

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

P. N. BOGOLIOUBOV

Sur un modèle à quarks quasi-indépendants

Annales de l'I. H. P., section A, tome 8, n° 2 (1968), p. 163-189

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1968__8_2_163_0>

© Gauthier-Villars, 1968, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section A » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Sur un modèle à quarks quasi-indépendants

par

P. N. BOGOLIUBOV

§ I

Dans ce travail, nous allons examiner un des modèles baryoniques les plus simples et comparable, jusqu'à un certain point, à un modèle de noyau atomique. Pour étudier le problème des états liés d'un système de trois quarks en interaction forte l'un avec l'autre, tout comme dans un modèle nucléaire, nous pensons qu'il est possible, à l'intérieur des baryons, d'envisager les quarks comme des particules indépendantes dans un champ moyen auto-cohérent (self-consistent).

Dans un tel schéma, possèdent un sens, non seulement la fonction d'onde de tout système de trois quarks, mais aussi les fonctions d'onde individuelles de chaque quark. Ces fonctions d'onde sont décrites par les équations de Dirac habituelles pour les particules dans un champ donné. De cette façon, les quarks constituant les baryons occupent des niveaux d'énergie individuels comme cela se passe dans les modèles nucléaires en couches, à nucléons séparés.

Bien entendu, il est nécessaire de souligner les différences fondamentales avec le modèle nucléaire en couches. Comme dans le noyau, l'énergie de liaison des nucléons est faible en comparaison de son énergie propre, les défauts de masse créant l'énergie de liaison des nucléons est faible par rapport à la masse du noyau. Dans le cas envisagé ici du modèle baryonique à quarks, nous estimons la masse d'un quark beaucoup plus grande que la masse du baryon et le défaut de masse sera pratiquement égal à la somme des masses des trois quarks (à l'état libre).

De plus, le nombre de quarks (trois) est probablement insuffisant pour que la notion de « champ moyen » ait son sens plein. Une différence plus fondamentale encore provient du fait que pour obtenir des résultats corrects, dans le modèle baryonique envisagé, il faut supprimer le principe de Pauli pour les quarks et qu'on peut disposer jusqu'à trois quarks de spin identique sur un même niveau d'énergie. Ce qui veut dire qu'il est nécessaire que la fonction d'onde d'un système de trois quarks, engendrant le baryon, ne soit pas une fonction antisymétrique, mais une fonction symétrique des variables de quarks. $\xi_k \equiv (\vec{x}_k, A_k, j_k)$; $k = 1, 2, 3$.

Ici $\vec{x}$ sont les variables d'espace, A les variables unitaires et j les indices de spin.

On peut lever cette difficulté fondamentale de différentes manières. Indiquons par exemple les deux possibilités suivantes.

1. Il n'existe pas un triplet de quarks, mais trois triplets

$$(p^\alpha, n^\alpha, \lambda^\alpha) \quad ; \quad \alpha = 1, 2, 3$$

et le baryon envisagé est constitué par des quarks appartenant aux différents triplets. A cause de cela, il n'y a pas contradiction avec le principe de Pauli et il est tout à fait admissible de prendre les quarks pour des fermions. En réalité, les « quarks identiques » d'indices identiques (A, j), couchés sur un niveau d'énergie sont différents, dans notre schéma, ils se distinguent entre eux par le nouveau nombre quantique : l'indice de triplet α . Cet indice supplémentaire α nous permet d'envisager la fonction d'onde $\psi(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ symétrique par rapport à ξ_1, ξ_2, ξ_3 . De ce fait, la fonction d'onde s'écrit sous la forme

$$\varepsilon_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3} \psi(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$$

dans laquelle ε est un tenseur anti-symétrique, on obtient une fonction anti-symétrique par rapport à une permutation du système de variables

$$(\alpha_k, \xi_k) = (\alpha_k, \vec{x}_k, A_k, j_k) \quad ; \quad k = 1, 2, 3.$$

Une telle approche du modèle à quarks a été étudiée pour la première fois dans le travail de N. N. Bogolioubov, B. V. Strouminski et A. N. Tavkhélidzé : « Sur le problème des modèles composés de particules élémentaires » [1].

2. Il existe aussi un triplet de quarks (p, n, λ) et ils se présentent comme des par-fermions du troisième ordre. Cette possibilité a été étudiée pour la première fois par O. Greenberg [2].

Du point de vue mathématique l'un et l'autre de ces schémas possèdent des points communs tels qu'une amplitude quantique de création ou de

destruction d'un para-fermion du troisième ordre se représentant par une superposition d'amplitudes correspondant à trois fermions différents. De cette façon, un triplet de para-fermions naît de la superposition de trois triplets de fermions.

Ayant achevé l'examen général du modèle de baryon considéré, soulignons à présent que le modèle à quarks est entièrement hypothétique et que sa valeur réside seulement dans les résultats qu'on peut en déduire.

Passons maintenant à l'obtention de ces résultats, en consacrant une attention spéciale à la définition des moments magnétiques des baryons et du rapport des constantes axiale et vectorielle. En développant les idées des travaux [3] et [4], nous pouvons estimer que le champ moyen se caractérise par un potentiel scalaire à symétrie radiale $V(r)$, où r est la distance au « centre de gravité » du baryon, et que le niveau d'énergie inférieur correspond à un état s . De cette façon, pour un quark dans le champ V , nous pouvons écrire l'équation de Dirac habituelle :

$$\left\{ \gamma_0 E + i \left(\vec{\gamma} \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \right) - M - V(r) \right\} \psi = 0 \quad (1,1)$$

Les matrices de Dirac γ sont ici attachées à la métrique $(1, -1, -1, -1)$.

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} ; \quad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}$$

où I est la matrice unité à deux dimensions et $\vec{\sigma}$ sont les matrices de Pauli. Pour γ_5 nous choisirons la matrice

$$\gamma_5 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}.$$

Dans l'équation (1,1), M représente la masse d'un quark à l'état libre. Pour obtenir l'approximation $SU(3)$ il faut supposer que les masses M des trois quarks sont identiques. Pour garantir l'invariance isotopique, l'égalité des masses de p et n est suffisante.

La manière dont $V(r)$ dépend de r ne nous intéresse pas pour le moment, il est seulement important que le niveau de moindre énergie, $E = E_0$ soit un état lié s , c'est-à-dire que la fonction d'onde normée associée ait la forme

$$\psi = \psi_0(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \varphi(r) & \chi \\ ig(r)(\vec{\sigma} \cdot \vec{r}) & \chi \end{pmatrix} \quad (1,2)$$

où χ est le spineur habituel à deux composantes $\chi = \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix}$

En introduisant (1,2) dans (1,1), nous obtenons les fonctions à symétrie radiale φ, g pour V donné, telles que

$$\begin{aligned} [E - U(r)]\varphi - \left(3g + r \frac{\partial g}{\partial r}\right) &= 0 \\ [E + U(r)]g + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} &= 0 \end{aligned} \quad (1,3)$$

où $U = M + V$. Examinons le moment orbital $\vec{L}$ et le moment angulaire total $\vec{I}$ d'un quark :

$$\vec{I} = \frac{\vec{\sigma}}{2} + \vec{L}$$

$$L_x = i \left(z \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial z} \right) ; \quad L_y = i \left(x \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial x} \right) ; \quad L_z = i \left(y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

Pour le moment angulaire total, nous obtenons :

$$\vec{I} \begin{pmatrix} \varphi(r) & \chi \\ ig(r)(\vec{\sigma} \cdot \vec{r}) & \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi(r) & \frac{\vec{\sigma}}{2} \chi \\ ig(r)(\vec{\sigma} \cdot \vec{r}) & \frac{\vec{\sigma}}{2} \chi \end{pmatrix}$$

d'où

$$I^2 = \begin{pmatrix} \varphi(r) & \left(\frac{\vec{\sigma}}{2}\right)^2 \chi \\ ig(r)(\vec{\sigma} \cdot \vec{r}) & \left(\frac{\vec{\sigma}}{2}\right)^2 \chi \end{pmatrix} = \frac{3}{4} \psi_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 1 \right) \psi_0. \quad (1,4)$$

De cette façon, il résulte que, dans l'état s , $I = 1/2$. De (1,2), il résulte que L n'a pas de valeur définie, à savoir, $L = 0$ pour les composantes supérieures de spineur ψ_0 et $L = 1$ pour les composantes inférieures. Aussi le spin propre d'un quark n'a pas de valeur définie. Dans ce cas, quand le mouvement du quark devient non relativiste, les composantes inférieures du spineur ψ_0 sont petites et approximativement $L = 0$, $I = \frac{\vec{\sigma}}{2}$.

De (1,4), nous déduisons

$$I_z \psi_0 = \begin{pmatrix} \varphi(r) & \frac{\sigma_z}{2} \chi \\ ig(r)(\vec{\sigma} \cdot \vec{r}) & \frac{\sigma_z}{2} \chi \end{pmatrix}$$

C'est pourquoi, d'après (1,2)

$$\chi = \chi \uparrow = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \chi = \chi \downarrow = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

nous obtenons les fonctions d'onde

$$\psi_0 = \psi \uparrow(\vec{r}) = \psi(\vec{r}, 1)$$

$$\psi_0 = \psi \downarrow(\vec{r}) = \psi(\vec{r}, 2)$$

qui sont fonctions propres de l'opérateur I_z :

$$I_z \psi(\vec{r}, 1) = \frac{1}{2} \psi(\vec{r}, 1)$$

$$I_z \psi(\vec{r}, 2) = -\frac{1}{2} \psi(\vec{r}, 2)$$

Dans le cas général, nous avons une superposition de ces états soit

$$\psi_0 = \varphi(1)\psi(\vec{r}, 1) + \varphi(2)\psi(\vec{r}, 2)$$

où $\varphi(1)$, $\varphi(2)$ sont des nombres complexes arbitraires. A de telles fonctions d'onde correspondent le spineur

$$\chi = \varphi(1)\chi \uparrow + \varphi(2)\chi \downarrow = \begin{pmatrix} \varphi(1) \\ \varphi(2) \end{pmatrix}.$$

Comme on voit, l'état d'un quark donné se trouvant sur un niveau E_0 , peut être caractérisé par une fonction d'onde discrète $\varphi(j)$ en tenant compte de la dépendance de la fonction à indice unitaire $\varphi(j, A)$.

En vertu de (1,4), la transformation

$$\psi_0 \rightarrow 2I_\alpha \psi_0 \quad ; \quad \alpha = 1, 2, 3$$

équivalent à la transformation $\chi \rightarrow \sigma_\alpha \chi$, laquelle peut se représenter sous la forme

$$\varphi(j, A) = \sum_{j'=1}^l (\sigma_\alpha)_{j,j'} \varphi(j', A).$$

C'est pourquoi les composantes du vecteur $2\vec{I}$ peuvent se représenter par des matrices de spin $\vec{\sigma}$ habituelles, agissant sur l'indice j de la fonction d'onde discrète.

Étudions maintenant un système de trois quarks dans l'état d'énergie

minimum. Pour obtenir de tels états, dans le schéma examiné, il faut placer les trois quarks sur le niveau E_0 . La masse du baryon correspondant est alors

$$m_B = 3E_0 \quad (1,5)$$

L'état d'un système donné de trois quarks placés sur un niveau E_0 , se représente par la superposition de tous les états possibles, dans lesquels les indices j_1, j_2, j_3 donnant $I_z^{(1)}, I_z^{(2)}, I_z^{(3)}$ et les indices unitaires A_1, A_2, A_3 ont des valeurs fixées. Pour caractériser une telle superposition, introduisons la fonction d'onde discrète

$$\varphi(j_1, A_1; j_2, A_2; j_3, A_3). \quad (1,6)$$

La partie spatiale de la fonction d'onde sera symétrique, pour autant que tous les quarks se trouvent sur un seul et même niveau et les fonctions d'espace $\varphi(r)$, $g(r)$ sont identiques. Mais comme il nous est nécessaire que la fonction d'onde totale soit symétrique par rapport aux permutations entre $\xi_l = (r_l, A_l, j_l)$, alors dans la fonction (1,6) nous devons imposer une condition de symétrie par rapport aux indices combinés $a_l = (A_l, j_l)$; $l = 1, 2, 3$. Cette condition de symétrie remplace dans notre schéma l'approche fondée sur le groupe SU(6), elle joue, au fond, le même rôle. Grâce à ce moyen, principalement, nous obtenons ici un 56-multiplet des baryons de la systématique habituelle.

Par exemple, la fonction d'onde φ séparément symétrique par rapport à A_1, A_2, A_3 et par rapport à j_1, j_2, j_3 caractérise le décuplet des résonances avec $I = 3/2$, la fonction à symétrie mixte correspond à l'octet des baryons avec $I = 1/2$. Ici, il s'agit du moment angulaire total $\tilde{I} = \sum_l I_l^{(j)}$.

En général, pour les baryons d'une famille donnée P, N, ..., les expressions des fonctions φ correspondantes ont la même forme que dans l'approche basée sur SU(6). Le fait est que tout raisonnement fondé sur des considérations de groupe introduit la propriété de symétrie. Une différence, dans le schéma envisagé provient du fait que nous traitons le moment angulaire total des quarks, alors qu'habituellement on envisage seulement le spin des quarks. D'autre part, dans ce modèle, de même que dans SU(6), nous envisageons aussi le cas statique, le cas des baryons au repos. Cette restriction, au fond, est déjà contenue dans notre introduction, quand dans la formulation de l'équation d'onde des quarks dans les baryons nous introduisons un potentiel scalaire à symétrie axiale $V(r)$, dépendant de la distance r au centre de gravité.

§ II

Examinons le problème du calcul des moments magnétiques des baryons. Pour cela commençons par étudier le comportement d'un quark situé sur un niveau d'énergie E_0 , dans un champ magnétique extérieur et cherchons comment se modifie l'énergie du quark.

Exprimons la non-dépendance du champ magnétique par rapport au temps par un potentiel vecteur $\vec{A}(\vec{r})$ et modifions l'équation (1,1) en conséquence. Nous obtenons

$$\left\{ \gamma_0 E + \vec{\gamma} \left[i \frac{\partial}{\partial \vec{r}} + e Q_A \vec{A}(\vec{r}) \right] - U(r) \right\} \psi = 0, \quad (2,1)$$

où $e Q_A$ est la charge électrique du quark, $Q = 2/3, -1/3, -1/3$. Supposons $\vec{A}$ suffisamment petit, nous trouvons un accroissement δE proportionnel à la charge du quark. Dans ce cas simple, pour intégrer cette équation, écrivons

$$(\mathcal{L} - U)(\mathcal{L} + U)\psi = 0$$

où

$$\mathcal{L} = \gamma_0 E + \vec{\gamma} \left[i \frac{\partial}{\partial \vec{r}} + e Q_A \vec{A}(\vec{r}) \right].$$

d'où

$$\{ \mathcal{L}^2 + U\mathcal{L} - \mathcal{L}U - U^2 \} \psi = 0. \quad (2,2)$$

Dans l'expression de $\mathcal{L}^2$, nous considérerons seulement les termes du premier ordre, sauf pour les termes ne dépendant pas de $\vec{A}$.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^2 &= E^2 + \Delta + e Q_A i \sum_{v,\mu=1,2,3} \left\{ \gamma_v \gamma_\mu \frac{\partial}{\partial r_v} A_\mu + \gamma_\mu \gamma_v A_\mu \frac{\partial}{\partial r_v} \right\} \\ &= E^2 + \Delta + e Q_A i \sum_v \left(- \frac{\partial}{\partial r_v} A_v - A_v \frac{\partial}{\partial r_v} \right) \\ &\quad + e Q_A i \sum_{\mu \neq v} \gamma_v \gamma_\mu \left(\frac{\partial}{\partial r_v} A_\mu - A_\mu \frac{\partial}{\partial r_v} \right). \end{aligned}$$

Mais

$$\gamma_v \gamma_\mu = \gamma_0 \gamma_5 \sigma_v \gamma_0 \gamma_5 \sigma_\mu = -\sigma_v \sigma_\mu = -i \sum_{\lambda} \varepsilon_{v,\mu,\lambda} \sigma_\lambda$$

et

$$\sum_{\nu, \mu} \varepsilon_{\nu, \mu, \lambda} \frac{\partial A_{\mu}}{\partial r_{\nu}} = H_{\lambda}$$

où H_{λ} sont les composantes du vecteur champ magnétique ; par conséquent,

$$\mathcal{L}^2 = E^2 + \Delta - eQ_A i \sum_{\nu} \left(\frac{\partial}{\partial r_{\nu}} A_{\nu} + A_{\nu} \frac{\partial}{\partial r_{\nu}} \right) + eQ_A \vec{H} \cdot \vec{\sigma}.$$

Comme

$$U\mathcal{L} - \mathcal{L}U = -i\vec{\gamma} \frac{\partial U}{\partial \vec{r}} = -i(\vec{\gamma} \cdot \vec{r}) \frac{U'(r)}{r}$$

de (2,2) on obtient finalement

$$\left\{ E^2 + \Delta - U^2(r) - \frac{i(\vec{\gamma} \cdot \vec{r})}{r} U'(r) - eQ_A i \sum_{\nu} \left(\frac{\partial}{\partial r_{\nu}} A_{\nu} + A_{\nu} \frac{\partial}{\partial r_{\nu}} \right) + eQ_A \vec{H} \cdot \vec{\sigma} \right\} \psi = 0. \quad (2,3)$$

Pour le calcul des moments magnétiques nous considérons le cas particulier d'un champ magnétique uniforme, dirigé selon l'axe z . L'énergie de quark E_0 , laquelle, en absence de champ magnétique, était égale pour les deux fonctions d'onde indépendantes $\psi = \psi(r, j)$ $j = 1, 2$, sera maintenant distincte. Le champ magnétique considéré a été introduit dans l'espace selon l'axe z . C'est pourquoi, il résulte de la symétrie considérée, que les fonctions propres discrètes $\varphi(j)$ pour δE seront $\varphi(j) = \delta(j-1), \delta(j-2)$ c'est-à-dire $\chi = \chi \uparrow, \chi \downarrow$ correspondant à la direction du moment angulaire parallèle à l'axe z et anti-parallèle à cet axe. L'accroissement δE sera pris égal à la valeur absolue et de signe contraire.

Nous allons utiliser la formule de la théorie des perturbations, au premier ordre, par rapport au paramètre eQ_A . Dans le cas étudié, $H_z = H = \text{Const.}$, $H_x = H_y = 0$, on peut prendre un potentiel-vecteur de la forme

$$A_x = -\frac{Hy}{2} \quad ; \quad A_y = \frac{Hx}{2} \quad ; \quad A_z = 0.$$

Alors

$$\begin{aligned} -i \sum_{\nu=1}^3 \left(\frac{\partial}{\partial r_{\nu}} A_{\nu} + A_{\nu} \frac{\partial}{\partial r_{\nu}} \right) + \vec{H} \cdot \vec{\sigma} \\ = iH \left(y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y} \right) + H\sigma_z = H(L_z + \sigma_z) = H(2I_z - L_z) \end{aligned}$$

et l'équation (2,3) prend la forme

$$\left\{ E^2 + \Delta - U^2(r) - \frac{i(\vec{\gamma} \cdot \vec{r})}{r} U'(r) + eQ_A H(2I_z - L_z) \right\} \psi = 0. \quad (2,4)$$

Comme $i\gamma_v$; $v = 1, 2, 3$ est une matrice auto-adjointe, l'opérateur

$$\Delta - U^2 - \frac{i(\vec{\gamma} \cdot \vec{r})}{r} U'$$

sera aussi auto-adjoint. C'est pourquoi en première approximation

$$2E_0 \delta E = -eQ_A H \frac{\int \psi_0^* (2I_z - L_z) \psi_0 d\vec{r}}{\int \psi_0^* \psi_0 d\vec{r}}. \quad (2,5)$$

Mais de (1,2), il résulte clairement que

$$L_z \psi = \begin{pmatrix} 0 \\ g(r)(x\sigma_y - y\sigma_x)\chi \end{pmatrix}$$

et

$$\int \psi_0^* L_z \psi_0 d\vec{r} = -i \int |g(r)|^2 \chi^* (x\sigma_x + y\sigma_y + z\sigma_z)(x\sigma_y - y\sigma_x) \chi d\vec{r}.$$

Comme, eu égard à la symétrie,

$$\int |g(r)|^2 r_\alpha r_\beta d\vec{r} = \frac{\delta_{\alpha,\beta}}{3} \int |g(r)|^2 d\vec{r}$$

alors

$$\int \psi_0^* L_z \psi_0 d\vec{r} = \frac{1}{3} \int |g(r)|^2 r^2 dr \chi^* (i\sigma_y \sigma_x - i\sigma_x \sigma_y) \chi = \frac{2}{3} \int |g(r)|^2 r^2 dr \chi^* \sigma_z \chi.$$

Ensuite

$$\int \psi_0^* \psi_0 d\vec{r} = \int \{ |\varphi(r)|^2 + r^2 |g(r)|^2 \} d\vec{r} \chi^* \chi$$

Comme I_z , pour la fonction d'onde $\psi_0 = \psi(\vec{r}, j)$ doit se représenter comme le nombre habituel

$$I = \begin{cases} \frac{1}{2}, & j = 1 \\ -\frac{1}{2}, & j = 2 \end{cases}$$

alors $\frac{\chi_j^* \sigma_z \chi_j}{\chi_j^* \chi_j} = 2I_z$

où

$$\chi_1 = \chi \uparrow, \quad \chi_2 = \chi \downarrow$$

et, par conséquent

$$\frac{\int \psi_0^* L_z \psi_0 d\vec{r}}{\int \psi_0^* \psi_0 d\vec{r}} = 2I_z \delta$$

où

$$\delta = \frac{\frac{2}{3} \int |g(r)|^2 r^2 d\vec{r}}{\int \{ |\varphi(r)|^2 + r^2 |d(r)|^2 \} r^2 d\vec{r}} = \frac{\frac{2}{3} \int_0^\infty r^4 |g(r)|^2 dr}{\int_0^\infty \{ |\varphi(r)|^2 + r^2 |g(r)|^2 \} r^2 dr} \quad (2,6)$$

Comme δ a la valeur moyenne de la composante z du moment orbital dans l'état pour lequel $I_z = 1/2$.

$$\delta = \langle L_z \rangle \uparrow. \quad (2,7)$$

Ainsi, de (2,5), on déduit

$$\delta E = -\frac{eQ_A H}{2E_0} 2I_z (1 - \delta). \quad (2,8)$$

Par conséquent, le moment magnétique d'un quark sera

$$\mu_A = \frac{eQ_A}{2E_0} (1 - \delta). \quad (2,9)$$

Cherchons maintenant les moments magnétiques des baryons. Pour cela, faisons la somme des accroissements d'énergie pour les trois quarks :

$$\sum_{i=1}^3 \delta E_i = -\frac{(1 - \delta)eH}{2E_0} \sum_{i=1}^3 Q_{A_i} 2I_z^{(i)} \quad (2,10)$$

Pour obtenir l'énergie de désintégration d'un baryon, faisons la moyenne de l'expression (2,10) au moyen de la fonction d'onde $\varphi_B(a_1, a_2, a_3)$ du baryon donné.

Considérons un baryon de l'octet de spin 1/2. Soulignons que dans le

schéma envisagé, le spin du baryon est la somme des moments angulaires des quarks composant le baryon :

$$\vec{S}_B = \sum_{l=1}^3 \mathbf{I}^{(l)}$$

Nous avons alors deux fonctions indépendantes $\varphi_B \uparrow, \varphi_B \downarrow$ correspondant à $2S_z = 1, -1$. Mais, il est évident que

$$\varphi_B^* \downarrow \sum_{l=1}^3 Q_{A_l} 2I_z^{(l)} \varphi_B \downarrow = - \varphi_B^* \uparrow \sum_{l=1}^3 Q_{A_l} 2I_z^{(l)} \varphi_B \uparrow$$

et par conséquent

$$\delta E_B = - \frac{(1-\delta)eH}{2E_0} \left(\varphi_B^* \uparrow \sum_{l=1}^3 Q_{A_l} 2I_z^{(l)} \varphi_B \uparrow \right) 2S_z.$$

De la sorte, le moment magnétique d'un baryon sera

$$\mu_B = \frac{(1-\delta)e}{2E_0} \left(\varphi_B^* \uparrow \sum_{l=1}^3 Q_{A_l} 2I_z^{(l)} \varphi_B \uparrow \right).$$

On exprime habituellement ces moments magnétiques en prenant comme unité le magnéton nucléaire de Bohr pour la masse du proton $e/2m_p$.

Avec de telles unités et $h = 1, c = 1$:

$$\mu_B = \frac{(1-\delta)m_p}{E_0} \left(\varphi_B^* \uparrow \sum_{l=1}^3 Q_{A_l} 2I_z^{(l)} \varphi_B \uparrow \right) \quad (2,11)$$

Envisageons encore le cas du modèle considéré dans le paragraphe 1, où il y a trois triplets de quarks. Notons $Q_{A,\alpha}$ la charge d'un quark d'indice A, dans un triplet d'indice α . Alors, dans (2,11), nous devons évidemment faire la substitution

$$\sum_{l=1}^3 Q_{A_l} 2I_z^{(l)} \rightarrow \sum_{l=1}^3 Q_{A_l, \alpha_l} 2I_z^{(l)},$$

puis effectuer la moyenne en utilisant la fonction d'onde,

$$\frac{1}{\sqrt{6}} \varepsilon_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3} \varphi_3 \uparrow(a_1, a_2, a_3); \sum_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)} |\varepsilon_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3}|^2 = 6.$$

Comme

$$\frac{1}{6} \sum_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)} |\varepsilon_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3}|^2 Q_{A, \alpha} = \frac{1}{3} \sum_{\alpha=1}^3 Q_{A, \alpha}$$

en posant, dans ce cas

$$\frac{1}{3} \sum_{\alpha=1}^3 Q_{A, \alpha} = Q_A = \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}$$

on obtient de nouveau la formule (2,11). Ce modèle a été étudié en détail dans le travail [5], où sont indiquées les possibilités de choix des valeurs entières de $Q_{A, \alpha}$.

Revenons maintenant à la relation (2,11) et cherchons, en particulier, μ_P et μ_N dont les valeurs moyennes sont analogues à celles de B. V. Strouminski [6]. Pour les nucléons

$$\varphi_P \uparrow = \frac{\sqrt{2} p \uparrow p \uparrow n \downarrow - p \uparrow p \downarrow n \uparrow}{\sqrt{3}}$$

$$\varphi_N \uparrow = \frac{n \uparrow n \downarrow p \uparrow - \sqrt{2} n \uparrow n \uparrow p \downarrow}{\sqrt{3}}$$

Ici, contrairement à ce qui se passe pour le cas habituel de SU(6), la flèche, dans la direction de la composante z , n'indique pas le spin du quark, mais son moment angulaire total. Comme

$$\sum_{l=1}^3 Q_{A_l} 2I_z^{(l)} \varphi_P \uparrow = \frac{\sqrt{2} \frac{5}{3} p \uparrow p \uparrow n \downarrow + \frac{1}{3} p \uparrow p \downarrow n \uparrow}{\sqrt{3}}$$

il vient de (2,11)

$$\mu_P = \frac{(1 - \delta)m_P}{E_0}.$$

D'une manière tout à fait analogue

$$\mu_N = -\frac{2(1 - \delta)m_P}{3 E_0}.$$

De la relation (2,11), laquelle possède une analogie formelle complète avec le résultat donné par SU(6), il n'est pas difficile de déduire les moments

magnétiques des autres baryons de l'octet, ils s'expriment au moyen de μ_p par la formule habituelle. Toutefois, il est probable que dans une telle application, la valeur des résultats obtenus soit beaucoup plus mauvaise. Pour nous, il est fondamental que le potentiel auto-cohérent soit à symétrie radiale. Une telle supposition, si elle est valable pour les nucléons constitués par les quarks p et n de masses égales, convient apparemment plus mal à la description de la situation dans laquelle les quarks lourds λ violent la symétrie dans le baryon.

Si on tente tout de même la description, à l'aide d'un tel potentiel V , il faut alors probablement introduire un terme spin-orbite important qui casse la symétrie radiale.

§ III

Selon la représentation maintenant adoptée, l'interaction faible des hadrons avec les leptons dans les processus, qui se déroulent sans changement d'étrangeté, se caractérise par la somme des courants axial et vectoriel

$$I_v = I_v^V + I_v^A \quad ; \quad v = 0, 1, 2, 3$$

appartenant aux courants isotopiques axial et vectoriel d'un triplet isotopique $I_{v,p}^V, I_{v,p}^A$ ($p = 1, 2, 3$)

$$I_{v,p}^{V,A} = I_{v,1}^{V,A} + i I_{v,2}^{V,A}.$$

Le courant isotopique vectoriel se conserve dans l'approximation de l'invariance isotopique :

$$\text{div } I_p^V = 0 \quad (3,1)$$

Considérons les éléments de matrice de ces courants de hadrons entre deux états nucléoniques. En utilisant seulement la covariance générale et la loi de conservation (3,1), nous obtenons [7] :

$$\langle B' | I_{v,p}^{V,A}(x) | B \rangle = e^{-i(qx)} u_B, \mathcal{K}_v^{V,A} \frac{p}{2} u_B \quad (3,2)$$

Ici $q = p - p'$, où $p = (E, \vec{p})$ est le quadri-vecteur énergie-impulsion pour l'état B et p' pour l'état B' .

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_v^V &= F_V(q^2) \gamma_v + F_V^{(1)}(q^2) \frac{i}{2m} [\gamma_v, (\gamma_q)] - \\ \mathcal{K}_v^A &= F_A(q^2) \gamma_v \gamma_5 + F_A^{(1)}(q^2) \frac{i}{2m} [\gamma_v, (\gamma_q)] - \gamma_5 + F_A^{(2)}(q^2) \frac{q_v}{m} \gamma_5. \end{aligned} \quad (3,3)$$

Par rapport à la métrique quadri-dimensionnelle adoptée $(+1, -1, -1, -1)$, le produit scalaire de deux quadri-vecteurs se définit par

$$(qx) = q^0 x^0 - \vec{q} \vec{x}.$$

De plus, u_B est un spineur de Dirac

$$\{(\gamma p) - m\} u_B(p) = 0 \quad ; \quad \bar{u}_B = u_B^* \gamma_0$$

possédant aussi les indices isotopiques $s = 1, 2$, et sur lequel agissent les matrices isotopiques r_p . En particulier, pour de petits transferts d'impulsion q , comme, par exemple, pour les désintégrations β , on peut écrire au lieu de (3,3), l'expression simplifiée

$$\mathcal{K}_v^V = F_V(0) \gamma_v \quad ; \quad \mathcal{K}_v^A = F_A(0) \gamma_v \gamma_5$$

Dans un tel cas

$$\langle B' | I_v(0) | B \rangle = F_V(0) \bar{u}_B \gamma_v \left(1 + \frac{F_A(0)}{F_V(0)} \gamma_5 \right) \tau^+ u_B$$

où $\tau^+ = (\tau_x + i\tau_y)/2$ est l'opérateur d'élévation du spin isotopique. Comme on sait, pour les courants leptoniques, les parties axiales et vectorielles s'expriment au moyen d'un coefficient unique qu'on exprime toujours sous la forme $\gamma_v(1 + \gamma_5)$. Pour les nucléons, l'expérience donne

$$\frac{F_A(0)}{F_V(0)} = 1,18 \pm 0,02$$

Habituellement, on estime que l'écart de ce rapport à l'unité dépend de la renormalisation ou des effets de la structure interne des nucléons. Dans le modèle à quarks adopté, on suppose que pour les quarks $F_A = F_V = 1$.

Ceci admis, nous allons déterminer le rapport $\frac{F_A}{F_V}$ pour les nucléons à partir de considérations sur le modèle à quarks indépendants. Pour cela nous utiliserons le même procédé que pour la détermination des moments magnétiques.

Introduisons un faible champ extérieur (non quantique) $A_v(x)$, introduisant dans le lagrangien d'interaction un terme de la forme

$$g_0 \sum_{v=0}^3 I_v A_v$$

Nous supposons que le champ $A_v(x)$ est constant, $A_v(x) = A$, mais contrairement à ce que nous avons envisagé plus haut à propos du champ

magnétique, son introduction est purement formelle et s'emploie en qualité d'hypothèse auxiliaire.

Définissons une variation d'énergie δE pour le nucléon, produit par un tel champ, et de même, un accroissement δE_i pour les quarks, posons

$$\delta E = \sum_{i=1}^3 \delta \bar{E}_i$$

où a été faite la moyenne par rapport à la fonction d'onde du nucléon $\varphi(a_1, a_2, a_3)$.

L'équation de Dirac pour un nucléon libre dans le champ faible envisagé sera

$$\left\{ \gamma_p - m - g_0 \sum_{v=0}^3 A_v (\mathcal{K}_v^V + \mathcal{K}_v^A) \tau^+ \right\} u_B(p) = 0$$

et par conséquent

$$\left\{ \gamma_0 E - m - g_0 \sum_{v=0}^3 A_v (F_v(0) \gamma_v + F_A(0) \gamma_v \gamma_5) \tau^+ \right\} u_B = 0$$

ou encore

$$\left\{ E - \gamma_0 m - g_0 \left[A_0 (F_v(0) + F_A(0) \gamma_5) + \sum_{v=1}^3 A_v (F_v(0) \sigma_v \gamma_5 + F_A(0) \sigma_v) \right] \tau^+ \right\} u_B = 0.$$

Cherchons la perturbation du premier ordre

$$\delta E = g_0 u_B^* \left\{ A_0 (F_v(0) + F_A(0) \gamma_5) + \sum_{v=1}^3 A_v (F_v(0) \sigma_v \gamma_5 + F_A(0) \sigma_v) \right\} \tau^+ u_B$$

où u_B est le spineur du nucléon dans le cas où $\vec{p} = 0$.

Comme dans ce cas, aucune de ses composantes n'est nulle, le terme en γ_5 disparaît et nous pouvons écrire

$$\delta E = g_0 A_0 F_v(0) u_B^* \tau^+ u_B + g_0 \sum_{v=1}^3 A_v F_A(0) u_B^* \sigma_v \tau^+ u_B.$$

Orientons le spin du nucléon selon l'axe z . Alors

$$\begin{aligned} u_B^* \sigma_v \tau^+ u_B &= 0 \quad ; \quad v = 1, 2 \\ u_B^* \sigma_3 \tau^+ u_B &= u_B^* \tau^+ u_B \end{aligned}$$

Mais le spineur u_B avec $\vec{p} = 0$, $\sigma_z = 1$, se caractérise aussi par sa composante isotopique $c(s)$, à partir de laquelle se construit B, par superposition P et N :

$$B = c(1)P + c(2)N \quad ; \quad |c(1)|^2 + |c(2)|^2 = 1 \quad (3,4)$$

Ainsi nous posons

$$\delta E_B \uparrow = g_0 A_0 F_V(0) c^* \tau^+ c + g_0 A_3 F_A(0) c^* \tau^+ c. \quad (3,5)$$

Comme

$$c^* \tau^+ c = \sum_{s', s=1}^3 c^*(s)(\tau^+)_{s,s'} c(s') = c^*(1)c(2)$$

il est clair que δE ne disparaît pas tant que B est une superposition P et N, avec $c(1) \neq 0$ et $c(2) \neq 0$.

Comme on voit dans (3,5), il n'y a pas de termes en A_1 et A_2 et c'est pourquoi, nous pouvons de plus envisager le cas où $A_1 = A_2 = 0$.

Considérons l'équation des quarks dans un nucléon, un champ faible étant introduit. Complétons l'équation (1,1) avec un terme correspondant, nous obtenons :

$$\left\{ \gamma_0 E + i \left(\vec{\gamma} \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \right) - U(r) - g_0 [A_0 \gamma_0 (1 + \gamma_5) + A_3 \gamma_3 (1 + \gamma_5)] \tau^+ \right\} \psi = 0$$

c'est-à-dire

$$\left\{ E + i \gamma_5 \left(\vec{\sigma} \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \right) - \gamma_0 U(r) - g_0 [A_0 (1 + \gamma_5) + A_3 \sigma_3 (1 + \gamma_5)] \tau^+ \right\} \psi = 0$$

La fonction d'onde d'un quark d'énergie E_0 sera

$$\psi_0 = \begin{pmatrix} \varphi(r) & \chi \\ i g(r) (\vec{r} \vec{\sigma}) & \chi \end{pmatrix}$$

Ici χ est le spineur correspondant au spin habituel et au spin isotopique :

$$\chi = |\varphi(j, A)| \quad ; \quad j, A = 1, 2$$

Si $\varphi(j, A)$ est différent de zéro pour une paire d'indices seulement, par exemple pour $j = 1$, $A = 1$, dans l'état considéré, il y a un quark de nature définie (p ou n) avec I_z défini. Dans le cas général, la fonction d'onde discrète $\varphi(j, A)$ caractérise une superposition de tels états. La fonction d'onde sera normée :

$$1 = \sum_{A, j=1,2} |\varphi(j, A)|^2 \equiv \varphi^* \varphi \equiv \chi^* \chi$$

Ici, il est clair que l'indice de quark A échange n et p , puisque, dans notre équation, r^+ figure toujours.

Cherchons l'accroissement d'énergie δE d'un quark, dans l'état φ , produit par l'intervention du faible champ. En utilisant la formule de la théorie des perturbations, au premier ordre, nous obtenons :

$$\delta E = g_0 A_0 \frac{\int \psi_0^* (1 + \gamma_5) \tau^+ \psi_0 d\vec{r}}{\int \psi_0^* \psi_0 d\vec{r}} + g_0 A_3 \frac{\int \psi_0^* (1 + \gamma_5) \sigma_z \tau^+ \psi_0 d\vec{r}}{\int \psi_0^* \psi_0 d\vec{r}}$$

Il n'est pas difficile de voir que :

$$\int \psi_0^* \gamma_5 \tau^+ \psi_0 d\vec{r} = \chi^* \int \{ i \varphi^*(r) g(r) (\vec{r}, \vec{\sigma}) - i g^*(r) (\vec{r}, \vec{\sigma}) \varphi(r) \} d\vec{r} \tau^+ \chi = 0$$

comme par rapport à la symétrie radiale

$$\int \vec{r} \varphi^*(r) g(r) d\vec{r} = \int \vec{r} g^*(r) \varphi(r) d\vec{r} = 0.$$

D'une manière analogue

$$\int \psi_0^* \gamma_5 \sigma_z \tau^+ \psi_0 d\vec{r} = 0.$$

Puisque $\sigma_z = 2I_z - 2L_z$, alors :

$$\delta E = g_0 A_0 \frac{\int \psi_0^* \tau^+ \psi_0 d\vec{r}}{\int \psi_0^* \psi_0 d\vec{r}} + g_0 A_3 \frac{\int \psi_0^* (2I_z - 2L_z) \tau^+ \psi_0 d\vec{r}}{\int \psi_0^* \psi_0 d\vec{r}}.$$

Exprimons ces relations comme au paragraphe 2, nous aurons :

$$\begin{aligned} \int \psi_0^* \psi_0 d\vec{r} &= \int \{ |\varphi(r)|^2 + r^2 |g(r)|^2 \} d\vec{r} \chi^* \chi \\ &= \int \{ |\varphi(r)|^2 + r^2 |g(r)|^2 \} d\vec{r} \\ \int \psi_0^* \tau^+ \psi_0 d\vec{r} &= \int \{ |\varphi(r)|^2 + r^2 |g(r)|^2 \} d\vec{r} \chi^* \tau^+ \chi \\ \int \psi_0^* 2I_z \tau^+ \psi_0 d\vec{r} &= \int \{ |\varphi(r)|^2 + r^2 |g(r)|^2 \} d\vec{r} \chi^* \sigma_z \tau^+ \chi \\ \int \psi_0^* L_z \tau^+ \psi_0 d\vec{r} &= \frac{2}{3} \int |g(r)|^2 r^2 dr \chi^* \sigma_z \tau^+ \chi. \end{aligned}$$

Mais,

$$\chi^* \tau^+ \chi = \sum_{j,A} \varphi^*(j, A) (\tau^+, \varphi)_{j,A} = \sum_j \varphi^*(j, 1) \varphi(j, 2) = \varphi^* \tau^+ \varphi$$

et

$$\chi^* \sigma_z \tau^+ \chi = \sum_{j,A} \varphi^*(j, A) (\tau^+ \sigma_z \varphi)_{j,A}.$$

D'autre part, comme il a été mentionné au paragraphe 1

$$\sigma_z \varphi = 2I_z \varphi.$$

C'est pourquoi

$$\chi^* \sigma_z \tau^+ \chi = \varphi^* 2I_z \tau^+ \varphi.$$

Donc, δE pour un quark, dans un état caractérisé par la fonction d'onde discrète φ est donné par l'expression

$$\delta E = \varphi^* (g_0 A_0 \tau^+ + g_0 A_3 (1 - 2\delta) 2I_z \tau^+) \varphi,$$

où δ est donné par la formule (2,6). Par conséquent, l'accroissement d'énergie d'un nucléon dans l'état caractérisé par la fonction d'onde $\varphi_B \uparrow$ s'exprime au moyen de la somme pour trois quarks :

$$\delta E_B \uparrow = \varphi_B^* \uparrow \left\{ g_0 A_0 \sum_{l=1}^3 \tau^{+(l)} + g_0 A_3 (1 - 2\delta) \sum_{l=1}^3 2I_z^{(l)} \tau^{+(l)} \right\} \varphi_B \uparrow. \quad (3,6)$$

En comparant cette somme à l'expression (3,5), il vient

$$\begin{aligned} F_V(0) c^* (\tau_1 + i\tau_2) c &= \varphi_B^* \uparrow \sum_{l=1}^3 (\tau_1^{(l)} + i\tau_2^{(l)}) \varphi_B \uparrow, \\ F_A(0) c^* (\tau_1 + i\tau_2) c &= (1 - 2\delta) \varphi_B^* \uparrow \sum_{l=1}^3 2I_z^{(l)} (\tau_1^{(l)} + i\tau_2^{(l)}) \varphi_B \uparrow, \\ \tau^+ &= \frac{\tau_1 + i\tau_2}{2}. \end{aligned} \quad (3,7)$$

Conformément à (3,4)

$$\varphi_B \uparrow = c_1 \varphi_P \uparrow + c_2 \varphi_N \uparrow$$

et comme $\tau^{(l)}$ et $I_z^{(l)}$ s'expriment par des matrices hermitiennes, nous tirons de (3,7) par séparation des parties réelle et imaginaire

$$F_V(0)c^*\tau_p c = \varphi_B^* \uparrow \sum_{l=1}^3 \tau_p^{(l)} \varphi_B \uparrow \quad ; \quad p = 1, 2$$

$$F_A(0)c^*\tau_p c = (1 - 2\delta)\varphi_B^* \uparrow \sum_{l=1}^3 2I_z^{(l)} \tau_p^{(l)} \varphi_B \uparrow \quad ; \quad p = 1, 2.$$

Étant donnée l'invariance isotopique il résulte que les mêmes égalités existent pour $p = 3$. Ces corrélations dans le cas où $p = 3$ sont telles que les deux parties ne s'annulent pas, ni dans le choix $B = P$ ni dans le choix $B = N$. Il vient

$$c_1 = 1 \quad , \quad c_2 = 0 \quad ; \quad \varphi_B \uparrow = \varphi_P \uparrow.$$

Nous obtenons alors

$$F_V(0) = \varphi_P^* \uparrow \sum_{l=1}^3 \tau_3^{(l)} \varphi_P \uparrow = \varphi_P^* \uparrow \varphi_P \uparrow = 1$$

et de même

$$F_A(0) = (1 - 2\delta)\varphi_P^* \uparrow \sum_{l=1}^3 2I_z^{(l)} \tau_3^{(l)} \varphi_P \uparrow.$$

Pour calculer le membre de droite on utilise la relation

$$\varphi_P \uparrow = \frac{\sqrt{2}p \uparrow p \uparrow n \downarrow - p \uparrow p \downarrow n \uparrow}{\sqrt{3}}.$$

De sorte que

$$\sum_{l=1}^3 2I_z^{(l)} \tau_3^{(l)} \varphi_P \uparrow = \frac{3\sqrt{2}p \uparrow p \uparrow n \downarrow - p \uparrow p \downarrow n \uparrow}{\sqrt{3}}$$

et

$$\varphi_P^* \uparrow \sum_{l=1}^3 2I_z^{(l)} \tau_3^{(l)} \varphi_P \uparrow = \frac{3,2 - 1}{3} = \frac{5}{3}.$$

Alors

$$\frac{F_A(0)}{F_V(0)} = \frac{5}{3}(1 - 2\delta) \quad (3,10)$$

Ce résultat a été obtenu dans le travail [8] à partir d'une remarque de de V. Matvéev et de B. Stroumski (¹).

§ IV

Passons à l'examen des résultats obtenus plus haut, plus précisément, considérons les deux formules, la formule donnant le moment magnétique du proton

$$\mu_p = (1 - \delta) \frac{m_p}{E_0} \quad (4,1)$$

et la formule donnant le rapport des constantes axiales et vectorielles

$$\frac{F_A(0)}{F_V(0)} = \frac{5}{3}(1 - 2\delta). \quad (4,2)$$

Ici m_p est la masse du proton, E_0 le niveau d'énergie minimale dans le nucléon, δ est donné par la relation (2,6) :

$$\delta = \frac{2}{3} \frac{\int_0^\infty r^4 |g(r)|^2 dr}{\int_0^\infty \{ |\varphi(r)|^2 + r^2 |g(r)|^2 \} r^2 dr} \quad (4,3)$$

Comme il a été déjà mentionné, δ est lié à la valeur moyenne de la composante z du moment orbital d'un quark :

$$\langle L_z \rangle \uparrow = \delta \quad ; \quad \langle L_z \rangle \downarrow = -\delta$$

En général, dans un état de quark pour lequel I_z possède une valeur définie,

$$\langle L_z \rangle_{I_z} = 2I_z \delta$$

Comme $\sum_{l=1}^3 2I_z^{(l)} \varphi_P \uparrow = \varphi_P \uparrow$, par sommation des trois quarks, qui engendrent le proton, nous obtenons

$$\delta = \langle \varphi_P \uparrow \mathcal{L}_z \varphi_P \uparrow \rangle \quad (4,4)$$

(¹) Voir la note après correction.

où $\mathcal{L}_z$ est la composante z du moment orbital total des quarks

$$\mathcal{L}_z = \sum_{l=1}^3 L_z^{(l)}.$$

Puisque

$$I_z^{(l)} = \frac{1}{2} \sigma_z^{(l)} + L_z^{(l)}$$

on voit que la quantité δ peut s'interpréter comme une contribution du moment orbital des quarks au spin du nucléon. Dans le cas de l'approximation non relativiste du mouvement des quarks, quand $rg(r)$ est petit devant $\varphi(r)$, δ est petit. Si on néglige δ dans les formules (4,1), (4,2) et si on utilise la relation (1,5)

$$m_p = 3E_0 \quad (4,5)$$

pour le moment magnétique du proton, nous obtenons

$$\mu_p = 3 \quad (4,6)$$

et pour le rapport des constantes axiale et vectorielle :

$$\frac{F_A}{F_V} = \frac{5}{3} = 1,67, \quad (4,7)$$

c'est le résultat de SU(6).

Comme la valeur expérimentale de μ_p est $\mu_p = 2,79$, et vu la grossièreté du modèle utilisé « à quarks indépendants », le résultat (4,6) doit être estimé satisfaisant. Dans la formule (4,7), l'accord avec la valeur expérimentale est plus mauvais. Comme de (4,3) il résulte que $\delta > 0$, on voit que, dans (4,2), δ modifie le membre de droite dans la bonne direction.

Notons que l'importance de la contribution du moment orbital a été déjà soulignée dans les travaux de Gatto *et al.* et de Harari [9].

Dans ces travaux, cependant, les auteurs sont partis de ce que, dans la représentation (56) avec $L = 0$, il s'ajoute d'autres représentations, par exemple (20), avec $L = 1$. Dans notre schéma, il n'est pas nécessaire d'être dans les limites de la représentation (56), puisque l'addition des états avec $L = 1$ résulte de l'équation de Dirac elle-même.

Pour une estimation approchée de la grandeur δ , nous prenons une forme simplifiée de champ scalaire

$$\begin{aligned} V(r) &= -M, & r < r_0 \\ V(r) &= 0, & r > r_0 \end{aligned} \quad (4,8)$$

proposé dans le travail [1]. Comme on voit, l'intensité du champ dans la zone $0 < r < r_0$ est si grande, que le champ scalaire « compense » en fait, toute la masse propre du quark, et l'énergie est obtenue positive, seulement pour que la barrière de potentiel localise le quark dans la sphère de rayon r_0 .

Donc, en utilisant l'équation (1,3), dans laquelle

$$\begin{aligned} U &= 0, & r < r_0 \\ U &= M, & r > r_0. \end{aligned}$$

Nous obtenons

$$g = -\frac{1}{(E + U)} \frac{\partial \varphi}{r \partial r}. \quad (4,9)$$

En substituant cette expression dans la première des équations (1,3) et en tenant compte de ce que U est constant (sauf en $r = r_0$), nous obtenons

$$(E - U)\varphi + \frac{1}{(E + U)} \left\{ 2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} + r \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \right\} = 0.$$

De là

$$\frac{\partial^2 r \varphi}{\partial r^2} + (E^2 - U^2) r \varphi = 0 \quad ; \quad r \neq r_0,$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 r \varphi}{\partial r^2} + E^2 r \varphi &= 0 \quad ; \quad 0 < r < r_0, \\ \frac{\partial^2 r \varphi}{\partial r^2} - (M^2 - E^2) r \varphi &= 0 \quad ; \quad r > r_0. \end{aligned} \quad (4,10)$$

Comme $r\varphi$ doit s'annuler pour $r = 0$, ne pas subir de discontinuité par passage à travers $r = r_0$ et tendre vers zéro pour $r \rightarrow \infty$, alors de (4,10) nous tirons

$$\begin{aligned} r\varphi &= A \sin Er \quad 0 < r < r_0 \\ r\varphi &= A \sin Er_0 e^{-\sqrt{\mu^2 - E^2}(r - r_0)} \quad r > r_0 \\ A &= \text{const.} \end{aligned} \quad (4,11)$$

De (4,9), on déduit que $g(r)$ aussi ne doit pas subir de discontinuité en $r = r_0$, cherchons

$$\frac{1}{E} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)_{r_0-0} = \frac{1}{E + M} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)_{r_0+0}$$

d'où on peut déduire l'équation de définition de la valeur propre de l'énergie $E = E_0$.

$$\cos Er_0 + \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{E}{M}\right)^2}}{1 + \frac{E}{M}} \sin Er_0 + \frac{1}{Er_0} \left(\frac{E}{E + M} - 1 \right) \sin Er_0 = 0.$$

De plus, pour ne pas considérer la masse M , dont la valeur n'est pas connue, et pour simplifier le calcul, le passage à la limite $M \rightarrow \infty$ possède un sens.

Par passage à la limite, nous obtenons

$$\cos Er_0 + \sin Er_0 = \frac{\sin Er_0}{Er_0}. \quad (4,12)$$

Par conséquent

$$E = \xi/r_0. \quad (4,13)$$

où ξ est la plus petite racine positive de l'équation

$$\cos \xi + \sin \xi = \frac{\sin \xi}{\xi}. \quad (4,14)$$

Pour $r < r_0$ nous obtenons aussi

$$\begin{aligned} r\varphi(r) &= A \sin E_0 r \\ r^2 g(r) &= -A \left(\cos E_0 r - \frac{\sin E_0 r}{E_0 r} \right) \end{aligned} \quad (4,15)$$

et pour $r < r_0$

$$r\varphi = r^2 g = 0. \quad (4,16)$$

Calculons δ :

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{2}{3} \frac{\int_0^{r_0} \left(\cos E_0 r - \frac{\sin E_0 r}{E_0 r} \right)^2 dr}{\int_0^{r_0} \left\{ \sin^2 E_0 r + \left(\cos E_0 r - \frac{\sin E_0 r}{E_0 r} \right)^2 \right\} dr} \\ &= \frac{2}{3} \frac{\int_0^\xi \left(\cos x - \frac{\sin x}{x} \right)^2 dx}{\int_0^\xi \left\{ \sin^2 x + \left(\cos x - \frac{\sin x}{x} \right)^2 \right\} dx} \end{aligned}$$

Ces expressions sont faciles à intégrer car :

$$\left(\cos x - \frac{\sin x}{x} \right) = \cos^2 x - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\sin^2 x}{x}.$$

Nous obtenons

$$\delta = \frac{\frac{\xi}{2} + \frac{\sin^2 \xi}{4} - \frac{\sin^2 \xi}{\xi}}{\xi - \frac{\sin^2 \xi}{\xi}} = \frac{1 + \frac{\sin \xi}{\xi} \cos \xi - 2 \left(\frac{\sin \xi}{\xi} \right)^2}{1 - \left(\frac{\sin \xi}{\xi} \right)^2};$$

d'où, en utilisant l'équation (4,14)

$$\delta = \frac{1}{6} \left\{ \frac{2\xi - 3}{\xi - 1} \right\}.$$

Comme la solution numérique de l'équation (4,14) donne

$$\xi = 2,04 \quad (4,17)$$

$$\delta = 0,17; \quad (4,18)$$

nous obtenons

$$\mu_p = 2,49$$

de sorte que :

$$\frac{F_A}{F_V} = 1,1. \quad (4,19)$$

Comme on voit, la valeur du moment magnétique du proton diffère de la valeur expérimentale de 12 %, et le rapport des constantes axiale et vectorielle de 7 %. Vu le caractère simplifié du modèle utilisé, ces résultats peuvent être considérés comme satisfaisants.

En utilisant les résultats obtenus, on peut encore calculer le rayon quadratique moyen du nucléon soit

$$\langle r_p^2 \rangle = \frac{\int r^2 p(r) d\vec{r}}{\int p(r) d\vec{r}}$$

où $p(r)$ est la densité de la distribution de charge électrique.

Dans le modèle envisagé, $p(r)$ est proportionnel à

$$\psi_0^*(r)\psi_0(r) = |\varphi(r)|^2 + r^2 |g(r)|^2;$$

c'est pourquoi, en vertu de (4,15) et (4,16)

$$\langle r_p^2 \rangle = \frac{\int_0^{r_0} r^2 \left\{ \sin^2 E_0 r + \left(\cos E_0 r - \frac{\sin E_0 r}{E_0 r} \right)^2 \right\} dr}{\int_0^{r_0} \left\{ \sin^2 E_0 r + \left(\cos E_0 r - \frac{\sin E_0 r}{E_0 r} \right)^2 \right\} dr}.$$

En posant $r = \frac{x}{E_0}$ nous obtenons

$$\begin{aligned} \langle r_p^2 \rangle &= \frac{1}{E_0^2} \frac{\int_0^\xi x^2 \left(1 - \frac{\partial \sin^2 x}{\partial x} \frac{x}{x} \right) dx}{\int_0^\xi \left(1 - \frac{\partial \sin^2 x}{\partial x} \frac{x}{x} \right) dx} = \frac{1}{E_0^2} \frac{\xi^3/3 - \xi \sin^2 \xi + \xi - \frac{\sin^2 \xi}{2}}{\xi - \frac{\sin^2 \xi}{\xi}} \\ &= \left(\frac{\xi}{E_0} \right)^2 \frac{\frac{1}{3} + \frac{\cos^2 \xi}{\xi} - \frac{\sin \xi \cos \xi}{\xi}}{1 - \left(\frac{\sin \xi}{\xi} \right)^2} = r_0^2 \left\{ \frac{1}{3 \left(1 - \left(\frac{\sin \xi}{\xi} \right)^2 \right)^2} + \frac{1}{2\xi^2} \right\} \end{aligned}$$

De là, en utilisant (4,5) et (4,17), nous aboutissons à

$$\langle r_p^2 \rangle = 0,43 \frac{1}{m_\pi^2}.$$

Comme on voit, ici aussi, on parvient, malgré un modèle simplifié à un bon accord avec l'expérience

$$\langle r_p^2 \rangle_{\text{exp}} = 0,396 \frac{1}{m_\pi^2}.$$

Nous avons utilisé partout la valeur δ obtenue pour le cas d'un trou de potentiel rectangulaire. Il est nécessaire de souligner que dans notre modèle, il n'y a aucune base pour le choix précis d'une telle forme de potentiel, si ce n'est une analogie mentionnée avec la théorie du noyau. On peut pour examiner de tels problèmes se placer à un point de vue plus général, et ne pas fixer de forme concrète au potentiel $V(r)$. Alors on ne pourrait pas définir la grandeur à partir de l'équation de Dirac.

Dans un tel cas, on peut utiliser pour définir δ la valeur expérimentale μ_p . Pour améliorer la précision des résultats, nous prenons en considération l'énergie collective des quarks dans le nucléon. Si sans addition d'énergies supplémentaires, nous supposons

$$m_p = 3E_0;$$

il résulte alors de l'expression une énergie collective sous la forme (pour une « rotation » seulement)

$$WI(I + 1)$$

et nous obtenons pour le nucléon et pour l'isobare

$$m_P = 3E_0 + \frac{3}{4}W \quad (938,2 \text{ MeV}),$$

$$m_{N^*} = 3E_0 + \frac{15}{4}W \quad (1\,236 \text{ MeV}).$$

Alors, en considérant (4,1), nous obtenons $\delta = 0,145$. Dans ce cas, de (4,2) nous tirons le rapport des constantes axiale et vectorielle : $\frac{F_A}{F_V} = 0,185$, valeur très voisine de l'expérience.

Ici nous avons examiné le cas où tous les trois quarks se trouvent au niveau le plus bas $E_{s,0}$.

D'après une remarque du Professeur Vigier nous pouvons aussi considérer la résonance de Roper (1 400 MeV) dans le cadre de notre modèle, en supposant que deux quarks se trouvent dans l'état $E_{s,0}$ et un quark dans l'état s excité $E_{s,1}$.

Dans ce cas nous avons dans l'équation (4,14) pour le quark excité $\xi = 5,40$ et $m_R = 2E_{s,0} + E_{s,1} = 1\,446 \text{ MeV}$.

Pour améliorer ce résultat nous pourrions, comme dans le cas du calcul du rapport F_A/F_V tenir compte de « l'énergie collective » des quarks.

Alors,

$$m_R = 2E_{s,0} + E_{s,1} + WI(I + 1)$$

$$m_P = 3E_{s,0} + WI(I + 1)$$

Dans ce cas nous obtenons $m_R = 1\,412$.

Une telle coïncidence est même un peu surprenante.

C'est un plaisir pour moi de remercier les Professeurs N. N. Bogolioubov, A. N. Tavkhelidze et J. P. Vigier pour les discussions importantes.

NOTE

Pendant la rédaction de ce travail, nous avons reçu un preprint de Gell-Mann [10], dans lequel, sur la base d'autres considérations sur le

rapport des constantes axiale et vectorielle, a été obtenue la formule

$$-\frac{G_A}{G_V} = \frac{5}{3} \left(1 - \frac{1}{3} \frac{\langle \vec{p}^2 \rangle}{m^2} + \theta \left(\frac{\vec{p}^4}{m^4} \right) \right).$$

Ici, $\langle \vec{p}^2 \rangle$ est l'impulsion quadratique moyenne d'un quark dans un nucléon, m est la masse effective du quark, soit dans nos notations, $m = E_0$, de plus, dans cette formule, il apparaît un développement par rapport à $1/m$, et où, par conséquent, il est tenu compte des corrections relativistes. Il est intéressant de noter que le développement correspondant de notre grandeur δ sur les bases (1,3) et (2,6) sera

$$\delta = \frac{\langle \vec{p}^2 \rangle}{6E_0^2} + \dots$$

De cette façon, de la formule (3,10) on déduit exactement la formule de Gell-Mann citée ci-dessus.

Manuscrit reçu le 24 juillet 1967.

