

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

ROLF DOBBERTIN

Sur une méthode fonctionnelle en mécanique statistique des plasmas

Annales de l'I. H. P., section A, tome 9, n° 1 (1968), p. 45-87

http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1968__9_1_45_0

© Gauthier-Villars, 1968, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section A » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Sur une méthode fonctionnelle en mécanique statistique des plasmas

par

Rolf DOBBERTIN

Institut Henri Poincaré, Paris.

ABSTRACT. — We derive a general kinetic equation from Liouville's equation without any approximation. Then we get special kinetic equations for systems with long-range and short-range interparticle forces by successive approximations of the general kinetic equation. We solve the special kinetic equation for a homogeneous fully ionized plasma under reasonable physical conditions; for this plasma we calculate the electric conductivity for particles of finite size; in the limit of point particles and high frequencies we find the result of Oberman and Dawson and for zero-frequency we get the direct current result of Spitzer. Finally, we calculate the distribution of a finite system of charged particles in equilibrium for the rather particular case where the Debye sphere is greater than the sphere enclosing the system.

I. — INTRODUCTION

L'objet physique de notre étude est un système de N particules en interaction et évoluant suivant les lois de la mécanique classique. Celui-ci est statistiquement décrit par une fonction de distribution de probabilité D_N qui évolue selon l'équation de Liouville. Nous appelons équation cinétique générale une équation qui ne contient que la fonction de distribution réduite pour une particule comme grandeur inconnue et qui dérive de l'équation de Liouville sans aucune approximation. Notre but est d'établir une telle équation et d'en tirer des équations cinétiques spécialisées à l'aide d'un procédé d'approximations qui ne s'appuie pas sur l'existence de petits

paramètres. Nous portons particulièrement notre intérêt sur l'équation cinétique pour un plasma complètement ionisé. C'est pourquoi nous nous interdisons d'exploiter la disparition éventuelle des corrélations binaires, ternaires ou autres à grandes distances en raison de la présence de forces d'interaction d'une portée infinie. Nous exigeons que cette équation cinétique décrive aussi bien les phénomènes collectifs que la relaxation vers un état stationnaire.

Les équations cinétiques que de nombreux auteurs ont déjà dérivées de l'équation de Liouville par diverses méthodes d'approximation ne satisfont pas à nos conditions. En particulier, ces méthodes utilisent toutes, sous une forme ou sous une autre, l'absence de corrélations en première approximation, ce qui introduit explicitement la non-linéarité dans l'équation cinétique avec la nécessité d'approcher encore cette première approximation, puisque toute solution de l'équation non linéaire passe par la linéarisation.

Si l'on trouve une relation entre les fonctions de distribution réduites pour une et deux particules F_1 et F_2 , on obtient immédiatement l'équation cinétique générale en portant cette relation dans la première équation de la hiérarchie B-B-G-K-Y, le système bien connu d'équations couplées pour toutes les fonctions de distribution réduites qu'on obtient en intégrant successivement l'équation de Liouville sur toutes les variables. Pour le cas de l'équilibre, Bogolioubov [1] a trouvé une telle relation en exprimant F_2 par F_1 et sa dérivée fonctionnelle par rapport à un champ test. Nous réalisons notre programme en établissant une relation analogue pour un système hors de l'équilibre. L'équation cinétique générale ainsi obtenue n'étant pas fonctionnellement intégrable au stade actuel de nos connaissances mathématiques, nous en tirons des équations cinétiques approchées. Le procédé d'approximation sera différent suivant que les forces interparticulaires sont de longue ou de courte portée.

A titre d'exemple, nous utiliserons enfin l'équation cinétique relative aux plasmas complètement ionisés pour l'étude de la conductivité électrique dans un champ de fréquences quelconques.

II. — HYPOTHÈSES

Le système de $N = \sum_a N_a$ particules est enfermé dans un volume V , N_a étant le nombre de particules de l'espèce a . Une particule porte la

masse m_a et la charge électrique $e\zeta_a$ ($\zeta_a = 0$: neutre; $\zeta_a = -1$: électron; $\zeta_a = +2$: ion positif doublement ionisé, etc.) et éventuellement d'autres propriétés (un moment magnétique, par exemple). L'énergie d'interaction entre deux particules d'espèces a et b est $\Phi_{ab}(x_i, x_j)$, $i \neq j$; l'énergie potentielle d'une particule d'espèce a dans un champ extérieur constant (champ test) est $\varphi_a(x_i)$. $x = (q, p)$ représente un point dans l'espace des phases; le vecteur q étant la position et p son impulsion canonique.

La mécanique statistique repose sur la définition d'une densité de probabilité $D_N(x_1, \dots, x_N, t)$. L'évolution de D_N est donnée par l'équation de Liouville

$$\frac{\partial D_N}{\partial t} + \Lambda_N(t)D_N = 0,$$

où Λ_N est l'opérateur

$$(1) \quad \Lambda_N = [H_0] + \sum_{a,i} X_a(x_i, t) \frac{\partial}{\partial p_i};$$

H_0 est l'hamiltonien du système en l'absence de la force extérieure X_a :

$$(2) \quad H_0 = \sum_{a,i=1}^N \left(\frac{p_i^2}{2m_a} + \varphi_a(x_i) \right) + \sum_{\substack{1 \leq i < j \leq N \\ a,b}} \Phi_{ab}(x_i, x_j),$$

le crochet de Poisson étant défini par

$$[A ; B] = \sum_i \left(\frac{\partial B}{\partial p_i} \frac{\partial A}{\partial q_i} - \frac{\partial B}{\partial q_i} \frac{\partial A}{\partial p_i} \right).$$

Nous avons supposé que X_a dérive d'un potentiel, mais tout le formalisme reste valable quand X_a contient la force de Lorentz, les p_i étant alors les impulsions cinétiques et non plus les impulsions canoniques.

La solution de l'équation de Liouville nécessite la connaissance d'une condition initiale. Celle-ci, la densité de probabilité initiale, exprime nos connaissances fragmentaires de l'état mécanique de notre système de N particules. Puisque le système est enfermé dans un volume donné et que le nombre de particules est constant, nous savons par expérience qu'il tend, en l'absence des forces extérieures $X_a(t)$, vers un état asymptotique stationnaire que nous appellerons pseudo-équilibre. Cet état est décrit par la densité de distribution canonique $D_N^\beta = (Q^\beta)^{-1} \exp(-\beta H_0)$ qui est une solution asymptotique de l'équation de Liouville pour $X_a = 0$. Cette notion de pseudo-équilibre peut à la fois comprendre celle de l'équilibre proprement dit et celle d'état stationnaire quand φ engendre un flux. Dans la limite

$\varphi \rightarrow 0$, le pseudo-équilibre devient l'équilibre thermodynamique; c'est pour cette raison que nous donnons à la constante β le sens de l'inverse de la température thermodynamique (en unités d'énergie).

La distribution de pseudo-équilibre exprimant notre seule connaissance du système, nous la choisissons donc comme condition initiale pour la solution de l'équation de Liouville avec l'arrière-pensée d'ailleurs de nous en débarrasser plus tard.

En choisissant le pseudo-équilibre comme condition initiale, nous généralisons en quelque sorte une idée de Kubo [2] qui, en partant de l'équilibre thermodynamique, étudiait la réponse linéaire du système à des forces appliquées qui l'écartaient de l'équilibre. Notre but se situe bien au-delà de ce dessein puisque nous cherchons une équation cinétique générale n'étant plus limitée à des conditions initiales particulières et n'étant pas bornée à la réponse linéaire à une perturbation extérieure.

Comme condition aux limites de l'équation de Liouville, nous imposons l'annulation de D_N sur la surface du volume V et pour des $|p| = \infty$. Puisque D_N est une densité de probabilité, il faut que $\int D_N(x_1, \dots, x_N, t) dx_1 \dots dx_N = 1$; $dx = dp \cdot dq$ est l'élément de volume de l'espace des phases.

Nous définissons une fonction $f_N(x_1, \dots, x_N, t) = Q(t)D_N(x_1, \dots, x_N, t)$ (qui s'écrit pour le pseudo-équilibre $f_N^\beta = Q^\beta D_N^\beta$), avec

$$Q(t) = \int f_N(x_1, \dots, x_N, t) dx_1 \dots dx_N.$$

On voit facilement que f_N est également solution d'une équation de Liouville

$$(3) \quad \frac{\partial f_N}{\partial t} + \Lambda_N(t)f_N = 0$$

et que $Q(t) = Q(t_0)$. Pour $f_N(t_0) = f_N^\beta$, il s'ensuit que $Q(t) = Q^\beta = Q$. L'indice β indiquera toujours que la grandeur se rapporte à l'état de pseudo-équilibre (ou d'équilibre si $\varphi = 0$).

Les fonctions de distribution servent à calculer des valeurs moyennes de grandeurs dynamiques. Celles-ci ne dépendant que d'une ou de deux variables x , on déduit généralement de D_N les fonctions de distribution réduites pour une particule d'espèce a

$$(4) \quad F_a(x_1, t) = V \int D_N(x_1, \dots, x_N, t) dx_2 \dots dx_N \\ = VQ^{-1} \int f_N(x_1, \dots, x_N, t) dx_2 \dots dx_N,$$

et pour deux particules des espèces a et b

$$(5) \quad F_{ab}(x_1, x_2, t) = V^2 \int D_N(x_1, \dots, x_N, t) dx_3 \dots dx_N \\ = V^2 Q^{-1} \int f_N(x_1, \dots, x_N, t) dx_3 \dots dx_N,$$

à l'aide desquelles on calcule les valeurs moyennes. F_a et F_{ab} sont liés par la première équation de la hiérarchie

$$(6) \quad \frac{\partial F_a(x_1, t)}{\partial t} + \left[F_a; \frac{p_1^2}{2m_a} + \varphi_a(x_1) \right] + X_a \frac{\partial F_a}{\partial p_1} \\ = \sum_b \frac{N_b - \delta_{ab}}{V} \int [\Phi_{ab}(x_1, x_2); F_{ab}(x_1, x_2, t)] dx_2.$$

III. — L'ÉQUATION CINÉTIQUE GÉNÉRALE

Puisque H_0 et l'opérateur Λ_N sont fonctions de φ ou de ses dérivées partielles, les grandeurs Q , F_a , F_{ab} , etc., sont fonctionnelles de φ . Nous cherchons une relation entre $F_a(x_1, t | \varphi)$, $\frac{\delta F_a(x_1, t | \varphi)}{\delta \varphi_b(x_2)}$ et $F_{ab}(x_1, x_2, t | \varphi)$.

Le signe après la barre dans l'argument indique une dépendance fonctionnelle. Nous l'omettrons souvent. F_a n'est pas seulement fonctionnelle de φ , mais aussi fonction de $\varphi_a(x_1)$. Quand cette dépendance risque de créer des difficultés, nous utiliserons la définition de la valeur moyenne d'une grandeur dynamique $A_a(x)$

$$(7) \quad \bar{A}_a = \int A_a(x_1) F_a(x_1, t) dx_1 = VQ^{-1} \int A_a(x_1) f_N(x_1, \dots, x_N, t) dx_1 \dots dx_N$$

qui est, comme Q , une fonctionnelle pure de φ .

La dérivation fonctionnelle de (7) par rapport à φ se fait suivant des règles bien connues du calcul variationnel :

$$\frac{\delta \bar{A}_a(t)}{\delta \varphi_b(x)} = \int A_a(x_1) \frac{\delta F_a(x_1, t)}{\delta \varphi_b(x)} dx_2 \\ = \frac{V}{Q} \int A_a(x_1) \sum_{c,i} \delta_{bc} \delta(x - x_i) \partial_{c,i} f_N(t) dx_1 \dots dx_N - \frac{1}{Q} \frac{\delta Q}{\delta \varphi_b} \bar{A}_a$$

avec l'abréviation

$$\partial_{c,i} = \frac{\partial}{\partial \varphi_c(x_i)} - \frac{\partial}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial \left(\frac{\partial \varphi_c(x_i)}{\partial q_i} \right)} - \frac{\partial}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial \left(\frac{\partial \varphi_c(x_i)}{\partial p_i} \right)}$$

En utilisant la symétrie de l'intégrant à l'égard des variables x_2, \dots, x_N , on peut écrire

$$\int A(x_1) \left\{ \frac{\delta F_a(x_1, t)}{\delta \varphi_b(x_2)} - \delta_{ab} \delta(x_1 - x_2) \partial_{a,1} F_a(x_1, t) - \frac{N_b - \delta_{ab}}{V} \partial_{b,2} F_{ab}(x_1, x_2, t) + \frac{1}{Q} \frac{\delta Q}{\delta \varphi_b} F_a(x_1, t) \right\} dx_1 = 0.$$

Cette équation doit être valable pour un A quelconque; il s'ensuit donc

$$(8) \quad \frac{\delta F_a(x_1, t)}{\delta \varphi_b(x_2)} = \delta_{ab} \delta(x_1 - x_2) \partial_{a,1} F_a(x_1, t) + \frac{N_b - \delta_{ab}}{V} \partial_{b,2} F_{ab}(x_1, x_2, t) - \frac{1}{Q} \frac{\delta Q}{\delta \varphi_b} F_a(x_1, t).$$

La différentiation de $Q = Q(t) = Q^\beta$ par rapport à φ nous donne les deux relations

$$(9) \quad \frac{\delta Q}{\delta \varphi_a(x_1)} = \int \sum_{b,i} \delta_{ab} \delta(x_i - x_1) \frac{\partial}{\partial \varphi_b(x_i)} f_N^\beta dx_1 \dots dx_N = - \frac{\beta N_a Q}{V} F_a^\beta(x_1)$$

$$(10) \quad \frac{\delta Q}{\delta \varphi_a(x_1)} = \int \sum_{b,i} \delta_{ab} \delta(x_i - x_1) \partial_{b,i} f_N(t) dx_1 \dots dx_N = \frac{N_a Q}{V} \partial_{a,1} F_a(x_1, t)$$

Quand on substitue (9) et (10) dans (8), il vient

$$(11) \quad \frac{\delta F_a(x_1, t)}{\delta \varphi_b(x_2)} = \frac{\beta N_a}{V} F_a(x_1, t) F_b^\beta(x_2) - \beta \delta_{ab} \delta(x_1 - x_2) F_a^\beta + \frac{N_b - \delta_{ab}}{V} \partial_{b,2} F_{ab}(x_1, x_2, t)$$

Nous devons donc calculer les dérivées $\frac{\partial f_N}{\partial \varphi_b}$, $\frac{\partial f_N}{\partial \left(\frac{\partial \varphi_b}{\partial q_2} \right)}$ et $\frac{\partial f_N}{\partial \left(\frac{\partial \varphi_b}{\partial p_2} \right)}$. Pour les

déterminer, nous dérivons l'équation (3) par rapport à $Y = \varphi_b, \frac{\partial \varphi_b}{\partial q_2}$ ou $\frac{\partial \varphi_b}{\partial p_2}$:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \Lambda_N(t) \right) \frac{\partial f_N(t)}{\partial Y} = - \frac{\partial \Lambda_N(t)}{\partial Y} f_N(t)$$

Cette équation admet pour solution

$$(12) \quad \frac{\partial f_N(t)}{\partial Y} = U(t, t_0) \frac{\partial f_N(t_0)}{\partial Y} - \int_{t_0}^t U(t, \tau) \frac{\partial \Lambda_N(\tau)}{\partial Y} f_N(\tau) d\tau,$$

si l'opérateur d'évolution $U(t, t')$ satisfait à certaines conditions [3] que nous supposons remplies. La solution opératorielle de l'équation (3) est $f_N(t) = U(t, t_0)f_N(t_0)$. Il vient donc à l'aide de (12) :

$$\partial_{b,2} f_N(t) = -\beta f_N(t) + \int_{t_0}^t \left(\frac{\partial}{\partial q_2} U(t, \tau) \frac{\partial}{\partial p_2} - \frac{\partial}{\partial p_2} U(t, \tau) \frac{\partial}{\partial q_2} \right) f_N(\tau) d\tau$$

ce qui permet d'écrire (11) comme suit :

$$(13) \quad \frac{\delta F_a(x_1, t)}{\delta \varphi_b(x_2)} = \frac{\beta N_a}{V} F_a(x_1, t) F_b^\beta(x_2) - \beta \delta_{ab} \delta(x_1 - x_2) F_a^\beta(x_1) \\ - \frac{\beta}{V} (N_b - \delta_{ab}) F_{ab}(x_1, x_2, t) \\ + \frac{V}{Q} (N_b - \delta_{ab}) \int_{t_0}^t \left(-\frac{\partial}{\partial q_2} U(t, \tau) \frac{\partial}{\partial p_2} + \frac{\partial}{\partial p_2} U(t, \tau) \frac{\partial}{\partial q_2} \right) f_N(\tau) d\tau dx_3 \dots dx_N.$$

Pour raison de symétrie, on a également la relation

$$(14) \quad \frac{\delta F_b(x_2, t)}{\delta \varphi_a(x_1)} = \frac{\beta N_b}{V} F_b(x_2, t) F_a^\beta(x_1) - \beta \delta_{ab} \delta(x_1 - x_2) F_a^\beta(x_1) \\ - \frac{\beta}{V} (N_a - \delta_{ab}) F_{ab}(x_1, x_2, t) \\ + \frac{V}{Q} (N_a - \delta_{ab}) \int_{t_0}^t \left(-\frac{\partial}{\partial q_1} U(t, \tau) \frac{\partial}{\partial p_1} + \frac{\partial}{\partial p_1} U(t, \tau) \frac{\partial}{\partial q_1} \right) f_N(\tau) d\tau dx_3 \dots dx_N.$$

La différentiation fonctionnelle de la relation $Q(t) = Q^\beta$ par rapport à Φ_{ab} fournit en outre

$$\frac{\delta Q}{\delta \Phi_{ab}(x_1, x_2)} = \frac{N_a(N_b - \delta_{ab})}{2} \int \frac{\partial}{\partial \Phi_{ab}(x_1, x_2)} f_N^\beta dx_3 \dots dx_N \\ = \frac{N_a(N_b - \delta_{ab})}{2} \int \left(\frac{\partial}{\partial \Phi_{ab}} - \frac{\partial}{\partial q_1} \frac{\partial}{\partial \left(\frac{\partial \Phi_{ab}}{\partial q_1} \right)} - \frac{\partial}{\partial q_2} \frac{\partial}{\partial \left(\frac{\partial \Phi_{ab}}{\partial q_2} \right)} \right. \\ \left. - \frac{\partial}{\partial p_1} \frac{\partial}{\partial \left(\frac{\partial \Phi_{ab}}{\partial p_1} \right)} - \frac{\partial}{\partial p_2} \frac{\partial}{\partial \left(\frac{\partial \Phi_{ab}}{\partial p_2} \right)} \right) f_N(t) dx_3 \dots dx_N,$$

ce qui devient à l'aide de (12)

$$-\beta \int f_N^\beta dx_3 \dots dx_N = -\beta \int f_N(t) dx_3 \dots dx_N - \iint_{t_0}^t \left(\frac{\partial}{\partial q_1} U(t, \tau) \frac{\partial}{\partial p_1} + \frac{\partial}{\partial q_2} U(t, \tau) \frac{\partial}{\partial p_2} - \frac{\partial}{\partial p_1} U(t, \tau) \frac{\partial}{\partial q_1} - \frac{\partial}{\partial p_2} U(t, \tau) \frac{\partial}{\partial q_2} \right) f_N(\tau) d\tau dx_3 \dots dx_N.$$

Après multiplication avec $-V^2/\beta Q$ et en vertu de (5), cette relation s'écrit

$$(15) \quad F_{ab}(x_1, x_2, t) - F_{ab}^\beta(x_1, x_2) = \frac{V^2}{\beta Q} \iint_{t_0}^t \left(-\frac{\partial}{\partial q_1} U(t, \tau) \frac{\partial}{\partial p_1} + \frac{\partial}{\partial p_1} U(t, \tau) \frac{\partial}{\partial q_1} - \frac{\partial}{\partial q_2} U(t, \tau) \frac{\partial}{\partial p_2} + \frac{\partial}{\partial p_2} U(t, \tau) \frac{\partial}{\partial q_2} \right) f_N(\tau) d\tau dx_3 \dots dx_N.$$

Nous voyons immédiatement que les intégrales dans (13), (14) et (15) peuvent être éliminées par une simple combinaison. Nous obtenons finalement la relation recherchée [4] :

$$(16) \quad F_{ab}(x_1, x_2, t) = \frac{N_a}{N_a - \delta_{ab}} F_a^\beta(x_1) F_b(x_2, t) + \frac{N_b}{N_b - \delta_{ab}} F_a(x_1, t) F_b^\beta(x_2) - F_{ab}^\beta(x_1, x_2) - \frac{V}{\beta(N_b - \delta_{ab})} \frac{\delta F_a(x_1, t)}{\delta \varphi_b(x_2)} - \frac{V}{\beta(N_a - \delta_{ab})} \frac{\delta F_b(x_2, t)}{\delta \varphi_a(x_1)} - 2 \frac{\delta_{ab} V}{N_b - \delta_{ab}} \delta(x_1 - x_2) F_a^\beta(x_1).$$

Pour $t = t_0$, nous trouvons la relation correspondante pour le pseudo-équilibre :

$$(17) \quad F_{ab}^\beta(x_1, x_2) = \frac{N_b}{N_b - \delta_{ab}} F_a^\beta(x_1) F_b^\beta(x_2) - \frac{V}{\beta(N_b - \delta_{ab})} \frac{\delta F_a^\beta(x_1)}{\delta \varphi_b(x_2)} - \frac{V \delta_{ab}}{N_b - \delta_{ab}} \delta(x_1 - x_2) F_a^\beta(x_1).$$

Pour éviter l'apparition des fonctions δ dans nos relations, nous utiliserons le plus souvent à la place de F_a et F_{ab} leurs écarts de leurs valeurs de pseudo-équilibre $f_a(x_1, t) = F_a(x_1, t) - F_a^\beta(x_1)$ et $f_{ab}(x_1, x_2, t) = F_{ab}(x_1, x_2, t) - F_{ab}^\beta(x_1, x_2)$. La relation (16) s'écrit alors

$$(18) \quad f_{ab}(x_1, x_2, t) = \frac{N_a}{N_a - \delta_{ab}} F_a^\beta(x_1) f_b(x_2, t) + \frac{N_b}{N_b - \delta_{ab}} f_a(x_1, t) F_b^\beta(x_2) - \frac{V}{\beta(N_b - \delta_{ab})} \frac{\delta f_a(x_1, t)}{\delta \varphi_b(x_2)} - \frac{V}{\beta(N_a - \delta_{ab})} \frac{\delta f_b(x_2, t)}{\delta \varphi_a(x_1)}.$$

La première équation de la hiérarchie pour les écarts du pseudo-équilibre s'écrit

$$(19) \quad \frac{\partial f_a(x_1, t)}{\partial t} + \left[f_a; \frac{p_1^2}{2m_a} + \varphi_a \right] + X_a \frac{\partial f_a}{\partial p_1} \\ = - X_a \frac{\partial F_a^\beta(x_1)}{\partial p_1} + \sum_b \frac{N_b - \delta_{ab}}{V} \int [\Phi_{ab}; f_{ab}] dx_2.$$

Nous n'avons pas précisé l'instant t_0 . Nous mettons $t_0 = -\infty$. Dans l'intervalle $-\infty < t < 0$ des forces X_a (inconnues) appliquées au système peuvent amener celui-ci à un état hors d'équilibre. Nous devons alors connaître $f_a(x_1, 0)$ et $f_{ab}(x_1, x_2, 0)$ qui seront les nouvelles conditions initiales pour la résolution de (19).

Nous supposons que toute distribution physique servant de condition initiale pourrait être atteinte à partir de l'équilibre par l'action de forces extérieures agissant durant l'intervalle $-\infty < t < 0$. Il n'est pas nécessaire que ces forces existent vraiment dans la nature. Nous demandons seulement qu'elles permettent d'écrire l'opérateur Λ_N sous la forme (1). Cela nous permet de considérer (19) avec (18) comme équation cinétique générale pour des conditions initiales ($t = 0$) quelconques.

Quand la distribution initiale a été formée par un processus non adiabatique, nous devons préciser le sens de la constante β . Nous donnons à β la valeur de thermalisation de la distribution initiale en l'absence de forces extérieures durant l'intervalle $0 < t < \infty$. Nous pourrions partir à $t = -\infty$ avec un β' de sorte que les forces agissant dans l'intervalle $-\infty < t < 0$ portent la valeur de thermalisation qu'on peut attribuer à tout état d'un système fermé à la valeur β correspondant aux conditions initiales.

Pour le cas où les forces interparticulaires ne dépendent que des distances, l'équation cinétique générale s'écrit

$$(20) \quad \frac{\partial f_a(x_1, t)}{\partial t} + \left[f_a; \frac{p_1^2}{2m_a} + \varphi_a \right] + X_a \frac{\partial f_a}{\partial p_1} \\ = - X_a \frac{\partial F_a^\beta(x_1)}{\partial p_1} + \sum_b \frac{N_b}{V} \int \frac{\partial \Phi_{ab}}{\partial q_1} \frac{\partial}{\partial p_1} (F_a^\beta(x_1) f_b(x_2, t) \\ + f_a(x_1, t) F_b^\beta(x_2) - \frac{V}{\beta N_b} \frac{\delta f_a(x_1, t)}{\delta \varphi_b(x_2)} - \frac{V}{\beta N_a} \frac{\delta f_b(x_2, t)}{\delta \varphi_a(x_1)}) dx_2.$$

**IV. — L'ÉQUATION CINÉTIQUE
POUR UN SYSTÈME
AVEC UNE INTERACTION DE LONGUE PORTÉE**

L'équation (20) contient implicitement une non-linéarité sous forme de dérivées fonctionnelles. Puisque nous n'étudions pas l'intégration fonctionnelle de cette équation et que nous ne supposons pas l'existence de petits paramètres, il ne nous reste que la technique des approximations successives au sens où on l'utilise pour la résolution des équations intégrales différentielles non linéaires.

Nous écrivons (20) pour la suite des fonctions $f_a^{(1)}, f_a^{(2)}, f_a^{(3)}, \dots$

$$(21) \quad \frac{\partial f_a^{(n)}}{\partial t} + \left[f_a^{(n)} ; \frac{p_1^2}{2m_a} + \varphi_a \right] + X_a \frac{\partial f_a^{(n)}}{\partial p_1} = - X_a \frac{\partial F_a^\beta}{\partial p_1} \\ + \sum_b \frac{N_b}{V} \int \frac{\partial \Phi_{ab}}{\partial q_1} \frac{\partial}{\partial p_1} \left(F_a^\beta f_b^{(n)} + f_a^{(n)} F_b^\beta - \frac{V}{\beta N_b} \frac{\delta f_a^{(n-1)}}{\delta \varphi_b} - \frac{V}{\beta N_a} \frac{\delta f_b^{(n-1)}}{\delta \varphi_a} \right) dx_2.$$

Nous supposons que la suite $f_a^{(n)}$ converge. La solution de (20) est alors

$$f_a = \lim_{n \rightarrow \infty} f_a^{(n)}.$$

Pour que le procédé d'approximations fonctionne, nous devons déterminer une équation pour $\delta f_a / \delta \varphi_b$. Nous l'obtenons simplement en dérivant (21) par rapport à $\varphi_c(x_3)$ avec la condition $x_3 \neq x_1$, c'est-à-dire nous omettons les termes contenant des fonctions δ qui ne contribueront pas à l'intégrale de collision :

$$(22) \quad \frac{\partial}{\partial t} \frac{\delta f_a^{(n)}}{\delta \varphi_c} + \left[\frac{\delta f_a^{(n)}}{\delta \varphi_c} ; \frac{p_1^2}{2m_a} + \varphi_a \right] + X_a \frac{\partial}{\partial p_1} \frac{\delta f_a^{(n)}}{\delta \varphi_c} \\ = - X_a \frac{\partial}{\partial p_1} \frac{\delta F_a^\beta}{\delta \varphi_c} + \sum_b \frac{N_b}{V} \int \frac{\partial \Phi_{ab}}{\partial q_1} \frac{\partial}{\partial p_1} \\ \left(\frac{\delta F_a^\beta}{\delta \varphi_c} f_b^{(n)} + F_a^\beta \frac{\delta f_b^{(n)}}{\delta \varphi_c} + \frac{\delta f_a^{(n)}}{\delta \varphi_c} F_b^\beta + f_a^{(n)} \frac{\delta F_b^\beta}{\delta \varphi_c} - \frac{V}{\beta N_b} \frac{\delta^2 f_a^{(n-1)}}{\delta \varphi_b \delta \varphi_c} - \frac{V}{\beta N_a} \frac{\delta^2 f_b^{(n-1)}}{\delta \varphi_a \delta \varphi_c} \right) dx_2.$$

Cette équation contient les doubles dérivées fonctionnelles pour lesquelles on obtient une équation en dérivant (22) par rapport à φ_d , avec $x_1 \neq x_3 \neq x_4$.

Nous écrivons ces équations pour $\varphi \rightarrow 0$. A l'aide des définitions

$$K_{a_1 a_2 \dots a_n} = \lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{\delta^n f_{a_1}}{\delta \varphi_{a_2} \dots \delta \varphi_{a_n}}$$

elles deviennent

$$(23) \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{p_1}{m_a} \frac{\partial}{\partial q_1} + X_a \frac{\partial}{\partial p_1} \right) f_a^{(n)} = -X_a \frac{\partial F_a^\beta}{\partial p_1} \\ + \sum_b \frac{N_b}{V} \int \frac{\partial \Phi_{ab}}{\partial q_1} \frac{\partial}{\partial p_1} \left(F_a^\beta f_b^{(n)} + f_a^{(n)} F_b^\beta - \frac{V}{\beta N_b} K_{ab}^{(n-1)} - \frac{V}{\beta N_a} K_{ba}^{(n-1)} \right) dx_2,$$

$$(24) \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{p_1}{m_a} \frac{\partial}{\partial q_1} + X_a \frac{\partial}{\partial p_1} \right) K_{ac}^{(n)} = -X_a \frac{\partial K_{ac}^\beta}{\partial p_1} \\ + \sum_b \frac{N_b}{V} \int \frac{\partial \Phi_{ab}}{\partial q_1} \frac{\partial}{\partial p_1} \left(K_{ac}^\beta f_b^{(n)} + F_a^\beta K_{bc}^{(n)} + K_{ac}^{(n)} F_b^\beta \right. \\ \left. + f_a^{(n)} K_{bc}^\beta - \frac{V}{\beta N_b} K_{abc}^{(n-1)} - \frac{V}{\beta N_a} K_{bac}^{(n-1)} \right) dx_2$$

$$(25) \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{p_1}{m_a} \frac{\partial}{\partial q_1} + X_a \frac{\partial}{\partial p_1} \right) K_{acd}^{(n)} = -X_a \frac{\partial K_{acd}^\beta}{\partial p_1} \\ + \sum_b \frac{N_b}{V} \int \frac{\partial \Phi_{ab}}{\partial q_1} \frac{\partial}{\partial p_1} \left(K_{acd}^\beta f_b^{(n)} + F_a^\beta K_{bcd}^{(n)} \right. \\ \left. + K_{ac}^\beta K_{bd}^{(n)} + K_{ad}^\beta K_{bc}^{(n)} + K_{acd}^{(n)} F_b^\beta + K_{ac}^{(n)} K_{bd}^\beta \right. \\ \left. + K_{ad}^{(n)} K_{bc}^\beta + f_a^{(n)} K_{bcd}^\beta - \frac{V}{\beta N_b} K_{abcd}^{(n-1)} - \frac{V}{\beta N_a} K_{bacd}^{(n-1)} \right) dx_2.$$

Nous obtenons donc un système d'équations intégral-différentielles linéaires couplées dont l'opérateur différentiel est toujours le même. Ce système est essentiellement différent du système récurrentiel B-B-G-K-Y pour les F_a , F_{ab} , F_{abc} , ..., dont les équations ont des parties dynamiques de plus en plus compliquées (correspondant aux problèmes à 1, 2, 3, ..., corps).

$f_a^{(1)}$ est la solution de (20) pour $K_{ab} = 0$; nous commençons donc notre processus d'approximations successives par la solution de l'équation de Vlasov linéarisée. $f_a^{(2)}$ est la solution de

$$(26) \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{p_1}{m_a} \frac{\partial}{\partial q_1} + X_a \frac{\partial}{\partial p_1} \right) f_a^{(2)} = -X_a \frac{\partial F_a^\beta}{\partial p_1} \\ + \sum_b \frac{N_b}{V} \int \frac{\partial \Phi_{ab}}{\partial q_1} \frac{\partial}{\partial p_1} \left(F_a^\beta f_b^{(2)} + f_a^{(2)} F_b^\beta \right) dx_2 \\ - \sum_b \int \frac{\partial \Phi_{ab}}{\partial q_1} \frac{\partial}{\partial p_1} \left(K_{ab}^{(1)} - \frac{N_b}{N_a} K_{ba}^{(1)} \right) dx_2,$$

où $K_{ab}^{(1)}$ est la solution de (24). $K_{ab}^{(1)}$ dépend de $f_a^{(1)}$. L'équation (26) peut donc s'écrire sous la forme suivante :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{p_1}{m_a} \frac{\partial}{\partial q_1} + X_a \frac{\partial}{\partial p_1}\right) f_a^{(2)} + X_a \frac{\partial F_a^\beta}{\partial p_1} = \mathfrak{J}_1 f_a^{(2)} + \mathfrak{J} f_a^{(1)},$$

\mathfrak{J}_1 étant l'opérateur intégro-différentiel correspondant à l'équation de Vlasov linéarisée et \mathfrak{J}_2 étant l'opérateur de collision, défini par le dernier terme de (26) et par la dépendance de $K_{ab}^{(1)}$ de $f_a^{(1)}$. En poussant l'approximation plus loin, on obtient pour la fonction $f_a^{(3)}$ l'équation

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{p_1}{m_a} \frac{\partial}{\partial q_1} + X_a \frac{\partial}{\partial p_1}\right) f_a^{(3)} + X_a \frac{\partial F_a^\beta}{\partial p_1} = \mathfrak{J}_1 f_a^{(3)} + \mathfrak{J}_2 f_a^{(2)} + \mathfrak{J}_3 f_a^{(1)}$$

où \mathfrak{J}_3 représente la partie de la solution de (24) pour $n = 2$ qui tient compte de $K_{acd}^{(1)}$. En poursuivant ce processus et après le passage à la limite $n \rightarrow \infty$, on aura

$$(27) \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{p_1}{m_a} \frac{\partial}{\partial q_1} + X_a \frac{\partial}{\partial p_1}\right) f_a + X_a \frac{\partial F_a^\beta}{\partial p_1} = (\mathfrak{J}_1 + \mathfrak{J}_2 + \mathfrak{J}_3 + \dots) f_a.$$

L'équation (27) est une nouvelle représentation de l'équation cinétique générale (20). Nous obtenons des équations cinétiques approchées en négligeant les \mathfrak{J}_n à partir d'un certain n . Ces approximations admettent une interprétation physique très intuitive à l'aide de la série de Taylor fonctionnelle de f_a par rapport à φ :

$$(28) \quad f_a(x_1, t | \varphi) = f_a(x_1, t | 0) + \sum_b \int K_{ab}(x_1, x_2, t) \varphi_b(x_2) dx_2 \\ + \frac{1}{2!} \sum_{b,c} \int K_{abc}(x_1, x_2, x_3, t) \varphi_b(x_2) \varphi_c(x_3) dx_2 dx_3 + \dots$$

Négliger les \mathfrak{J}_n à partir de $n = 2$ équivaut à $K_{ab} = 0$, on néglige alors les corrélations. Négliger les \mathfrak{J}_n à partir de $n = 3$ est équivalent à $K_{abc} = 0$; cela s'interprète de la manière suivante : la première dérivée fonctionnelle de f_a représente une partie importante des corrélations pour les écarts de l'équilibre; l'annulation de la deuxième dérivée signifie donc que ces corrélations sont extrémales quand le champ extérieur est nul. Annuler K_{abcd} (négliger les \mathfrak{J}_n à partir de $n = 4$) signifie qu'une contribution supérieure des corrélations a un extrémum, etc. L'arrêt de la série de Taylor fonctionnelle qui est équivalent à l'arrêt de la série infinie d'opérateurs \mathfrak{J}_n n'est pas lié à l'existence de petits paramètres. Puisqu'il est impossible d'estimer la convergence de ce procédé d'approximations sous une forme générale, nous le jugerons plus tard sur ses conséquences. Le fait que notre procédé d'approximations successives commence avec l'équation de Vlasov linéarisée nous indique qu'il sera vraisemblablement valable pour des

systèmes qui montrent un comportement collectif. Ceux-ci sont des systèmes dont les particules interagissent par des forces de longue portée.

Nous nous spécialisons maintenant au cas d'un plasma complètement ionisé. Nous savons qu'une simple interaction coulombienne entre les particules ponctuelles conduit à une intégrale de collision divergente à cause de la singularité à courtes distances. Ce phénomène ne peut être évité par un artifice quelconque parce qu'il traduit le fait que les particules ne sont pas ponctuelles. Dans le chapitre VII, nous discuterons des possibilités de tenir compte des interactions simultanées de courte et de longue portée. Le plus souvent, on peut cependant tenir compte de la non-ponctualité des particules d'une manière plus sommaire par la méthode des fonctions de distribution tronquées.

Lorsque les particules ne sont pas ponctuelles, elles auront toutes des distances mutuelles supérieures ou égales à leur diamètre r_0 . On définit alors des fonctions de distribution qui tiennent compte de cette situation. Soit \mathcal{D}_s le sous-domaine de l'espace des phases pour la particule s , défini par $|q_s - q_1| \geq r_0$, q_1 étant la position fixe de la particule 1; soient $\mathcal{D} = \mathcal{D}_2 \times \mathcal{D}_3 \times \dots \times \mathcal{D}_N$ et $\mathcal{D}' = \mathcal{D}_3 \times \mathcal{D}_4 \times \dots \times \mathcal{D}_N$. La fonction de distribution tronquée

$$\tilde{F}_a(x_1, t) = \frac{V}{Q} \int_{\mathcal{D}} f_N(t) dx_2 \dots dx_N$$

est alors la densité de probabilité de trouver une particule en x_1 quand toutes les autres particules sont au moins à une distance r_0 de ce point. La distribution tronquée pour deux particules est définie par

$$\tilde{F}_{ab}(x_1, x_2, t) = \frac{V^2}{Q} \int_{\mathcal{D}'} f_N(t) dx_3 \dots dx_N.$$

La première équation de la hiérarchie pour les fonctions de distribution tronquées s'obtient par intégration de l'équation de Liouville sur le domaine \mathcal{D} . Après quelques transformations en intégrales de surface, on obtient

$$(29) \quad \frac{\partial \tilde{F}_a}{\partial t} + \left[\tilde{F}_a ; \frac{p_1^2}{2m_a} + \varphi_a \right] + X_a \frac{\partial \tilde{F}_a}{\partial p_1} + \sum_b \frac{N_b - \delta_{ab}}{V} \oint \left(\frac{p_1}{m_a} + \frac{\partial \varphi_a}{\partial p_1} - \frac{p_2}{m_b} - \frac{\partial \varphi_b}{\partial p_2} \right) \tilde{F}_{ab} dS_2 dp_2 - \sum_b \frac{N_b - \delta_{ab}}{V} \int \mathcal{D}_{ab} \frac{\partial \tilde{F}_{ab}}{\partial p_1} dx_2 = 0$$

avec la force tronquée

$$(30) \quad \mathfrak{g}_{ab} = \frac{q_1 - q_2}{|q_1 - q_2|} \Phi'_{ab}(|q_1 - q_2|) \theta(|q_1 - q_2| - r_0),$$

$\theta(x)$ étant 1 pour $x > 0$ et 0 pour $x < 0$.

Sous des conditions bien connues (cf. Grad [5]) on peut transformer l'intégrale de surface en intégrale de collisions boltzmannienne pour sphères dures. Lorsqu'on suppose, pour simplifier, que les diamètres des particules sont égaux pour les différentes espèces, cette intégrale de Boltzmann pour sphères dures peut être transformée après linéarisation suivant le procédé de Hilbert en deux termes, l'un étant $v_0(p_1)f_a(p_1, q_1, t)$ et l'autre un terme intégral que nous négligerons. La fréquence de choc v_0 est en principe une fonctionnelle de φ , mais nous supposons négligeable cette dépendance fonctionnelle. Si la densité n'est pas trop élevée, on peut négliger $\int \mathfrak{g}_{ab}(F_{ab} - \tilde{F}_{ab})dx_2$, c'est-à-dire, on peut omettre les tildes dans (29). Après soustraction de la partie équilibre, l'équation (29) devient dans cette approximation

$$(31) \quad \frac{\partial f_a}{\partial t} + v_0 f_a + \left[f_a ; \frac{p_1^2}{2m_a} + \varphi_a \right] + X_a \frac{\partial f_a}{\partial p_1} \\ = - X_a \frac{\partial F_a^\beta}{\partial p_1} + \sum_b \frac{N_b - \delta_{ab}}{V} \int \mathfrak{g}_{ab} \frac{\partial f_{ab}}{\partial p_1} dx_2,$$

où f_{ab} est donné dans la représentation (18); v_0 est une fonction connue de p . Mais lorsque les chocs proches sont des événements rares (une supposition raisonnable dans les plasmas complètement ionisés), on peut utiliser un v_0 moyen défini pour une impulsion moyenne. Le terme $v_0 f_a$ est alors un terme de relaxation qui garantit l'irréversibilité du processus.

V. — LE PLASMA COMPLÈTEMENT IONISÉ EN ÉQUILIBRE

Dans nos équations cinétiques interviennent les grandeurs de l'équilibre F_a^β et K_{ab}^β , etc., que nous devons calculer. La première équation de la hiérarchie pour le pseudo-équilibre est

$$(32) \quad \left[F_a^\beta(x_1) ; \frac{p_1^2}{2m_a} + \varphi_a(x_1) \right] = \sum_b \frac{N_b - \delta_{ab}}{V} \int \mathfrak{g}_{ab} \frac{\partial F_{ab}^\beta(x_1, x_2)}{\partial p_1} dx_2.$$

Elle détermine avec la relation fonctionnelle (17) les fonctions F_a^β et F_{ab}^β . Nous passons à la limite où $\varphi(x)$ ne dépend plus de p ($\varphi(x) \rightarrow \varphi(q)$). Avec les définitions

$$f_a^\beta(q_1) = Q_a e^{\beta \left(\frac{p_1^2}{2m_a} + \varphi_a \right)} F_a^\beta(x_1);$$

$$f_{ab}^\beta(q_1, q_2) = Q_a Q_b e^{\beta \left(\frac{p_1^2}{2m_a} + \frac{p_2^2}{2m_b} + \varphi_a + \varphi_b \right)} F_{ab}^\beta(x_1, x_2),$$

où $Q_a = \int \exp(-\beta p_1^2/2m_a) dp_1$, nous pouvons écrire (32) et (17) comme suit

$$(33) \quad \frac{\partial f_a^\beta(q_1)}{\partial q_1} + \frac{\beta}{V} \sum_b (N_b - \delta_{ab}) \int \vartheta_{ab} e^{-\beta \varphi_b(q_2)} f_{ab}^\beta(q_1, q_2) dq_2 = 0,$$

$$(34) \quad f_{ab}^\beta(q_1, q_2) = \frac{N_b}{N_b - \delta_{ab}} f_a^\beta(q_1) f_b^\beta(q_2) - \frac{V}{\beta(N_b - \delta_{ab})} e^{\beta \varphi_b(q_2)} \frac{\delta f_a^\beta(q_1)}{\delta \varphi_b(q_2)}.$$

Nous en déduisons un système d'équations pour f_a^β et les

$$k_{a_1 a_2 \dots a_n}^\beta = \lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{\delta^n f_{a_1}^\beta}{\delta \varphi_{a_2} \dots \delta \varphi_{a_n}}$$

comme pour les f au dernier chapitre.

$$(35) \quad \frac{\partial f_a^\beta(q_1)}{\partial q_1} + \sum_b \int \vartheta_{ab} \left(\frac{\beta N_b}{V} f_a^\beta(q_1) f_b^\beta(q_2) - k_{ab}^\beta(q_1, q_2) \right) dq_2 = 0,$$

$$(36) \quad \frac{\partial k_{ac}^\beta(q_1, q_3)}{\partial q_1} + \sum_b \int \vartheta_{ab} \left\{ \frac{\beta N_b}{V} (k_{ac}^\beta f_b^\beta + f_a^\beta k_{bc}^\beta) - k_{abc}^\beta \right\} dq_2 = \frac{\beta^2 N_c}{V} \vartheta_{ac} f_a^\beta f_c^\beta.$$

Nous supposons le plasma complètement ionisé et infini ($V \rightarrow \infty$, $N \rightarrow \infty$, $v = V/N < \infty$); le système est alors homogène et $f_a^\beta(q | 0) = 1$. La force tronquée est alors

$$\vartheta_{ab} = \zeta_a \zeta_b \vartheta(q_1 - q_2) = \zeta_a \zeta_b e^2 \frac{q_2 - q_1}{|q_2 - q_1|^3} \theta(|q_2 - q_1| - r_0).$$

Nous cherchons k_{ab}^β dans l'approximation $k_{abc}^\beta = 0$. Avec

$$k_{ab}^\beta(q_1, q_2) = \beta \zeta_a \zeta_b n_b g(q_1, q_2),$$

l'équation (36) devient

$$(37) \quad \frac{\partial g(q_1, q_3)}{\partial q_1} + \frac{\beta}{v} \zeta_{2,0} \int \vartheta(q_1 - q_2) g(q_2, q_3) dq_2 = \frac{\beta}{v} \vartheta(q_1 - q_3)$$

où $\zeta_{2,0} = \sum_b \zeta_b^2 n_b$ et $n_a = N_a/N$. La transformation de Fourier

$$(38) \quad f(q) = (2\pi)^{-3} \int e^{ikq} f(k) dk; \quad f(k) = \int e^{-ikq} f(q) dq$$

de la force tronquée $\vartheta(q_1 - q_2)$ s'écrit

$$(39) \quad \vartheta^\alpha(k) = i \frac{\partial}{\partial k^\alpha} \left\{ \frac{4\pi e^2}{k} \int_{r_0}^{\infty} \frac{-\sin kr}{r^2} dr \right\} = 4\pi i e^2 \frac{k^\alpha \sin kr_0}{k^2 kr_0}$$

En posant $k_D^2 = 4\pi \zeta_{2,0} \beta e^2 / v$, on tire de (37) la solution

$$(40) \quad g(k) = \frac{k_D^2}{\zeta_{2,0}} \left(k^2 + k_D^2 \frac{\sin kr_0}{kr_0} \right)^{-1} \frac{\sin kr_0}{kr_0}$$

Pour $r_0 = 0$, nous retrouvons après inversion le résultat bien connu de Debye-Hückel.

$$g(q_1, q_3) = g(|q_1 - q_3|) = \frac{k_D^2}{4\pi \zeta_{2,0}} e^{-k_D |q_1 - q_3|}$$

l'inverse de k_D étant appelé rayon de Debye.

Pour notre plasma infini les grandeurs F_a^β et K_{ab}^β seront

$$(41) \quad F_a^\beta(p_1) = Q_a^{-1} e^{-\beta \frac{p_1^2}{2m_a}}$$

$$(42) \quad K_{ab}^\beta(x_1, x_2) = \beta \zeta_a \zeta_b n_b F_a^\beta(p_1) F_b^\beta(p_2) g(q_1, q_2) - \beta \delta_{ab} \delta(x_1 - x_2) F_a^\beta(p_1),$$

ce qui résulte d'une comparaison de (34) et (17).

VI. — L'ÉQUATION CINÉTIQUE POUR UN PLASMA COMPLÈTEMENT IONISÉ DANS UN CHAMP ÉLECTRIQUE FAIBLE

Nous choisissons comme force extérieure X_a un champ électrique faible, $X_a(x_1, t) = e \zeta_a E(q_1, t)$, établi à l'instant $t = 0$. Pour une force faible, on peut négliger $X_a \frac{\partial f_a}{\partial p_1}$ dans la partie dynamique de l'équation cinétique (31)

qui s'écrit alors pour un plasma complètement ionisé, infini et globalement neutre $\left(\sum_a \zeta_a n_a = 0\right)$ dans l'approximation $K_{abc} = 0$ sous la forme du système d'équations

$$(43) \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{p_1}{m_a} \frac{\partial}{\partial q_1} + v_0\right) f_a(x_1, t) = -e\zeta_a \frac{\partial F_a^\beta}{\partial p_1} E(q_1, t) + \frac{1}{v} \sum_b \zeta_a \zeta_b n_b \frac{\partial F_a^\beta}{\partial p_1} \int \vartheta_{12} f_b(x_2, t) dx_2 - \frac{1}{\beta} \zeta_a \sum_b \zeta_b n_b \int \vartheta_{12} \frac{\partial}{\partial p_1} \left(\frac{1}{n_b} K_{ab} + \frac{1}{n_a} K_{ba}\right) dx_2,$$

$$(44) \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{p_1}{m_a} \frac{\partial}{\partial q_1} + v_0\right) K_{ac}(x_1, x_3, t) = -e\zeta_a \frac{\partial K_{ac}^\beta(x_1, x_3)}{\partial p_1} E(q_1, t) + \frac{1}{v} \sum_b \zeta_a \zeta_b n_b \int \vartheta_{12} \frac{\partial}{\partial p_1} (K_{bc} F_a^\beta + K_{bc}^\beta f_a + K_{ac}^\beta f_b) dx_2.$$

Nous avons utilisé la neutralité (ou l'extension infinie), ce qui entraînait

$$\sum_b \zeta_b n_b \int \vartheta_{12} F_b^\beta(p_2) dx_2 = \sum_b \zeta_b n_b \int \vartheta_{12} dq_2 = 0$$

Nous avons exclu de (24) les termes où $x_1 = x_3$; pour K_{ac}^β nous omettrons donc le deuxième terme de (42), tandis que K_{bc}^β est donné par l'expression complète (42). Le terme avec K_{bc}^β devient donc

$$\begin{aligned} & \frac{1}{v} \sum_b \zeta_b n_b \int \vartheta_{12} K_{bc}^\beta dx_2 \\ &= \frac{1}{v} \sum_b \zeta_b n_b \int \vartheta_{12} [\beta \zeta_b \zeta_c n_c F_b^\beta F_c^\beta g_{23} - \beta \delta_{bc} \delta(x_2 - x_3) F_b^\beta] dx_2 \\ &= \zeta_c n_c F_c^\beta \left(\frac{\beta \zeta_{2,0}}{v} \int \vartheta_{12} g_{23} dq_2 - \frac{\beta}{v} \vartheta_{13}\right) = -\zeta_c n_c F_c^\beta \frac{\partial g_{13}}{\partial q_1} \end{aligned}$$

en vertu de l'équation (37).

La grandeur $-\vartheta_{ab}$ est la force exercée par une particule 2 sur la particule 1, un rapprochement à une distance inférieure à r_0 étant exclu; cela veut dire qu'une particule sphérique ayant son centre au point q_1 sentirait un champ

électrique $\zeta_b e^{-1} \vartheta_{12}$ dû à la particule 2. Le champ moyen dû à toutes les particules est par conséquent

$$E^i(q_1, t) = - \sum_b \frac{n_b \zeta_b}{v e} \int \vartheta_{12} f_b(x_2, t) dx_2$$

A ce champ s'ajoute le champ appliqué E et nous avons le champ total dans le plasma $\delta = E^i + E$.

Compte tenu de ces remarques (44) s'écrit enfin

$$(45) \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{p_1}{m_a} \frac{\partial}{\partial q_1} + v_0 \right) K_{ac}(x_1, x_3, t) \\ = \zeta_a \frac{\partial F_a^\beta}{\partial p_1} \frac{1}{v} \sum_b \zeta_b n_b \int \vartheta_{12} K_{bc} dx_2 + G_{ac}(x_1, x_3, t)$$

avec

$$(46) \quad G_{ac}(x_1, x_3, t) = - \zeta_a \frac{\partial F_a^\beta}{\partial p_1} \zeta_c n_c F_c^\beta \frac{\partial g_{13}}{\partial q_1} - \beta e \zeta_a^2 \zeta_c n_c \frac{\partial F_a^\beta}{\partial p_1} F_c^\beta g_{13} \delta(q_1, t)$$

tandis que (43) s'écrit à l'aide de « l'intégrale de collisions »

$$(47) \quad J_a(x_1, t) = \frac{1}{\beta} \sum_b \zeta_b n_b \int \vartheta_{12} \left(\frac{1}{n_b} K_{ab} + \frac{1}{n_a} K_{ba} \right) dx_2$$

de la manière suivante

$$(48) \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{p_1}{m_a} \frac{\partial}{\partial q_1} + v_0 \right) f_a(x_1, t) = - e \zeta_a \frac{\partial F_a^\beta}{\partial p_1} \delta(q_1, t) - \zeta_a \frac{\partial J_a(x_1, t)}{\partial p_1}$$

A l'aide de la transformation de Laplace

$$(49) \quad f(x, s) = \int_0^\infty e^{-st} f(x, t) dt ; \quad f(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\sigma}^{i\infty+\sigma} e^{st} f(x, s) ds$$

(s complexe, $t \geq 0$, $\sigma > 0$) et de la transformation de Fourier, les équations (48) et (45) deviennent

$$(50) \quad \left(s + v_0 + i \frac{p_1 k_1}{m_a} \right) f_a(p_1, k_1, s) \\ = f_a^{\text{in}}(p_1, k_1) - e \zeta_a \frac{\partial F_a^\beta}{\partial p_1} \delta(k_1, s) - \zeta_a \frac{\partial J_a(p_1, k_1, s)}{\partial p_1},$$

$$(51) \quad \left(s + v_0 + i \frac{p_1 k_1}{m_a} \right) K_{ac}(p_1, p_3, k_1, k_3, s) = K_{ac}^{\text{in}}(p_1, p_3, k_1, k_3) \\ + G_{ac}(p_1, p_3, k_1, k_3, s) + \zeta_a \frac{\partial F_a^\beta}{\partial p_1} \frac{1}{v} \vartheta(k_1) K_b^{\text{II}}(p_3, k_1, k_3, s),$$

où
$$\mathbf{K}_a^{\text{II}}(p_1, k_1, k_3, s) = \sum_b \zeta_b n_b \int \mathbf{K}_{ba}(p, p_1, k_1, k_3, s) dp$$

et avec
$$\mathbf{K}_a^{\text{I}}(p_1, k_1, k_3, s) = \sum_a \zeta_c \int \mathbf{K}_{ac}(p_1, p, k_1, k_3, s) dp$$

nous écrivons (47) de la manière suivante

(52)
$$J_a(p_1, k_1, s) = \frac{(2\pi)^{-3}}{\beta} \int \vartheta(k) \left[\mathbf{K}_a^{\text{I}}(p_1, k_1 - k, k, s) + \frac{1}{n_a} \mathbf{K}_a^{\text{II}}(p_1, k, k_1 - k, s) \right] dk.$$

Nous introduisons l'abréviation

(53)
$$\Omega_a(p, k) = s + v_0 + i \frac{pk}{m_a}$$

La multiplication de (51) par $\zeta_a n_a \Omega_a^{-1}(p_1, k_1)$ suivie d'une sommation sur a et p_1 fournit

(54)
$$\begin{aligned} \mathbf{K}_c^{\text{II}}(p_3, k_1, k_3, s) &= \sum_a \zeta_a^2 n_a \int \Omega_a^{-1}(p_1, k_1) \frac{\partial F_a^\beta}{\partial p_1^\gamma} dp_1 \frac{1}{v} \vartheta^\gamma(k_1) \mathbf{K}_c^{\text{II}}(p_3, k_1, k_3, s) \\ &+ \sum_a \zeta_a n_a \int \Omega_a^{-1}(p_1, k_1) (\mathbf{G}_{ac}(p_1, p_3, k_1, k_3, s) + \mathbf{K}_{ac}^{\text{in}}(p_1, p_3, k_1, k_3)) dp_1. \end{aligned}$$

L'intégrale dans le premier terme à droite de (54) peut être ramenée à la première dérivée de la fonction de dispersion de plasma Z , définie par [6]

(55)
$$\begin{aligned} Z(z) &= i\sqrt{\pi} e^{-z^2} (1 + \Phi(z)) : \left[\int \Omega_a^{-1}(p_1, k) \frac{\partial F_a^\beta}{\partial p_1^\gamma} dp_1 \right. \\ &= \left. \left(\frac{\beta}{2\pi m_a} \right)^{3/2} \int \frac{\partial e^{-\frac{\beta p^2}{2m_a}}}{\partial p^\gamma} \Omega_a^{-1}(p, k) dp = -\frac{i\beta k^\gamma}{2k^2} Z' \left(\frac{i(s + v_0)}{|k| u_a} \right) \right]. \end{aligned}$$

$u_a = (\beta m_a / 2)^{-1/2}$. Les indices $\alpha, \gamma, \delta, \dots = (1, 2, 3)$ indiquent les composantes vectorielles (sommation sur indices égaux). Deux indices séparés par une virgule auront toujours la signification suivante :

$$\zeta_{m,n} = \sum_a \frac{\zeta_a^m n_a}{m_a^n}; \quad Z_{m,n}(z) = \sum_a \frac{\zeta_a^m n_a}{m_a^n} Z(z_a).$$

Avec la définition

(56)
$$\Delta(k, s) = 1 + \frac{i\beta k^\gamma \vartheta^\gamma(k)}{2v k^2} Z_{2,0}' \left(\frac{i(s + v_0)}{|k| u} \right)$$

nous pouvons exprimer K_c^{II} par des grandeurs connues :

$$(57) \quad K_c^{\text{II}}(p_3, k_1, k_3, s) \\ = \Delta^{-1}(k_1, s) \sum_a \zeta_a n_a \int \Omega_a^{-1}(p_1, k_1) G_{ac}(p_1, p_3, k_1, k_3, s) dp_1 + \Delta^{-1}(k_1, s) K_c^{\text{II in}}$$

La substitution de ce résultat dans (51) donne la solution K_{ac} en fonction de f , soit :

$$(58) \quad K_{ac}(p_1, p_3, k_1, k_3, s) = \Omega_a^{-1}(p_1, k_1) \left\{ K_{ac}^{\text{in}} + \zeta_a \frac{\partial F_a^\beta}{\partial p_1} \frac{1}{v} \vartheta(k_1) \Delta^{-1}(k_1, s) K_c^{\text{II in}} \right. \\ \left. + \zeta_a \frac{\partial F_a^\beta}{\partial p_1} \frac{1}{v} \vartheta(k_1) \Delta^{-1}(k_1, s) \sum_b \zeta_b n_b \int \Omega_b^{-1}(p_2, k_1) G_{bc}(p_2, p_3, k_1, k_3, s) dp_2 \right. \\ \left. + G_{ac}(p_1, p_3, k_1, k_3, s) \right\} :$$

par simple sommation, nous trouvons ensuite

$$(59) \quad K_a^{\text{I}}(p_1, k_1, k_3, s) = K_a^{\text{I in}} + \Omega_a^{-1}(p_1, k_1) \sum_c \zeta_c \int G_{ac}(p_1, p_3, k_1, k_3, s) dp_3 \\ + \zeta_a \frac{\partial F_a^\beta}{\partial p_1} \frac{1}{v} \vartheta(k_1) \Delta^{-1}(k_1, s) \Omega_a^{-1}(p_1, k_1) \\ \sum_{b,c} \zeta_c \zeta_b n_b \int \int \Omega_b^{-1}(p_2, k_1) G_{bc}(p_2, p_3, k_1, k_3, s) dp_2 dp_3.$$

Nous déterminons maintenant quelques intégrales. La transformée de Fourier et de Laplace de G_{ac} , définie par (46), s'écrit :

$$(60) \quad G_{ac}(p_1, p_3, k_1, k_3, s) = -\beta e \zeta_a^2 \zeta_c n_c \frac{\partial F_a^\beta}{\partial p_1} F_c^\beta g(k_3) \mathcal{E}(k_1 + k_3, s) \\ + \zeta_a \zeta_c n_c F_c^\beta i k_3 g(k_3) \frac{\partial f_a(k_1 + k_3, p_1, s)}{\partial p_1}$$

A partir de (60) on calcule :

$$\sum_a \zeta_a n_a \int \Omega_a^{-1}(p_1, k_1) G_{ac}(p_1, p_3, k_1, k_3, s) dp_1 \\ = \frac{i\beta^2}{2} e \zeta_c n_c F_c^\beta g(k_3) \frac{k_1^2}{k_1^2} Z'_{3,0} \left(\frac{i(s + v_0)}{|k_1| u} \right) \mathcal{E}'(k_1 + k_3, s) \\ + \zeta_c n_c F_c^\beta i k_3 g(k_3) \sum_a \zeta_a^2 n_a \int \Omega_a^{-1}(p_1, k_1) \frac{\partial f_a(k_1 + k_3, p_1, s)}{\partial p_1} dp_1,$$

$$\begin{aligned} & \sum_{b,c} \zeta_c \zeta_b n_b \int \int \Omega_b^{-1}(p_2, k_1) G_{bc}(p_2, p_3, k_1, k_3, s) dp_2 dp_3 \\ &= \frac{i\beta^2}{2} e \zeta_{2,0} g(k_3) \frac{k_1^\gamma}{k_1^2} Z'_{3,0} \left(\frac{i(s+v_0)}{|k_1|u} \right) \mathcal{E}^\gamma(k_1 + k_3, s) \\ &+ \zeta_{2,0} i k_3 g(k_3) \sum_a \zeta_a^2 n_a \int \Omega_a^{-1}(p_1, k_1) \frac{\partial f_a(k_1 + k_3, p_1, s)}{\partial p_1} dp_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_c \zeta_c \int G_{ac}(p_1, p_3, k_1, k_3, s) dp_3 &= -\beta e \zeta_a^2 \zeta_{2,0} \frac{\partial F_a^\beta}{\partial p_1^\gamma} g(k_3) \mathcal{E}^\gamma(k_1 + k_3, s) \\ &+ \zeta_a \zeta_{2,0} i k_3 g(k_3) \frac{\partial f_a(k_1 + k_3, p_1, s)}{\partial p_1}. \end{aligned}$$

La substitution de ces résultats dans (52) nous fournit le $J_a(p_1, k_1, s)$ cherché. Nous remarquons qu'il y a quatre types de termes. Nous regroupons ces termes de la manière suivante :

$$\begin{aligned} (61) \quad J_a(p_1, k_1, s) &= J_a^{\text{in}}(p_1, k_1, s) - e M_a^{\alpha\gamma}(p_1, k_1, s) \mathcal{E}^\gamma(k_1, s) \\ &+ P_a^{\alpha\gamma}(p_1, k_1, s) \frac{\partial f_a(p_1, k_1, s)}{\partial p_1^\gamma} \\ &+ \int N_a^{\alpha\gamma}(k, p_1, k_1, s) \sum_b \zeta_b^2 n_b \int \Omega_b^{-1}(p, k) \frac{\partial f_b(p, k_1, s)}{\partial p^\gamma} dp dk. \end{aligned}$$

J_a^{in} est la contribution due aux conditions initiales. Pour M, P et N, nous trouvons

$$\begin{aligned} (62) \quad M_a^{\alpha\gamma} &= \\ (2\pi)^{-3} \int \mathcal{G}^\alpha(k) &\left[-\frac{i\beta}{2v} \zeta_{2,0} \zeta_a \frac{\partial F_a^\beta}{\partial p_1^\delta} \mathcal{G}^\delta(k_1 - k) g(k) \Omega_a^{-1}(p_1, k_1 - k) \Delta^{-1}(k_1 - k, s) \right. \\ &\times \frac{(k_1 - k)^\gamma}{|k_1 - k|^2} Z'_{3,0} \left(\frac{i(s+v_0)}{|k_1 - k|u} \right) + \zeta_{2,0} \zeta_a^2 \frac{\partial F_a^\beta}{\partial p_1^\gamma} g(k) \Omega_a^{-1}(p_1, k_1 - k) \\ &\left. - \frac{i\beta}{2} \zeta_a F_a^\beta g(k_1 - k) \Delta^{-1}(k, s) \frac{k^\gamma}{k^2} Z'_{3,0} \left(\frac{i(s+v_0)}{|k|u} \right) \right] dk, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (63) \quad N_a^{\alpha\gamma} &= \frac{(2\pi)^{-3}}{\beta} i(k_1 - k)^\gamma g(k_1 - k) \Delta^{-1}(k, s) \\ &\left[\frac{1}{v} \zeta_{2,0} \zeta_a \frac{\partial F_a^\beta}{\partial p_1^\delta} \mathcal{G}^\alpha + (k_1 - k) \mathcal{G}^\delta(k) \Omega_a^{-1}(p_1, k) + \mathcal{G}^\alpha(k) \zeta_a F_a^\beta \right], \end{aligned}$$

$$(64) \quad P_a^{\alpha\gamma} = \frac{(2\pi)^{-3}}{\beta} \zeta_{2,0} \zeta_a \int \mathcal{G}^\alpha(k) i k^\gamma g(k) \Omega_a^{-1}(p_1, k_1 - k) dk.$$

La substitution de (61) dans (50) nous donne l'équation cinétique recherchée

$$(65) \quad \begin{aligned} \Omega_a(p_1, k_1) f_a(p_1, k_1, s) = & f_a^{\text{in}}(p_1, k_1) - \zeta_a \frac{\partial J_a^{\text{in}}}{\partial p_1} - e \zeta_a \delta^\gamma \left(\frac{\partial F_a^\beta}{\partial p_1^\gamma} - \frac{\partial M_a^{\alpha\gamma}(p_1, k_1, s)}{\partial p_1^\alpha} \right) \\ & - \zeta_a \frac{\partial}{\partial p_1^\alpha} P_a^{\alpha\gamma}(p_1, k_1, s) \frac{\partial}{\partial p_1^\gamma} f_a(p_1, k_1, s) \\ & - \zeta_a \frac{\partial}{\partial p_1^\alpha} \int N_a^{\alpha\gamma}(k, p_1, k_1, s) \sum_b \zeta_b^2 n_b \int \Omega_b^{-1}(p, k) \frac{\partial f_b(p, k_1, s)}{\partial p^\gamma} dp dk. \end{aligned}$$

Notre équation cinétique pour champ faible ne décrit pas seulement la réponse linéaire à un champ appliqué, mais l'évolution du système sous l'effet du champ total. (65) satisfait notre exigence selon laquelle l'équation cinétique approchée doit décrire aussi bien les phénomènes collectifs que la relaxation vers un état stationnaire. En effet, le terme proportionnel à δ exprime le comportement collectif du système, $- e \zeta_a \frac{\partial F_a^\beta}{\partial p_1^\alpha} \delta$ étant le terme de Vlasov linéarisé et $\frac{\partial M}{\partial p}$ étant une correction à ce terme due aux corrélations; elle exprime, entre autre, la déformation des sphères de Debye. Le terme en $P_a^{\alpha\gamma}$ est du type Fokker-Planck. Il décrit le phénomène de relaxation du système vers un état stationnaire dû aux interactions de longue portée qui s'ajoute à celui dû aux chocs proches décrits par ν_0 . Le terme en $N_a^{\alpha\gamma}$ ne s'interprète pas facilement. Il est intéressant de remarquer que le terme Fokker-Planck ainsi qu'une partie du terme en $N_a^{\alpha\gamma}$ ressemblent fort à ceux trouvés par Berk [7] à partir d'un modèle où les ions sont fixes, distribués statistiquement et décrits par un potentiel du type Debye, tandis que les électrons forment un fluide vlasovien.

VII. — ÉQUATIONS CINÉTIQUES EN PRÉSENCE DE FORCES DE COURTE PORTÉE

Le procédé d'approximation qui consiste à annuler l'un des « coefficients » $K_{ab \dots n}$ de la série de Taylor fonctionnelle suivant φ s'est avéré valable pour l'étude des interactions de longue portée; il fournit en effet en première approximation l'effet d'écran (dans le cas de l'équilibre) et les phénomènes collectifs (hors de l'équilibre). Ces phénomènes n'existant pas dans les systèmes à interaction de courte portée seule, nous en concluons que ce procédé d'approximation n'est plus valable dans ce cas-là. Si nous nous

rappelons l'interprétation donnée à cette technique d'approximation, cela nous paraît également plausible, car les corrélations dues aux interactions de courte portée ne sauraient produire la même réaction vis-à-vis d'un champ extérieur que les forces de longue portée.

Pour l'étude d'un système de particules qui interagissent par des forces de courte portée, nous devons donc trouver un autre procédé d'approximation. Pour rester dans le même esprit d'approximation — nous avons l'intention d'appliquer la nouvelle méthode simultanément avec la méthode pour interaction de longue portée, afin d'obtenir une équation cinétique pour un plasma partiellement ionisé — nous cherchons à nouveau une représentation fonctionnelle de f_{ab} . Nous en obtenons une, très simplement, en considérant f_a et f_{ab} comme fonctionnelles d'une fonction $u(\varphi)$. Pour que ce changement de variable ait un sens, il faut que les techniques d'approximation étudiées précédemment conduisent encore à des systèmes fermés d'équations; nous devons en plus exiger $u(0) = 0$. Une étude détaillée montre que la classe des fonctions $u(\varphi)$ satisfaisant à ces conditions est très restreinte. L'arbitraire qui nous reste sera levé en s'imposant de retrouver dans le cas de l'équilibre pour f_{ab}^β la série des clusters irréductibles de Mayer de deuxième espèce. On peut montrer que cette exigence est satisfaite par la transformation

$$(66) \quad 1 + vu_a = e^{-\beta\varphi_a}$$

La relation (18) devient alors, à cause de $\frac{\delta f_a}{\delta\varphi_b} = -\frac{\beta}{v}(1 + vu_b)\frac{\delta f_a}{\delta u_b}$:

$$(67) \quad f_{ab}(x_1, x_2, t | u) = F_a^\beta f_b + f_a F_b^\beta + \frac{1}{n_b}(1 + vu_b)\frac{\delta f_a}{\delta u_b} + \frac{1}{n_a}(1 + vu_a)\frac{\delta f_b}{\delta u_a}.$$

Les particules qui n'interagissent qu'à travers des forces de longue portée sont une idéalisation ponctuelle, une approximation. Toutes les particules réelles interagissent suivant une loi qui diffère, à courte distance, des lois de Coulomb, de Newton, etc. Nous écrivons $\Phi = \Phi^l + \Phi^c$, Φ^l étant le potentiel d'interaction de longue portée, Φ^c celui de courte portée, le premier pouvant être éventuellement nul.

Nous séparons l'intégrale de choc dans (19) en deux parties correspondant aux contributions de courte et de longue portée; il vient :

$$(68) \quad \frac{\partial f_a}{\partial t} + \left[f_a; \frac{p_1^2}{2m_a} + \varphi_a \right] + X_a \frac{\partial f_a}{\partial p_1} \\ = -X_a \frac{\partial F_a^\beta}{\partial p_1} + \sum_b \frac{n_b}{v} \int \frac{\partial \Phi_{ab}^l}{\partial q_1} \frac{\partial f_{ab}^l}{\partial p_1} dx_2 + \sum_b \frac{n_b}{v} \int \frac{\partial \Phi_{ab}^c}{\partial q_1} \frac{\partial f_{ab}^c}{\partial p_1} dx_2,$$

où f'_{ab} et f^c_{ab} sont les deux représentations (18) et (67) de la même grandeur f_{ab} . Nous avons maintenant le choix entre les deux procédés suivants pour approcher l'équation (68) [8] :

A) Nous considérons f_a comme fonctionnelle des deux variables indépendantes φ et u . Nous posons $K_{abc} = 0$. Avec $\Phi'_{ab} = \zeta_a \zeta_b v \Psi_{12}$ (68) s'écrit

$$(69) \quad \frac{\partial f_a}{\partial t} + \left[f_a ; \frac{p_1^2}{2m_a} + \varphi_a \right] + X_a \frac{\partial f_a}{\partial p_1} = - X_a \frac{\partial F_a^\beta}{\partial p_1} \\ + \sum_b \zeta_a \zeta_b n_b \int \frac{\partial \Psi_{12}}{\partial q_1} \frac{\partial}{\partial p_1} \left[F_a^\beta f_b + f_a F_b^\beta - \frac{v}{\beta n_b} \frac{\delta f_a}{\delta \varphi_b} - \frac{v}{\beta n_a} \frac{\delta f_b}{\delta \varphi_a} \right] dx_2 \\ + \frac{1}{v} \sum_b n_b \int \frac{\partial \Phi_{ab}^c}{\partial q_1} \frac{\partial}{\partial p_1} \left[F_a^\beta f_b + f_a F_b^\beta + \frac{1}{n_b} (1 + v u_b) \frac{\delta f_a}{\delta u_b} + \frac{1}{n_a} (1 + v u_a) \frac{\delta f_b}{\delta u_a} \right] dx_2.$$

Avec la définition

$$h_{a_1 a_2 \dots a_n} = \left. \frac{\delta f_{a_1}}{\delta u_{a_2} \dots \delta u_{a_n}} \right|_{u=0}$$

l'équation (69) devient pour $u = \varphi = 0$ et pour un système infini :

$$(70) \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{p_1}{m_a} \frac{\partial}{\partial q_1} + X_a \frac{\partial}{\partial p_1} \right) f_a = - X_a \frac{\partial F_a^\beta}{\partial p_1} \\ + \sum_b \zeta_a \zeta_b n_b \int \frac{\partial \Psi_{12}}{\partial q_1} \frac{\partial}{\partial p_1} \left[F_a^\beta f_b - \frac{v}{\beta n_b} K_{ab} - \frac{v}{\beta n_a} K_{ba} \right] dx_2 \\ + \frac{1}{v} \sum_b n_b \int \frac{\partial \Phi_{ab}^c}{\partial q_1} \frac{\partial}{\partial p_1} \left[F_a^\beta f_b + \frac{1}{n_b} h_{ab} + \frac{1}{n_a} h_{ba} \right] dx_2.$$

Pour déterminer K_{ab} et h_{ab} , nous dérivons (69) aux points $x_1 \neq x_3$ d'une part par rapport à u , d'autre part, par rapport à φ et nous passons ensuite aux limites $u, \varphi \rightarrow 0$. Cela donne

$$(71) \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{p_1}{m_a} \frac{\partial}{\partial q_1} + X_a \frac{\partial}{\partial p_1} \right) K_{ac} = - X_a \frac{\partial K_{ac}^\beta}{\partial p_1} \\ + \sum_b \zeta_a \zeta_b n_b \int \frac{\partial \Psi_{12}}{\partial q_1} \frac{\partial}{\partial p_1} \left[K_{ac}^\beta f_b + F_a^\beta K_{bc} + f_a K_{bc}^\beta \right] dx_2 \\ + \frac{1}{v} \sum_b n_b \int \frac{\partial \Phi_{ab}^c}{\partial q_1} \frac{\partial}{\partial p_1} \left[K_{ac}^\beta f_b + F_a^\beta K_{bc} + f_a K_{bc}^\beta + \frac{1}{n_b} \mathcal{K}_{acb} + \frac{1}{n_a} \mathcal{K}_{bca} \right] dx_2,$$

$$\begin{aligned}
 (72) \quad & \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{p_1}{m_a} \frac{\partial}{\partial q_1} + X_a \frac{\partial}{\partial p_1} \right) h_{ac} = -X_a \frac{\partial h_{ac}^\beta}{\partial p_1} \\
 & + \sum_b \zeta_a \zeta_b n_b \int \frac{\partial \Psi_{12}}{\partial q_1} \frac{\partial}{\partial p_1} \left[h_{ac}^\beta f_b + F_a^\beta h_{bc} + f_a h_{bc}^\beta - \frac{v}{\beta n_b} \mathcal{K}_{abc} - \frac{v}{\beta n_a} \mathcal{K}_{bac} \right] dx_2 \\
 & + \frac{\partial \Phi_{ac}^c}{\partial q_1} \frac{\partial h_{ac}}{\partial p_1} + \frac{1}{v} \sum_b n_b \int \frac{\partial \Phi_{ab}^c}{\partial q_1} \frac{\partial}{\partial p_1} \left[h_{ac}^\beta f_b + F_a^\beta h_{bc} + f_a h_{bc}^\beta + \frac{1}{n_b} h_{abc} + \frac{1}{n_a} h_{bac} \right] dx_2
 \end{aligned}$$

$$\text{où} \quad \mathcal{K}_{abc} = \left. \frac{\delta^2 f_a}{\delta \varphi_b \delta u_c} \right|_{\varphi=u=0}.$$

Pour cette grandeur, nous trouvons l'équation

$$\begin{aligned}
 (73) \quad & \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{p_1}{m_a} \frac{\partial}{\partial q_1} + X_a \frac{\partial}{\partial p_1} \right) \mathcal{K}_{acd} \\
 & = -X_a \frac{\partial \mathcal{K}_{acd}}{\partial p_1} + \frac{\partial \Phi_{ad}^c}{\partial q_1} \frac{\partial \mathcal{K}_{acd}}{\partial p_1} + \sum_b \zeta_a \zeta_b n_b \int \frac{\partial \Psi_{12}}{\partial q_1} \frac{\partial}{\partial p_1} \left[\mathcal{K}_{acd}^\beta f_b \right. \\
 & \quad + K_{ac}^\beta h_{bd} + h_{ad}^\beta K_{bc} + F_a^\beta \mathcal{K}_{bcd} + K_{ac} h_{bd}^\beta + h_{ad} K_{bc}^\beta + f_a \mathcal{K}_{bcd}^\beta \left. \right] dx_2 \\
 & + \frac{1}{v} \sum_b n_b \int \frac{\partial \Phi_{ac}^c}{\partial q_1} \frac{\partial}{\partial p_1} \left[\mathcal{K}_{acd}^\beta f_b + K_{ac}^\beta h_{bd} + h_{ad}^\beta K_{bc} + F_a^\beta \mathcal{K}_{bcd} + K_{ac} h_{bd}^\beta \right. \\
 & \quad \left. + h_{ad} K_{bc}^\beta + f_a \mathcal{K}_{bcd}^\beta + \frac{1}{n_b} \mathcal{K}_{acbd} + \frac{1}{n_a} \mathcal{K}_{bcad} \right] dx_2.
 \end{aligned}$$

A l'aide d'un développement impropre suivant les puissances de r_0^3/v (r_0 étant le diamètre des particules), $f_a = f_a^0 + v^{-1} f_a^1 + \dots$, nous pouvons approcher le système d'une manière cohérente. Ce développement est impropre en ce sens que le terme de longue portée dépend de la densité par l'intermédiaire du rayon de Debye. Le développement formel suivant la densité (en réalité suivant r_0^3/v) se justifie dans la mesure où on trouve à l'aide de ce procédé la série des clusters dans le cas de l'équilibre (cf. Bogolioubov [9]).

f_a^0 est la solution pour l'interaction de longue portée seule. A l'ordre suivant, f_a^1 fait intervenir les forces de courte portée. Ceci nécessite la solution du système de quatre équations

$$\begin{aligned}
 (74) \quad & \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{p_1}{m_a} \frac{\partial}{\partial q_1} + X_a \frac{\partial}{\partial p_1} \right) f_a^1 \\
 & = \sum_b \zeta_a \zeta_b n_b \int \frac{\partial \Psi_{12}}{\partial q_1} \frac{\partial}{\partial p_1} \left[F_a^\beta f_b^1 - \frac{v}{\beta n_b} K_{ab}^1 - \frac{v}{\beta n_a} K_{ba}^1 \right] dx_2 \\
 & + \sum_b n_b \int \frac{\partial \Phi_{ab}^c}{\partial q_1} \frac{\partial}{\partial p_1} \left[F_a^\beta f_b^0 + \frac{1}{n_b} h_{ab}^0 + \frac{1}{n_a} h_{ba}^0 \right] dx_2,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(75) \quad & \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{p_1}{m_a} \frac{\partial}{\partial q_1} + X_a \frac{\partial}{\partial p_1} \right) h_{ac}^0 \\
& = -X_a \frac{\partial h_{ac}^\beta}{\partial p_1} + \frac{\partial \Phi_{ac}^c}{\partial q_1} \frac{\partial h_{ac}^0}{\partial p_1} + \sum_b \zeta_a \zeta_b n_b \int \frac{\partial \Psi_{12}}{\partial q_1} \frac{\partial}{\partial p_1} [h_a^\beta f_b^0 \\
& \quad + F_a^\beta h_{bc}^0 + f_a^0 h_{bc}^\beta - \frac{v}{\beta n_b} \mathcal{K}_{abc}^0 - \frac{v}{\beta n_a} \mathcal{K}_{bac}^0] dx_2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(76) \quad & \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{p_1}{m_a} \frac{\partial}{\partial q_1} + X_a \frac{\partial}{\partial p_1} \right) K_{ac}^1 \\
& = \sum_b \zeta_a \zeta_b n_b \int \frac{\partial \Psi_{12}}{\partial q_1} \frac{\partial}{\partial p_1} [K_{ac}^\beta f_b^1 + F_a^\beta K_{bc}^1 + f_a^1 K_{bc}^\beta] dx_2 \\
& \quad + \sum_b n_b \int \frac{\partial \Phi_{ac}^c}{\partial q_1} \frac{\partial}{\partial p_1} \left[K_{ac}^\beta f_b^0 + F_a^\beta K_{bc}^0 + f_a^0 K_{bc}^\beta + \frac{1}{n_b} \mathcal{K}_{acb}^0 + \frac{1}{n_a} \mathcal{K}_{bca}^0 \right] dx_2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(77) \quad & \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{p_1}{m_a} \frac{\partial}{\partial q_1} + X_a \frac{\partial}{\partial p_1} \right) \mathcal{K}_{acd}^0 \\
& = -X_a \frac{\partial \mathcal{K}_{acd}^\beta}{\partial p_1} + \sum_b \zeta_a \zeta_b n_b \int \frac{\partial \Psi_{12}}{\partial q_1} \frac{\partial}{\partial p_1} [\mathcal{K}_{acd}^\beta f_b^0 + K_{ac}^\beta h_{bd}^0 + F_a^\beta \mathcal{K}_{bcd}^0 \\
& \quad + h_{ad}^\beta K_{bc}^0 + K_{ac}^0 h_{bd}^\beta + h_{ad}^0 K_{bc}^\beta + f_a^0 \mathcal{K}_{bcd}^\beta] dx_2 + \frac{\partial \Phi_{ad}^c}{\partial q_1} \frac{\partial \mathcal{K}_{acd}^0}{\partial p_1}.
\end{aligned}$$

B) Les variables u et φ ne sont pas indépendantes, mais liées par (66). On a alors $h_{abc} = K_{abc} - v h_{ab} \delta_{bc} \delta(x_2 - x_3)$. On peut donc utiliser pour f_{ab}^l et f_{ab}^c la représentation (67) et introduire $K_{abc} = 0$ en mettant

$$h_{abc} = -v h_{ab} \delta_{bc} \delta(x_2 - x_3)$$

au terme avec Φ_{ab}^l . Après cette opération, nous pouvons utiliser une argumentation semblable à celle qui permit au chapitre IV d'éviter le recours aux petits paramètres pour fermer le système, en annulant un des « coefficients » de la série de Taylor fonctionnelle suivant u ; $h_{abc} = 0$ devrait être une bonne approximation et définir une équation cinétique assez satisfaisante pour un plasma de particules non ponctuelles, ainsi que pour un plasma partiellement ionisé.

Remarquons que dans les deux cas (A) et (B), on doit résoudre des systèmes correspondants pour l'équilibre. Nous n'exploiterons pas ces méthodes dans ce travail, parce que les résultats essentiels que nous envisageons peuvent être obtenus à l'aide du terme de relaxation v_0 .

VIII. — SOLUTION APPROCHÉE
DE L'ÉQUATION CINÉTIQUE
POUR UN PLASMA COMPLÈTEMENT IONISÉ
DANS UN CHAMP ÉLECTRIQUE
FAIBLE ET HOMOGENÈ

Jusqu'ici nous avons étudié des équations cinétiques approchées dont la seule approximation était suggérée par le type de loi d'interaction. L'équation (65) a été établie, par exemple, par la seule approximation $K_{abc} = 0$. Une solution générale de (65) serait encore trop compliquée et nous sommes amené à utiliser un procédé d'approximations pour (65) qui est suggéré par une situation particulière où se trouve le système physique.

Nous considérons maintenant le cas particulier d'un système homogène. Nous supposons que le système se trouve à l'équilibre jusqu'à l'instant $t = 0$ où le champ électrique E , homogène et faible, est appliqué. f^{in} et J^{in} sont donc nuls. Les deux traits caractéristiques du plasma, le comportement collectif et la relaxation due aux interactions de longue portée, sont décrits respectivement par le terme vlasovien et le terme Fokker-Planck. Nous allons résoudre (65) par approximations successives en commençant par la solution f_a^0 d'une équation cinétique raccourcie qui tient compte des deux phénomènes en ordre dominant. La contribution dominante du terme vlasovien est évidemment $-e\zeta_a \frac{\partial F_a^\beta}{\partial p_1^\gamma} \varepsilon$. La partie dominante du terme Fokker-Planck sera caractérisée par un $P_a^{l\alpha\gamma}$ que nous allons déterminer. L'équation raccourcie s'écrit donc

$$(78) \quad (s + \nu_0)f_a^0 = -e\zeta_a \frac{\partial F_a^\beta}{\partial p_1^\gamma} \varepsilon^\gamma - \zeta_a \frac{\partial}{\partial p_1^\alpha} P_a^{l\alpha\gamma} \frac{\partial}{\partial p_1^\gamma} f_a^0$$

Nous nous contenterons pour nos applications de l'approximation suivante qu'on obtient en portant f_a^0 dans (50) tout en considérant ε comme paramètre donné :

$$(79) \quad (s + \nu_0)f_a = -e\zeta_a \frac{\partial F_a^\beta}{\partial p_1^\gamma} \varepsilon^\gamma - \zeta_a \frac{\partial}{\partial p_1^\alpha} J_a^\alpha(p_1, 0, s | f_a^0, \varepsilon)$$

Nous écrivons le terme Fokker-Planck dans (78) sous la forme $-\nu_a f_a^0$ en analogie avec l'effet des chocs proches. La solution de (78) s'écrit alors

$$(80) \quad f_a^0(p_1, s) = -\frac{e\zeta_a \frac{\partial F_a^\beta}{\partial p_1^\gamma} \varepsilon^\gamma}{s + \nu_0 + \nu_a(p_1, s)} = \frac{\beta e \zeta_a}{m_a} \frac{(p\varepsilon) F_a^\beta}{s + \nu_0 + \nu_a(p_1, s)}$$

et le coefficient de relaxation v_a ainsi défini est une solution de l'équation

$$(81) \quad v_a(p_1, s) f_a^0 = \zeta_a \frac{\partial}{\partial p_1^\alpha} P_a^{I\alpha\gamma} \frac{\partial}{\partial p_1^\gamma} f_a^0.$$

Le tenseur $P_a^{\alpha\gamma}$ est donné par

$$(82) \quad P_a^{\alpha\gamma}(p, k_1, s) = \frac{(2\pi)^{-3}}{\beta} \zeta_{2,0} \zeta_a \int \mathfrak{G}^\alpha(k) i k^\gamma g(k) \Omega_a^{-1}(p_1, -k) dk$$

Puisque $P_a^{\alpha\gamma} = P_a^{\gamma\alpha}$ et que p est le seul paramètre vecteur de l'intégrale, $P_a^{\alpha\gamma}$ peut s'écrire sous la forme

$$P_a^{\alpha\gamma}(p) = A(p) p_\alpha p_\gamma + B(p) \delta_{\alpha\gamma},$$

A et B étant des fonctions scalaires de p . Nous les déterminons facilement quand nous connaissons les grandeurs

$$C(p) = P_a^{\alpha\gamma} p_\alpha p_\gamma = A(p) p^4 + B(p) p^2; \quad D(p) = P_a^{\alpha\gamma} \delta_{\alpha\gamma} = A(p) p^2 + 3B(p).$$

Un bref calcul algébrique nous fournit

$$P_a^{\alpha\gamma}(p) = \left(\frac{D(p)}{2p^2} - \frac{3C(p)}{2p^4} \right) (p^2 \delta_{\alpha\gamma} - p_\alpha p_\gamma) + \delta_{\alpha\gamma} \frac{C(p)}{p^2}.$$

A partir de (82), nous calculons

$$(83) \quad D_a(p) = P_a^{\alpha\gamma} \delta_{\alpha\gamma} = -\zeta_a \frac{4\pi e^2}{\beta} k_D^2 (2\pi)^{-3} \int A(k) \Omega_a^{-1}(p, -k) dk,$$

avec l'abréviation

$$(84) \quad A(k) = \left(\frac{\sin kr_0}{kr_0} \right)^2 \left(k^2 + k_D^2 \frac{\sin kr_0}{kr_0} \right)^{-1}$$

$k^2 + k_D^2 \frac{\sin kr_0}{kr_0}$ n'ayant pas de racine réelle pour $r_0 < r_D$, l'intégrale dans (83) est absolument convergente pour $r_0 \neq 0$, $v_0 > 0$. Nous évaluons également

$$(85) \quad \begin{aligned} C_a(p) &= P_a^{\alpha\gamma} p_\alpha p_\gamma = -\zeta_a \frac{4\pi e^2}{\beta} k_D^2 (2\pi)^{-3} \int A(k) \frac{(pk)^2}{k^2} \Omega_a^{-1}(p, -k) dk \\ &= \zeta_a \frac{4\pi e^2}{\beta} k_D^2 m_a^2 (s + v_0) (2\pi)^{-3} \left\{ \int \frac{A(k)}{k^2} \Omega_a^{-1}(p, -k) dk - \int \frac{A(k)}{k^2} dk \right\}. \end{aligned}$$

Pour $r_0 = 0$, les deux intégrales de la dernière ligne de (85) sont absolument

convergentes, tandis que $D(p)$ est divergent à cause de l'allure de l'intégrant pour grand k . Cela nous amène à considérer $D(p)$ comme la partie dominante de $P_a^{\alpha\gamma}$. Nous choisissons donc

$$(86) \quad P_a^{I\alpha\gamma}(p) = \frac{D_a(p)}{2p^2} (p^2\delta_{\alpha\gamma} - p_\alpha p_\gamma),$$

$$(87) \quad P_a^{II\alpha\gamma}(p) = -\frac{C_a(p)}{2p^4} (p^2\delta_{\alpha\gamma} + 3p_\alpha p_\gamma) = P_a^{\alpha\gamma} - P_a^{I\alpha\gamma}.$$

P_a^I a quelques propriétés facilement vérifiables qui nous seront utiles :

$$(88) \quad P_a^{I\alpha\gamma} p^\alpha = 0; \quad P_a^{I\alpha\gamma} p^\gamma = 0; \quad (p^2\delta_{\alpha\gamma} - p_\alpha p_\gamma)\delta_{\alpha\gamma} = 2p^2,$$

$$(89) \quad P_a^{I\alpha\gamma} \varepsilon^\alpha \varepsilon^\gamma = [p^2 \varepsilon^2 - (p\varepsilon)^2] \frac{D_a(p)}{2p^2}$$

$$(90) \quad \frac{\partial P_a^{I\alpha\gamma}}{\partial p^\alpha} = -p^\gamma \frac{D_a(p)}{p^2}$$

Revenons à la résolution de (81). Si v_a dépend de ε , il en dépend à travers le produit scalaire $(p\varepsilon)$. A part cela, v_a ne saurait dépendre que du module de l'impulsion, puisque F_a^β et, comme on le montre facilement, $D_a(p)$ dépendent seulement de $|p|$. Nous avons donc

$$(91) \quad \frac{\partial f_a^0}{\partial p^\gamma} = \frac{\beta e \zeta_a}{m_a} \left[-\frac{\beta p^\gamma}{m_a} \frac{(p\varepsilon) F_a^\beta}{s + v_0 + v_a} + \frac{\varepsilon^\gamma F_a^\beta}{s + v_0 + v_a} - \frac{(p\varepsilon) F_a^\beta}{(s + v_0 + v_a)^2} \left(\frac{\partial v_a}{\partial |p|} \frac{p^\gamma}{|p|} + \frac{\partial v_a}{\partial (p\varepsilon)} \varepsilon^\gamma \right) \right],$$

$$(92) \quad \frac{\partial^2 f_a^0}{\partial p^\alpha \partial p^\gamma} = \frac{\beta e \zeta_a}{m_a} \left[-\frac{\beta}{m_a} \delta_{\alpha\gamma} \frac{(p\varepsilon) F_a^\beta}{s + v_0 + v_a} - 2 \frac{\varepsilon^\alpha \varepsilon^\gamma F_a^\beta}{(s + v_0 + v_a)^2} \frac{\partial v_a}{\partial (p\varepsilon)} \varepsilon^\gamma + \frac{2(p\varepsilon) F_a^\beta}{(s + v_0 + v_a)^3} \left(\frac{\partial v_a}{\partial (p\varepsilon)} \right)^2 \varepsilon^\alpha \varepsilon^\gamma - \frac{(p\varepsilon) F_a^\beta}{(s + v_0 + v_a)^2} \left(\frac{\partial v_a}{\partial |p|} \frac{\delta_{\alpha\gamma}}{|p|} + \frac{\partial^2 v_a}{\partial (p\varepsilon)^2} \varepsilon^\alpha \varepsilon^\gamma \right) \right] + \text{termes proportionnels à } p^\alpha \text{ ou } p^\gamma.$$

Nous portons maintenant (90), (91) et (92) dans

$$v_a f_a^0 = \zeta_a \left[\left(\frac{\partial P_a^{I\alpha\gamma}}{\partial p_1^\alpha} \right) \frac{\partial f_a^0}{\partial p_1^\gamma} + P_a^{I\alpha\gamma} \frac{\partial^2 f_a^0}{\partial p_1^\alpha \partial p_1^\gamma} \right]$$

Cela donne à cause de (88) et de (89) :

$$v_a = -\zeta_a \frac{D_a(p)}{p^2} \left[1 - \frac{(p\delta)^2}{s + v_0 + v_a} \frac{\partial v_a}{\partial(p\delta)} \right] + \zeta_a \frac{p^2 \delta^2 - (p\delta)^2 D_a(p)}{(p\delta) 2p^2} \\ \left[\frac{-2}{s + v_0 + v_a} \frac{\partial v_a}{\partial(p\delta)} + \frac{2(p\delta)}{(s + v_0 + v_a)^2} \left(\frac{\partial v_a}{\partial(p\delta)} \right)^2 - \frac{(p\delta)}{s + v_0 + v_a} \frac{\partial^2 v_a}{\partial(p\delta)^2} \right]$$

Nous en tirons immédiatement la solution

$$(93) \quad v_a(p) = -\zeta_a \frac{D_a(p)}{p^2}.$$

La substitution de (93) et (80) dans (79) nous donne la solution f_a de l'équation cinétique (65) dans l'approximation envisagée.

IX. — LA CONDUCTIVITÉ ÉLECTRIQUE D'UN PLASMA COMPLÈTEMENT IONISÉ

Nous supposons le champ électrique de la forme $E = E_0 e^{-i\omega t}$, $E_0 = \text{const.}$ En excluant la présence d'un champ magnétique, nous nous bornons à l'étude de la conductivité scalaire $\sigma(\omega)$.

Le courant électrique est donné par

$$(94) \quad j^\alpha(s) = \sigma_{\alpha\gamma}(s) \mathcal{E}^\gamma(s) = \frac{e}{v} \sum_a \frac{\zeta_a n_a}{m_a} \int p_1^\alpha f_a(p_1, s) dp_1.$$

La substitution de (79) dans (94) fournit

$$(95) \quad j^\alpha(s) = \frac{e^2}{v} \sum_a \frac{\zeta_a^2 n_a}{m_a} \int [F_a^\beta \delta_{\alpha\gamma} - M_a^{\alpha\gamma}(p_1, 0, s) \\ - \zeta_a P_a^{\alpha\delta}(p_1, 0, s) \frac{\partial}{\partial p_1^\delta} \left((s + v_0 + v_a)^{-1} \frac{\partial F_a^\beta}{\partial p_1^\gamma} \right) - \int N_a^{\alpha\delta}(k, p_1, 0, s) \sum_b \zeta_b^3 n_b \\ \int \Omega_b^{-1}(p, k) \frac{\partial}{\partial p^\delta} \left((s + v_0 + v_b)^{-1} \frac{\partial F_b^\beta}{\partial p^\gamma} \right) dp dk] dp_1 \frac{\mathcal{E}^\gamma(s)}{s + v_0}.$$

Nous nous intéressons aux résultats asymptotiques pour un temps assez grand après l'établissement du champ extérieur. Dans cette limite, le champ induit oscille avec la fréquence imprimée ω et $\delta \sim (s + i\omega)^{-1}$. On obtient donc le tenseur de conductivité électrique asymptotique en mettant $-i\omega$

à la place de s dans (95). Nous substituons (62), (63) et (64) dans (95); grâce à (55) et avec les définitions

$$(96) \quad \mathfrak{F}(k, s) = \frac{2}{\beta^2} \int k^\alpha k^\beta \Omega_a^{-1}(p, -k) \frac{\partial}{\partial p^\delta} \left((s + v_0 + v_a)^{-1} \frac{\partial F_a^\beta}{\partial p^\alpha} \right) dp$$

$$= \frac{2k^2}{\beta m_a} \int \left(-\Omega_a^{-1}(p, -k) + (s + v_0) \Omega_a^{-2}(p, -k) \right) \frac{F_a^\beta}{s + v_0 + v_a} dp$$

et

$$(97) \quad \tilde{\Delta}(k, s) = 1 + \frac{i\beta \zeta_{2,0} k^\alpha \mathfrak{F}^\alpha(k)}{2v \zeta_{3,1} k^2} Z'_{3,1} = 1 - \frac{k_D^2}{2\zeta_{3,1} k^2} \frac{\sin kr_0}{kr_0} Z'_{3,1} \left(\frac{i(s + v_0)}{|k|u} \right),$$

nous obtenons la conductivité scalaire asymptotique [10] :

$$(98) \quad \sigma(\omega) = \frac{1}{3} \sigma_{aa}$$

$$= \frac{e^2 \zeta_{2,1}}{v(v_0 - i\omega)} + \frac{e^2}{v_0 - i\omega} \frac{k_D^4}{6\zeta_{2,0}^2} (2\pi)^{-3} \int \frac{A(k)}{k^2} \left[Z'_{4,1} \left(\frac{\omega + iv_0}{|k|u} \right) + \mathfrak{F}_{4,1}(k, -i\omega) \right.$$

$$\left. - \frac{\zeta_{3,1}}{\zeta_{2,0}} \frac{\tilde{\Delta}(k, -i\omega)}{\Delta(k, -i\omega)} \left(Z'_{3,0} \left(\frac{\omega + iv_0}{|k|u} \right) + \mathfrak{F}_{3,0}(-k, -i\omega) \right) \right] dk.$$

Nous effectuons maintenant l'intégration sur les angles :

$$(99) \quad \int \frac{A(k)}{k^2} \mathfrak{F}_a(k, -i\omega) dk = -\frac{2\pi}{\beta} \int_0^\infty \int_{-1}^1 A(k) \frac{2k^2}{m_a}$$

$$\left(\frac{1}{v_0 - i\omega - i \frac{pkX}{m_a}} - \frac{v_0 - i\omega}{\left(v_0 - i\omega - i \frac{pkX}{m_a} \right)^2} \right) \frac{F_a^\beta}{v_0 - i\omega + v_a} dX dp dk$$

$$= -\frac{4\pi i}{\beta} \int_0^\infty k A(k) \left[\text{Log} \frac{v_0 - i\omega - i \frac{pk}{m_a}}{v_0 - i\omega + i \frac{pk}{m_a}} + \frac{2(v_0 - i\omega) \frac{ipk}{m_a}}{(v_0 - i\omega)^2 + \left(\frac{pk}{m_a} \right)^2} \right]$$

$$\frac{1}{|p|} \frac{F_a^\beta}{v_0 - i\omega + v_a} dp dk$$

Nous utilisons le même signe pour le vecteur d'onde et son module. Quand

les limites d'intégration sont indiquées, k est le module. A l'aide de la définition

$$(100) \quad \tilde{\mathfrak{F}}(k, -i\omega) = -\frac{ik}{\beta} \int \left[\text{Log} \frac{v_0 - i\omega - i\frac{pk}{m_a}}{v_0 - i\omega + i\frac{pk}{m_a}} + 2 \frac{(v_0 - i\omega)i\frac{pk}{m_a}}{(v_0 - i\omega)^2 + \left(\frac{pk}{m_a}\right)^2} \right] \frac{1}{|p|} \frac{F_a^\beta}{v_0 - i\omega + v_a} dp,$$

nous substituons (99) dans (98) pour obtenir

$$(101) \quad \sigma(\omega) = \frac{\omega_0^2}{4\pi(v_0 - i\omega)} + \frac{e^2}{v_0 - i\omega} \frac{k_D^4}{12\pi^2 \zeta_{2,0}}$$

$$\int_0^\infty A(k) \left[Z'_{4,1} + \tilde{\mathfrak{F}}_{4,1}(k, -i\omega) - \frac{\zeta_{3,1}}{\zeta_{2,0}} \frac{\tilde{\Delta}}{\Delta} (Z'_{3,0} + \mathfrak{F}_{3,0}(-k, -i\omega)) \right] dk$$

où

$$\omega_0^2 = \frac{4\pi e^2}{v} \zeta_{2,1}.$$

X. — EXPRESSION LIMITE DE σ POUR HAUTES FRÉQUENCES

Quand la fréquence du champ appliqué est suffisamment élevée, la relaxation Fokker-Planck ne sera pratiquement pas sensible durant une période des oscillations et nous pouvons négliger v_a . Alors l'intégrale (96) devient

$$\mathfrak{F}_{m,n} = \frac{2}{\beta^2} \frac{1}{s + v_0} \int k^\alpha k^\beta \Omega_a^{-1}(p, -k) \frac{\partial^2 F_a^\beta}{\partial p^\alpha \partial p^\beta} dp$$

$$= -\frac{i}{\sqrt{2\beta}} \frac{|k|}{s + v_0} Z_{m,n+1/2}'' \left(\frac{i(s + v_0)}{|k|u} \right)$$

En vertu de l'identité $Z'(iz) - i(2z)^{-1}Z''(iz) = iz^{-1}Z(iz)$, que nous pouvons écrire dans notre cas

$$Z'_{m,n} - \frac{i|k|}{\sqrt{2\beta}} \frac{1}{v_0 - i\omega} Z_{m,n+1/2}'' = \frac{i|k|}{v_0 - i\omega} \sqrt{\frac{2}{\beta}} Z_{m,n+1/2},$$

l'expression (98) devient [11] :

$$(102) \quad \sigma(\omega) = \frac{\omega_0^2}{4\pi(v_0 - i\omega)} + \frac{ie^2 k_D^2}{(v_0 - i\omega)^2} \frac{\omega_0^2 (2\beta)^{1/2}}{\zeta_{2,1} 12\pi^2} \int_0^\infty kA(k) \left[Z_{4,3/2} \left(\frac{\omega + iv_0}{ku} \right) - \frac{\zeta_{3,1}}{\zeta_{2,0}} \frac{\tilde{\Delta}(k, -i\omega)}{\Delta(k, -i\omega)} Z_{3,1/2} \left(\frac{\omega + iv_0}{ku} \right) \right] dk.$$

Pour un plasma symétrique ($\zeta_{2,0} = 1$) et dans la limite d'une masse ionique infinie, on a $\zeta_{2,1} = -\zeta_{3,1} = 1/2m_e$ et $2\Delta - \tilde{\Delta} = 1$. (102) devient alors

$$(103) \quad \sigma(\omega) = \frac{\omega_0^2}{4\pi(v_0 - i\omega)} + \frac{ie^2}{(v_0 - i\omega)^2} \frac{\omega_0^2 (2\beta)^{1/2}}{\zeta_{2,1} 12\pi^2} \int_0^\infty k_D^2 kA(k) \frac{Z\left(\frac{\omega + iv_0}{ku_e}\right)}{4m_e^{3/2} \Delta(k, -i\omega)} dk.$$

Quand nous portons l'identité $Z'(iz) = -2(1 + izZ(iz))$ dans (56), nous trouvons

$$\Delta(k, -i\omega) = 1 + \frac{k_D^2}{2k^2} \left(1 + \frac{\omega + iv_0}{ku_e} Z\left(\frac{\omega + iv_0}{ku_e}\right) \right)$$

ce qui donne

$$\frac{Z\left(\frac{\omega + iv_0}{ku_e}\right)}{\Delta(k, -i\omega)} = \frac{2k^3 u_e}{ik_D^2(v_0 - i\omega)} \left(1 - \frac{k^2 + k_D^2/2}{k^2 \Delta(k, -i\omega)} \right).$$

(103) s'écrit donc finalement

$$(104) \quad \sigma(\omega) = \frac{\omega_e^2}{4\pi(v_0 - i\omega)} + \frac{e^2 \omega_e^2}{6\pi^2 m_e (v_0 - i\omega)^3} \int_0^\infty k^4 A(k) \left(1 - \frac{k^2 + k_D^2/2}{k^2 \Delta(k, -i\omega)} \right) dk$$

Pour $v_0 = 0, r_0 = 0$, l'intégrale diverge et il faut introduire une coupure arbitraire; on a alors le résultat de Oberman et Dawson [12] :

$$(105) \quad \sigma(\omega) = i \frac{\omega_e^2}{4\pi\omega} \left[1 + \frac{2e^2}{3\pi m_e \omega^2} \int_0^{k \max} \frac{k^4}{k^2 + k_D^2} \left(\frac{k^2 + k_D^2/2}{k^2 \Delta(k, -i\omega)} - 1 \right) dk \right]$$

XI. — EXPRESSION LIMITE DE σ POUR BASSES FRÉQUENCES

Nous transformons d'abord une partie de l'intégrale de (101) pour faire ressortir le terme dominant pour basses fréquences. Nous avons besoin pour cela de deux expressions facilement vérifiables à partir de (83) :

$$v_a(p) = -\zeta_a \frac{D_a(p)}{p^2} = \frac{e^2}{\pi\beta} m_a \zeta_a^2 k_D^2 \frac{1}{p^3} \int_0^\infty ikA(k) \operatorname{Log} \frac{v_0 - i\omega - i\frac{pk}{m_a}}{v_0 - i\omega + i\frac{pk}{m_a}} dk,$$

$$\frac{d}{dp} (p^3 v_a(p)) = \frac{e^2}{\pi\beta} m_a \zeta_a^2 k_D^2 \frac{1}{p} \int_0^\infty ikA(k) \left(-\frac{ipk}{m_a} \right) \frac{2(v_0 - i\omega)}{(v_0 - i\omega)^2 + \left(\frac{pk}{m_a} \right)^2} dk.$$

A l'aide de ces deux expressions, nous exprimons l'intégrale de la manière suivante

$$\int_0^\infty A(k) \tilde{\mathcal{F}}_{4,1} dk = \frac{\pi}{e^2 m_a \zeta_a^2 k_D^2} \left[- \int \frac{v_a p^2 F_a^\beta}{v_0 - i\omega + v_a} dp + \int \frac{(p^3 v_a)' F_a^\beta}{v_0 - i\omega + v_a} dp \right].$$

La partie de la conductivité correspondant à cette intégrale devient alors

$$-\frac{\omega_0^2}{4\pi(v_0 - i\omega)} + \frac{\beta e^2}{3v} \sum_a \frac{\zeta_a^2 n_a}{m_a^2} \int \frac{p^2 F_a^\beta}{v_0 - i\omega + v_a} dp + \frac{1}{v_0 - i\omega} \frac{\beta \omega_0^2}{12\pi \zeta_{2,1}} \sum_a \frac{\zeta_a^2 n_a}{m_a^2} \int \frac{(p^3 v_a)' F_a^\beta}{v_0 - i\omega + v_a} dp.$$

En portant ce résultat dans (101), nous obtenons une autre écriture pour la même grandeur $\sigma(\omega)$:

(106)

$$\begin{aligned} \sigma(\omega) = & \frac{\beta e^2}{3v} \sum_a \frac{\zeta_a^2 n_a}{m_a^2} \int \frac{p^2 F_a^\beta}{v_0 - i\omega + v_a} dp + \frac{1}{v_0 - i\omega} \frac{\beta \omega_0^2}{12\pi \zeta_{2,1}} \sum_a \frac{\zeta_a^2 n_a}{m_a^2} \int \frac{(p^3 v_a)' F_a^\beta}{v_0 - i\omega + v_a} dp \\ & + \frac{e^2}{v_0 - i\omega} \frac{k_D^4}{12\pi^2 \zeta_{2,0}} \int_0^\infty A(k) \left[Z'_{4,1} - \frac{\zeta_{3,1}}{\zeta_{2,0}} \frac{\tilde{\Delta}}{\Delta} (Z'_{3,0} + \tilde{\mathcal{F}}_{3,0}(-k, -i\omega)) \right] dk. \end{aligned}$$

Le premier terme de cette expression est la conductivité qu'on obtiendrait

dans l'approximation (80). Ce terme est la contribution dominante pour les basses fréquences, où la relaxation de longue portée peut intervenir efficacement.

Quand $|v_0 - i\omega| \ll |v_a|$, nous pouvons développer ce terme suivant les puissances de $(v_0 - i\omega)$; nous nous contentons du premier ordre, linéaire en $(v_0 - i\omega)$:

$$(107) \quad \sigma(\omega) = \frac{\beta e^2}{3v} \sum_a \frac{\zeta_a^2 n_a}{m_a^2} \int \frac{p^2 F_a^\beta}{v_0 - i\omega + v_a} dp$$

$$= \sigma_0(\omega) - (v_0 - i\omega) \frac{\beta e^2}{3v} \sum_a \frac{\zeta_a^2 n_a}{m_a^2} \int \frac{p^2 F_a^\beta}{v_a(p)^2} dp,$$

avec

$$(108) \quad \sigma_0(\omega) = \frac{\beta e^2}{3v} \sum_a \frac{\zeta_a^2 n_a}{m_a^2} \int \frac{p^2 F_a^\beta}{v_a(p)} dp$$

$$= 4\pi \frac{\beta e^2}{3v} \sum_a \frac{\zeta_a^2 n_a}{m_a^2} \int_0^\infty \frac{p^7 e^{-\frac{\beta p^2}{2m_a}}}{\Lambda_a(p)} dp \cdot \left(\frac{\beta}{2\pi m_a}\right)^{3/2},$$

où nous avons introduit la grandeur

$$\Lambda_a(p) = p^3 v_a(p) = \frac{e^2}{\pi\beta} \zeta_a^2 m_a k_D^2 \int_0^\infty ik \Lambda(k) \operatorname{Log} \frac{v_0 - i\omega - i\frac{pk}{m_a}}{v_0 - i\omega + i\frac{pk}{m_a}} dk$$

Nous passons aux coordonnées sans dimensions

$$y = p/p_0, \quad p_0 = \sqrt{\frac{2m_a}{\beta}} :$$

$$\sigma_0(\omega) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{\beta e^2}{3v} \sum_a \frac{\zeta_a^2 n_a}{m_a^2} \left(\frac{2m_a}{\beta}\right)^{5/2} \int_0^\infty \frac{y^7 e^{-y^2}}{\Lambda_a(p_0 y)} dy$$

et nous approchons l'intégrale par la méthode du col en suivant de près un calcul analogue de Margenau [13]; on a

$$(109) \quad \int_0^\infty \frac{y^7 e^{-y^2}}{\Lambda_a(p_0 y)} dy = \int_0^\infty e^{-x(y)} dy \approx e^{-x(y_0)} \sqrt{\frac{2\pi}{\chi''(y_0)}}$$

y_0 étant la plus grande racine positive de $\chi'(y_0) = 0$, et

$$\chi(y) = y^2 - 7 \operatorname{Log} y + \operatorname{Log} \Lambda_a(p_0 y),$$

$$\chi'(y) = 2y - \frac{7}{y} + \frac{\Lambda'_a}{\Lambda_a}; \quad \chi''(y) = 2 + \frac{7}{y^2} + \left(\frac{\Lambda'_a}{\Lambda_a}\right)'$$

Nous calculons d'abord la dérivée logarithmique de Λ_a :

$$\frac{\Lambda'_a}{\Lambda_a} = - (v_0 - i\omega) \frac{\int_0^\infty kA(k) \frac{\frac{2ip_0k}{m_a}}{(v_0 - i\omega)^2 + \frac{p_0^2k^2y^2}{m_a^2}} dk}{\int_0^\infty kA(k) \operatorname{Log} \frac{v_0 - i\omega - i\frac{p_0ky}{m_a}}{v_0 - i\omega + i\frac{p_0ky}{m_a}} dk}$$

Cette grandeur est petite avec $(v_0 - i\omega)$ et nous pouvons résoudre l'équation $\chi'(y_0) = 0$ par approximations successives. Puisque nous bornons notre calcul au premier ordre en $(v_0 - i\omega)$, nous pouvons annuler $(v_0 - i\omega)$ sous les intégrales :

$$(110) \quad \frac{\Lambda'_a}{\Lambda_a} = (v_0 - i\omega) \frac{2m_a}{\pi p_0 \tilde{k}} \frac{1}{y^2} = (v_0 - i\omega) \frac{\kappa_a}{y^2},$$

$$(111) \quad \tilde{k} = \frac{\int_0^\infty kA(k) dk}{\int_0^\infty A(k) dk}.$$

(110), porté dans $\chi'(y_0) = 0$, nous donne en première approximation

$$y_0^2 = \frac{7}{2} - \frac{\kappa_a}{\sqrt{14}} (v_0 - i\omega)$$

et l'intégrale (109) est alors

$$(112) \quad \int_0^\infty \frac{y^7 e^{-y^2}}{\Lambda_a(p_0 y)} dy \approx e^{-\frac{7}{2} + \frac{\kappa_a}{\sqrt{14}} (v_0 - i\omega)} \left(\frac{7}{2} - \frac{\kappa_a}{\sqrt{14}} (v_0 - i\omega) \right)^{\frac{7}{2}} \Lambda_a^{-1}(p_0 y_0) \sqrt{2\pi}$$

$$\left(2 + \frac{7}{\frac{7}{2} - \frac{\kappa_a}{\sqrt{14}} (v_0 - i\omega)} - \frac{2\kappa_a (v_0 - i\omega)}{\left(\frac{7}{2} - \frac{\kappa_a}{\sqrt{14}} (v_0 - i\omega) \right)^{3/2}} \right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Quand nous approchons Λ_a comme en (110), nous obtenons

$$\Lambda_a(p_0 y_0) = \frac{y_0^2}{\kappa_a} \frac{\Lambda'_a(p_0 y_0)}{v_0 - i\omega} = \frac{y_0^2}{\kappa_a} \frac{2e^2}{\pi\beta} p_0 \zeta_a^2 k_D^2 \int_0^\infty \frac{k^2 A(k)}{(v_0 - i\omega)^2 + \frac{p_0^2 y_0^2 k^2}{m_a^2}} dk$$

Nous ne retenons que les termes dominants ($r_0 = 0$ pour toutes les expressions qui ne divergent pas dans cette limite), ce qui correspond au choix de P_a^I . Il vient alors

$$\Lambda_a(p_0 y_0) = \frac{\pi e^2}{2\beta} \zeta_a^2 m_a k_D^2 \tilde{k} \left(k_D + \frac{m_a(v_0 - i\omega)}{p_0 y_0} \right)^{-1}.$$

L'intégrale (112) s'écrit au premier ordre en $(v_0 - i\omega)$:

$$e^{-7/2} \left(\frac{7}{2}\right)^{7/2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} [1 + 14^{-3/2} \kappa_a (v_0 - i\omega)] \Lambda_a^{-1}(p_0 y_0).$$

Le facteur numérique devant le crochet est 3,03. Sa valeur exacte serait 3. La méthode du col donne visiblement une bonne approximation. Nous avons ainsi

$$(113) \quad \sigma_0(\omega) = \frac{64}{\pi^{3/2}} \frac{1}{v} \sum_a \frac{n_a}{\sqrt{2\beta m_a}} \frac{1}{k_D} \frac{k_D}{\tilde{k}} \left[1 + \frac{\sqrt{2\beta m_a}}{\sqrt{14}} \left(\frac{1}{14\pi\tilde{k}} + \frac{1}{k_D} \right) (v_0 - i\omega) \right]$$

En tenant compte de la contribution $\int v_a^{-2} p^2 F_a^\beta dp$ dans l'approximation d'ordre zéro, il vient finalement

$$(114) \quad \sigma(\omega) = \sigma_0(\omega) - (v_0 - i\omega) 315 \frac{\beta e^2}{v} \sum_a \frac{\zeta_a^2 n_a}{m_a^2} \left(\frac{m_a}{\beta} \right)^4 \left(\frac{e^2}{\beta} m_a \zeta_a^2 k_D^2 \int_0^\infty k A(k) dk \right)^{-2}.$$

(114) donne, pour $\omega = 0$, la conductivité électrique pour un champ continu faible où les contributions d'ordre $0(v_0^2)$ sont négligées. Quand on néglige complètement les chocs proches, on obtient pour une masse ionique infinie

$$(115) \quad \sigma = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{3/2} \left[\beta^{3/2} m_e^{1/2} e^2 \zeta_i \int_0^\infty k A(k) dk \right]^{-1}.$$

Dans la limite $r_0 = 0$, il faut choisir une coupure arbitraire k_{\max} . Pour $k_{\max} = \frac{3}{\sqrt{\zeta_{2,0}}} \frac{1}{\beta e^2}$, on retrouve le résultat bien connu de Spitzer :

$$\sigma = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{3/2} \left[\frac{1}{2} \beta^{3/2} m_e^{1/2} e^2 \zeta_i \operatorname{Log} \left(\frac{3}{\zeta_i e^3} \sqrt{\frac{v}{2\pi\beta^3}} \right) \right]^{-1}.$$

XII. — UN SYSTÈME FINI DE PARTICULES CHARGÉES A L'ÉTAT D'ÉQUILIBRE

Nous n'avons pas étudié jusqu'ici des systèmes finis, bien que notre formalisme fonctionnel le permette. Si le rayon de Debye qui décrit l'effet d'écran est beaucoup plus petit que les dimensions géométriques du système, les phénomènes de surface seront insensibles à l'intérieur du système et on obtient les résultats essentiels en supposant celui-ci infini. Quand le rayon de Debye est de l'ordre de grandeur des dimensions du système ou même plus grand, ce qui arrive pour très faibles densités et pour des températures extrêmement élevées, nous devons tenir compte de l'extension finie du système.

Nous étudions l'équilibre d'un système de particules en interaction coulombienne, enfermé dans une sphère de rayon R . Nous supposons la paroi dénuée de propriétés matérielles. Nous devons résoudre l'équation (33) avec (34). Nous ne pouvons plus nous servir de la transformation de Fourier; par contre, nous pouvons développer $f_a^\beta(q)$ en série de puissances de la constante de couplage e^2 [14] :

$$(116) \quad f_a^\beta(q | \varphi) = f_a^{\beta(0)}(q | \varphi) + e^2 f_a^{\beta(1)}(q | \varphi) + e^4 f_a^{\beta(2)}(q | \varphi) + \dots$$

$f_a^{\beta(0)}$ est évidemment la solution en l'absence d'interactions entre les particules. Dans ce cas, nous avons $D_N^\beta = Q^{-1} \exp(-\beta \sum_{a,i} \varphi_a(q_i))$ et il vient

$$(117) \quad f_a^{\beta(0)}(q | \varphi) = \frac{V}{W_a(\varphi)}; \quad W_a(\varphi) = \int_V e^{-\beta \varphi_a(q)} dq.$$

Par définition, on a $\int F_a^\beta(q) dq = \int f_a^\beta(q | \varphi) \exp(-\beta \varphi_a(q)) dq = V$. Puisque $\int f_a^{\beta(0)}(q | \varphi) \exp(-\beta \varphi_a(q)) dq = V$, il s'ensuit

$$(118) \quad \int f_a^{\beta(n)}(q | \varphi) e^{-\beta \varphi_a(q)} dq = 0, \quad \text{pour } n > 0.$$

Dès lors, la méthode de calcul des approximations successives de l'équation (33) n'offre plus de difficulté. $f_a^{\beta(0)}$ étant connu, on trouve

$$(119) \quad \frac{\delta f_a^{\beta(0)}(q_1 | \varphi)}{\delta \varphi_b(q_2)} = \frac{\beta V \delta_{ab}}{W_a^2(\varphi)} e^{-\beta \varphi_b(q_2)}.$$

En substituant (117) et (119) dans l'équation pour $f_a^{\beta(1)}$, il vient

$$\frac{\partial f_a^{\beta(1)}(q_1 | \varphi)}{\partial q_1} + \sum_b \zeta_a \zeta_b \int \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{1}{|q_1 - q_2|} \right) \left[\frac{\beta N_b}{V} f_a^{\beta(0)}(q_1 | \varphi) f_b^{\beta(0)}(q_2 | \varphi) e^{-\beta \varphi_b(q_2)} - \frac{\delta f_a^{\beta(0)}(q_1 | \varphi)}{\delta \varphi_b(q_2)} \right] dq_2 = 0 ;$$

on obtient après intégration

$$f_a^{\beta(1)}(q_1 | \varphi) = -\beta V \sum_b \zeta_a \zeta_b \frac{N_b - \delta_{ab}}{W_a W_b} S_b(q_1 | \varphi) + C(\varphi)$$

avec

$$(120) \quad S_a(q_1 | \varphi) = \int_V \frac{\exp[-\beta \varphi_a(q_2)]}{|q_1 - q_2|} dq_2 ; \quad S_a(q_1 | 0) = S(q_1).$$

On détermine la constante d'intégration $C(\varphi)$ à l'aide de (118). En posant l'abréviation

$$(121) \quad S_{ab}(\varphi) = \int_V S_a(q | \varphi) e^{-\beta \varphi_b(q)} dq ; \quad S_{ab}(0) = S_0,$$

on trouve

$$(122) \quad f_a^{\beta(1)}(q_1 | \varphi) = \beta V \sum_b \zeta_a \zeta_b \frac{N_b - \delta_{ab}}{W_a W_b} \left[\frac{S_{ab}(\varphi)}{W_a} - S_b(q_1 | \varphi) \right]$$

et pour $\sum_a \zeta_a N_a = 0$:

$$(123) \quad f_a^{\beta(1)}(q_1 | 0) = \frac{\beta}{V} \zeta_a^2 \left(S(q_1) - \frac{S_0}{V} \right)$$

$k_{ac}^{\beta(1)}$ s'obtient par différentiation fonctionnelle de (122) :

$$\frac{\delta f_a^{\beta(1)}(q_1 | \varphi)}{\delta \varphi_c(q_3)} = \beta^2 V \sum_b \zeta_a \zeta_b \frac{N_b - \delta_{ab}}{W_a W_b} e^{-\beta \varphi_c} \left\{ \frac{\delta_{ac} + \delta_{bc}}{W_c} \left(\frac{S_{ab}(\varphi)}{W_a} - S_b(q_1 | \varphi) \right) + \frac{\delta_{ac}}{W_a^2} S_{ab}(\varphi) - \frac{1}{W_a} (\delta_{ac} S_b(q_3 | \varphi) + \delta_{bc} S_a(q_3 | \varphi)) + \frac{\delta_{bc}}{|q_1 - q_3|} \right\}$$

Pour $\varphi = 0$, il vient

$$(124) \quad k_{ab}^{\beta(1)}(q_1, q_2) = -\frac{\beta^2}{V^2} \zeta_a \zeta_b (N_b - 2\delta_{ab})(S(q_1) + S(q_2)) \\ + \frac{\beta^2}{V^3} \zeta_a \zeta_b (N_b - 3\delta_{ab})S_0 + \frac{\beta^2}{V} \zeta_a \zeta_b (N_b - \delta_{ab}) \frac{1}{|q_1 - q_2|}.$$

Nous portons $f_a^{\beta(0)}(q_1 | 0) = 1$, (123) et (124) dans

$$f_{ab}^{\beta}(q_1, q_2) = \frac{N_b}{N_b - \delta_{ab}} [f_a^{\beta(0)} f_b^{\beta(0)} + e^2 (f_a^{\beta(0)} f_b^{\beta(1)} + f_a^{\beta(1)} f_b^{\beta(0)}) + 0(e^4)] \\ - \frac{V}{\beta(N_b - \delta_{ab})} (k_{ab}^{\beta(0)} + e^2 k_{ab}^{\beta(1)} + 0(e^4))$$

ce qui nous fournit pour un système neutre ($\sum_a \zeta_a N_a = 0$) :

$$(125) \quad f_{ab}^{\beta}(q_1, q_2) = 1 \\ + \beta e^2 \left\{ (\zeta_a + \zeta_b) \left(\zeta_a \frac{S(q_1)}{V} + \zeta_b \frac{S(q_2)}{V} \right) - (\zeta_a^2 + \zeta_a \zeta_b + \zeta_b^2) \frac{S_0}{V^2} - \frac{\zeta_a \zeta_b}{|q_1 - q_2|} \right\}$$

Pour un système composé de deux sortes de particules à charges opposées ($N_+ = N_- = N/2$), enfermé dans la sphère de rayon R , on trouve en l'absence de forces extérieures

$$S(q) = 2\pi R^2 - \frac{2\pi}{3} q^2 \quad ; \quad S_0 = \frac{32}{15} \pi^2 R^5$$

et pour les fonctions de distribution

$$(126) \quad f_+^{\beta}(q) = f_-^{\beta}(q) = 1 + \frac{\beta e^2}{R} \left(\frac{3}{10} - \frac{1}{2} \frac{q^2}{R^2} \right),$$

$$(127) \quad f_{++}^{\beta}(q_1, q_2) = f_{--}^{\beta}(q_1, q_2) = 1 + \frac{\beta e^2}{R} \left(\frac{12}{5} - \frac{q_1^2 + q_2^2}{R^2} - \frac{R}{|q_1 - q_2|} \right),$$

$$(128) \quad f_{+-}^{\beta}(q_1, q_2) = f_{-+}^{\beta}(q_1, q_2) = 1 + \frac{\beta e^2}{R} \left(-\frac{6}{5} + \frac{R}{|q_1 - q_2|} \right).$$

Les termes avec q^2/R^2 représentent un « effet de surface », apparaissant sous la forme d'effet volumique en raison de la longue portée de l'interaction coulombienne. Pour un système d'une seule espèce de particules chargées ou un excès de charge global, cet effet est évidemment très fort et produit une pression électrostatique. Dans le cas de notre système binaire

et neutre, cet effet est plus faible et il conduit à une sorte d'auto-compression; il semble que les forces d'attraction dominent les forces de répulsion quand le système est neutre. En effet, le résultat (128) montre que la corrélation entre une charge positive et une charge négative n'est pas diminuée par cet effet de surface.

L'approximation utilisée restreint certainement son domaine d'application. Pour nous faire une idée de ce domaine, nous calculons la pression dans notre sphère.

La pression locale peut être obtenue à partir du tenseur des pressions hydrostatiques [15] :

$$(129) \quad P^{\alpha\gamma}(q) = \int D_N^\beta \left[\sum_{a,i} \frac{p_i^\alpha p_i^\gamma}{m_a} - \sum_{\substack{1 \leq i < j \leq N \\ a,b}} \Phi'_{ab} \frac{(q_i - q_j)^\alpha (q_i - q_j)^\gamma}{|q_i - q_j|} \alpha \left((q_i - q_j) \frac{\partial}{\partial q} \right) \right] \delta(q_i - q) dx_1 \dots dx_N$$

où $\alpha(x) = (e^x - 1)/x$.

La pression radiale $P(r)$ à une distance $r = |q|$ du centre de la sphère de rayon R est, pour raison de symétrie, un tiers de la trace de $P^{\alpha\gamma}(q)$. En nous servant de (123), nous tirons de (129)

$$(130) \quad P(q) = \frac{1}{\beta V} \sum_a N_a f_a^\beta(q) + \frac{e^2}{6} \sum_{a,b} \zeta_a \zeta_b \frac{N_a(N_b - \delta_{ab})}{V^2} \int_V \left\{ \frac{f_{ab}^\beta(q, q')}{|q - q'|} + \frac{2\pi \beta e^2}{3} \frac{(\zeta_a + \zeta_b)^2}{V} \frac{q(q - q')}{|q - q'|} - \frac{2\pi \beta e^2}{9} \frac{(\zeta_a + \zeta_b)(\zeta_a + 4\zeta_b)}{V} |q - q'| \right\} dq'$$

Le calcul des intégrales est un peu long; nous obtenons finalement pour un plasma symétrique ($N_+ = N_- = N/2$) :

$$(131) \quad P\beta V = N + \sum_a N_a (e^2 f_a^{\beta(1)} + e^4 f_a^{\beta(2)}) - \frac{1}{12} \left(\frac{R}{r_D} \right)^2 \left(1 - \frac{r^2}{3R^2} \right) + \frac{1}{9} \left(\frac{R}{r_D} \right)^4 \left(\frac{11}{80} - \frac{5}{36} \frac{r}{R} - \frac{7}{180} \frac{r^2}{R^2} - \frac{31}{120} \frac{r^4}{R^4} - \frac{1}{16} \frac{R^2 - r^2}{Rr} \log \frac{R+r}{R-r} \right) + 0 \left(\left(\frac{R}{r_D} \right)^6 \right).$$

Notre méthode itérative donne visiblement une bonne solution sous des conditions envisagées ($R < r_D$). L'intérêt de cette méthode consiste dans le fait qu'elle permet de trouver explicitement des solutions non seulement pour $\varphi = 0$, mais aussi pour $\varphi \neq 0$. Cela est particulièrement intéressant pour l'étude de systèmes d'un petit nombre de particules en interaction de longue portée en présence d'une force extérieure statique.

XIII. — CONCLUSION

L'équation cinétique pour des systèmes de particules en interaction de longue portée donne, dans certaines limites, des résultats bien connus. Cela indique que notre procédé d'approximation convient à l'étude de tels systèmes. Nous avons toutes les raisons de penser que ce procédé est également valable dans une approximation meilleure, par exemple, pour $K_{abcd} = 0$. Notre équation cinétique n'est, par contre, pas aussi bien maniable dans le cas des interactions de courte portée.

Nos équations cinétiques ne sont pas limitées au cas d'un champ extérieur faible, à l'étude d'un système homogène ou à son extension infinie. La possibilité de traiter le cas d'un système fini a été démontrée pour l'équilibre au dernier chapitre. La généralisation au cas d'un champ extérieur fort ne pose pas de problème de principe. La seule difficulté viendrait du fait que les transformées de Laplace de certaines grandeurs qui interviennent dans le calcul pourraient ne pas exister. On est alors amené à utiliser d'autres techniques de résolution pour des équations intégrales du type Volterra.

Quand le système est inhomogène, il est encore assez facile de calculer le tenseur de conductivité électrique dans la limite de hautes fréquences. Dans cette limite, on peut aussi étudier les oscillations de plasma. L'approximation de relaxation Fokker-Planck ne sera plus aussi simple que dans le cas homogène. On devra approcher le coefficient de relaxation ν_a .

Une extension importante de la méthode fonctionnelle consiste dans la possibilité de donner un sens physique au champ test. On peut ainsi simuler une source de chaleur et étudier l'évolution du système sous l'influence de cette contrainte extérieure.

Au lieu d'introduire l'irréversibilité par l'hypothèse que toute distribution initiale peut être atteinte à partir de la distribution canonique sous l'action de forces dynamiques extérieures, on peut se servir de l'hypothèse, plus familière bien qu'équivalente, que la distribution d'un système fermé s'approche, en l'absence de forces extérieures, de la distribution canonique (cf. [16]).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BOGOLIUBOV, *Vestnik Moskovskogo Universiteta*, t. 10, 1955, n° 4-5, p. 115.
- [2] KUBO, *J. Phys. Soc. Japan*, t. 12, 1957, p. 570.
- [3] TANABE, *Proc. Japan. Acad.*, t. 37, 1961, p. 610.

- [4] DOBBERTIN, *Comptes rendus*, t. **262**, 1966, p. 550A.
- [5] GRAD, *Handbuch der Physik*. XII, Springer, 1958, p. 212.
- [6] FRIED et CONTE, *The Plasma Dispersion Function*, Academic Press, 1961.
- [7] BERK, *Phys. Fluids*, t. **7**, 1964, p. 257.
- [8] DOBBERTIN, *Journal de Physique*, suppl. au n° 4, t. **29**, 1968, p. C3-53.
- [9] BOGOLIUBOV, *The Dynamical Theory in Statistical Physics*, Hindustan Publ. Corp. 1965.
- [10] DOBBERTIN, *Comptes rendus*, t. **266**, 1968, p. 671B.
- [11] DOBBERTIN, *Comptes rendus*, t. **265**, 1967, p. 536B.
- [12] OBERMAN, RON et DAWSON, *Phys. Fluids*, t. **5**, 1962, p. 1514.
- [13] MARGENAU, *Phys. Rev.*, t. **109**, 1958, p. 6.
- [14] DOBBERTIN, *Comptes rendus*, t. **258**, 1964, p. 5587.
- [15] MASSIGNON, *Mécanique statistique des fluides*, Dunod, 1957.
- [16] DOBBERTIN, *Comptes rendus*, t. **267**, 1968, p. 282A.

Manuscrit reçu le 16 avril 1968.

Directeur de la publication : P. GAUTHIER-VILLARS.

IMPRIMÉ EN FRANCE

DÉPÔT LÉGAL ÉD. N° 1581a.

IMPRIMERIE BARNÉOUD S. A. LAVAL, N° 5715. 10-1968.