

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

PIERRE BOUVIER

L'identité de Lagrange et Jacobi pour un système stellaire forme d'étoiles et de matière diffuse

Annales de l'I. H. P., section A, tome 8, n° 3 (1968), p. 241-251

[<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1968__8_3_241_0>](http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1968__8_3_241_0)

© Gauthier-Villars, 1968, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section A » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

L'identité de Lagrange et Jacobi pour un système stellaire forme d'étoiles et de matière diffuse

par

Pierre BOUVIER
(Observatoire de Genève).

RÉSUMÉ. — On généralise un peu, en y incluant des étoiles, les relations de Lagrange et Jacobi appliquées à une configuration formée d'un gaz parfaitement conducteur. La limite supérieure du champ magnétique relative à la stabilité d'une telle configuration s'en trouve réhaussée. Application à la stabilité d'un bras spiral de la Galaxie.

ABSTRACT. — The Lagrange and Jacobi identities are written here for an inviscid and perfectly conducting gaseous configuration sprinkled with stars. An increase of the upper threshold value of the magnetic field for stability is obtained and the conditions for applying these considerations to the stability of a galactic arm are further discussed.

1. — MILIEU GAZEUX PARSEMÉ D'ÉTOILES

Considérons un système cosmique composé d'étoiles et de matière diffuse. Chacune des étoiles, au nombre total de n , est définie par sa masse ponctuelle m^v , ses coordonnées de position x_k^v et de vitesse v_k^v où $v = 1, 2, \dots, n$, $k = 1, 2, 3$.

Les équations du mouvement de l'étoile v soumise à la force $\mathbf{F}^v$ sont donc

$$(1) \quad m^v \frac{dv_k^v}{dt} = F_k^v$$

alors que le mouvement de la matière diffuse de densité ρ est décrit en tout point par les équations

$$(2) \quad \rho \frac{dv_k}{dt} = f_k$$

où dv_k/dt est la dérivée totale au sens d'Euler et f la densité de force.

Négligeant les effets de frottement et de viscosité, nous regarderons les étoiles comme des points matériels soumis au seul champ de force gravitationnelle global du système et la matière diffuse comme un fluide gazeux parfait et de conductibilité électrique infinie. Les seconds membres de (1) et (2) auront par conséquent les formes respectives

$$(3) \quad F_k^v = m^v \frac{\partial V}{\partial x_k^v}$$

$$(4) \quad f_k = - \frac{\partial}{\partial x_k} \left(p + \frac{H^2}{8\pi} \right) + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x_j} (H_k H_j) + \rho \frac{\partial V}{\partial x_k}$$

En (4), la convention de l'indice muet sommatoire a été adoptée pour tout indice inférieur répété; p désigne la pression du gaz et H_k les composantes du champ magnétique produit par les courants électriques circulant librement dans la matière gazeuse.

Le potentiel V , ici compté positivement (fonction des forces), est dû aux étoiles et au gaz, de sorte que

$$V = V^s + V^g$$

où séparément

$$V^s(\mathbf{x}) = G \sum_{v=1}^n \frac{m^v}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}^v|} \quad \text{pour les étoiles,}$$

en ayant soin d'exclure le terme μ de la somme précédente au cas où le point $\mathbf{x}$ coïncide avec la position $\mathbf{x}^\mu$ de l'étoile μ , G est la constante de gravitation.

En outre

$$V^g(\mathbf{x}) = G \int \frac{\rho(\mathbf{x}') d\mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$$

la divergence apparente au point $\mathbf{x}' = \mathbf{x}$ est évitée en négligeant l'interaction du gaz contenu dans le volume infinitésimal $d\mathbf{x}'$ avec lui-même vis-à-vis de son interaction avec le gaz extérieur à $d\mathbf{x}'$.

Subdivisons maintenant la région occupée par le système en cases égales assez petites pour que

1° une case contienne au plus une étoile,

2° la masse d'une case renfermant une étoile soit égale à la masse de cette étoile.

Introduisons ici la distribution singulière de Dirac

$$\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^v) = \prod_{k=1}^3 \delta(x_k - x_k^v)$$

où $\delta(x_k - x_k^v)$ est à envisager comme une limite de fonction, par exemple

$$\delta(x_k - x_k^v) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\sigma}} \exp \left\{ -\frac{(x_k - x_k^v)^2}{2\sigma^2} \right\}$$

La masse contenue dans une case de volume $dx = dx_1 dx_2 dx_3$ se notera symboliquement

$$\left[\rho(\mathbf{x}) + \sum_v m^v \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^v) \right] dx$$

et nous écrirons les équations du mouvement de la matière située dans une case quelconque du système sous la forme

$$(5) \quad \rho \frac{dv_k}{dt} + \sum_v m^v \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^v) \frac{dv_k^v}{dt} = f_k + \sum_v \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^v) F_k^v$$

Tenant compte des hypothèses 1° et 2°, il est facile de voir que (5) se réduit à (1) si $\mathbf{x}$ coïncide avec l'un des $\mathbf{x}^v$ et à (2) sinon.

2. — IDENTITÉS DE LAGRANGE ET JACOBI

Plaçons l'origine des coordonnées au centre de masse du système, centre supposé d'ailleurs commun aux étoiles et au gaz. Afin d'obtenir les relations de Lagrange et Jacobi sous forme tensorielle, nous multiplions par x_i , suivant la méthode habituelle, les deux membres des équations (5) après

y avoir remplacé F_k et f_k par les expressions (3) et (4) respectivement, puis nous intégrons sous le volume occupé par le système.

Le premier membre nous donne

$$\int \rho x_i \frac{dv_k}{dt} dx + \sum_v m^v x_i^v \frac{dv_k^v}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d^2 I_{ik}}{dt^2} - 2T_{ik}$$

où I_{ik} sont les composantes du tenseur d'inertie

$$I_{ik} = \int \rho x_i x_k dx + \sum_v m^v x_i^v x_k^v$$

et T_{ik} celles du tenseur associé à l'énergie cinétique totale

$$2T_{ik} = \int \rho v_i v_k dx + \sum_v m^v v_i^v v_k^v$$

Au second membre de (5), les forces magnétiques et de pression donnent des termes que l'on transforme en intégrant par parties [I]; les intégrales de surface qui apparaissent alors sont supposées nulles aux confins du système et il nous reste les termes

$$[(\gamma - 1)U + \mathcal{M}] \delta_{ik} - 2\mathcal{M}_{ik}$$

où $\delta_{ik} = 0$ si $i \neq k$ et 1 si $i = k$. U est l'énergie interne définie selon

$$(\gamma - 1)U = \int p dx$$

où γ est le rapport des chaleurs spécifiques du gaz. D'autre part, $\mathcal{M}_{ik}$ est relatif au tenseur

$$\mathcal{M}_{ik} = \frac{1}{8\pi} \int H_i H_k dx$$

dont la trace est l'énergie magnétique $\mathcal{M}$.

Les termes de nature gravitationnelle sont à examiner d'un peu plus près; ils comportent les interactions entre étoiles et gaz, entre éléments gazeux.

Pour ces derniers, l'énergie d'interaction vaudra

$$\begin{aligned} W_{ik}^{gg} &= \int \rho x_i \frac{\partial V^g}{\partial x_k} dx \\ &= -\frac{1}{2} G \iint \rho(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}') \frac{(x_i - x'_i)(x_k - x'_k)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} dx dx' \end{aligned}$$

Dans l'interaction étoiles-gaz, nous devons additionner les termes

$$\int \rho x_i \frac{\partial V^g}{\partial x_k} dx = -G \sum_v m^v \int \rho x_i \frac{x_k - x_k^v}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}^v|^3} dx$$

et

$$\sum_v m^v x_i^v \frac{\partial V^g}{\partial x_k} = -G \sum_v m^v \int \rho x_i^v \frac{x_k^v - x_k}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}^v|^3} dx$$

obtenant ainsi

$$W_{ik}^{sg} = -G \sum_v m^v \int \rho(\mathbf{x}) \frac{(x_i - x_i^v)(x_k - x_k^v)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}^v|^3} dx$$

dans ces expressions, les contributions des self-potentiels sont négligées au sens indiqué plus haut, à propos de la définition de $V^g(\mathbf{x})$.

Enfin, l'énergie potentielle mutuelle des étoiles a pour valeur

$$W_{ik}^{ss} = G \sum_v m^v x_i^v \frac{\partial}{\partial x_k^v} \sum_{\mu \neq v} \frac{m^\mu}{|\mathbf{x}^v - \mathbf{x}^\mu|} = -\frac{1}{2} G \sum_v \sum_{\mu \neq v} m^\mu m^v \frac{(x_i^v - x_i^\mu)(x_k^v - x_k^\mu)}{|\mathbf{x}^v - \mathbf{x}^\mu|^3}$$

après symétrisation.

Réunissant ces différents termes, nous parvenons aux identités tensorielles de Lagrange et Jacobi

$$(6) \quad \frac{1}{2} \frac{d^2 I_{ik}}{dt^2} = 2T_{ik} + [(\gamma - 1)U + \mathcal{M}] \delta_{ik} - 2\mathcal{M}_{ik} + W_{ik}$$

qui présentent la même forme qu'en présence du seul fluide gazeux, mais où ici

$$I_{ik} = I_{ik}^s + I_{ik}^g,$$

$$T_{ik} = T_{ik}^s + T_{ik}^g,$$

$$W_{ik} = W_{ik}^{ss} + W_{ik}^{sg} + W_{ik}^{gg}$$

La symétrie tensorielle du second membre de (6) nous assure la conservation du moment angulaire total du système

$$\int \rho(x_i v_k - x_k v_i) dx + \sum_v m^v (x_i^v v_k^v - x_k^v v_i^v) = \text{const.}$$

La contraction de (6) conduit à la forme scalaire de l'identité, soit

$$(7) \quad \frac{1}{2} \frac{d^2 I}{dt^2} = 2T + 3(\gamma - 1)U + \mathcal{M} + W$$

avec

$$\begin{aligned} I &= I^s + I^g, \\ T &= T^s + T^g, \\ W &= W^{ss} + W^{sg} + W^{gg}. \end{aligned}$$

3. — CONFIGURATIONS D'ÉQUILIBRE

Quand le système considéré est dans un état d'équilibre, les relations (6) et (7) s'écrivent

$$(8) \quad 2T_{ik} + [(\gamma - 1)U + \mathcal{M}]\delta_{ik} - 2\mathcal{M}_{ik} + W_{ik} = 0$$

$$(9) \quad 2T + 3(\gamma - 1)U + \mathcal{M} + W = 0$$

et traduisent le théorème du viriel.

D'après (8) le tenseur

$$2T_{ik} - 2\mathcal{M}_{ik} + W_{ik}$$

est réduit à la forme diagonale; plus particulièrement si le fluide est au repos et en l'absence de champ magnétique,

$$2T_{ik}^s + W_{ik} = -(\gamma - 1)U\delta_{ik}$$

Les étoiles, soumises à la seule gravitation, ne sauraient être au repos :

$$2T_{ik}^s = \sum_v m^v v_i^v v_k^v = M^s \overline{v_i v_k}$$

M^s étant la masse totale des étoiles. Dans le cas de stricte isotropie des vitesses autour du centre de masse, nous aurons

$$\overline{v_i v_k} = 0 \quad \text{si } i \neq k$$

par suite le tenseur W_{ik} apparaît sous forme diagonale, ce qui est compatible avec une symétrie sphérique du système.

D'autre part, l'énergie totale du système s'écrit

$$(10) \quad E = T + U + \mathcal{M} + W$$

et l'élimination de $+W$ entre (9) et (10) nous donne

$$E = -T - (3\gamma - 4)U$$

où $T = T^s + T^j$. Donc même si $T^g = 0$, on aura toujours $T^s > 0$ de sorte que la condition $\gamma > 4/3$ n'est plus nécessaire pour que E soit négative.

Étant donné que les énergies T et U sont positives, la relation (9) entraîne en particulier, comme condition de stabilité du système

$$\mathcal{M} + W < 0$$

soit

$$(11) \quad \mathcal{M} < |W|$$

Or W est la somme de trois termes négatifs auxquels on pourra donner les formes

$$W^{gg} = -\frac{1}{2} C_{gg} \frac{M_g^2}{R}, \quad W^{ss} = -\frac{1}{2} C_{ss} \frac{M_s^2}{R}, \quad W^{sg} = -C_{sg} \frac{M_s M_g}{R}$$

dans la mesure où l'on est capable de définir un certain rayon R de la configuration. Les facteurs de structure C dépendent des répartitions de masse stellaire et gazeuse. La condition (11) nous montre que la présence d'étoiles parmi le gaz a pour effet de rehausser la valeur critique que le champ magnétique moyen ne doit pas dépasser pour que le système reste stable.

Si le mouvement du gaz était négligé, comme dans l'étude de D. N. Limber [2], W^{sg} se réduirait à

$$G \sum_v m^v \int \rho dx \frac{x_i^v (x_i - x_i^v)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}^v|^3}$$

ou, remplaçant la masse infinitésimale ρdx par la masse finie Δm_g^λ du gaz contenu dans la case λ et m^v par la masse Δm_s^v de la case v contenant une étoile

$$W^{sg} = G \sum_v \sum_{\lambda \neq v} \Delta m_s^v \Delta m_g^\lambda \frac{|\mathbf{x}^v|^2 - \mathbf{x}^\lambda \cdot \mathbf{x}^v}{|\mathbf{x}^{v\lambda}|^3}$$

avec $\Delta m_g^v = 0$, $\Delta m_s^\lambda = 0$ en vertu des hypothèses 1° et 2° du n° 1, $|\mathbf{x}^{v\lambda}|$ est la distance d'une case λ sans étoile à une case v contenant une étoile.

4. — STABILITÉ D'UNE CONFIGURATION CYLINDRIQUE

Soit un cylindre indéfini de section circulaire, contenant du gaz et des étoiles, ainsi qu'un champ magnétique parallèle à l'axe. Les équations du mouvement radial s'écriront, pour les étoiles et pour le gaz respectivement

$$(12) \quad m^v \frac{dv_r^v}{dt} = m^v \frac{dV}{dr^v}$$

$$(13) \quad \rho \frac{dv_r}{dt} = - \frac{\partial}{\partial r} \left(p + \frac{H^2}{8\pi} \right) + \rho \frac{dV}{dr}$$

où les symboles v , p , H , V ont le même sens que précédemment. Désignons par

$$M_t(r) = M_s(r) + M_g(r)$$

la masse par unité de longueur située dans un cylindre de rayon r inférieur au rayon R de la configuration.

Suivant le procédé adopté au n° 1, nous groupons les équations (12) et (13) en une seule équation, notée symboliquement

$$(14) \quad \rho \frac{dv_r}{dt} + \sum_v m^v \frac{1}{r} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^v) \frac{dv_r^v}{dt} \\ = - \frac{d}{dr} \left(p + \frac{H^2}{8\pi} \right) + \rho \frac{dV}{dr} + \sum_v \frac{m^v}{r} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^v) \frac{dV}{dr}$$

où $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^v)$ désigne le produit

$$\delta(r - r^v) \delta(\theta - \theta^v) \delta(z - z^v)$$

relatif aux trois coordonnées cylindriques r , θ , z .

Il reste à multiplier les deux membres de (14) par $r^2 dr d\theta dz$ et à intégrer sur le cylindre de rayon R et de longueur unité ce qui conduit d'abord à :

$$\int_0^M r \frac{dv_r}{dt} dM_g(r) + \sum_v m^v r^v \frac{dv_r^v}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d^2 I}{dt^2} - 2T$$

où $I = I_s + I_g$ est le moment d'inertie par unité de longueur par rapport à l'axe du cylindre avec

$$I_s = \sum_v m^v (r^v)^2 \quad I_g = \int_0^M r^2 dM_g(r)$$

De même pour l'énergie cinétique $T = T_s + T_g$, où

$$2T_s = \sum_v m^v \left(\frac{dr^v}{dt} \right)^2, \quad 2T_g = \int \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 dM_g(r)$$

Au second membre, le terme de pression nous donne [3]

$$2\pi \int_0^R r^2 dr \frac{d}{dr} \left(p + \frac{H^2}{8\pi} \right) = 2(\gamma - 1)U + 2\mathcal{M}$$

alors que la force de gravitation se tire de l'équation de Poisson

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dV}{dr} \right) = -4\pi G \rho_t$$

où la densité totale de masse a pour valeur

$$\rho_t = \rho + \sum_v m^v \frac{1}{r} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^v)$$

par conséquent

$$\frac{dV}{dr} = -2G \frac{M_t(r)}{r}$$

Le terme d'énergie potentielle du gaz est égal à :

$$2G2\pi \int_0^R r^2 dr \rho \frac{M_g(r)}{r} = GM_g^2$$

l'interaction gaz-étoiles est décrite par

$$2G2\pi \int_0^R r^2 dr \rho \frac{M_s(r)}{r} = 2G \int M_s dM_g$$

à quoi on ajoutera le terme

$$2G \sum_v m^v M_g(r^v)$$

Numérotons les étoiles v par ordre croissant des distances r^v à l'axe r ; si le système est assez dense en étoiles, nous pourrions remplacer m^v par la masse $\Delta M_s(r^v)$ dans une couche cylindrique autour du rayon r et poser alors

$$2G \sum_v m^v M_g(r^v) = 2G \sum_v \Delta M_s(r^v) M_g(r^v) = 2G \int M_g dM_s$$

L'énergie mutuelle des étoiles nous donne

$$2G \sum_v m^v M_s(r^v) = 2G \sum_v \Delta M_s(r^v) M_s(r^v) = GM_s^2$$

et finalement le total de ces quatre termes s'élève à

$$G(M_s + M_g)^2 = GM^2$$

L'identité de Lagrange et Jacobi ainsi obtenue

$$(15) \quad \frac{1}{2} \frac{d^2 I}{dt^2} = 2T + 2(\gamma - 1)U + 2\mathcal{M} - GM^2$$

revêt donc la même forme que celle dont s'étaient servis Chandrasekhar et Fermi [3] pour un cylindre composé uniquement de gaz. Dans (15) cependant, les grandeurs I , T et M renferment les contributions du gaz et des étoiles.

Dans un état d'équilibre, le premier membre de (15) est nul, ce qui entraîne comme condition nécessaire de stabilité

$$\mathcal{M} < \frac{1}{2} GM^2$$

ou, en termes de valeurs moyennes

$$(16) \quad H_m \equiv (\overline{H^2})^{1/2} < 2\pi G^{1/2} \bar{\rho}_t R$$

5. — STABILITÉ D'UN BRAS DE LA GALAXIE

Un bras de la Galaxie se présente localement à peu près comme une portion de cylindre de matière diffuse parsemée d'étoiles et l'on peut chercher à appliquer, comme l'ont fait Chandrasekhar et Fermi [3] sans tenir compte des étoiles, un critère tel que (16) au bras spiral dans lequel nous sommes situés.

Avec les données [5]

$$R = 250 \text{ pc}, \rho = 2 \times 10^{-24}, \rho_s = 4 \times 10^{-24} \text{ g/cm}^3,$$

(16) nous donne

$$H_m < 7.5 \times 10^{-6} \text{ gauss},$$

valeur très proche de celle obtenue par Chandrasekhar et Fermi à partir de la déviation angulaire moyenne du plan de polarisation de la lumière d'une étoile lointaine vue normalement à l'axe du bras spiral [4].

Toutefois, en appliquant (16) à un cylindre gazeux seulement, la valeur critique serait réduite au tiers de celle obtenue en incluant les étoiles du bras. Mais l'orientation des grains de poussière, cause de la polarisation, exige peut-être un champ magnétique supérieur à 10^{-5} gauss [6].

De toute façon, la schématisation d'un bras spiral par un cylindre isolé en équilibre est trop sommaire, car si la matière diffuse est éventuellement confinée en partie par son champ magnétique, les étoiles nées dans cette matière diffuse auront des vitesses capables de les entraîner, après quelques dizaines de millions d'années, dans des régions de la Galaxie soumises, contrairement aux étoiles, à des forces de nature non gravifique dont l'effet est encore difficile à préciser en l'état actuel des connaissances cinématiques du système galactique.

En considérant un bras spiral comme un cylindre courbé en anneau, la force magnétique due au champ dont les lignes de force sont étirées le long de l'anneau viendra s'ajouter à l'effet du champ de gravitation de la Galaxie [7]. Un bras spiral pourrait aussi être déplacé vers le centre galactique s'il augmente sa masse par accrétion au cours de la rotation différentielle [8]. D'autre part, il est également possible que le gaz du bras spiral soit soutenu par une force telle qu'en produirait une pression de radiation cosmique issue du centre galactique.

Dans le premier cas, les étoiles auraient tendance à tourner moins vite que le gaz et à s'en détacher vers l'extérieur; dans la seconde éventualité, les étoiles tendront à dériver vers l'intérieur, donc à se rapprocher du centre galactique, comme semblent l'avoir fait les Céphéides I relativement âgées [9].

Une meilleure connaissance des mouvements relatifs des étoiles et de la matière diffuse apparaît nécessaire pour justifier, sur une certaine durée, l'état d'équilibre d'un bras spiral formé de gaz et d'étoiles.

RÉFÉRENCES

- [1] S. CHANDRASEKHAR, *Hydrodynamic and hydromagnetic stability*, Clarendon, Oxford, 1961.
- [2] D. N. LIMBER, *Ap. J.*, t. 130, 1959, p. 414.
- [3] S. CHANDRASEKHAR et E. FERMI, *Ap. J.*, t. 118, 1953, p. 116.
- [4] S. CHANDRASEKHAR et E. FERMI, *Ibid.*, p. 113.
- [5] J. H. DORT, *Ap. J.*, t. 116, 1952, p. 233.
- [6] L. DAVIS et J. L. GREENSTEIN, *Ap. J.*, t. 114, 1951, p. 206.
- [7] A. ELVIUS et N. HERLOFSON, *Ap. J.*, t. 131, 1960, p. 304.
- [8] J. H. DORT, I. A. U. Symposium, n° 20, 1963, p. 1.
- [9] R. P. KRAFT et M. SCHMIDT, *Ibid.*, p. 68.

Manuscrit reçu le 4 mars 1967.