

et deux expressions analogues pour v_b et v_c , avec

$$(8.14) \quad \begin{aligned} a_a &= \zeta \exp(-1 - \beta - \gamma) \\ a_b &= \zeta \exp(-1 - \beta) \\ a_c &= \zeta \exp(-1 - \gamma) \end{aligned}$$

μ , β et γ sont des multiplicateurs de Lagrange. Nous voyons que les fonctions de distribution (8.13) sont bien de Maxwell et que d'après (8.14), la condition d'équilibre (7.10) est bien satisfaite par a_a , a_b , a_c .

Nous verrons dans le paragraphe suivant que $\mu \lambda_a$ est lié à la température T et a_i au potentiel thermodynamique relativiste γ_i par :

$$(8.15) \quad \mu^2 \lambda^a \lambda_a = \frac{c^4}{k^2 T^2}$$

$$(8.16) \quad a_i = \eta \exp\left(\frac{m_i c^2}{kT} \gamma_i\right) \quad (i = a, b \text{ ou } c)$$

μ et a_i sont indépendants de x^1 , x^2 , x^3 , tandis que $\lambda^a \lambda_a$ vaut d'après (8.6) :

$$(8.17) \quad \lambda^a \lambda_a = g_{00} \lambda^2$$

où λ est indépendant de x^1 , x^2 , x^3 . (10.15) et (10.16) nous donnent donc les conditions d'équilibre thermodynamique dans un champ de gravitation stationnaire :

$$(8.18) \quad \begin{aligned} \sqrt{g_{00}} T &= \text{constante} \\ \sqrt{g_{00}} \gamma_i &= \text{constante} \quad (i = a, b \text{ ou } c) \end{aligned}$$

résultats conformes à ceux établis par Landau et Lifchitz [13] par une autre méthode.

9. Fonctions thermodynamiques du gaz relativiste à l'équilibre.

Dans ce paragraphe, nous considérons, parmi les constituants du gaz, seulement les particules de masse non nulle et nous raisonnons en un point x de V_4 où le gaz est localement en équilibre. Les fonctions de distribution sont alors de la forme de Maxwell (7.8) avec des coefficients obéissant à (7.9) et (7.10). A partir de celles-ci, il est possible de définir, comme en théorie cinétique non relativiste, les fonctions thermodynamiques du gaz. Ceci a été fait notamment par Synge [23]. Rappelons que, du point de vue que nous adoptons, toutes les fonctions thermodynamiques d'un gaz (telles que température, énergie interne, entropie...) doivent nécessairement être évaluées dans le repère par rapport auquel le gaz est localement au repos et sont, par conséquent, des scalaires. Nous restons donc en dehors des controverses relatives aux éventuelles lois de transformation des fonctions thermodynamiques lors d'un changement de repère (Arzeliès [1], Marchal [18] notamment).

9.1. VITESSE DU GAZ, TEMPÉRATURE

La vitesse du gaz est, par définition, le vecteur unitaire U^a (dirigé vers l'avenir) qui figure dans l'expression (7.8) des fonctions de distribution de Maxwell. La température T du gaz est, par définition, liée au coefficient b qui figure également dans cette expression par :

$$(9.1) \quad b = \frac{c^2}{kT}$$

où k est la constante de Boltzmann. Nous emploierons souvent, au lieu de la température T , les quantités :

$$(9.2) \quad \xi_i = \frac{m_i c^2}{kT} = m_i b$$

qui dépendent (comme la masse d'une particule m_i) de l'espèce de particules considérée.

9.2. LES MOMENTS DE LA FONCTION DE DISTRIBUTION DE MAXWELL

Le moment d'ordre n de la fonction de distribution v_i est par définition :

$$\int_{\Omega_{m_i} x} v_i p^{\alpha_1} \dots p^{\alpha_m} \omega_i$$

La donnée des moments d'ordre 1 et 2 d'une fonction de distribution de Maxwell v_i suffit pour déterminer a_i , U^a et b , donc pour déterminer complètement v_i . Synge [23] a montré comment calculer ceux-ci et Pichon [22] a indiqué une formule générale donnant le moment d'ordre n . Il est d'ailleurs facile d'établir celle-ci en utilisant les expressions (3.8) des composantes de p^a dans un repère orthonormé (l'axe des x^0 étant parallèle à U^a) et l'expression (3.9) de ω_i : il suffit de remarquer que :

$$(9.3) \quad \int_{\Omega_{m_i, x}} v_i p^{a_1} \dots p^{a_n} \omega_i = (-1)^n m_i^n a_i \frac{\partial^{(n)} \Phi}{\partial (\xi_i U_{a_1}) \dots \partial (\xi_i U_{a_n})}$$

avec :

$$\begin{aligned} \Phi &= \int_{\Omega_{m_i, x}} \exp(-b U_a p^a) \omega_i \\ &= 4\pi m_i^2 \int_0^\infty \text{sh}^2 \psi \exp(-\xi_i \text{ch} \psi) d\psi \\ (9.4) \quad &= 4\pi m_i^2 \frac{K_1(\xi_i)}{\xi_i} \end{aligned}$$

d'après une formule classique (Watson [25]). $K_1(\xi_i)$ désigne la fonction de Bessel modifiée de seconde espèce d'indice 1, de la variable ξ_i et de même $K_n(\xi_i)$ désignera la fonction de Bessel modifiée de seconde espèce d'indice n . Il est facile d'effectuer le calcul des dérivées figurant dans le second membre de (9.3) grâce à la formule classique :

$$\frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \left(\frac{K_n(\xi)}{\xi^n} \right) = - \frac{K_{n+1}(\xi)}{\xi^{n+1}}$$

Nous obtenons ainsi :

$$(9.5) \quad \int_{\Omega_{m_i, x}} v_i p^{a_1} \dots p^{a_n} \omega_i = 4\pi m_i^{n+2} a_i \sum_{l=0}^{E(\frac{n}{2})} (-1)^l \frac{K_{n+1-l}(\xi_i)}{\xi_i^{l+1}} [(n-2l)U, lg]^{a_1 \dots a_n}$$

$E(\frac{n}{2})$ désignant le plus grand entier inférieur ou égal à $\frac{n}{2}$ et le symbole $[(n-2l)U, lg]^{a_1 \dots a_n}$ représentant le tenseur symétrique formé par produit tensoriel de $(n-2l)$ fois le vecteur U^a et l fois le tenseur g^{ab} et comportant

le nombre minimum de termes $\frac{n!}{2^l l! (n-2l)!}$ nécessaire pour assurer la symétrie. Ainsi, par exemple :

$$[2U, 1g]^{\alpha\beta\gamma\delta} = U^\alpha U^\beta g^{\gamma\delta} + U^\alpha U^\gamma g^{\beta\delta} + U^\alpha U^\delta g^{\beta\gamma} \\ + U^\beta U^\gamma g^{\alpha\delta} + U^\beta U^\delta g^{\alpha\gamma} + U^\gamma U^\delta g^{\alpha\beta}$$

Des fonctions thermodynamiques simples sont liées aux moments d'ordre 1 et 2 de v_i . Posons en effet :

$$(9.6) \quad N_i^\alpha = \int_{\Omega_{m_i x}} v_i p^\alpha \omega_i = 4\pi m_i^3 a_i \frac{K_2(\xi_i)}{\xi_i} U^\alpha = \frac{rc_i}{m_i} U^\alpha$$

$$(9.7) \quad \left\{ \begin{aligned} T_i^{\alpha\beta} &= \int_{\Omega_{m_i x}} v_i p^\alpha p^\beta \omega_i = \frac{rc_i \xi_i}{K_2(\xi_i)} \left[\frac{K_3(\xi_i)}{\xi_i} U^\alpha U^\beta - \frac{K_2(\xi_i)}{\xi_i^2} g^{\alpha\beta} \right] \\ &= \left(\rho_i + \frac{p_i}{c^2} \right) U^\alpha U^\beta - \frac{p_i}{c^2} g^{\alpha\beta} \end{aligned} \right.$$

r est, par définition, la masse volumique, c_i la concentration en masse en constituant i , ρ_i l'énergie volumique partielle et p_i la pression partielle de ce constituant. Les concentrations vérifient

$$(9.8) \quad \sum_i c_i = 1$$

p_i , ρ_i et toutes les autres fonctions thermodynamiques peuvent être exprimées au moyen des fonctions thermodynamiques r , c_i et T (ou (ξ_i)). Ainsi :

$$(9.9) \quad \rho_i = rc_i \left[\frac{K_3(\xi_i)}{K_2(\xi_i)} - \frac{1}{\xi_i} \right]$$

$$(9.10) \quad p_i = \frac{c^2 rc_i}{\xi_i} = \frac{rc_i}{m_i} kT$$

(cette dernière formule est identique à la formule non relativiste correspondante).

L'énergie volumique totale ρ et la pression p sont :

$$(9.11) \quad \rho = \sum_i \rho_i$$

$$(9.12) \quad p = \sum_i p_i$$

L'énergie volumique totale ρ est liée à l'énergie interne spécifique ε par :

$$(9.13) \quad \rho = r \left(1 + \frac{\varepsilon}{c^2} \right)$$

9.3. ENTROPIE SPÉCIFIQUE, POTENTIELS THERMODYNAMIQUES

Les autres fonctions thermodynamiques du gaz s'expriment au moyen de celles déjà définies par les mêmes formules qu'en thermodynamique classique. Ainsi l'enthalpie spécifique i :

$$(9.14) \quad i = \varepsilon + \frac{p}{r}$$

Nous utiliserons plutôt l'indice du fluide f , mieux adapté que i à la thermodynamique relativiste (Lichnerowicz [14]) :

$$(9.15) \quad f = 1 + \frac{i}{c^2} = \frac{1}{r} \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right)$$

L'entropie spécifique s , les potentiels thermodynamiques g_i , sont tels que :

$$(9.16) \quad Tds = d\varepsilon + pd\left(\frac{1}{r}\right) - \sum_i g_i dc_i$$

$$(9.17) \quad g = \sum_i c_i g_i = \varepsilon + \frac{p}{r} - Ts$$

Remarquons que ces deux relations permettent de définir également T , à un facteur près : il est facile de voir que cette définition est en accord avec celle déjà donnée au paragraphe 9.1.

La relation (9.16) laisse une constante additive indéterminée dans l'entropie spécifique. Une autre définition possible de l'entropie spécifique permet de préciser sa valeur. Posons en effet :

$$(9.18) \quad rs = -k \sum_i \int_{\Omega_{m_i x}} v_i \text{Log} \frac{v_i}{\zeta} p^x U_a \omega_i$$

définition qui justifie la dénomination du vecteur flux d'entropie S_i introduit au paragraphe 5.3. Un calcul simple donne :

$$(9.19) \quad s = \sum_i c_i s_i = \sum_i \frac{kc_i}{m_i} \left[\xi_i \frac{K_3(\xi_i)}{K_2(\xi_i)} + \text{Log} \left(\frac{K_2(\xi_i)}{rc_i \xi_i} \cdot \frac{4\pi m_i^4 \zeta}{e} \right) \right]$$

Il est facile de voir que le résultat ainsi obtenu est en accord avec la précédente définition de s et précise la constante laissée indéterminée par celle-ci.

Or la formule classique de Sakur-Tétrode pour un gaz parfait (non relativiste) donne la valeur de la constante de l'entropie : pour un gaz à un seul constituant par exemple :

$$(9.20) \quad s = \frac{k}{m} \text{Log} \left[\frac{2\pi k T (me)^{\frac{5}{2}}}{h^2 r^{2/3}} \right]^{\frac{3}{2}}$$

(h désigne la constante de Planck, e la base des logarithmes népériens).

A la limite non relativiste (c'est-à-dire pour ξ_i grand), nous pouvons calculer l'expression asymptotique de (9.19) grâce à la formule classique :

$$(9.21) \quad K_n(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2\xi}} e^{-\xi} \left(1 + \frac{4n^2 - 1^2}{1! (8\xi)} + \frac{(4n^2 - 1^2)(4n^2 - 3^2)}{2! (8\xi^2)} + \dots \right)$$

Nous obtenons (pour un gaz à un seul constituant) :

$$(9.22) \quad s \sim \frac{k}{m} \text{Log} \left[\frac{2\pi k T m^{\frac{5}{2}} e \xi^{\frac{3}{2}}}{c^2 r^{2/3}} \right]^{\frac{3}{2}}$$

Le rapprochement de (9.20) et (9.22) permet de déterminer la constante ζ :

$$(9.23) \quad \zeta = \frac{c^3}{h^3} e$$

et, par suite, d'après (5.14), la constante η :

$$(9.24) \quad \eta = \frac{c^3}{h^3}$$

Il est alors facile de calculer les potentiels thermodynamiques g_i (en utilisant (9.16)) :

$$(9.25) \quad g_i = c^2 \left[\frac{1}{\xi_i} \text{Log} \left(\frac{a_i}{\eta} \right) - 1 \right]$$

Nous utiliserons plutôt, à la place de g_i , les « potentiels thermodynamiques relativistes » γ_i , mieux adaptés que les g_i au cas relativiste, définis par :

$$(9.26) \quad \gamma_i = 1 + \frac{g_i}{c^2}$$

et nous poserons :

$$(9.27) \quad \gamma = \sum_i c_i \gamma_i = f - \frac{Ts}{c^2}$$

Les conditions d'équilibre (7.9) et (7.10) qui correspondent à la loi classique d'action de masse, s'écrivent alors :

$$(9.28) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{si les particules d'espèces } i, j, k, \text{ sont susceptibles de la collision :} \\ \quad \quad \quad i + j \rightleftharpoons k + l, \\ \text{à l'équilibre thermodynamique :} \\ \quad \quad \quad m_i \gamma_i + m_j \gamma_j = m_k \gamma_k + m_l \gamma_l \end{array} \right.$$

$$(9.29) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{si les particules d'espèces } i, k, l, \text{ sont susceptibles de fusion et} \\ \text{fission selon :} \\ \quad \quad \quad i \rightleftharpoons k + l \\ \text{à l'équilibre thermodynamique :} \\ \quad \quad \quad m_i \gamma_i = m_k \gamma_k + m_l \gamma_l \end{array} \right.$$

10. Cas de particules de masse nulle : formule de Planck.

D'après ce qui précède, l'expression (7.8) de la fonction de distribution d'équilibre devrait convenir aussi pour les particules de masse nulle. Il est possible de développer à ce sujet des considérations très semblables à celles du paragraphe précédent, mais qui sont de peu d'intérêt physique car (7.8) n'est pas en accord avec la formule classique du rayonnement du corps noir de Planck.

Einstein [9] avait, dès 1917, remarqué cette difficulté, et proposé pour la lever l'hypothèse du phénomène d'émission stimulée (confirmée depuis de façon spectaculaire par le développement des lasers et masers). Nous allons reprendre en relativité le raisonnement initialement présenté par Einstein en physique statistique classique.

10.1. ÉMISSION STIMULÉE

Considérons un système comportant 3 sortes de particules, désignées par les indices n (« neutres »), e (« excitées ») et p (« photons »), susceptibles de fusion et fission suivant :

$$(10.1) \quad e \rightleftharpoons n + p$$

La condition d'équilibre thermodynamique (7.4) exprime simplement l'égalité des nombres probables de disparitions d'une part, de créations d'autre part de particules d'espèce e ayant l'impulsion p_e par unité de temps.

(10.2) $B\eta v_e(p_e)$ est le nombre probable de disparitions.

(10.3) $Bv_n(p_n)v_p(p_p)$ est le nombre probable de créations.

Nous allons modifier ces hypothèses en admettant l'existence du phénomène d'émission stimulée des photons :

(10.4) $Cv_e(p_e)v_p(p_p)$ est le nombre probable d'émissions stimulées.

Nous conservons (10.2) pour représenter le nombre probable d'émissions spontanées, mais nous remplaçons B par C dans (10.3), pour représenter le nombre d'absorptions de photons (car la mécanique quantique montre que le processus d'absorption est inverse de l'émission stimulée, non de l'émission spontanée), qui s'écrit :

$$(10.5) \quad Cv_n(p_n)v_p(p_p)$$

La condition d'équilibre qui remplace (7.4) s'écrit :

$$(10.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} v_e(p_e) \left[v_p(p_p) + \frac{B\eta}{C} \right] = v_n(p_n)v_p(p_p) \\ \text{pour tous } p_e \in \Omega_{mex}, \quad p_p \in \Omega_{ox}, \quad p_n \in \Omega_{mnx} \\ \text{vérifiant} \quad p_e = p_p + p_n \end{array} \right.$$

En posant :

$$(10.7) \quad v'_p = \frac{\eta v_p}{v_p + \frac{B\eta}{C}}$$

nous pouvons remettre cette condition sous une forme analogue à (7.4) et nous en déduisons donc :

$$v_n = a_n \exp(-bU_x p^x)$$

$$v_e = a_e \exp(-bU_x p^x)$$

$$v'_p = a'_p \exp(-bU_x p^x)$$

avec :

$$\eta a_e = a_n a'_p$$

donc :

$$v_p = \frac{B\eta}{C} \frac{1}{\frac{a_n}{a_e} \exp(bU_\alpha p^\alpha) - 1}$$

Supposons maintenant les particules d'espèces e et n susceptibles de collision suivant :

$$e + n \rightleftharpoons n + n$$

La condition d'équilibre (7.3) impose alors :

$$a_n = a_e$$

de sorte que :

$$(10.8) \quad v_p = \frac{B\eta}{C} \frac{1}{\exp(Ub_\alpha p^\alpha) - 1}$$

Cette expression, compte tenu de la valeur (9.24) de η , n'est autre que la formule du rayonnement du corps noir de Planck, à condition de choisir B et C de sorte que :

$$(10.9) \quad \frac{B}{C} = 2.$$

Plaçons-nous en effet dans un repère orthonormé, l'axe des x^0 étant parallèle à U^α et utilisons les expressions (3.10) et (3.11). L'énergie ε d'un photon est liée au paramètre l qui intervient dans ces expressions par :

$$\varepsilon = lc^2$$

donc le nombre de photons d'énergie comprise entre ε et $\varepsilon + d\varepsilon$ est, par unité de volume :

$$4\pi \frac{\varepsilon^2}{c^6} v_p d\varepsilon = 4\pi \frac{B}{C} \frac{\varepsilon^2}{c^3 h^3} \frac{d\varepsilon}{\exp\left(\frac{\varepsilon}{kT}\right) - 1}$$

qui est bien la formule de Planck si B et C vérifient (10.9).

10.2. EFFET RAMAN STIMULÉ

Il est possible de modifier de la même façon les hypothèses concernant les probabilités de collision inélastique d'un photon avec une particule matérielle (effet Raman).

$$(10.10) \quad e + p \rightleftharpoons n + p$$

en introduisant un « effet Raman stimulé », qui d'ailleurs a été découvert expérimentalement en 1962 par Woodbury et Ng [26]. La collision élastique d'un photon et d'une particule matérielle (effet Compton) est susceptible du même traitement, mais l'effet Compton stimulé n'a pas encore (à notre connaissance) été mis en évidence expérimentalement, sans doute parce qu'il est très faible.

Pour la collision (10.10) et la collision inverse, supposons qu'il existe, outre les probabilités de collisions « spontanées » déjà introduites au paragraphe 6.2 :

$$(10.11) \quad \begin{cases} A(p_e, p_p, n) v_e(p_e) v_p(p_p) \\ A(p_e, p_p, n) v_n(q_n) v_p(q_p) \end{cases}$$

des probabilités de collisions « stimulées » :

$$(10.12) \quad \begin{cases} \frac{1}{\eta} C(p_e, p_p, n) v_e(p_e) v_p(p_p) v_p(q_p) \\ \frac{1}{\eta} C(p_e, p_p, n) v_n(q_n) v_p(q_p) v_p(p_p) \end{cases}$$

Le coefficient η a été introduit pour des raisons d'homogénéité, afin que A et C aient même équation aux dimensions. Nous supposons que $A(p_e, p_p, n)$ et $C(p_e, p_p, n)$ sont des fonctions proportionnelles. A/C est donc une constante

La condition d'équilibre (7.3) doit être remplacée par :

$$(10.13) \quad \left\{ \begin{array}{l} v_e(p_e) \frac{v_p(p_p)}{v_p(p_p) + \frac{A\eta}{C}} = v_n(q_n) \frac{v_p(q_p)}{v_p(q_p) + \frac{A\eta}{C}} \\ \text{pour tous } p_e \in \Omega_{mex}, \quad p_n \in \Omega_{mnx}, \quad p_p \text{ et } q_p \in \Omega_{ox}, \\ \text{vérifiant} \quad p_e + p_p = q_n + q_p \end{array} \right.$$

Effectuons sur v_p la transformation (10.7) (B étant remplacé par A dans cette formule) : (10.13) s'exprime alors sous la même forme que (7.3) et conduit donc au résultat :

$$v'_p = a_p \exp(-bU_a p_p^z)$$

d'où

$$(10.14) \quad v_p = \frac{A\eta}{C} \frac{1}{\frac{\eta}{a_p} \exp(bU_a p_p^z) - 1}$$

Le coefficient a_p est resté indéterminé parce que les seules collisions (10.10) ne permettent pas au nombre de photons de varier. Il faut donc supposer l'existence, dans le gaz, d'une quatrième espèce de particules capables d'absorber les photons suivant le processus étudié dans le paragraphe 10.1. Nous voyons alors que a_p est nécessairement égal à η et que A et C doivent vérifier :

$$(10.15) \quad \frac{A}{C} = 2.$$

Il est facile d'utiliser les probabilités (10.2), (10.4), (10.5), (10.11) et (10.12) pour écrire l'équation de Boltzmann des photons, compte tenu de l'émission stimulée et de l'effet Raman stimulé. Cette équation sera utilisable même en dehors de l'équilibre thermodynamique.

Il est sans doute possible de généraliser les considérations ci-dessus afin de construire des équations de Boltzmann ayant des termes de collision modifiés, conduisant à l'équilibre thermodynamique aux fonctions de distribution quantiques de Bose-Einstein (pour les particules de masse non nulle) ou de Fermi-Dirac.

11. Les équations de Krook relativistes.

Certains auteurs, notamment Bhatnagar, Gross et Krook [2] ont proposé de substituer à l'équation de Boltzmann (non relativiste) une équation plus simple. En cherchant à établir un modèle cinétique relativiste simple, nous avons, par ailleurs, proposé une équation [19] qui n'est autre que l'adaptation à la relativité de celle proposée par Bhatnagar, Gross et Krook. Nous exposons ici le raisonnement qui conduit à cette équation, que nous pensons nouveau.

11.1. CAS D'UN GAZ DE PARTICULES TOUTES IDENTIQUES

Considérons un gaz de particules de masse $m \neq 0$ (il serait facile d'adapter le raisonnement au cas où $m = 0$). Nous supposons que le mouvement de ces particules obéit aux règles suivantes :

- en dehors des collisions, leurs trajectoires sont des géodésiques;
- la longueur d'arc de géodésique qui sépare un point x quelconque du point, situé dans le passé de x , où la particule a eu sa dernière collision, est une variable aléatoire obéissant à une loi de Poisson de valeur moyenne

$c\tau_M \cdot \tau_M$ dépend du point x considéré et de la valeur de l'impulsion p^α au point x ;

— immédiatement après une collision qui a lieu au point x , l'impulsion d'une particule est un vecteur aléatoire dont les valeurs probables sont données par une fonction de distribution de Maxwell $v_M(x, p)$. Celle-ci dépend du point x considéré et elle est liée à la valeur en ce point de la fonction de distribution vraie $v(x, p)$, par une relation qui sera précisée plus loin. $v_M(x, p)$ est appelée fonction de distribution de Maxwell « tangente » à $v(x, p)$.

Les deux dernières règles ci-dessus remplacent les hypothèses concernant les probabilités de collisions développées au paragraphe 4. 2. Elles permettent, avec le théorème 1 de Liouville, d'exprimer $v(x, p)$ au moyen d'une intégrale prise sur la géodésique passant par x , tangente à p , située dans le passé de x :

$$(11.1) \quad v(x, p) = \frac{1}{c\tau_M} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{s}{c\tau_M}\right) v_M[x'(x, p, s), p'(x, p, s)] ds$$

s désigne l'abscisse curviligne sur cette géodésique. Intégrons par parties :

(11.2)

$$v(x, p) - v_M(x, p) = -\frac{1}{m} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{s}{c\tau_M}\right) \left(p'^\alpha \frac{\partial v_M}{\partial x'^\alpha} - \Gamma_{\beta \gamma}^\alpha p'^\beta p'^\gamma \frac{\partial v_M}{\partial p'^\alpha} \right) ds$$

Pour évaluer cette intégrale, nous choisissons un système de coordonnées locales dont la géodésique considérée est la ligne :

$$x'^i = 0 \quad (i = 1, 2, 3); \quad x'^0 = x^0 + s$$

et nous imposons de plus aux composantes $\Gamma_{\beta \gamma}^\alpha$ de la connexion d'être nulles le long de cette ligne. Les composantes de p' sont :

$$p'^0 = -m \quad p'^i = 0$$

L'intégrale à calculer s'écrit alors simplement :

$$\int_0^\infty \exp\left(-\frac{s}{c\tau_M}\right) \frac{\partial v_M}{\partial x'^0} ds$$

mais comme

$$\frac{\partial v_M}{\partial x'^0} = \frac{\partial v_M}{\partial x^0}$$

nous avons :

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{s}{c\tau_M}\right) \frac{\partial v_M}{\partial x'^0} ds &= \frac{\partial}{\partial x^0} \left[\int_0^\infty \exp\left(-\frac{s}{c\tau_M}\right) v_M ds \right] \\ &\quad - \frac{1}{c\tau_M^2} \frac{\partial \tau_M}{\partial x^0} \int_0^\infty s \exp\left(-\frac{s}{c\tau_M}\right) v_M ds \\ &= c\tau_M \frac{\partial v}{\partial x^0} - \left[cv - \frac{1}{c\tau_M^2} \int_0^\infty s \exp\left(-\frac{s}{c\tau_M}\right) v_M ds \right] \frac{\partial \tau_M}{\partial x^0} \end{aligned}$$

d'après (11.1).

Nous faisons ici une nouvelle hypothèse : la variation de v_M est assez lente pour que le terme en $\frac{\partial \tau_M}{\partial x^0}$ de l'expression ci-dessus soit négligeable auprès du terme en $\frac{\partial v}{\partial x^0}$. L'équation (11.2) s'écrit donc, en revenant à un système de coordonnées locales quelconque :

$$(11.3) \quad p^\alpha \frac{\partial v}{\partial x^\alpha} - \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha p^\beta p^\gamma \frac{\partial v}{\partial p^\alpha} = \frac{m}{c\tau_M} (v_M - v)$$

C'est l'équation de Krook relativiste. Elle ne diffère de l'équation de Boltzmann relativiste que par la forme très simple du terme de collisions.

Il reste à préciser la relation qui lie v et v_M : pour cela nous imposons à (11.3) d'avoir, comme l'équation de Boltzmann véritable, pour conséquences les théorèmes 4 et 5 exprimant la conservation du nombre de particules et de l'impulsion-énergie. Cela conduit à :

$$(11.4) \quad \int_{\Omega_{mx}} \frac{1}{c\tau_M} (v_M - v) \omega = 0$$

$$(11.5) \quad \int_{\Omega_{mx}} \frac{1}{c\tau_M} (v_M - v) p^\alpha \omega = 0$$

Ces 5 relations permettent, si v est connu au point x de V_4 considéré, de déterminer les 5 paramètres dont dépend v_M au même point.

Dans la suite, nous supposons τ_M fonction du point x considéré de V_4 (par l'intermédiaire de la valeur locale de v) mais non de p^α . τ_M apparaîtra donc, en quelque sorte, comme une fonction thermodynamique du gaz. Cette hypothèse, qui facilite le calcul de certaines intégrales, n'est d'ailleurs pas essentielle.

Remarque. — L'équation de Krook possède deux des propriétés essentielles de l'équation de Boltzmann, exprimées par les théorèmes 4 et 5.

Elle possède également la troisième propriété, exprimée par le théorème 6 (théorème H de Boltzmann) si l'on impose à τ_M d'être non négatif. En effet, il est facile de voir que :

$$(11.6) \quad \nabla_\beta S^\beta = - km \int_{\Omega_{mx}} \frac{1}{c\tau_M} \text{Log} \frac{v}{v_M} (v_M - v_i) \omega \geq 0$$

Cette propriété n'est vraie que parce que v_M est une fonction de distribution de Maxwell : on pourrait songer à construire une équation de Krook avec pour v_M une fonction de distribution autre que celle de Maxwell, par exemple une fonction de distribution isotrope dans l'espace avec une vitesse de module constant; mais une telle équation n'aurait pas pour conséquence le théorème H.

11.2. CAS D'UN GAZ A PLUSIEURS CONSTITUANTS

Il est facile de formuler des équations cinétiques analogues à (11.3) convenant pour écrire l'évolution d'un gaz relativiste à plusieurs constituants [20]. Considérons par exemple un gaz comportant deux sortes de particules, indicées a et b , de masses non nulles. Il est plus commode d'utiliser, au lieu des fonctions de distribution des impulsions $v_a(p^\alpha)$ et $v_b(p^\alpha)$, les fonctions de distribution des vitesses $n_a(u^\alpha)$ et $n_b(u^\alpha)$:

$$(11.7) \quad n_i(u^\alpha) = m_i^3 v_i(p^\alpha) \quad (i = a \text{ ou } b)$$

avec :

$$(11.8) \quad p^\alpha = m_i u^\alpha \quad ; \quad u^\alpha u_\alpha = 1 \quad (i = a \text{ ou } b)$$

Il est alors naturel de généraliser l'équation (11.3) par le système :

$$(11.9) \quad \begin{cases} u^\alpha \frac{\partial n_a}{\partial x^\alpha} - \Gamma_\beta^\alpha u^\beta u^\gamma \frac{\partial n_a}{\partial u^\alpha} = \frac{1}{c\tau'_{aa}} (n_{aM} - n_a) + \frac{1}{c\tau'_{ab}} (n_{bM} - n_b) \\ u^\alpha \frac{\partial n_b}{\partial x^\alpha} - \Gamma_\beta^\alpha u^\beta u^\gamma \frac{\partial n_b}{\partial u^\alpha} = \frac{1}{c\tau'_{ba}} (n_{aM} - n_a) + \frac{1}{c\tau'_{bb}} (n_{bM} - n_b) \end{cases}$$

Les 4 coefficients τ'_{aa} , τ'_{ab} , τ'_{ba} , τ'_{bb} jouent le rôle tenu par τ_M dans (11.3). n_{aM} et n_{bM} sont les fonctions de distribution des vitesses de Maxwell « tangentes » respectivement à n_a et n_b . Elles doivent remplir les conditions d'équilibre thermodynamique: si les particules considérées n'ont que des collisions élastiques, celles-ci se bornent à exprimer que n_{aM} et n_{bM} correspondent à la même température et à la même vitesse moyenne, donc dépendent ensemble de 6 paramètres; si les particules a sont susceptibles de se

transformer en particules b , les coefficients dont dépendent n_{aM} et n_{bM} sont liés par une condition d'équilibre de plus, de la forme (7.9), de sorte que n_{aM} et n_{bM} dépendent ensemble de 5 paramètres. Dans tous les cas, les paramètres dont dépendent n_{aM} et n_{bM} sont déterminés si au point x considéré n_a et n_b sont connus, en écrivant que les lois de conservation exprimées par les théorèmes 4 et 5 sont des conséquences du système (11.9) : cela conduit à des conditions analogues à (11.4) et (11.5), en nombre égal au nombre de paramètres à déterminer.

Remarque 1. — La généralisation de ce qui précède à un gaz comportant un nombre quelconque d'espèces de particules est immédiate, avec cependant une difficulté : si une des espèces de particules est de masse nulle, il faut conserver pour elle la fonction de distribution des impulsions v et écrire une équation de la forme (11.3), ne contenant pas au second membre de termes faisant intervenir les écarts entre fonction de distribution et fonction de distribution de Maxwell tangente des autres espèces de particules.

Remarque 2. — La généralisation du théorème H (théorème 6) au gaz à plusieurs constituants décrit par un système d'équations de Krook n'est pas immédiate, sauf si les seconds membres de ces équations ne contiennent que des termes diagonaux. Ainsi, dans le cas du gaz décrit par (11.9) :

$$(11.10) \quad \nabla_\beta S^\beta = -\frac{k}{c} \int_{\Omega_{1x}} \left\{ \frac{n_{aM}}{\tau'_{aa}} \left(1 - \frac{n_a}{n_{aM}}\right) \text{Log} \frac{n_a}{n_{aM}} + \frac{n_{bM}}{\tau'_{bb}} \left(1 - \frac{n_b}{n_{bM}}\right) \text{Log} \frac{n_b}{n_{bM}} \right. \\ \left. + \frac{n_{bM}}{\tau'_{ab}} \left(1 - \frac{n_b}{n_{bM}}\right) \text{Log} \frac{n_a}{n_{aM}} + \frac{n_{aM}}{\tau'_{ba}} \left(1 - \frac{n_a}{n_{aM}}\right) \text{Log} \frac{n_b}{n_{bM}} \right\} \omega$$

Le fait que cette expression doit être ≥ 0 impose une restriction importante au choix des coefficients τ'_{aa} , τ'_{bb} , τ'_{ba} et τ'_{ab} qu'il est difficile d'exprimer en toute généralité; une condition valable lorsque $\frac{n_a}{n_{aM}}$ et $\frac{n_b}{n_{bM}}$ sont voisins de 1 et lorsque les coefficients τ' ne dépendent que de n_{aM} et de n_{bM} , est obtenue en remplaçant les logarithmes par leur développement limité au premier terme :

$$(11.11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tau'_{aa} \geq 0 \quad \tau'_{bb} \geq 0 \\ \left(\frac{n_{bM}}{\tau'_{ab}} + \frac{n_{aM}}{\tau'_{ba}} \right)^2 - 4 \frac{n_{aM} n_{bM}}{\tau'_{aa} \tau'_{bb}} \leq 0 \end{array} \right.$$

IV. CONCLUSION

Il est facile d'adapter la description classique d'un gaz par un ensemble de fonctions de distribution des impulsions (une pour chaque espèce de particules), au cas d'un gaz relativiste. Des considérations physiques simples et une hypothèse de chaos moléculaire permettent d'établir (sans que cela soit d'ailleurs une démonstration rigoureuse) que ces fonctions de distribution doivent être une solution d'équations de Boltzmann relativistes. Pour l'essentiel, ces équations possèdent les mêmes propriétés que les équations de Boltzmann classiques non relativistes. Elles ont notamment pour conséquence les équations de bilan du nombre de particules et d'impulsion-énergie et l'inégalité de bilan d'entropie (appelée « théorème H de Boltzmann »).

Un prochain article exposera comment déduire de cette description « microscopique » une description « macroscopique » ne faisant plus intervenir que la vitesse du fluide et ses grandeurs thermodynamiques. A la différence du cas non relativiste classique, nous verrons que, selon les conventions adoptées, plusieurs descriptions macroscopiques différentes sont possibles. Les deux méthodes classiques de résolution approchée de l'équation de Boltzmann (celle de Chapman-Enskog et celle de Grad) seront adaptées au cas relativiste et les équations de l'hydrodynamique des fluides relativistes seront ainsi établies, puis étudiées.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] H. ARZELIES, Sur le concept de température en thermodynamique relativiste et en thermodynamique statistique, *Il Nuovo Cimento*, série X, vol. **40 B**, n° 2, 11 décembre 1965, p. 333.
- [2] P. L. BHATNAGAR, E. P. GROSS et M. KROOK, A model for collision processes in gases. I. Small amplitude processes in charged and neutral one component systems, *Phys. Rev.*, vol. **94**, n° 3, 1954, p. 511-525.
- [3] K. BICHTLER, Bemerkungen über relativistische Stossinvarianten, *Zeitschrift für Physik*, vol. **182**, 1965, p. 521-523.
- [4] K. BICHTLER, *Beitraege zur relativistischen kinetischen Gastheorie*, Dissertation, Hamburg, 1965.
- [5] N. A. CHERNIKOV, The relativistic gas in the gravitational field, *Acta physica Polonica*, vol. XXIII, fasc. 5, 1963, p. 629-645.
- [6] N. A. CHERNIKOV, Equilibrium distribution of the relativistic gas, *Acta physica Polonica*, vol. XXVI, fasc. 6, 1964, p. 1069-1092.
- [7] N. A. CHERNIKOV, Microscopic foundation of relativistic hydrodynamics, *Acta physica Polonica*, vol. XXVII, fasc. 3, 1964, p. 465-489.

- [8] N. A. CHERNIKOV, Derivation of the equations of relativistic hydrodynamics from the relativistic transport equation, *Physics Letters*, vol. **5**, n° 2, 15 juin 1963, p. 115-117.
- [9] A. EINSTEIN, *Physikalische Zeitschrift*, vol. **18**, 1917, p. 121-128.
- [10] H. GRAD, On the kinetic theory of rarefied gases, *Communications on Pure and Applied Mathematics*, vol. **2**, n° 4, 1949, p. 331-407.
- [11] E. T. JAYNES, Information theory and statistical mechanics, *Phys. Rev.*, vol. **106**, n° 4, 1957, p. 620-630.
- [12] F. JÜTTNER, Das Maxwellsche Gesetz der Geschwindigkeitsverteilung in der Relativtheorie, *Annalen der Physik*, vol. **34**, 1911, p. 856-882.
- [13] L. D. LANDAU et E. M. LIFCHITZ, *Statistical Physics*, Pergamon Press, London, 1958.
- [14] A. LICHNEROWICZ, *Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme*, Masson, Paris, 1955.
- [15] A. LICHNEROWICZ, *Théorie globale des connexions et des groupes d'holonomie*, Ed. Cremonese, Rome, 1955.
- [16] A. LICHNEROWICZ, *Géométrie des groupes de transformation*, Dunod, Paris, 1958.
- [17] A. LICHNEROWICZ et R. MARROT, Propriétés statistiques des ensembles de particules en relativité restreinte, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. **210**, 1940, p. 759-761.
- [18] R. MARCHAL, Sur les formules de transformation de la chaleur et de la température en relativité restreinte, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. **262**, série A, 25 avril 1966, p. 982.
- [19] C. MARLE, Modèle cinétique pour l'établissement des lois de la conduction de la chaleur et de la viscosité en relativité, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. **260**, 1965, p. 6539-6541.
- [20] C. MARLE, Modèle cinétique pour un gaz relativiste à deux constituants, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. **262**, série A, 1966, p. 100-103.
- [21] PHAM MAU QUAN, Aspect géométrique de l'équation de Boltzmann relativiste. *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. **263**, série A, 1966, p. 106-109.
- [22] G. PICHON, Calcul et utilisation de la fonction de distribution d'un fluide parfait, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. **264**, 13 mars 1967, p. 544.
- [23] J. L. SYNGE, *The relativistic gas*, North Holland Publishing Company, Amsterdam, 1957.
- [24] J. L. SYNGE, *Relativity : the general theory*, North Holland Publishing Company, Amsterdam, 1964.
- [25] G. N. WATSON, *A treatise on the theory of Bessel functions*, Cambridge University Press, 1944.
- [26] E. J. WOODBURY et W. K. NG, Ruby laser operation in the near IR, *Proceedings of the I. R. E.*, vol. **50**, novembre 1962, p. 2367.

TABLE DES MATIÈRES

I. INTRODUCTION	69
1. Présentation de l'étude	69
2. Notations.	70
II. L'ÉQUATION DE BOLTZMANN RELATIVISTE.	71
3. Mouvement des particules	71
3.1. Hypothèses	71
3.2. L'espace des phases	72

3.3. Mouvement libre d'une particule.	74
3.4. Collisions élastiques	79
3.5. Collisions inélastiques	80
3.6. Fusions et fissions de particules.	82
4. Équation de Boltzmann.	83
4.1. Fonction de distribution.	83
4.2. Les équations de Boltzmann relativistes	86
5. Équations de transfert de Maxwell	90
5.1. Bilan du nombre de particules	90
5.2. Bilan d'impulsion-énergie	91
5.3. Bilan d'entropie. Théorème H	92
III. L'ÉQUILIBRE THERMODYNAMIQUE	94
6. Équilibre thermodynamique local d'un gaz de particules toutes identiques	94
6.1. Équation fonctionnelle vérifiée par la fonction de distribution d'équilibre	94
6.2. Solution de l'équation fonctionnelle	99
6.3. Fonction de distribution de Maxwell relativiste.	103
7. Équilibre thermodynamique local d'un gaz à plusieurs constituants.	104
7.1. Équations fonctionnelles vérifiées par les fonctions de distribution d'équilibre	104
7.2. Loi d'action de masse	106
8. Propriétés variationnelles des fonctions de distribution de Maxwell.	107
9. Fonctions thermodynamiques du gaz relativiste à l'équilibre.	110
9.1. Vitesse du gaz, température	110
9.2. Les moments de la fonction de distribution de Maxwell.	110
9.3. Entropie spécifique, potentiels thermodynamiques	113
10. Cas de particules de masse nulle : formule de Planck	115
10.1. Émission stimulée	115
10.2. Effet Raman stimulé	117
11. Les équations de Krook relativistes	119
11.1. Cas d'un gaz de particules toutes identiques	119
11.2. Cas d'un gaz à plusieurs constituants	122
IV. CONCLUSION	124
BIBLIOGRAPHIE.	124

(Manuscrit reçu le 15 octobre 1968).

Directeur de la publication : C. BERMAN.

IMPRIMÉ EN FRANCE

DÉPÔT LÉGAL ÉD. N° 1649a

IMPRIMERIE BARNÉOUD S. A. LAVAL, N° 5795, 2-1969.