

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

CHRISTIANE COUDRAY

MARCEL COZ

Les états liés d'ordre deux dans la diffusion par un potentiel central

Annales de l'I. H. P., section A, tome 5, n° 4 (1966), p. 357-376

http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1966__5_4_357_0

© Gauthier-Villars, 1966, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section A » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Les états liés d'ordre deux dans la diffusion par un potentiel central

par

Christiane COUDRAY et Marcel COZ

Institut de Physique Nucléaire, Division de Physique Théorique,
91-Orsay (France).

RÉSUMÉ. — L'éventualité d'états liés d'ordre multiple est analysée dans les deux cas suivants : existence des dérivées secondes mixtes des solutions ; existence d'une fonction de Green. Dans le premier cas, le potentiel est complexe ; dans le second, la fonction spectrale comporte des δ' . Elle ne peut correspondre à un opérateur auto-adjoint. Un exemple d'un tel potentiel est construit explicitement par une extension des méthodes de Gelfand-Levitan.

ABSTRACT. — The possibility of multiple bound states is analysed in the two following cases : the mixed second derivatives of the Jost solutions exist although they may not be continuous ; the Green function of the problem exists. In the first case, the potential is complex ; in the second one, the spectral function has δ' 's. Therefore it cannot correspond to a self-adjoint operator. An example of such a potential is explicitly constructed through an extension of the Gelfand-Levitan methods.

Étudier un système simple revient à résoudre une équation de Schrödinger indépendante du temps. En particulier, pour la diffusion de deux particules, l'équation à considérer s'écrit :

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu} \Delta_r + V(\vec{r}) \right] \Psi(\vec{r}) = E\Psi(\vec{r})$$

μ étant la masse réduite des deux particules,

\vec{r} leur distance relative,

et $V(\vec{r})$ l'interaction entre les particules, ou potentiel.

En se limitant à la diffusion de deux particules sans spin, un développement en ondes partielles fournit les équations suivantes :

$$\left[-\frac{d^2}{dr^2} + V_l(r) + \frac{l(l+1)}{r^2} - k^2 \right] \psi_l(r) = 0$$

qui ont fait l'objet de nombreuses études. Néanmoins, une classe limitée de potentiels a été surtout envisagée. Ce sont les potentiels locaux et réels tels que [1] :

$$\int_0^\infty r^\alpha |V(r)| dr < \infty \quad \alpha = 1,2$$

On peut se demander s'il ne serait pas intéressant d'éviter ces limitations. Et quelques auteurs ont proposé certains types de potentiels non locaux [2]. Récemment Moses et Tuan [3] ont montré qu'il était facile par une mathématique simple d'ajouter un état lié aux solutions d'un potentiel donné. Les fonctions de Jost [4] qui correspondent à cet état lié ont un zéro simple. Essentiellement, leur méthode revient à ajouter à un potentiel local une perturbation locale. Cette technique semble susceptible d'atteindre une classe de potentiels bien plus générale que celle signalée précédemment.

Nous nous sommes proposé une extension de cette attitude : en particulier, nous avons cherché à étudier s'il était possible d'ajouter des états liés d'ordre multiple, situés sur l'axe imaginaire négatif. Pour cela nous avons dû redéfinir la « fonction » spectrale. Cette « fonction » qui était une mesure dans les cas étudiés par Newton, puis par Moses et Tuan, est dans notre cas une distribution, du fait de la présence de dérivées de la « fonction » δ . On est alors conduit à un système de solutions non orthogonales : l'opérateur qui les engendre ne peut pas être auto-adjoint.

Les zéros multiples sont interdits par les hypothèses acceptées par Newton : réalité de $V(r)$ et existence des deux premiers moments. De fait, la démonstration que Newton utilise pour en démontrer l'impossibilité suppose que l'on peut permuter l'ordre des deux dérivations par rapport à r et k . Nous avons repris l'étude dans un cas plus général, où les dérivées secondes mixtes, continues ou non, existent. La formule de Newton reste valable. Par suite, seuls des potentiels complexes peuvent donner lieu à de tels états liés.

Dans le paragraphe I, nous rappelons les notations et nous prouvons que seuls les potentiels complexes peuvent donner lieu à des zéros d'ordre multiple.

Dans le paragraphe II, nous calculons la fonction spectrale, et nous déterminons une condition simple que doivent satisfaire les solutions irrégulières

pour que l'ensemble des solutions régulières donne lieu à une relation de fermeture.

Dans le paragraphe III, nous résolvons dans un cas simple l'équation de Gelfand-Levitan sous l'hypothèse d'un zéro d'ordre 2. Nous montrons la validité de la méthode utilisée, qui n'était pas évidente *a priori*. Nous calculons explicitement le potentiel, les solutions régulières, les fonctions de Jost. Ces dernières possèdent effectivement un zéro d'ordre deux au point choisi, et la solution régulière qui lui correspond en ce point est normalisable.

I. — RAPPELS ET NOTATIONS

L'équation de Schrödinger :

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} + k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right\} \Psi_l(r) = V(r)\Psi_l(r) \quad (1)$$

qui décrit la diffusion de deux particules sans spin par un potentiel central $V(r)$ réel ou complexe tel que

$$\int_0^\infty r^\alpha |V(r)| dr < \infty \quad \text{pour} \quad \alpha = 1, 2 \quad (2)$$

possède des solutions qui sont définies d'après leurs comportements limites :

— une solution régulière $\varphi_l(k, r)$ telle qu'à l'origine

$$\lim (2l+1)!! r^{-l-1} \varphi_l(k, r) = 1 \quad (3)$$

— une solution irrégulière $f_l(k, r)$ obéissant à la condition asymptotique

$$\lim_{r \rightarrow \infty} e^{ikr} f_l(k, r) = i^l \quad (4)$$

— une solution physique qui s'écrit à l'infini

$$\psi_l(k, r) \sim \frac{i^{l+1}}{2} [e^{-ikr} - (-)^l S_l(k) e^{ikr}] \quad (5)$$

$S_l(k)$ désignant la matrice de diffusion.

a) Quelques propriétés des solutions f_l et φ_l .

On notera que φ_l ne dépend que du module de k , tandis que f_l a un pôle d'ordre l pour $r = 0$.

Les solutions $f_l(k, r)$ et $f_l(-k, r)$ sont linéairement indépendantes

pour $k \neq 0$. On pourra donc exprimer $\varphi_l(k, r)$ sous forme d'une de leurs combinaisons linéaires. On écrit donc, définissant ainsi la fonction de Jost $f_l(k)$:

$$\varphi_l(k, r) = \frac{1}{2} ik^{-l-1} [f_l(-k)f_l(k, r) - (-)^l f_l(k)f_l(-k, r)] \quad (6)$$

$f_l(k)$ peut être obtenue en considérant le comportement asymptotique de φ_l . En effet :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \varphi_l(k, r) = \frac{1}{2} \left(\frac{i}{k} \right)^{l+1} [f_l(-k)e^{-ikr} - (-)^l f_l(k)e^{ikr}] \quad (7)$$

Il est possible de relier fonction de Jost et solution irrégulière lorsqu'on se trouve dans une région d'analyticité connectée avec l'axe réel.

La condition aux limites (3), avec la propriété de f_l :

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{f_l'}{f_l} = \frac{l}{r} \quad (8)$$

entraîne alors :

$$f_l(k) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{(kr)^l f_l(k, r)}{(2l-1)!!} \quad (9)$$

Par ailleurs, la condition (2) entraîne l'analyticité des solutions f_l et φ_l .

Par ailleurs, si V est réel, on peut de plus montrer que, dans toute région d'analyticité connectée avec l'axe réel, on a :

$$f_l^*(-k^*, r) = (-)^l f_l(k, r) \quad (10)$$

ce qui entraîne d'après (9) la relation analogue pour les fonctions de Jost :

$$f_l^*(-k^*) = f_l(k) \quad (11)$$

D'après (6), (10) et (11), on peut en déduire alors que $\varphi_l(k, r)$ est une fonction réelle lorsque k est réel ou imaginaire pur.

b) Zéros de la fonction de Jost.

La solution physique ψ_l est donnée à partir de φ_l et de la fonction de Jost par :

$$\psi_l(k, r) = \frac{k^{l+1}}{f_l(-k)} \varphi_l(k, r) \quad (12)$$

Cette dernière expression nous amène à nous demander quels sont les zéros — K de $f_l(-k)$, ce sont les zéros K de $f_l(k)$. Dans le cas d'un potentiel

réel satisfaisant aux conditions (2) et pour $k \neq 0$ ils ne peuvent être réels, sinon $\varphi_l(k, r)$ serait identiquement nulle, ce qui est interdit par (3). Par ailleurs K^2 est nécessairement réel, les zéros sont donc imaginaires purs. Pour nous trouver dans le domaine d'existence de $f_l(k, r)$ et de $f_l(k)$, il nous faut choisir $K = ik_0$, avec $k_0 < 0$.

Dans ce qui suit, nous nous limitons aux potentiels tels que *a*) les zéros de $f_l(k)$ sont tous imaginaires purs : $K = ik_0$ avec $k_0 < 0$; *b*) les solutions sont dérivables par rapport à k .

Les fonctions f_l et φ_l sont alors proportionnelles :

$$f_l(ik_0, r) = c\varphi_l(ik_0, r). \tag{13}$$

Les deux membres sont de carré sommable, et k_0^2 est une valeur propre discrète de l'équation de Schrödinger; on a un état lié d'énergie $\frac{\hbar^2 k_0^2}{2\mu}$.

Si $-ik_0$ se trouve dans la région d'analyticité de $f_l(k)$ connectée avec l'axe réel, on obtient à l'aide de l'équation (6) la valeur de c :

$$c = \frac{2i k_0^{l+1}}{f_l(-ik_0)} \tag{14}$$

c) Multiplicité de ces zéros.

Pour la déterminer, nous pouvons évaluer $f_l(k)$ en calculant la valeur à l'infini du wronskien de $f_l(k, r)$ et de $\varphi_l(k, r)$, quantité indépendante de r .

$$\begin{aligned} W[f, \varphi] &= -\frac{1}{2} \frac{i^{2l+1}}{k^{l+1}} f_l(k) W[f_l(k, r), f_l(-k, r)] \\ &= k^{-l} f_l(k) \end{aligned}$$

La dérivée par rapport à k de cette équation, prise au point $K = ik_0$, $k_0 < 0$, donne la valeur de $\dot{f}_l(ik_0)$ (en notant par un point la dérivée par rapport à k).

Il n'est pas évident que dans le cas général — et en particulier dans le cas où les premiers et seconds moments du potentiel n'existent pas — les fonctions f_l et φ_l sont analytiques, et que l'on peut intervertir l'ordre des dérivations.

Par suite, nous posons :

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial k \partial r} - \frac{\partial^2}{\partial r \partial k}$$

On a

$$\begin{aligned} \dot{f}_i(ik_0) = & \frac{(ik_0)'}{c} \{ W[\dot{f}_i(ik_0, r), f_i(ik_0, r)] - f_i(ik_0, r)\Delta f_i(ik_0, r) \} \\ & + c(ik_0)' \{ W[\varphi_i(ik_0, r), \dot{\varphi}_i(ik_0, r)] + \varphi_i(ik_0, r)\Delta\varphi_i(ik_0, r) \} \quad (15) \end{aligned}$$

On peut calculer les wronskiens qui entrent en jeu. Pour cela intégrons la relation ⁽¹⁾ :

$$\frac{d}{dr} W[f_i(k, r), f_i(k', r)] = (k^2 - k'^2) f_i(k, r) f_i(k', r)$$

ce qui donne :

$$W[f_i(k, r), f_i(k', r)] = - (k^2 - k'^2) \int_r^\infty f_i(k, r') f_i(k', r') dr'$$

Dérivons par rapport à k cette dernière égalité :

$$\begin{aligned} \dot{f}_i(k, r) f_i(k', r) - \frac{\partial^2}{\partial r \partial k} f_i(k, r) f_i(k', r) - \Delta f_i(k, r) f_i(k', r) \\ = - 2k \int_r^\infty f_i(k, r') f_i(k', r') dr' - (k^2 - k'^2) \frac{\partial}{\partial k} \left(\int_r^\infty f_i(k, r') f_i(k', r') dr' \right) \end{aligned}$$

Faisons $k = k' = ik_0$:

$$W[\dot{f}_i(ik_0, r), f_i(ik_0, r)] - f_i(ik_0, r)\Delta f_i(ik_0, r) = - 2ik_0 \int_r^\infty f_i^2(ik_0, r') dr'$$

Nous obtiendrons de façon tout à fait analogue une relation semblable pour φ_i .

Reportons les valeurs ainsi obtenues des wronskiens dans (15) ; nous trouvons alors :

$$\begin{aligned} \dot{f}_i(ik_0) = & - 2(ik_0)^{l+1} \left[c \int_0^r dr' \varphi_i^2(ik_0, r') + \frac{1}{c} \int_r^\infty dr' f_i^2(ik_0, r') \right] \\ = & - 2c(ik_0)^{l+1} \int_0^\infty dr \varphi_i^2(ik_0, r) \quad (16) \end{aligned}$$

La formule (16) est identique à celle de Newton [I], où elle était établie en supposant que l'on puisse intervertir l'ordre des dérivations. Cette opération est évidemment permise en prenant pour hypothèse l'existence des moments d'ordre 1 et 2 du potentiel (condition (2)).

La formule (16) est donc valable dans la condition bien plus large où les dérivées secondes mixtes de f_i et φ_i existent mais ne sont plus continues. Deux situations peuvent se présenter : ou $c = 0$, alors $f_i(ik_0, r) \equiv 0$, ou φ_e fonction à valeurs complexes.

Puisque c ne peut être nul, à cause de la condition asymptotique (4), la

⁽¹⁾ La méthode utilisée implique que les dérivées premières de f_i et de φ_i existent.

seule possibilité d'avoir $f_i(ik_0) = 0$ est que φ soit une fonction complexe. Par suite, le potentiel V doit être complexe.

II. — LA FONCTION SPECTRALE

Une fonction simple de l'obtenir est de considérer la fonction de Green. Celle-ci doit satisfaire l'équation :

$$\left[-\frac{d^2}{dr^2} + V(r) + \frac{l(l+1)}{r^2} - k^2 \right] g_l(k; r, r') = -\delta(r - r') \quad (17)$$

Pour que g^l ne contienne aucune onde entrante à l'infini, et qu'elle soit continue pour $r = r'$, on devra écrire :

$$g_l(k; r, r') = \frac{(-)^{l+1} k^l \varphi_l(k, r <) f_l(-k, r >)}{f_l(-k)} \quad (18)$$

La fonction $f_l(-k)$ étant définie à l'aide de la relation (6).

Nous allons chercher si la présence de pôles doubles n'interdit pas au système de fonctions propres d'être complet. Pour cela nous suivrons pas à pas la démonstration que fait Newton [1] dans le cas des pôles simples. Considérons l'intégrale :

$$I(r) = \int_c k dk \int_0^\infty dr' h(r') g_l(-k; r, r') \quad (19)$$

où $h(r)$ est une fonction de carré sommable, et où le contour c comprend l'axe réel, moins l'origine, évité par un petit demi-cercle de rayon ϵ dans le demi-plan inférieur, et un demi-cercle de rayon infini situé dans le même demi-plan. A l'intérieur de ce domaine, nous supposons la fonction g analytique partout, sauf en des valeurs discrètes sur l'axe imaginaire : où elle possède une série de pôles simples $k = ik_s$ ($k_s < 0$) et de pôles doubles $k = ik_d$ ($k_d < 0$) correspondant aux zéros simples et doubles de la fonction de Jost. On pose :

$$\begin{aligned} I(r) &= I_1(r) + I_2(r) \\ I_1(r) &= - \int_c dk k^{l+1} \int_0^r dr' \frac{h(r') \varphi_l(k, r') f_l(k, r)}{f_l(k)} \\ I_2(r) &= - \int_c dk k^{l+1} \int_r^\infty dr' \frac{h(r') f_l(k, r') \varphi_l(k, r)}{f_l(k)} \end{aligned} \quad (20)$$

La valeur de l'intégrale $I_1(r)$ s'obtient à l'aide du théorème de Cauchy. La somme des résidus correspondant aux pôles simples a été calculée par Newton :

$$I_1^s(r) = i\pi \sum_s \int_0^r dr' h(r') \varphi_l^{(s)}(r') \varphi_l^{(s)}(r) N_s^{-2} \quad (21)$$

avec

$$N_s^2 = \int_0^\infty dr [\varphi_l^{(s)}(r)]^2 \quad \text{et} \quad \varphi_l^{(s)} = \varphi_l(ik_s, r) \quad (22)$$

Nous voulons évaluer les résidus R_d correspondant à des pôles doubles ik_d . Si nous posons

$$\begin{aligned} f_l(k) &= (k - ik_d)^2 C(k) \\ \varphi_l^{(d)}(r) &= \varphi_l(ik_d, r) & \dot{\varphi}_l^{(d)}(r) &= \dot{\varphi}_l(ik_d, r) \\ f_l^{(d)}(r) &= f_l(ik_d, r) & \dot{f}_l^{(d)}(r) &= \dot{f}_l(ik_d, r) \end{aligned}$$

et par ailleurs :

$$R_d = \int_0^r dr' h(r') \rho_d(k; r, r')$$

Alors

$$\begin{aligned} \rho_d(k; r, r') &= \frac{i^l k_d^l}{C(ik_d)} \left\{ (l+1) \varphi_l^{(d)}(r') f_l^{(d)}(r) + ik_d [\dot{\varphi}_l^{(d)}(r') f_l^{(d)}(r) \right. \\ &\quad \left. + \varphi_l^{(d)}(r') \dot{f}_l^{(d)}(r) - \frac{\dot{C}(ik_d)}{C(ik_d)} \varphi_l^{(d)}(r') f_l^{(d)}(r) \right\} \quad (23) \end{aligned}$$

Pour calculer (23) en fonction de $\varphi_l^{(d)}$ et de $\dot{\varphi}_l^{(d)}$ remarquons que pour un état lié f_l et φ_l sont proportionnels. On a

$$\begin{aligned} \rho_d(k; r, r') &= \frac{2(-)^l k_d^{2l+1}}{C(ik_d) f_l(-ik_d)} \left\{ (l+1) \varphi_l^{(d)}(r') \varphi_l^{(d)}(r) \right. \\ &\quad \left. + ik_d [\dot{\varphi}_l^{(d)}(r') \varphi_l^{(d)}(r) - \frac{\dot{C}(ik_d)}{C(ik_d)} \varphi_l^{(d)}(r') \varphi_l^{(d)}(r)] \right\} \\ &\quad + \frac{i^{l+1} k_d^{l+1}}{C(ik_d)} \varphi_l^{(d)}(r') \dot{f}_l^{(d)}(r) \end{aligned}$$

Quant à la valeur de $\dot{f}_l^{(d)}(r)$ nous l'obtenons par dérivation de la relation (6) :

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_l(k, r) &= -\frac{1}{2} i(l+1) k^{-l-2} [f_l(-k) f_l(k, r) - (-)^l f_l(k) f_l(-k, r)] \\ &\quad + \frac{1}{2} i k^{-l-1} \{ -\dot{f}_l(-k) f_l(k, r) + f_l(-k) \dot{f}_l(k, r) \\ &\quad - (-)^l [\dot{f}_l(k) f_l(-k, r) - f_l(k) \dot{f}_l(-k, r)] \} \end{aligned}$$

Pour $k = ik_d$, $f_l(k)$ est nul ainsi que sa première dérivée. Et l'on a :

$$\dot{\varphi}_l^{(d)}(r) = \left[\frac{(l+1)i}{k_d} - \frac{\dot{f}_l(-ik_d)}{f_l(-ik_d)} \right] \varphi_l^{(d)}(r) + \frac{1}{2i^l k_d^{l+1}} \dot{f}_l^{(d)}(r) f_l(-ik_d)$$

D'où

$$\dot{f}_l^{(d)}(r) = \frac{2i^l k_d^{l+1}}{f_l(-ik_d)} \left\{ \dot{\varphi}_l^{(d)}(r) - \left[\frac{(l+1)i}{k_d} - \frac{\dot{f}_l(-ik_d)}{f_l(-ik_d)} \right] \varphi_l^{(d)}(r) \right\}$$

Et la valeur du résidu :

$$\rho_d(k; r, r') = \frac{2(-)^l k_d^{2l+1}}{f_l(-ik_d)C(ik_d)} \left\{ 2[l+1] + ik_d \left[\frac{\dot{f}_l(-ik_d)}{f_l(-ik_d)} - \frac{\dot{C}(ik_d)}{C(ik_d)} \right] \varphi_l^{(d)}(r') \varphi_l^{(d)}(r) \right. \\ \left. + ik_d [\dot{\varphi}_l^{(d)}(r') \varphi_l^{(d)}(r) + \varphi_l^{(d)}(r') \dot{\varphi}_l^{(d)}(r)] \right\}$$

$I_1(r)$ s'exprime alors sous la forme suivante :

$$I_1(r) = i\pi \sum_s \int_0^r dr' h(r') \varphi_l^{(s)}(r') \varphi_l^{(s)}(r) N_s^{-2} \\ + i\pi \sum_d \int_0^r dr' h(r') \left\{ A_d \varphi_l^{(d)}(r') \varphi_l^{(d)}(r) \right. \\ \left. + B_d [\dot{\varphi}_l^{(d)}(r') \varphi_l^{(d)}(r) + \varphi_l^{(d)}(r') \dot{\varphi}_l^{(d)}(r)] \right\} \quad (24)$$

$$A_d = \frac{2(-)^{l+1} k_d^{2l+1}}{f_l(-ik_d)C(ik_d)} \left\{ 2[l+1] + ik_d \left[\frac{\dot{f}_l(-ik_d)}{f_l(-ik_d)} - \frac{\dot{C}(ik_d)}{C(ik_d)} \right] \right\}. \quad (25)$$

$$B_d = \frac{2i(-)^{l+1} k_d^{2l+2}}{f_l(-ik_d)C(ik_d)}. \quad (26)$$

Par ailleurs, on peut évaluer directement l'intégrale $I_1(r)$. $I_{1\epsilon}$ sur le petit cercle autour de l'origine tend vers zéro, sauf si $f_l(0) = 0$ et $l \geq 1$, auquel cas elle vaut :

$$I_{1\epsilon} = -i\pi \int_0^r dr' h(r') \varphi_l^{(0)}(r') \varphi_l^{(0)}(r) N_0^{-2}$$

où

$$\varphi_l^{(0)}(r) = \varphi_l(0, r)$$

$$N_0^2 = \int_0^\infty dr [\varphi_l^{(0)}(r)]^2$$

Sur le demi-grand cercle, nous aurons, d'après (4) et (7), en supposant que ces relations sont encore valables dans la situation que nous envisa-

geons ici, c'est-à-dire en supposant $f_l(k, r)$ continue en k (nous vérifierons que tel est bien le cas dans l'exemple que nous considérons)

$$I_{1R} \underset{R \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{2} i \int_0^r dr' h(r') \int_c dk [e^{-ik(r-r')} - (-)]' e^{-ik(r+r')}$$

car $S_l(k) \rightarrow 1$ quand $|k| \rightarrow \infty$

$$I_{1R} \sim \frac{1}{2} i\pi h(r)$$

La dernière contribution I_{1E} est l'intégrale sur l'axe réel. Elle vaut, lorsque l'on fait tendre ε vers 0

$$I_{1E}(r) = -2i \int_0^r dr' h(r') \int_0^\infty dk k^{2l+2} \frac{\varphi_l(k, r') \varphi_l(k, r)}{f_l(k) f_l(-k)}$$

Finalement donc :

$$h(r) = 2 \int_0^r dr' h(r') \left[2 \int_0^\infty dk k^{2l+2} \frac{\varphi_l(k, r') \varphi_l(k, r)}{\pi f_l(k) f_l(-k)} + \sum_s \frac{\varphi_l^{(s)}(r') \varphi_l^{(s)}(r)}{N_s^2} + \sum_d \{ A_d \varphi_l^{(d)}(r') \varphi_l^{(d)}(r) + B_d [\dot{\varphi}_l^{(d)}(r') \varphi_l^{(d)}(r) + \varphi_l^{(d)}(r') \dot{\varphi}_l^{(d)}(r)] \} \right] \quad (27)$$

Somme qui inclut éventuellement l'état lié d'énergie nulle. Le traitement de $I_2(r)$ est identique. On obtient finalement, après addition des deux formules ainsi obtenues, et division par 2 :

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty dk k^{2l+2} \frac{\varphi_l(k, r') \varphi_l(k, r)}{f_l(k) f_l(-k)} + \sum_s \frac{\varphi_l^{(s)}(r') \varphi_l^{(s)}(r)}{N_s^2} + \sum_d \{ A_d \varphi_l^{(d)}(r') \varphi_l^{(d)}(r) + B_d [\dot{\varphi}_l^{(d)}(r') \varphi_l^{(d)}(r) + \varphi_l^{(d)}(r') \dot{\varphi}_l^{(d)}(r)] \} = \delta(r - r'). \quad (28)$$

La formule (28) est une relation de fermeture. L'ensemble des fonctions d'onde régulières correspondant au spectre continu et au spectre discret est complet. La présence de termes en $\dot{\varphi}_l$ montre que les fonctions φ_l ne constituent plus un système orthogonal. Ceci confirme le fait que l'opérateur différentiel ne peut pas être hermitique.

On peut définir une fonction spectrale généralisée $\varphi_l(E)$ de telle façon que (28) s'écrive comme une pseudo-intégrale de Stieltjes définissant la mesure $\delta(r - r')$.

$$\int_{\downarrow} d\varphi_l(E) \varphi_l(k, r) \varphi_l(k, r') = \delta(r - r'). \quad (29)$$

Le signe \int_{\downarrow} indiquant que l'on n'intègre que sur les valeurs de k réelles positives ou imaginaires pures, d'argument $-\frac{3\pi}{2}$.

On aura alors :

pour $E > 0$
$$\frac{d\rho_l(E)}{dE} = \frac{2\mu}{\pi\hbar^2} \frac{k^{2l+1}}{f_l(k)f_l(-k)}$$

pour $E \leq 0$

$$\frac{d\rho_l(E)}{dE} = \sum_s \frac{\delta(E - E_s)}{N_s^2} + \sum_d \left\{ A_d \delta(E - E_d) + \frac{i\hbar^2 k_d B_d}{\mu} \delta'(E - E_d) \right\}$$

D'une manière précise la démonstration n'a été faite que pour des fonctions $h(r)$ de carré sommable, et le résultat final s'obtient en tenant compte de ce que cet ensemble de fonctions est dense dans l'espace des fonctions continues.

La formule (29) s'écrivant :

$$\begin{aligned} \frac{\hbar^2}{2\mu} \int_{\downarrow} d\rho_l(E') \frac{k^2 - k'^2}{E - E'} \varphi_l(k', r) \varphi_l(k', r') &= \delta(r - r') \\ (k^2 - k'^2) \varphi_l(k', r) &= \left\{ k^2 - \left[V(r) - \frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)}{r^2} \right] \right\} \varphi_l(k', r) \\ \delta(r - r') &= \frac{\hbar^2}{2\mu} \left\{ k^2 - \left[V(r) - \frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)}{r^2} \right] \right\} \int_{\downarrow} d\rho_l(E') \frac{\varphi_l(k', r) \varphi_l(k', r')}{E - E'} \end{aligned}$$

On retrouve la forme habituelle de la fonction de Green :

$$g_l(k ; r, r') = \frac{\hbar^2}{2\mu} \int_{\downarrow} d\rho_l(E') \frac{\varphi_l(k', r) \varphi_l(k', r')}{E - E'} \tag{30}$$

Remarquons qu'en cours de route nous avons démontré la proposition suivante :

Si les extensions dans le plan complexe des solutions irrégulières $f_l(k, r)$ tendent vers e^{-ikr} lorsque $|k| \rightarrow \infty$, l'ensemble des solutions régulières constitue un ensemble complet dans l'espace des fonctions de carré sommable.

III. — CONSTRUCTION D'UN POTENTIEL

Le but de ce paragraphe est de construire et d'étudier un potentiel dont la fonction de Jost possède un zéro d'ordre deux. La méthode que nous utilisons est la méthode standard de Gelfand-Levitan qui relie le potentiel à une certaine fonction $K(r, r_1)$ par :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dr} K(r, r) = V(r) \tag{31}$$

Cette dernière étant elle-même solution de l'équation :

$$P(r, r_1) + \int_0^r K(r, \xi)P(\xi, r_1)d\xi + K(r, r_1) = 0 \quad (32)$$

L'existence de (32) est prouvée [6] lorsque l'ensemble des solutions régulières est complet — ce qui ne veut pas dire qu'elle ne s'applique pas à des cas plus larges. Nous devons vérifier que l'emploi que nous en faisons est justifié.

Il existe une équation de Gelfand-Levitan pour toute onde l et pour tout potentiel $V_0(r)$ suffisamment régulier. $V(r)$ donné par (31) sera une perturbation pour $V_0(r)$. Le potentiel cherché sera la somme $V_0 + V$. Pour obtenir un exemple simple où l'analyse pourra être menée de bout en bout, nous choisissons les ondes S et le potentiel $V_0(r)$ identiquement nul. On a alors :

$$P(r, r_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin kr \sin kr_1}{k^2} d\sigma(E) \quad (33)$$

$\sigma(E)$ étant, à une constante près, la différence entre la fonction spectrale considérée, et celle qui correspondrait à un potentiel identiquement nul. Si nous voulons ajouter à celui-ci un potentiel additionnel qui donnerait un état lié d'ordre deux, au point $k = ik_0$ ($k_0 < 0$) $d\sigma(E)$ se réduit à un seul terme :

$$E < 0 \quad \frac{d\sigma(E)}{dE} = A\delta(E - E_0) + \frac{i\hbar^2 k_0}{\mu} B\delta'(E - E_0) \quad (34)$$

Il est alors facile d'écrire $P(r, r_1)$:

$$P(r, r_1) = \frac{A}{k_0^2} \operatorname{sh} k_0 r \operatorname{sh} k_0 r_1 - \frac{iB}{k_0^2} [r \operatorname{ch} k_0 r \operatorname{sh} k_0 r_1 + r_1 \operatorname{sh} k_0 r \operatorname{ch} k_0 r_1 - \frac{2}{k_0} \operatorname{sh} k_0 r \operatorname{sh} k_0 r_1]$$

Soit, en posant

$$\begin{cases} A' = \frac{A}{k_0^2} + \frac{2iB}{k_0^3} \\ B' = -\frac{iB}{k_0^2} \end{cases} \quad (35)$$

$$P(r, r_1) = A' \operatorname{sh} k_0 r \operatorname{sh} k_0 r_1 + B'(r \operatorname{ch} k_0 r \operatorname{sh} k_0 r_1 + r_1 \operatorname{sh} k_0 r \operatorname{ch} k_0 r_1) \quad (36)$$

ou encore

$$P(r, r_1) = A' \operatorname{sh} k_0 r \operatorname{sh} k_0 r_1 + B' \frac{\partial}{\partial k} (\operatorname{sh} kr \operatorname{sh} kr_1)_{k=k_0}$$

Nous chercherons $K(r, r_1)$ sous la forme

$$K(r, r_1) = v(r) \operatorname{sh} k_0 r_1 + w(r) r_1 \operatorname{ch} k_0 r_1. \quad (37)$$

Il est en effet évident d'après (32) que $K(r, r_1)$ peut s'exprimer ainsi : les deux fonctions $\operatorname{sh} k_0 r_1 = s(r_1)$ et $r_1 \operatorname{ch} k_0 r_1 = t(r_1)$ sont linéairement indépendantes, car il n'est pas possible de trouver deux coefficients X et Y non tous deux nuls tels qu'on ait :

$$Xs(r_1) + Yt(r_1) = 0$$

(sauf au point $r_1 = 0$ mais alors $P(r, 0)$ étant nul, $K(r, 0)$ est nul également).

Un calcul immédiat forme le système

$$\begin{cases} V_1(r)v(r) + W_1(r)w(r) = - (A' \operatorname{sh} k_0 r + B' r \operatorname{ch} k_0 r) \\ V_2(r)v(r) + W_2(r)w(r) = - B' \operatorname{sh} k_0 r \end{cases} \quad (38)$$

où l'on a posé

$$\begin{cases} V_1(r) = 1 + \frac{A'}{4k_0} (\operatorname{sh} 2k_0 r - 2k_0 r) + \frac{B'}{8k_0^2} (2k_0 r \operatorname{ch} 2k_0 r - \operatorname{sh} 2k_0 r) \\ W_1(r) = \frac{A'}{8k_0^2} (2k_0 r \operatorname{ch} 2k_0 r - \operatorname{sh} 2k_0 r) + B' \left[\frac{r^2}{2k_0} \left(\frac{\operatorname{sh} 2k_0 r}{2} + \frac{k_0 r}{3} \right) - \frac{1}{8k_0^3} (2k_0 r \operatorname{ch} 2k_0 r - \operatorname{sh} 2k_0 r) \right] \\ V_2(r) = \frac{B'}{4k_0} (\operatorname{sh} 2k_0 r - 2k_0 r) \\ W_2(r) = 1 + \frac{B'}{8k_0^2} (2k_0 r \operatorname{ch} 2k_0 r - \operatorname{sh} 2k_0 r) \end{cases} \quad (39)$$

On en déduit les équations définissant $v(r)$ et $w(r)$:

$$\begin{aligned} v(r) &= \frac{- (A' \operatorname{sh} k_0 r + B' r \operatorname{ch} k_0 r) W_2(r) + W_1(r) B' \operatorname{sh} k_0 r}{V_1(r) W_2(r) - W_1(r) V_2(r)} \\ w(r) &= \frac{- V_1 B' \operatorname{sh} k_0 r + (A' \operatorname{sh} k_0 r + B' r \operatorname{ch} k_0 r) V_2}{V_1(r) W_2(r) - W_1(r) V_2(r)} \end{aligned} \quad (40)$$

On obtiendra ensuite $\varphi_0(k, r)$ par :

$$\begin{aligned} \varphi_0(k, r) &= \frac{\sin kr}{k} + \int_0^r K(r, \xi) \frac{\sin k\xi}{k} d\xi \\ &= \frac{\sin kr}{k} + v(r) \int_0^r \frac{\sin k\xi}{k} \operatorname{sh} k_0 \xi d\xi + w(r) \int_0^r \frac{\sin k\xi}{k} \xi \operatorname{ch} k_0 \xi d\xi \end{aligned} \quad (41)$$

équation qui s'intègre suivant

$$\varphi_0(k, r) = \frac{\sin kr}{k} + \frac{iv(r)}{2k} \left[\frac{\sin(k + ik_0)r}{k + ik_0} - \frac{\sin(k - ik_0)r}{k - ik_0} \right] - \frac{w(r)}{2k} \left\{ r \left[\frac{\cos(k + ik_0)r}{k + ik_0} + \frac{\cos(k - ik_0)r}{k - ik_0} \right] - \left[\frac{\sin(k + ik_0)r}{(k + ik_0)^2} + \frac{\sin(k - ik_0)r}{(k - ik_0)^2} \right] \right\} \quad (42)$$

Nous devons prouver que $\varphi_0(ik_0, r)$ correspond à un état lié et que les fonctions de Jost correspondantes ont les bonnes propriétés.

1) Solution régulière pour $k = ik_0$.

Nous allons montrer que $\varphi_0(ik_0, r)$ est normalisable. Pour cela il suffit de considérer la continuité en r et les limites de φ_0 . Revenons à la forme explicite (40) de $v(r)$ et de $w(r)$, et résolvons un certain nombre de questions relatives à ce sujet :

a) *Les fonctions $v(r)$ et $w(r)$ sont-elles continues ?*

Nous poserons $D(r) = V_1(r)W_2(r) - W_1(r)V_2(r)$. Après calculs, $D(r)$ se réduit à :

$$D(r) = \left[1 + \frac{B'}{8k_0^2} (2k_0r \operatorname{ch} 2k_0r - \operatorname{sh} 2k_0r) \right]^2 + \frac{\operatorname{sh} 2k_0r - 2k_0r}{4k_0} \left\{ A' - B'^2 \left[\frac{r^2}{2k_0} \left(\frac{\operatorname{sh} 2k_0r}{2} + \frac{k_0r}{3} \right) - \frac{1}{8k_0^3} (2k_0r \operatorname{ch} 2k_0r - \operatorname{sh} 2k_0r) \right] \right\} \quad (43)$$

En supposant B' imaginaire pur, le premier terme s'écrit :

$$[1 - i\beta P]^2 = 1 - \beta^2 P^2 - 2i\beta P \quad (44)$$

où P est une quantité toujours positive.

La présence d'un terme imaginaire dans (43) montre qu'il suffira de choisir A' réel (hypothèse non contradictoire avec les équations (35)) pour que le second terme de (43) soit une quantité toujours réelle, éventuellement nulle d'ailleurs. Alors $D(r)$ ne pourra s'annuler.

Nous pouvons déduire de ce qui précède la continuité en tout point des fonctions $v(r)$ et $w(r)$: leurs numérateurs sont en effet des fonctions continues de r .

b) *Continuité à l'origine.*

Nous avons remarqué que $K(r, 0) = 0$, mais qu'alors la méthode générale n'était plus utilisable.

La question de la continuité se pose donc à l'origine.

Or $D(0) = 1$ donc $v(0)$ et $w(0)$ sont tous deux finis. Par conséquent

$$\lim_{r_1 \rightarrow 0} K(r, r_1) = 0$$

Ces deux points nous assurent une fonction $\varphi_0(k, r)$ continue en r en tout point, et dont la limite à l'origine est nulle.

Quant au potentiel $V(r)$ il s'écrit :

$$\begin{aligned} V(r) &= 2 \frac{d}{dr} K(r, r) \\ &= 2 \frac{d}{dr} \left[\frac{N(r)}{D(r)} \right] \end{aligned} \tag{45}$$

où $N(r)$ et $D(r)$ sont des fonctions continues, et où $D(r)$ ne s'annule pas $V(r)$ est donc également continue pour toutes les valeurs de r .

c) *Comportement asymptotique.*

D'après (40), il est facile de déterminer les comportements asymptotiques de $v(r)$ et $w(r)$ quand $r \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} v(r) &\xrightarrow{r \rightarrow \infty} -8k_0^2 \left(r + \frac{1}{k_0} \right) e^{k_0 r} \\ w(r) &\xrightarrow{r \rightarrow \infty} -8k_0^2 e^{k_0 r} \end{aligned} \tag{46}$$

On voit donc que v et w ont une décroissance exponentielle.

$\varphi_0(ik_0, r)$ fonction continue de r , s'annulant à l'origine, et décroissant exponentiellement à l'infini est normalisable.

2) Le potentiel.

a) *Étude du potentiel obtenu.*

On peut déduire de ce qui précède le comportement asymptotique de $V(r)$. En effet la dérivation de (37) donne :

$$\begin{aligned} V(r) &= 2[v'(r) \operatorname{sh} k_0 r + v(r)k_0 \operatorname{ch} k_0 r + w'(r)r \operatorname{ch} k_0 r \\ &\quad + w(r) \operatorname{ch} k_0 r + w(r)rk_0 \operatorname{sh} k_0 r] \end{aligned} \tag{47}$$

Quand $r \rightarrow \infty$ on aura donc

$$V(r) \simeq e^{-k_0 r} [-v'(r) + v(r)k_0 + w(r)(1 + rk_0) + rw'(r)].$$

Il suffit de remplacer les v et les w par les expressions (46) et de les dériver pour s'apercevoir que le potentiel tend vers zéro à l'infini plus vite que toute puissance de $\frac{1}{r}$. En fait, un calcul plus détaillé, qui tient compte du premier terme négligé dans les développements de v et w , permet de préciser la forme de $V(r)$:

$$V(r) \underset{r \rightarrow \infty}{\simeq} \frac{P_1(r)}{P_2(r)} e^{2k_0 r} \quad (48)$$

P_1 et P_2 étant deux polynômes en r .

Le potentiel additionnel tend vers zéro exponentiellement à l'infini.

$V(r)$ est donc une fonction complexe de r partout continue. A l'origine, on peut voir que $V(0) = 0$ (il suffit de déterminer dans (47) $V(\varepsilon)$ et de faire tendre ε vers zéro).

Il en résulte que $V(r)$ est borné en module et qu'on peut déduire l'existence des premier et second moments

$$\int_0^\infty r^\alpha |V(r)| dr < \infty \quad \alpha = 1, 2$$

b) *Éventualité d'un potentiel réel.*

Nous pouvons remarquer que les calculs nous conduisent à la situation prévue théoriquement : la continuité en tout point r de $K(r, r_1)$ (la continuité en r_1 est triviale), donc celle de $V(r)$ peuvent s'obtenir par un choix des paramètres qui rendra complexes les fonctions considérées.

Il est à cet endroit intéressant de chercher si un potentiel réel amènerait éventuellement à la même conclusion.

Pour obtenir une solution $K(r, r)$ réelle, il faut choisir A' et B' réels.

Alors $\frac{d}{dr} K(r, r)$ sera lui aussi réel. Or on a :

$$D(r) \underset{r \rightarrow \infty}{\simeq} - \frac{B'^2}{(16k^2)^2} e^{-4k_0 r}$$

Si B' est réel, $D(r)$ tend vers zéro par valeurs négatives. Par ailleurs $D(0) = 1$. Il en résulte que $D(r)$ s'annule au moins une fois, quel que soit A' . $K(r, r)$ est, au moins en ce point, une fonction discontinue. Les fonctions $\varphi_0(k, r)$ données par (41) sont toutes discontinues. $\varphi_0(ik_0, r)$ ne peut plus être normalisable : ce n'est pas un état lié. Par ailleurs on est en dehors du champ d'application des équations de Gelfand-Levitan. On ne sait donc pas si de $\frac{d}{dr} K(r, r)$ on peut déduire un potentiel. Remarquons à cet endroit que Bell et Goe-

bel [7] ont construit des fonctions de Jost qui ont un zéro d'ordre deux, mais elles ne correspondent pas à des états liés, et les potentiels qui les engendrent renferment des « fonctions » δ .

3) Fonction de Jost.

S'il est possible d'écrire l'équation de Gelfand-Levitan pour en déduire $V(r)$, la solution régulière de l'équation de Schrödinger qui s'en déduit aura la forme donnée par (42). Nous savons déjà qu'elle est continue en tout point r . Il est maintenant important de montrer que la fonction de Jost correspondante possède effectivement un zéro double pour la valeur $k = ik_0$ de la variable.

1. Calculons $\varphi_0(ik_0, r)$ (égalité (42)).

Nous remarquons que les termes

$$\frac{w(r)}{2k} \left\{ r \left[\frac{\cos(k - ik_0)r}{k - ik_0} \right] - \frac{\sin(k - ik_0)r}{(k - ik_0)^2} \right\}$$

tendent vers $\frac{w(r)}{2ik_0} \left\{ \frac{r}{k - ik_0} - \frac{(k - ik_0)r}{(k - ik_0)^2} \right\} = 0$: nous n'avons donc pas de discontinuité au point $k = ik_0$.

$$\varphi_0(ik_0, r) = \frac{\text{sh } k_0 r}{k_0} + \frac{v(r)}{4k_0^2} [\text{sh } 2k_0 r - 2k_0 r] + \frac{w(r)}{8k_0^3} (2k_0 r \text{ ch } 2k_0 r - \text{sh } 2k_0 r)$$

Faisons tendre r vers l'infini. La fonction de Jost $f(ik_0)$ est le facteur correspondant au terme $e^{-k_0 r}$. Elle vaut alors

$$\frac{f(ik_0)}{2ik_0} = -\frac{1}{2k_0} + r + \frac{1}{k_0} - \frac{1}{k_0} \left(k_0 r + \frac{1}{2} \right)$$

Donc $f(ik_0) = 0$.

Nous avons donc un zéro de la fonction de Jost, mais dont la multiplicité reste inconnue. Pour la déterminer, il suffira d'invertir l'ordre dans lequel nous passons aux limites. De (42) nous obtenons directement l'expression de la fonction de Jost

$$\frac{f(k)}{2ik} = \frac{1}{2ik} - \frac{4k_0^2}{k} \left(r + \frac{1}{k_0} \right) \frac{1}{2(k + ik_0)} + \frac{4k_0^2}{k} \left[r \frac{1}{2(k + ik_0)} - \frac{1}{2i(k + ik_0)^2} \right]$$

D'où

$$f(k) = \left(\frac{k - ik_0}{k + ik_0} \right)^2$$

Nous trouvons donc bien le résultat prévu : la fonction de Jost possède un pôle double pour $k = ik_0$.

4) Le système des fonctions régulières est-il complet ?

Ce dernier point est capital. C'est lui seulement qui justifiera, le cas échéant, tout notre calcul. Pour le montrer, il suffit de voir que l'on a

$$f(k, r) \xrightarrow{|k| \rightarrow \infty} e^{-ikr}$$

Or

$$f(k, r) = e^{-ikr} + \int_r^\infty \frac{\sin k(r' - r)}{k} V(r') f(k, r') dr'$$

Si nous essayons de résoudre cette équation par la méthode d'itération en supposant qu'elle soit justifiée, nous obtenons :

$$\begin{aligned} f(k, r) &= e^{-ikr} + \int_r^\infty \frac{\sin k(r' - r)}{k} V(r') e^{-ikr'} dr' \\ &+ \int_r^\infty \frac{\sin k(r' - r)}{k} V(r') \int_{r'}^\infty \frac{\sin k(r'' - r')}{k} V(r'') e^{-ikr''} dr'' + \dots \\ &= e^{-ikr} + A(k, r) + \int_r^\infty \frac{\sin k(r' - r)}{k} V(r') A(k, r') dr' + \dots \end{aligned}$$

Nous voyons donc qu'il interviendra dans chaque terme de la somme la quantité $A(k, r)$ que nous allons étudier. Nous avons

$$\begin{aligned} |A(k, r)| &\leq \int_r^\infty \left| \frac{\sin k(r' - r)}{k} V(r') e^{-ikr'} \right| dr' \\ &\leq \frac{1}{2|k|} \left\{ |e^{-ikr}| \int_r^\infty |V(r')| dr' + |e^{ikr}| \int_r^\infty |e^{-2ikr'} V(r')| dr' \right\} \end{aligned} \quad (49)$$

Or, $V(r)$ est continue partout et tend à l'infini vers zéro comme une exponentielle. $\int_r^\infty |V(r')| dr'$ est donc une certaine fonction de r toujours bornée. Soit $W(r)$ sa valeur $|W(r)| < W$ constante > 0 .

Par ailleurs posons $k = Re^{-i\theta} = R(\cos \theta - i \sin \theta)$

$$\begin{aligned} |A(k, r)| &\leq \frac{1}{2R} \left\{ e^{-Rr \sin \theta} W + e^{Rr \sin \theta} \int_r^\infty e^{-2Rr' \sin \theta} |V(r')| dr' \right\} \\ &\leq e^{-Rr \sin \theta} \frac{W}{R} \end{aligned}$$

quantité qui tend vers zéro quand $R \rightarrow \infty$. Considérons maintenant le premier terme de la série suivant $A(k, r)$:

$$B(k, r) = \int_r^\infty \frac{\sin k(r' - r)}{k} V(r') A(k, r') dr'$$

On a

$$|B(k, r)| \leq \frac{W}{R} \int_r^\infty \left| \frac{\sin k(r' - r)}{k} V(r') e^{-Rr' \sin \theta} \right| dr'$$

Nous sommes donc ramenés à l'expression (49), et

$$|B(k, r)| \leq \frac{W^2}{R^2} e^{-Rr \sin \theta}$$

Nous aurons donc

$$|f(k, r) - e^{-ikr}| \leq e^{-Rr \sin \theta} \left[\frac{W}{R} + \frac{W^2}{R^2} + \dots \right]$$

série dont on connaît la somme quand $\frac{W}{R} < 1$ ce qui est le cas pour R très grand, quel que soit W :

$$|f(k, r) - e^{-ikr}| \leq e^{-Rr \sin \theta} \frac{W}{R - W}$$

et ceci tend vers zéro.

La méthode d'itérations se trouve donc justifiée pour $|k| \rightarrow \infty$ et nous obtenons le résultat

$$f(k, r) \xrightarrow{|k| \rightarrow \infty} e^{-ikr}$$

résultat qui implique que le système des fonctions propres régulières est complet, et qui justifie notre méthode.

CONCLUSION

Il est bien connu qu'un potentiel réel, dont les deux premiers moments existent, participe à la formation d'un opérateur différentiel auto-adjoint et qu'un opérateur auto-adjoint ne peut posséder d'états liés multiples [8]. Nous avons voulu faire un pas vers les réciproques des précédents énoncés et avons considéré les états liés multiples dans les deux cas suivants : *simple existence* des dérivées secondes mixtes des solutions de Jost, existence d'une fonction de Green. Le résultat essentiel de notre travail est le suivant :

L'impossibilité des zéros multiples provient dans le premier cas de la réalité du potentiel et dans le second de la présence de δ' dans la fonction

spectrale ce qui n'est pas possible si l'opérateur est auto-adjoint. Lorsque les deux circonstances précédentes sont simultanément réalisées les potentiels complexes pourront posséder des états liés multiples dont les fonctions de Jost ont des zéros doubles sur l'axe imaginaire et, par suite, des matrices S possédant des pôles doubles.

Nous avons construit dans ce qui précède un potentiel $V(r)$ tel que :

$$V(0) = 0,$$

$V(r)$ décroît exponentiellement à l'infini,

$V(r)$ continu en tout point.

Il est donc borné en module et possède deux premiers moments, mais il est complexe et donne lieu en un point à un état lié d'ordre deux.

Dans ce travail, nous nous sommes limités à un cas simple, mais l'extension de la méthode aux ondes $l \neq 0$ ne comporterait pas de difficulté de principe. Il en serait de même si l'on voulait ajouter un zéro d'ordre deux à un potentiel dont les solutions seraient calculables.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] R. G. NEWTON, *Math. Phys.*, t. 1, 1960, p. 319.
- [2] M. GOURDIN et A. MARTIN, *Il Nuovo Cim.*, t. 6, 1957, p. 758; t. 8, 1958, p. 699.
A. MARTIN, *Il Nuovo Cim.*, t. 7, 1958, p. 607; t. 14, 1959, p. 403.
- [3] H. E. MOSES et S. F. TUAN, *Il Nuovo Cim.*, t. 13, 1959, p. 197.
- [4] R. JOST, *Helv. Phys. Acta*, t. 20, 1947, p. 256.
R. JOST et A. PAIS, *Phys. Rev.*, t. 82, 1951, p. 840.
- [5] I. M. GELFAND et B. M. LEVITAN, *Izvest. Akad. Nauk S. S. S. R., Math. Series*, t. 15, 1951, p. 309.
L. O. FADDEEV (traduction anglaise), *J. Math. Phys.*, t. 4, 1963, p. 72.
Z. S. AGRANOVICH et V. A. MARCHENKO, *The inverse Problem of Scattering Theory*, Gordon and Breach, New York, 1963.
B. M. LEVITAN, *Generalized Translation Operators*, Israel Scientific Translations, Jerusalem, 1964.
- [6] N. LEVINSON, *Phys. Rev.*, t. 89, 1953, p. 755.
- [7] J. S. BELL et C. J. GOEBEL, *Phys. Rev.*, t. 138 B, 1965, p. 1198.
- [8] R. G. NEWTON (communication personnelle).

(Manuscrit reçu le 15 juillet 1966).