

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

J. BROS

C. ITZYKSON

F. PHAM

Représentations intégrales de fonctions analytiques et formule de Jost-Lehmann-Dyson

Annales de l'I. H. P., section A, tome 5, n° 1 (1966), p. 1-35

http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1966__5_1_1_0

© Gauthier-Villars, 1966, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section A » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Représentations intégrales de fonctions analytiques et formule de Jost-Lehmann-Dyson

par

J. BROS, C. ITZYKSON et F. PHAM

(Service de Physique Théorique
Centre d'Études Nucléaires de Saclay).

RÉSUMÉ. — On applique les formules générales de représentation des fonctions analytiques au cas des domaines de Dyson. L'expression ainsi obtenue est équivalente à la représentation de Jost-Lehmann et Dyson. La méthode utilisée est d'abord exposée dans une situation plus simple mais similaire : les tubes à base conique convexe.

ABSTRACT. — We apply the general representation formulae for analytic functions in the case of the Dyson domains. This gives an equivalent form of the Jost-Lehmann-Dyson formula. We first describe our method in the simpler case of tubes with convex conical basis.

I. — INTRODUCTION

Nous nous proposons d'examiner des représentations intégrales de fonctions analytiques dans certains domaines d'holomorphie que l'on rencontre dans la théorie des champs. Plus particulièrement, il s'agira de fonctions analytiques dans des tubes à base conique convexe d'une part, et, d'autre part, dans des domaines de Dyson. Nous voulons présenter une méthode

fondée sur l'utilisation de la représentation de Martinelli qui permet d'unifier ces représentations. L'intérêt de ce procédé nous semble d'abord d'ordre méthodologique. Il complète un travail de J. Bros, A. Messiah et R. Stora sur la complétion analytique qui conduit au domaine de Dyson. D'autre part, il permet d'espérer certaines généralisations dans le cas où l'on voudrait représenter des fonctions dans des domaines décrits comme complémentaires d'une famille de surfaces analytiques. Enfin il est intéressant de noter le parallèle entre la représentation des fonctions holomorphes dans un tube à base conique convexe et de celles holomorphes dans un domaine de Dyson.

Nous nous bornerons dans la suite à établir les formules dans des cas assez restrictifs, par exemple nous ferons des hypothèses assez grossières sur le comportement des fonctions au voisinage de certaines parties de la frontière, en ayant plutôt à l'esprit d'exposer une méthode que de chercher les résultats les plus forts (en particulier nous supposerons toujours les valeurs au bord continues).

Avant de clore cette introduction, nous allons rappeler brièvement les formules de Martinelli et de Cauchy-Fantappié. On trouvera une démonstration de la première dans le cours de A. S. Wightman aux Houches [3]. En ce qui concerne les représentations intégrales des fonctions analytiques en général, nous avons surtout utilisé les articles de J. Leray et F. Norguet [1, 2].

i) La formule de Martinelli.

Soit $\mathcal{D}$ un domaine dans $\mathbb{C}^n$, y un point de $\mathcal{D}$, Γ un cycle d'intégration compact dans $\mathcal{D}$ homologue dans $\mathcal{D} - y$ à la sphère

$$\dot{B} \equiv \left\{ x : \sum_{1 \leq i \leq n} (x_i - y_i)(\bar{x}_i - \bar{y}_i) = \varepsilon^2 \right\}$$

avec ε assez petit pour que la boule :

$$B \equiv \left\{ x : \sum_{1 \leq i \leq n} (x_i - y_i)(\bar{x}_i - \bar{y}_i) \leq \varepsilon^2 \right\}$$

appartienne à $\mathcal{D}$; $\dot{B}$ est orientée par sa normale extérieure (Rappelons qu'on entend par là une orientation de $\dot{B}$ telle qu'en ajoutant la normale extérieure comme premier axe on trouve un système direct pour l'orientation natu-

relle de $\mathbf{C}^n$). Pour toute fonction f holomorphe dans $\mathcal{D}$ on a la représentation

$$f(y) = \frac{(n-1)!}{(2i\pi)^n} \int_{x \in \Gamma} \frac{f(x) \left(\bigwedge_{1 \leq i \leq n} dx_i \right) \wedge \left(\sum_{1 \leq k \leq n} (-1)^{k-1} [\bar{x}_k - \bar{y}_k] \bigwedge_{1 \leq i \leq n, i \neq k} d\bar{x}_i \right)}{\left(\sum_{1 \leq i \leq n} (x_i - y_i) (\bar{x}_i - \bar{y}_i) \right)^n} \quad (1)$$

On remarquera que la forme intégrée est fermée dans $\mathcal{D} - y$ d'où la présence d'un cycle arbitraire Γ de la classe de $\dot{\mathbf{B}}$.

ii) La formule de Cauchy-Fantappiè.

Nous nous bornerons à écrire cette formule en montrant son lien avec la formule précédente.

Considérons dans $\mathbf{C}^n$ un domaine convexe $\mathcal{D}$ et soit Ξ^* l'espace projectif complexe à n dimensions, quotient de l'espace Ξ à $n+1$ dimensions, privé de l'origine, par le groupe des homothéties complexes. Désignons par $(\xi_0, \dots, \xi_n)$ les coordonnées locales d'un point appartenant à une carte de Ξ^* . Soit $y \equiv (y_1 \dots y_n)$ un point de $\mathcal{D}$; alors pour toute fonction holomorphe f dans $\mathcal{D}$

$$f(y) = \frac{(n-1)!}{(2i\pi)^n} \int_{\Gamma} \frac{f(x) \left(\sum_{1 \leq k \leq n} (-1)^{k-1} \xi_k \bigwedge_{1 \leq i \leq n, i \neq k} d\xi_i \right) \wedge \left(\bigwedge_{1 \leq i \leq n} dx_i \right)}{\left(\xi_0 + \sum_{1 \leq i \leq n} \xi_i y_i \right)^n} \quad (2)$$

où Γ est un cycle compact de l'espace $\mathcal{D} \times \Xi^*$ tracé sur la quadrique d'équation

$$\xi_0 + \sum_{1 \leq i \leq n} \xi_i x_i = 0,$$

de dimension réelle $(2n-1)$, et tel que pour tout $(x, \xi) \in \Gamma$ on ait

$$\xi_0 + \sum_{1 \leq i \leq n} \xi_i y_i \neq 0.$$

L'orientation du cycle est telle que si l'on remplace sous le signe d'intégration $f(x)$ par 1, on obtienne un résultat réel positif. J. Leray a montré que tous les cycles de ce genre sont homologues au cycle suivant :

$$\xi_0 + \sum_{1 \leq i \leq n} \xi_i x_i = 0, \quad \xi_i = \bar{x}_i - \bar{y}_i \quad \text{pour} \quad 1 \leq i \leq n, \quad \sum_{1 \leq i \leq n} (x_i - y_i)(\bar{x}_i - \bar{y}_i) = \varepsilon^2$$

En faisant les substitutions indiquées, on obtient la formule de Martinelli (1). Il est à peine besoin d'indiquer que sur la quadrique

$$\xi_0 + \sum_{1 \leq i \leq n} \xi_i x_i = 0$$

privée du plan (y est fixe)

$$\xi_0 + \sum_{1 \leq i \leq n} \xi_i y_i = 0,$$

la forme intégrée est fermée, ce qui permet la déformation du cycle d'intégration. Un choix particulier consistera par exemple à faire décrire à x la frontière d'un domaine borné contenu dans $\mathbb{D}$ et à associer à tout x sur cette frontière. ξ variant continûment avec x , de telle sorte que

$$\xi_0 + \sum_{1 \leq i \leq n} \xi_i x_i = 0, \quad \xi_0 + \sum_{1 \leq i \leq n} \xi_i y_i \neq 0.$$

Autrement dit à tout x appartenant à la frontière d'un domaine borné on associe continûment un plan analytique de l'espace affín $\mathbf{C}^n$, passant par x et évitant y (1).

II. — FONCTIONS HOLOMORPHES DANS UN TUBE A BASE CONIQUE CONVEXE

1. — Notations.

Nous noterons $y = \{y_1, \dots, y_n\}$ les points de $\mathbf{C}^n$,

$$\operatorname{Re} y = \{\operatorname{Re} y_1 \dots \operatorname{Re} y_n\} \quad \text{et} \quad \operatorname{Im} y = \{\operatorname{Im} y_1 \dots \operatorname{Im} y_n\}$$

(1) Nous prions le lecteur mathématicien de ne pas nous tenir rigueur de notre ignorance de la littérature. Nos citations sont probablement incomplètes.

leurs parties réelles et imaginaires dans $\mathbf{R}^n$. $\|y\|$ sera la norme euclidienne définie par

$$\|y\| = \left(\sum_{1 \leq i \leq n} |y_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

On utilisera le symbole $B(u, \rho)$ pour désigner la boule de centre $u \in \mathbf{C}^n$ et de rayon $\rho > 0$:

$$B(u, \rho) = \{y \in \mathbf{C}^n : \|y - u\| < \rho\}.$$

La frontière d'un ensemble E sera noté $\bar{E}$ et son adhérence $\bar{E}$.

Nous aurons à envisager des tubes à base imaginaire. $\mathcal{R}$ étant un ouvert connexe de $\mathbf{R}^n$, le tube $\mathcal{G}_{\mathcal{R}}$ sera l'ensemble

$$\mathcal{G}_{\mathcal{R}} = \{y \in \mathbf{C}^n ; \operatorname{Im} y \in \mathcal{R}\}.$$

L'enveloppe d'holomorphie d'un tube est son enveloppe convexe. En particulier pour $n \geq 2$ nous introduirons les tubes de Lorentz $\mathcal{G}_{\mathcal{L}}$ où $\mathcal{L}$ est le cône

$$\mathcal{L} = \left\{ z \in \mathbf{R}^n, \quad z_1 > 0 \quad z_1^2 - \sum_{2 \leq i \leq n} z_i^2 > 0 \right\}$$

Dans $\mathbf{C}^4$ considéré comme espace vectoriel affine nous utiliserons les notations des produits scalaires de Lorentz avec la numérique

$$g^{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ +1 & \text{si } i = j = 1 \\ -1 & \text{si } i = j \neq 1 \end{cases}$$

$$y.z = \sum_{\substack{1 \leq i \leq 4 \\ 1 \leq j \leq 4}} g^{ij} y_i z_j, \quad z^i = \sum_{1 \leq j \leq 4} g^{ij} z_j, \quad z^2 = z.z = \sum_{1 \leq i \leq 4} z^i . z_i$$

2. — Cas général.

On s'intéresse dans ce paragraphe à des fonctions holomorphes dans un tube convexe défini de la façon suivante. Soit $\mathcal{C}$ un cône ouvert convexe de sommet l'origine dans $\mathbf{R}^n$ à frontière régulière; nous entendons par là qu'en tout point excepté l'origine il admet un plan tangent. Il sera utile par la suite de le caractériser de la façon suivante. On considère sur la sphère unité de $\mathbf{R}^n$ un domaine fermé A trace d'un cône convexe fermé de sommet l'origine. Alors $\mathcal{C}$ est le complémentaire de la famille des plans passant par

l'origine dont les normales rencontrent A . A est choisi par exemple de telle sorte que tout plan passant par l'origine de normale Oa , avec $a \in A$, le demi-espace fermé limité par ce plan et contenant a est entièrement à l'extérieur de C (fig. 1). Avec les hypothèses que nous venons de faire lorsque ces normales décrivent la frontière de A le plan est tangent à C . Nous définissons alors le tube

$$\mathcal{T}_C \equiv \{ y \in \mathbf{C}^n ; \quad \text{Im } y \in C \}.$$

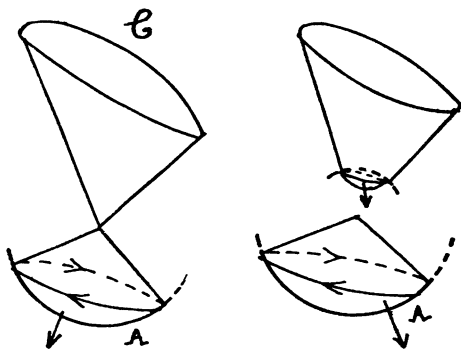


FIG. 1. — Le domaine d'intégration A de la formule (3),
 $\dot{A}$ est le lieu des normales extérieures aux plans tangents au cône C .

Nous voulons apporter de légères modifications à la formule de Cauchy-Fantappiè pour représenter les fonctions holomorphes dans $\mathcal{T}_C$ et cela en utilisant des parties de la frontière de $\mathcal{T}_C$. Dans ce qui suit nous allons supposer que la fonction holomorphe f que nous considérons est continue dans une région obtenue en adjoignant à $\mathcal{T}_C$ ses points frontières réels, et que de plus dans cette région il existe $\rho_0 > 0$, $M > 0$ et $\alpha > n - 1$ de telle sorte que

$$\|y\| > \rho_0 \quad \text{entraîne} \quad |f(y)| < \frac{M}{\|y\|^\alpha}$$

Ceci de manière à pouvoir négliger des contributions d'intégrales situées à grande distance et à obtenir des intégrales absolument convergentes.

Soit K le domaine borné dans $\mathcal{T}_C$ obtenu de la façon suivante. Formons le cône $C' = z + C$ où $z \in C$.

Comme C est convexe C' l'est aussi et puisque $z \in C$, $z + C \subset C$ donc $\mathcal{T}_{C'} \subset \mathcal{T}_C$. Posons alors $K = \mathcal{T}_{C'} \cap B(0, \rho)$.

Ultérieurement nous ferons tendre ρ vers l'infini et z vers zéro. Afin de préciser ce dernier point nous supposons avoir choisi un point $y \in \mathcal{T}_C$ une

fois pour toutes; z sera défini par $z = \lambda \operatorname{Im} y$, λ réel, $0 < \lambda < 1$. En prenant $\rho > \|y\|$ on aura $y \in K$ et la limite pour z sera prise en faisant tendre λ vers zéro.

Remarquons que la frontière de K est constituée de deux parties :

$$\dot{K} = (\dot{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}'} \cap \bar{B}(0, \rho)) \cup (\bar{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}'} \cap \dot{B}(0, \rho)).$$

Ceci dit si nous voulons écrire directement la formule de Cauchy-Fantappiè pour K en nous servant de la prescription d'associer à tout point x de $\dot{K}$ un plan analytique passant par ce point, évitant y , et variant continûment avec x , nous allons nous heurter à une difficulté due aux points anguleux de K qui sont les points x tels que $\operatorname{Im} x = z$ et ceux qui appartiennent à l'intersection $\dot{B}(0, \rho) \cap \dot{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}'}$. En tous les autres points de la frontière de K il existe d'après l'hypothèse sur $\mathcal{C}$ un plan supportant et un seul qui contient un plan analytique possédant toutes les propriétés désirées. En réalité, seuls les points x tels que $\operatorname{Im} x = z$ vont être intéressants, en raison de la décroissance que nous avons imposée à la fonction $f(x)$ lorsque $\|x\|$ croît indéfiniment. En effet en se rapportant aux formules (1) ou (2) et en prenant $\rho > \rho_0$ on rendra l'intégrale relative aux points sur la sphère aussi petite qu'on le voudra. Nous ne reviendrons pas sur ce point et nous supposerons dorénavant que K n'est plus borné mais se réduit à $\mathcal{C}_{\mathcal{C}'}$. De plus afin d'éviter les complications de langage nous supposerons avoir fait dans l'espace $\mathbf{C}^n$ une translation réelle qui amène le point iz à l'origine et nous noterons $\mathcal{C}$ le tube ainsi déplacé : $K = \mathcal{C}$. Dans ces conditions f est holomorphe dans un voisinage de $\bar{K}$. Alors pour tout

$$x \in \dot{K} \quad \text{tel que} \quad \sum_{1 \leq i \leq n} (\operatorname{Im} x_i)^2 \geq \varepsilon^2$$

nous prendrons

$$\xi_i(x) = a_i(x) \quad 1 \leq i \leq n, \quad \xi_0(x) = - \sum_{1 \leq i \leq n} \xi_i(x) x_i,$$

où $a(x)$ est la normale au plan supportant à $\mathcal{C}$ passant par le point $\operatorname{Im} x$, $a(x) \in \dot{A}$.

Pour faire le raccord à l'intérieur de la boule

$$\sum_{1 \leq i \leq n} (\operatorname{Im} x_i)^2 < \varepsilon^2$$

il suffit « d'arrondir » le sommet du cône $\mathcal{C}$ (voir fig. 1) ce qui le transforme en une région convexe $\mathcal{K}$ à frontière partout régulière et permet de continuer

à appliquer la prescription qui consiste à prendre en tout point $x \in \dot{\mathcal{C}}_{\mathcal{R}}$ le plan analytique contenu dans le plan tangent. Comme les questions de signe vont prendre de l'importance dans la suite il n'est pas inutile de remarquer que l'orientation du cycle d'intégration est définie par la normale extérieure à $\dot{\mathcal{C}}_{\mathcal{R}}$. Le cycle Γ orienté de la formule de Cauchy-Fantappié est alors :

$$\Gamma = \left\{ x \in \dot{\mathcal{C}}_{\mathcal{R}} \text{ orienté} \equiv \mathbf{R}^n \text{ orienté} \times \dot{\mathcal{R}} \text{ orienté par la normale extérieure} \right. \\ \left. \begin{aligned} \xi_i(x) &= a_i(x); & 1 \leq i \leq n; & \quad \xi_0 = - \sum_{1 \leq i \leq n} \xi_i(x) x_i \end{aligned} \right\}$$

On pourra ensuite passer à la limite $\varepsilon \rightarrow 0$; $\mathcal{R}$ tendra vers $\mathbb{C}$ et Γ se décomposera en deux parties :

$$\Gamma_1 = \left\{ x \in \dot{\mathcal{C}}_{\mathbb{C}} \text{ orienté, } \operatorname{Im} x \neq 0 \quad \begin{aligned} \xi_i(x) &= a_i(x) & 1 \leq i \leq n \\ \xi_0 &= - \sum_{1 \leq i \leq n} \xi_i x_i \end{aligned} \right\}$$

$\Gamma_2 \equiv \left\{ x \in \mathbf{R}^n \text{ orienté } \{ \xi_i \} \in A \text{ orienté par la normale extérieure à la sphère unité,} \right.$

$$\left. \xi_0 = - \sum_{1 \leq i \leq n} \xi_i x_i \right\}$$

Pour voir que l'orientation de A est bien celle indiquée il suffit d'effectuer le passage à la limite (voir fig. 1).

Nous allons montrer maintenant que l'intégration sur Γ_1 donne pour résultat zéro. Nous y parviendrons en montrant qu'il existe dans Γ_1 des ensembles analytiques à une dimension complexe (en fait des droites) de telle sorte qu'on pourra trouver au voisinage d'un point de Γ_1 , parmi les $2n - 1$ paramètres réels deux paramètres α et β qui ne figurent que dans la combinaison $\alpha + i\beta$, x et ξ étant alors analytiques en $\alpha + i\beta$. En effectuant le changement de variables dans la forme à intégrer on ne verra apparaître que $d(\alpha + i\beta)$ et non $d(\alpha - i\beta)$ et, puisqu'il ne reste que $2n - 3$ autres variables indépendantes, la forme de degré $2n - 1$ s'annulera. Montrons explicitement qu'il en est ainsi. Plaçons-nous dans Γ_1 au voisinage d'un de ses points. Soient w un vecteur réel $\in \dot{\mathbb{C}}$ tel que

$$\sum_{1 \leq i \leq n} w_i^2 = 1,$$

et $w^\sigma (1 \leq \sigma \leq n-1)$, $n-1$ vecteurs arbitraires fixes n'appartenant pas à $\mathbb{C}$ et tels que lorsque w varie au voisinage d'une de ses positions les n vecteurs $\{w^\sigma, w\}$ soient linéairement indépendants.

$\lambda, \lambda^1, \dots, \lambda^{n-1}$ étant n paramètres réels variant de $-\infty$ à $+\infty$ et μ étant positif, nous paramétrons Γ_1 par

$$\operatorname{Re} x = \lambda w + \sum_{1 \leq \sigma \leq n-1} \lambda^\sigma w^\sigma$$

$$\operatorname{Im} x = \mu w$$

$$\xi = a(w) \quad \xi_0 = - \sum_{1 \leq i \leq n} x_i \xi_i$$

ce qui peut encore s'écrire

$$\begin{cases} x = (\lambda + i\mu)w + \sum_{1 \leq \sigma \leq n-1} \lambda^\sigma w^\sigma \\ \xi = a(w) \quad \xi_0 = - \sum_{1 \leq i \leq n} x_i \xi_i \end{cases}$$

w et λ^σ constituent $(n-2) + (n-1) = 2n-3$ paramètres et (x, ξ) est analytique en $(\lambda + i\mu)$, ce que nous voulions montrer.

Il nous reste à revenir au tube déplacé $\mathcal{U}_{\mathbb{C}'}$ que nous avons introduit et à effectuer le passage à la limite $\lambda \rightarrow 0$, annoncé plus haut. En supposant f continue sur la frontière réelle, ce passage à la limite est justifié pourvu que l'intégrale finale prise sur Γ_2 garde un sens, ce qui aura bien lieu si la fonction continue sur les réels est telle qu'il existe ρ_0 et M positifs et $\alpha > n-1$ tels que

$$\|x\| > \rho_0 \quad \text{entraîne} \quad \|x\|^\alpha |f(x)| < M.$$

Il suffit d'ailleurs d'exiger une condition moins forte en réclamant que l'intégrale sur Γ_2 lorsque λ est positif mais non nul soit bornée. Alors la limite est bien définie. Le résultat définitif est le suivant :

$$f(y) = \frac{(n-1)!}{(2i\pi)^n} \lim_{\substack{\eta \in \mathbb{C} \\ \eta \rightarrow 0}} \int_{\Gamma_1} \frac{f(x + i\eta) \left(\sum_{1 \leq k \leq n} (-1)^{k-1} \xi_k \bigwedge_{i \neq k} d\xi_i \right) \wedge \left(\bigwedge_{1 \leq i \leq n} dx_i \right)}{\left(\sum_{1 \leq i \leq n} \xi_i (y_i - x_i) \right)^n} \quad (3)$$

où Γ_2 est le contour d'intégration :

$x \in \mathbf{R}^n$ orienté;

$\xi \in A$ orienté par la normale extérieure à la sphère unité.

Rappelons la définition de A ; si $\xi \in A$, ξ est réel,

$$\sum_{1 \leq i \leq n} \xi_i^2 = 1,$$

et le demi-espace

$$\sum_{1 \leq i \leq n} z_i \xi_i \geq 0$$

de point courant $z \in \mathbf{R}^n$ a une intersection vide avec C . Le fait à noter dans la formule (3) est que la donnée de la fonction pour les valeurs réelles de l'argument suffit à la déterminer dans tout son domaine d'analyticité.

3. — Application au tube de Lorentz.

Nous avons défini ci-dessus le tube de Lorentz $\mathcal{C}_\zeta$ dans $\mathbf{C}^n$, $n \geq 2$. Pour ne pas alourdir les notations, nous le noterons simplement $\mathcal{C}_n$. Pour les fonctions holomorphes dans $\mathcal{C}_n$ et satisfaisant aux conditions exigées, nous avons la représentation (3). Nous pouvons d'ailleurs effectuer une partie de l'intégration en sommant sur ξ . Le contour d'intégration n'est autre que ξ réel

$$\sum_{1 \leq i \leq n} \xi_i^2 = 1, \quad \xi \in -\bar{\Gamma}.$$

On veut calculer dans ces conditions

$$S_n(y-x) = \int_{\substack{y \in \mathcal{C}_n \\ x \text{ réel}}} \frac{\sum_{1 \leq k \leq n} (-1)^{k-1} \xi_k \bigwedge_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i \neq k}} d\xi_i}{\left(\sum_{1 \leq i \leq n} \xi_i (y_i - x_i) \right)^n} \quad (4)$$

Le dénominateur ne s'annule jamais sur ce contour. Observons de plus que $\mathcal{C}_n$ étant invariant par translation réelle, on a $y-x = q \in \mathcal{C}_n$; q étant fixé dans $\mathcal{C}_n$ nous intégrons une forme homogène et fermée; on peut donc changer le contour d'intégration en prenant par exemple $\xi_1 = -1$, $\xi \in -\bar{\Gamma}$ c'est-à-dire

$$\sum_{2 \leq i \leq n} \xi_i^2 \leq 1.$$

Compte tenu de l'orientation, notre intégrale devient :

$$S_n(q) = \int_{q \in \mathcal{C}_n} \frac{\bigwedge_{2 \leq i \leq n} d\xi_i}{\sum_{2 \leq i \leq n} \xi_i^2 \leq 1 \left(-q_1 + \sum_{2 \leq i \leq n} \xi_i q_i \right)^n} \quad (5)$$

Pour $n = 2$ on trouve immédiatement

$$S_2(q) = \int_{q \in \mathcal{C}_2} \frac{d\xi_2}{-1 \leq \xi_2 \leq +1 (-q_1 + \xi_2 q_2)^2} = \frac{2}{q_1^2 - q_2^2} \quad (6)$$

Pour $n \geq 2$, nous observons que l'intégrale (5) définit une fonction analytique de q dans un domaine qui comprend $\mathcal{C}$. En effet lorsque $q \in \mathcal{C}$ le nombre complexe qui figure au dénominateur élevé à la $n^{\text{ième}}$ puissance a une partie imaginaire toujours négative. On pourra donc se contenter de faire le calcul pour q imaginaire pur dans $\mathcal{C}_n$ et effectuer le prolongement analytique du résultat. Posons donc $q = ir$, $r \in \mathcal{L}$ c'est-à-dire

$$r_1 > 0, r_1 > \sqrt{\sum_{2 \leq i \leq n} r_i^2} = r_{-1} \geq 0$$

et profitons de l'invariance par rotation de l'intégrale (5). Il vient :

$$S_n(ir) = i^n \int_{r \in \mathcal{L}} \frac{d\xi_2 \wedge \left(\bigwedge_{3 \leq i \leq n} d\xi_i \right)}{\sum_{2 \leq i \leq n} \xi_i^2 \leq 1 \left(r_1 - r_{-1} \xi_2 \right)^n} = i^n \int_{-1 \leq \xi \leq 1} \frac{(\sqrt{1 - \xi^2})^{n-2} v_{n-2} d\xi}{(r_1 - r_{-1} \xi)^n},$$

où v_p est le volume positif de la boule de rayon unité dans l'espace à p dimensions

$$v_p = \frac{\pi p / 2}{\Gamma\left(1 + \frac{p}{2}\right)}.$$

Posons dans l'intégrale ci-dessus

$$\begin{aligned} r_1 &= \sqrt{r_1^2 - r_{-1}^2} \operatorname{ch} \Phi_0 & \sqrt{r_1^2 - r_{-1}^2} &> 0, \quad \Phi_0 \geq 0 \\ r_{-1} &= \sqrt{r_1^2 - r_{-1}^2} \operatorname{sh} \Phi_0 \\ \zeta &= \operatorname{th} \Phi. \end{aligned}$$

Il vient :

$$S_n(ir) = \frac{i^n \pi^{\frac{n}{2}-1}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) (\sqrt{r_1^2 - r_{-1}^2})^n} \int_{-\infty < \Phi < +\infty} \frac{d\Phi}{(\operatorname{ch} \Phi_0 \operatorname{ch} \Phi - \operatorname{sh} \Phi_0 \operatorname{sh} \Phi)^n}$$

$$= \frac{i^n \pi^{\frac{n}{2}-1}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) (\sqrt{r_1^2 - r_{-1}^2})^n} \int_{-\infty < \Phi < +\infty} \frac{d\Phi}{(\operatorname{ch} \Phi)^n}$$

Calculons l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\Phi}{(\operatorname{ch} \Phi)^n}$ en prenant comme variable d'intégration $t = \frac{e^{2\Phi}}{e^{2\Phi} + 1}$, il vient, en utilisant les fonctions eulériennes de seconde espèce (réf. [8]).

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\Phi}{(\operatorname{ch} \Phi)^n} = 2^{n-1} \int_0^1 dt t^{\frac{n}{2}-1} (1-t)^{\frac{n}{2}-1} = 2^{n-1} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)^2}{\Gamma(n)}$$

D'où, en portant dans la formule ci-dessus et en appliquant la formule de duplication des fonctions eulériennes $2^{2z-1} \Gamma(z) \Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \Gamma(2z)$

$$S_n(q) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}-1} (-1)^n 2^{n-1} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma(n) \left(\sqrt{q_1^2 - \sum_{2 \leq i \leq n} q_i^2} \right)^n} = \frac{(-1)^n \pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} \frac{1}{\left(\sqrt{q_1^2 - \sum_{2 \leq i \leq n} q_i^2} \right)^n} \quad (7)$$

Dans le cas où n est impair il importe de préciser la détermination du radical à choisir. Ceci est simple en vertu du calcul fait ci-dessus. En effet, il suffit de remarquer que lorsque $q \in \mathfrak{C}$ le nombre complexe

$$q_1^2 - \sum_{2 \leq i \leq n} q_i^2$$

n'est jamais réel positif ou nul. Nous pouvons donc considérer la fonction $S_n(q)$ dans le plan de la variable complexe

$$q_1^2 - \sum_{2 \leq i \leq n} q_i^2$$

coupé le long de l'axe réel positif, et telle que, lorsque q est imaginaire pur dans $\mathfrak{C}_n$,

$$\sqrt{q_1^2 - \sum_{2 \leq i \leq n} q_i^2}$$

ait pour phase $\frac{\pi}{2}$. On note que la formule obtenue pour $n \geq 3$ est encore valable pour $n = 2$. Il nous reste à porter ce résultat dans la formule (3) pour obtenir la représentation des fonctions holomorphes dans le tube de Lorentz $\mathfrak{C}_n (n \geq 2)$ avec les restrictions et déterminations précisées ci-dessus

$$f(y) = \frac{i^n \Gamma\left(1 + \frac{n}{2}\right)}{n\pi^{1 + \frac{n}{2}}} \int_{x \in \mathbb{R}^n \text{ orienté}} \frac{f(x) \bigwedge_{1 \leq i \leq n} dx}{\left(\sqrt{(y_1 - x_1)^2 - \sum_{2 \leq i \leq n} (y_i - x_i)^2}\right)^n} \quad (8)$$

Faisons quelques remarques au sujet de la formule (8) :

i) On peut aussi bien obtenir ce résultat en utilisant la transformation de Fourier. Une fonction $\tilde{f}$ à support dans $\mathfrak{L}$ et à croissance lente à l'infini a pour transformée de Fourier une fonction analytique dans $\mathfrak{C}_n$. L'intégrale (8) est alors une intégrale de convolution entre les fonctions transformées de $\tilde{f}$ et la fonction caractéristique du cône $\mathfrak{L}$.

ii) Le tube $\mathfrak{C}_n$ est invariant en particulier par les transformations $y \rightarrow Py$ avec

$$(Py)_i = \Lambda_{ij} y_j + a_i$$

où a_i est réel et la matrice réelle Λ_{ij} telle que $\Lambda_{11} > 0$ et $\det \Lambda > 0$ appartient au groupe de Lorentz à n -dimensions c'est-à-dire au groupe des transformations linéaires homogènes réelles qui laissent invariante la forme bilinéaire

$$x_1 y_1 - \sum_{2 \leq i \leq n} x_i y_i.$$

On remarque que le noyau de la formule (8) est adapté à cette propriété d'invariance. Pour toute fonction f holomorphe dans le tube et satisfaisant aux restrictions de croissance, nous posons ${}^p f(y) = f(Py)$; alors on voit

qu'on déduit immédiatement la représentation de ${}^{\mathfrak{P}}f$ de celle de f . En effet

$$\int \frac{f(x) \bigwedge_{1 \leq i \leq n} dx_i}{\left(\sqrt{(Py_1 - x_1)^2 - \sum_{2 \leq i \leq n} (Py_i - x_i)^2} \right)^n} = \int \frac{{}^{\mathfrak{P}}f(x) \bigwedge_{1 \leq i \leq n} dx_i}{\left(\sqrt{(y_1 - x_1)^2 - \sum_{2 \leq i \leq n} (y_i - x_i)^2} \right)^n}$$

iii) En particulier dans $\mathbb{C}^4$ on obtient la formule classique :

$$f(y) = \frac{1}{2\pi^3} \int_{x \in \mathbb{R}^4 \text{ orienté}} \frac{f(x) \bigwedge_{1 \leq i \leq n} dx_i}{\left((y_1 - x_1)^2 - \sum_{2 \leq i \leq 4} (y_i - x_i)^2 \right)^2} \quad (9)$$

La convergence absolue de cette intégrale est assurée si pour $\|x\|$ assez grand $\|x\|^{-\alpha} |f(x)|$ est majorée par une constante pour $\alpha > 1$.

Il est peut-être instructif de vérifier cette formule en effectuant l'intégrale explicitement avec des moyens élémentaires, à savoir la formule de Cauchy. C'est ce que nous nous proposons pour achever cette section. Désormais nous utilisons la notation du produit scalaire avec la métrique de Lorentz. Pour tout $y \in \mathbb{C}_4$ il existe une transformation P telle que

$$(Py)_j = i\sqrt{(\operatorname{Im} y)^2} \delta_{j1}$$

et nous poserons

$$\eta = \sqrt{(\operatorname{Im} y)^2} > 0.$$

En vertu de la remarque (ii), il suffit de vérifier la formule (9) pour y de cette forme. Notons $\vec{x}$ le trivecteur réel de composantes (x_2, x_3, x_4) et $x^2 = x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$. On veut calculer l'intégrale

$$I = \frac{1}{2\pi^3} \int_{x \in \mathbb{R}^4} \frac{f(x) \bigwedge_{1 \leq i \leq 4} dx_i}{[(x_1 - i\eta)^2 - x^2]^2}$$

L'intégrale est absolument convergente et à $\vec{x}$ fixé, $f(x_1, \vec{x})$ est une fonction analytique de x_1 pour $\text{Im } x_1 > 0$ décroissante à l'infini. D'autre part le dénominateur a deux zéros doubles pour

$$x_1 = \pm \sqrt{\vec{x}^2} + i\eta.$$

Nous allons pouvoir intégrer sur x_1 à l'aide de la formule de Cauchy en remarquant par exemple que I est la limite d'une intégrale analogue prise pour $\vec{x}^2 \geq \varepsilon^2$ où $\varepsilon > 0$ tendra ultérieurement vers zéro. En effet on n'exclut qu'une quantité infinitésimale. Il vient donc

$$I = \frac{i}{4\pi^2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\{x_i\} \in \mathbb{R}^3 - B(0, \varepsilon)} \frac{1}{\vec{x}^2} \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_1} (\sqrt{\vec{x}^2} + i\eta, \vec{x}) + \frac{\partial f}{\partial x_1} (-\sqrt{\vec{x}^2} + i\eta, \vec{x}) - \frac{1}{\sqrt{\vec{x}^2}} [f(\sqrt{\vec{x}^2} + i\eta, \vec{x}) - f(-\sqrt{\vec{x}^2} + i\eta, \vec{x})] \right\} \bigwedge_{2 \leq i \leq 4} dx$$

Posons à présent dans l'intégrale $\vec{x} = \vec{\lambda}u$ avec $\vec{u}^2 = 1$, $\vec{u}$ réel. Alors :

$$2 \leq i \leq 4 : dx_i = \lambda du_i + u_i d\lambda; \quad \bigwedge_{2 \leq i \leq 4} dx_i = \lambda^2 d\lambda \wedge \psi(u)$$

où

$$\psi(u) = \sum_{2 \leq k \leq 4} (-1)^k u_k \bigwedge_{2 \leq i \leq 4, i \neq k} du_i$$

En regroupant dans l'intégrale précédente les termes deux à deux et en utilisant le changement de variables indiqué, on obtient

$$I = \frac{i}{4\pi^2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\substack{u \in \mathbb{B}(0,1) \\ |\lambda| > \varepsilon}} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} (\lambda + i\eta, \vec{\lambda}u) - \frac{1}{\lambda} f(\lambda + i\eta, \vec{\lambda}u) \right) d\lambda \wedge \psi(u)$$

Or, pour $\text{Im } \lambda > -\eta$, le quadrivecteur $(\lambda + i\eta, \vec{\lambda}u)$ appartient à $\mathfrak{T}_4$. Nous avons donc à intégrer deux fonctions analytiques de λ qui pour $|\lambda|$ assez grand sont telles que

$$|f(\lambda + i\eta, \vec{\lambda}u)| < \frac{M}{\lambda^\alpha} \left| \frac{\partial f}{\partial x_1} (\lambda + i\eta, \vec{\lambda}u) \right| < \frac{M'}{\lambda^\alpha} \quad \text{avec} \quad \alpha > 1$$

On peut donc adjoindre à l'intégrale sur λ réel une intégrale sur un grand arc de cercle (cf. fig. 2) en commettant une erreur infinitésimale. La contri-

bution de $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ tend vers zéro et il nous reste une partie principale qui donne

$$I = \frac{i}{4\pi^2} i\pi f(i\eta, 0) \int_{u \in \dot{B}(0,1)} \psi(u) = f(i\eta, 0)$$

c'est précisément le résultat attendu.

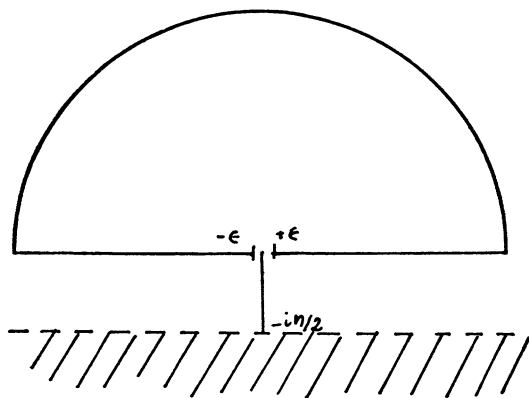


FIG. 2. — Le contour pour l'intégrale I.

III. — LA FORMULE DE JOST-LEHMANN-DYSON

1. — Application de la méthode de Fantappié.

Les développements qui précèdent ont eu pour but de montrer le mécanisme d'application de ce que nous pourrions appeler la méthode de Fantappié. Nous voulons maintenant tenter d'exploiter cette méthode dans le cas des domaines de Dyson.

Par domaine de Dyson (référence [5] et [7]) ⁽²⁾, on entend un domaine $\mathcal{D}$ de $\mathbf{C}^4$ complémentaire d'une famille $\mathcal{A}$ d'hyperboloïdes à deux nappes complexifiés dits admissibles. On se donne dans $\mathbf{R}^4$ une région ouverte connexe $\mathcal{R}$ limitée par deux surfaces S_+ et S_- . Un hyperboloïde $\mathcal{Q}(z, u, K^2) \equiv (z - u)^2 - K^2 = 0$, u réel, $K^2 > 0$ sera admissible, et nous écrirons $\mathcal{Q} \in \mathcal{A}$ s'il n'a aucun point réel dans $\mathcal{R}$.

⁽²⁾ On trouvera dans la référence [7] une étude détaillée des domaines de Dyson.

Les surfaces $\mathcal{S}_+$ et $\mathcal{S}_-$ une fois continûment différentiables sont du genre espace, c'est-à-dire que pour tout couple de points réels x' et x'' appartenant à $\mathcal{S}_+$ (respectivement $\mathcal{S}_-$) on a $(x' - x'')^2 < 0$.

On supposera que les surfaces $\mathcal{S}_+$ et $\mathcal{S}_-$ sont sans point commun (voir fig. 3).

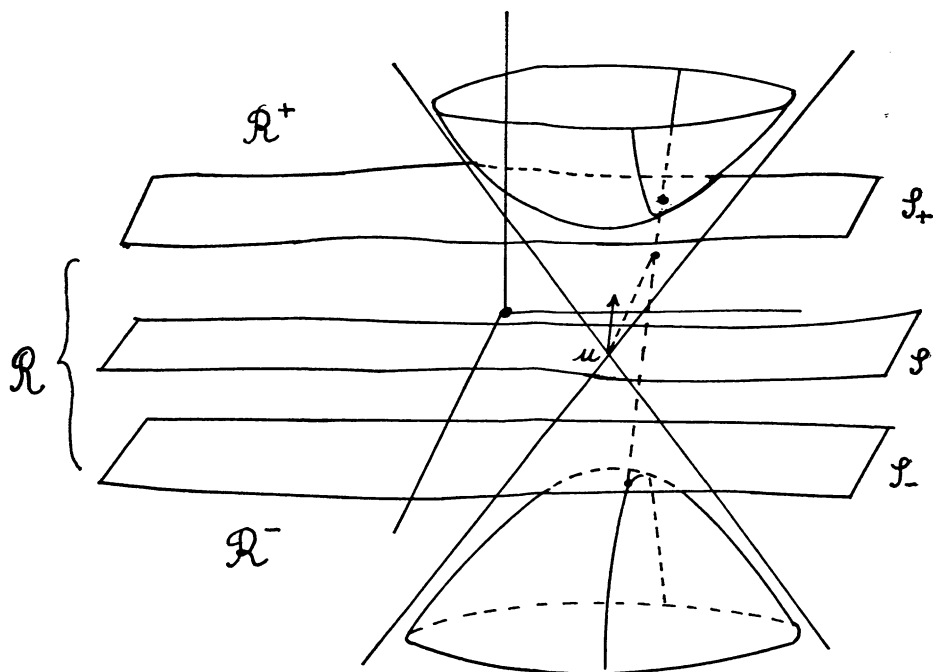


FIG. 3. — Un tracé schématique de la région $\mathcal{R}$ dans un espace à trois dimensions avec un hyperboloïde limite.

Cette hypothèse est destinée à simplifier la discussion mais on pourrait s'en passer et étudier des régions $\mathcal{R}$ plus générales suivant la même méthode. On supposera de plus qu'il existe une sous-famille d'hyperboloïdes limites $\dot{\mathcal{A}} \subset \mathcal{A}$ dont l'enveloppe réelle est l'union des surfaces $\mathcal{S}_+$ et $\mathcal{S}_-$; leurs centres u décrivent une surface $\mathcal{S}$ d'équation $S(u) = 0$. Il se trouve que la frontière du domaine $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C}^4; \forall Q \in \mathcal{A}, Q(z, u, K^2) \neq 0\}$ est l'enveloppe de $\dot{\mathcal{A}}$ considérée comme famille de variétés complexes dans $\mathbb{C}^4$. Calculons cette enveloppe. Pour $Q \in \dot{\mathcal{A}}$ on a :

$$\begin{aligned} Q(z, u) &= (z - u)^2 - K^2(u) = 0 \\ S(u) &= 0, \end{aligned}$$

où $K^2(u)$ et $S(u)$ sont une fois continûment différentiables et réels. L'enveloppe s'obtient en écrivant que les formes qu'on obtient en différentiant $\mathcal{Q}(z, u)$, $\overline{\mathcal{Q}}(\bar{z}, u)$ et $S(u)$ par rapport à u ne sont pas linéairement indépendantes, c'est-à-dire qu'il existe λ, μ et ν complexes non tous nuls tels que :

$$\sum_{1 \leq i \leq 4} \left(\lambda \frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial u_i} + \mu \frac{\partial \overline{\mathcal{Q}}}{\partial u_i} + \nu \frac{\partial S}{\partial u_i} \right) du_i = 0$$

En prenant la demi-somme de cette équation avec celle qu'on obtient par conjugaison complexe, on voit qu'on peut supposer

$$\lambda = \bar{\mu}$$

$$\nu = \bar{\nu}.$$

Donc

$$\lambda \frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial u_j} = -\nu \frac{\partial S}{\partial u_j} + iy^j$$

où y^j est un quadri vecteur réel arbitraire. En vertu de nos hypothèses $\left(\frac{\partial S}{\partial u}\right)^2 > 0$ et on peut écrire

$$y = \alpha \frac{\partial S}{\partial u} + \beta t$$

où t est un quadri vecteur réel tel que

$$t \cdot \frac{\partial S}{\partial u} = 0 \quad t^2 = -1$$

d'où

$$\frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial u} = -2\lambda_1 \frac{\partial S}{\partial u} - 2\lambda_2 t$$

où cette fois λ_1 et λ_2 sont complexes et indépendants. Cette dernière équation exprime que z varie dans un plan à deux dimensions complexes car elle s'écrit :

$$(z - u)^i + \frac{1}{2} \frac{\partial K^2(u)}{\partial u_i} = \lambda_1 \frac{\partial S}{\partial u_i} + \lambda_2 t^i$$

En prenant l'intersection de l'hyperboloïde par ce plan, nous obtenons une hyperbole et l'union de cette famille d'hyperboles lorsque t et u varient constitue la frontière du domaine. Ces hyperboles, dépendant de cinq paramètres réels, sont tracées sur les hyperboloïdes limites et on vérifie qu'elles passent par les points de contact de ces hyperboloïdes avec leur enveloppe

réelle constituée par les surfaces S_+ et S_- . Notons que la frontière peut être décomposée en deux parties. La première est constituée de points complexes tels qu'en chacun de ces points passe une hyperbole limite et une seule; la deuxième par les points réels compris dans $\mathbf{R}^4 - \mathcal{R} = \mathcal{R}^+ \cup \mathcal{R}^-$. Au voisinage d'un tel point on peut avoir une idée du domaine en figurant comment varie la partie imaginaire de y lorsque $\text{Re } y \in \mathcal{R}^+ \cup \mathcal{R}^-$, $y \in \mathcal{D}$ (voir fig. 4). Sur cette même figure on a donné la situation pour $y \in \mathcal{D}$, $\text{Re } y \in \mathcal{R}$.

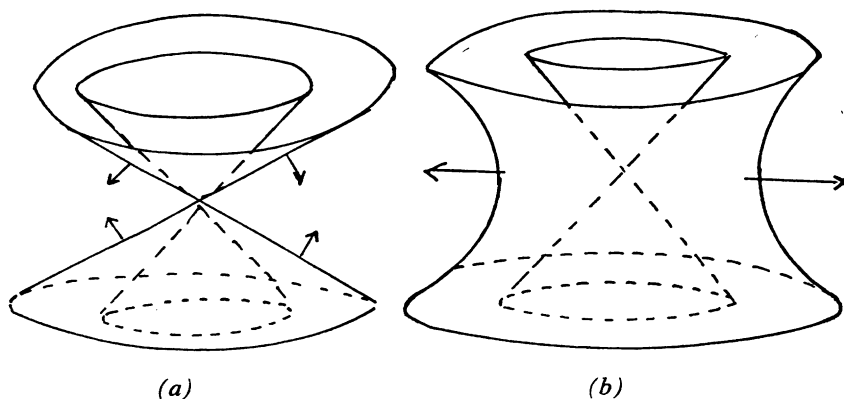


FIG. 4. — Allure de la région dans laquelle varie la partie imaginaire d'un point de $\mathcal{D}$ au-dessus d'un point réel : a) le point réel n'est pas dans $\mathcal{R}$; b) le point réel appartient à $\mathcal{R}$. Les flèches indiquent l'extérieur du domaine $\mathcal{D}$.

En particulier, comme nous allons en venir aux représentations intégrales, il faut noter que la partie réelle de la frontière doit être comptée deux fois puisque partant de $\mathcal{D}$ on a deux façons d'atteindre ces points selon que $\text{Im } y$ appartient à l'une ou l'autre des deux régions de la figure 4 a.

Soit donc $f(y)$ une fonction holomorphe dans $\mathcal{D}$ telle qu'elle possède sur la frontière réelle des valeurs au bord continues, décroissant à l'infini plus

vite que $\frac{M}{\|y\|^\alpha}$, avec α assez grand. Nous pouvons la représenter en un

point $y \in \mathcal{D}$ par une formule de Martinelli prise sur la frontière d'un compact K . En faisant tendre K vers $\mathcal{D}$ et en tenant compte de la décroissance de f à l'infini, on obtient une formule qui utilise les valeurs de f en des points très voisins de la frontière. Par abus de langage nous écrirons que ces valeurs sont prises sur la frontière de $\mathcal{D}$; mais comme on va le voir et de manière analogue à ce qui s'est produit dans la section II, si l'on utilise un changement de variables adéquat il est possible d'éliminer une partie de la région d'intégration; aussi n'aurons-nous en définitive besoin

que des valeurs au bord sur les parties réelles de la frontière. Ceci étant implicite on a :

$$f(y) = \frac{3}{8\pi^4} \int_{x \in \dot{\mathcal{D}}} \frac{f(x) \bigwedge_{1 \leq i \leq 4} dx_i \wedge \left(\sum_{1 \leq k \leq 4} (-1)^{k-1} (\bar{x}_k - \bar{y}_k) \bigwedge_{\substack{1 \leq i \leq 4 \\ i \neq k}} d\bar{x}_i \right)}{\left(\sum_{1 \leq i \leq 4} (x_i - y_i) (\bar{x}_i - \bar{y}_i) \right)^4} \quad (10)$$

L'orientation de $\dot{\mathcal{D}}$ est très importante, précisons-la. On fait varier Rex sur $\mathbf{R}^4$ orienté et à Rex fixé, $\text{Im } x$ décrit la frontière orientée par la normale extérieure. Observons qu'ainsi les points réels de la frontière apparaissent deux fois avec des orientations opposées.

Effectuons dans la formule (10) le changement de variables

$$\bar{x}_i - \bar{y}_i = x^i + y^i - 2u^i \quad (11)$$

il vient

$$f(y) = \frac{3}{\pi^4} \int_{\substack{x \in \dot{\mathcal{D}} \text{ orienté;} \\ u \text{ défini par} \\ \text{la formule (11)}}} \frac{f(x) \bigwedge_{1 \leq i \leq 4} dx_i \wedge \left(\sum_{1 \leq k \leq 4} (-1)^{k-1} (x_k + y_k - 2u_k) \bigwedge_{\substack{1 \leq i \leq 4 \\ i \neq k}} du_i \right)}{((x - u)^2 - (y - u)^2)^4} \quad (12)$$

Dans l'espace produit $\mathcal{D} \times \mathbf{C}^4$ où varient les couples (x, u) , la forme à intégrer dans (12) est fermée; nous pouvons donc déformer le cycle d'intégration. Utilisons pour cela une image géométrique. A tout $w \in \mathbf{C}^4$ et $x \in \dot{\mathcal{D}}$ nous attachons l'hyperboloïde

$$Q(z) \equiv (z - w)^2 - (x - w)^2 = 0.$$

Choisissons une fois pour toutes y dans $\mathcal{D}$ et soit u donné par l'équation (11) Nous posons

$$Q^M(z) \equiv (z - u(x, y))^2 - (x - u(x, y))^2.$$

En particulier

$$Q^M(y) = (y - u)^2 - (x - u)^2 = - \|x - y\|^2 < 0.$$

De même à tout $x \in \dot{\mathcal{D}}$, $\text{Im } x \neq 0$ nous pouvons associer l'hyperboloïde admissible limite passant par x de centre $v(x) \in \mathcal{S}$; nous le noterons

$$Q^P(z) \equiv (z - v(x))^2 - (x - v(x))^2 = 0$$

avec bien entendu $(x - v(x))^2 > 0$.

D'après la définition de $\mathcal{D}$ comme complémentaire des hyperboloïdes admissibles nous voyons que $Q^p(y)$, $y \in \mathcal{D}$ est certainement différent d'un nombre réel positif ou nul. En effet, si on avait $Q^p(y) = a^2 \geq 0$ il en résulterait que y appartiendrait à l'hyperboloïde admissible $Q^p - a^2 = 0$.

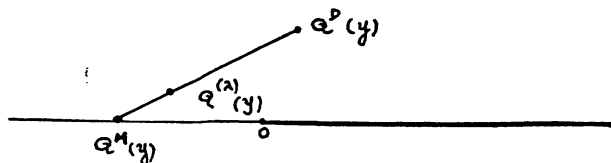


FIG. 5. — L'extrapolation de Q^p à Q^m .

Nous pouvons maintenant décrire la transformation du cycle d'intégration au-dessus de chaque point $x \in \mathcal{D}$. Commençons par les $x \in \mathring{\mathcal{D}}$, $\text{Im } x \neq 0$. Nous définissons en ce point une interpolation linéaire des hyperboloïdes de Q^m à Q^p qui se traduit par une transformation linéaire sur les lieux des centres :

$$Q^{(\lambda)}(z) = \lambda Q^p(z) + (1 - \lambda) Q^m(z) = 0; \quad \lambda \text{ réel } 0 \leq \lambda \leq 1.$$

Pour $x \in \mathring{\mathcal{D}}$, $\text{Im } x = 0$, nous n'avons qu'un seul hyperboloïde Q^m mais une famille d'hyperboloïdes finis qui sont tous les hyperboloïdes admissibles passant par x . Si $Q^{p\alpha}$ désigne l'un d'eux ($Q^{p\alpha} \in \mathcal{A}$) nous prenons encore l'interpolation linéaire définie comme ci-dessus.

En vertu des remarques faites plus haut comme $Q^p(y)$ et $Q^{p\alpha}(y)$ sont des nombres complexes toujours différents d'un nombre réel positif ou nul et que $Q^m(y) < 0$ les $Q^{(\lambda)}(y)$ ne peuvent jamais s'annuler pour $0 \leq \lambda \leq 1$. Autrement dit la déformation du cycle d'intégration est telle que le dénominateur dans l'intégrand de la formule (12) ne s'annule jamais (voir fig. 5). Comme la forme à intégrer est fermée et que f décroît suffisamment vite à l'infini, la formule (12) est remplacée par une formule analogue mais où le cycle d'intégration Γ se présente de la façon suivante :

$$\Gamma \equiv \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \quad \left\{ \begin{array}{l} \Gamma_1 : x \in \mathring{\mathcal{D}}, \text{Im } x \neq 0; u = u(x) \text{ est le centre de l'hyperboloïde admissible limite passant par } x. \\ \Gamma_2 : x \in \mathring{\mathcal{D}}, \text{Im } x = 0; \text{ c'est-à-dire } x \in \mathcal{R}^+ \cup \mathcal{R}^- \text{ décrit deux fois; } u \in \mathcal{S} \text{ est tel que l'hyperboloïde } (z-u)^2 - (x-u^2) = 0 \text{ soit admissible.} \end{array} \right. \quad (13)$$

Le passage du premier cycle d'intégration au second est parallèle au passage de la formule de Martinelli à celle de Cauchy-Fantappiè. Comme dans le cas traité plus haut (section III), une partie de la frontière présente des points anguleux. Pour assurer la continuité du cycle d'intégration nous avons remarqué que lorsqu'un point complexe de la frontière de $\mathcal{D}$ tend vers un point frontière réel, la famille des hyperboloïdes Q^p qui lui sont attachés a un bord constitué par l'ensemble des hyperboloïdes limites passant par le point frontière réel. Il faut donc compléter cette famille en choisissant une autre famille qui a le même bord et nous avons pris l'ensemble des hyperboloïdes admissibles passant par x . Nous aurions pu encore obtenir ce résultat par un passage à la limite approprié comme l'illustre l'exemple des tubes de la section II. Ceci dit, la transformation continue définie par l'interpolation linéaire applique le cycle final sur le cycle initial; ceci nous assure que l'intégrale reste inchangée.

La formule (13) est incomplète car elle ne décrit pas les orientations qui sont ici importantes.

Sur Γ_1 l'orientation est celle décrite plus haut. Sur Γ_2 , x varie sur $\mathcal{R}^+ \cup \mathcal{R}^- \subset \mathbf{R}^4$ orienté; u varie sur $\mathcal{S}$. En faisant un passage à la limite sur les parties imaginaires de x on peut transporter l'orientation sur la partie complexe de $\hat{\mathcal{D}}$ en orientation sur $\mathcal{S}$. Pour cela on remplace au-dessus d'un point réel la frontière de $\mathcal{D}$ (voir fig. 4) par une approximation. L'orientation par la normale extérieure est alors transportée sur $\mathcal{S}$ par une transformation qui du point de vue infinitésimal peut être assimilée à une projection conique. Comme on peut tendre vers un x réel de deux directions opposées, on obtient sur la partie de $\mathcal{S}$ sur laquelle u varie à x fixé ($x \in \mathcal{R}^+ \cup \mathcal{R}^-$) deux orientations qui se trouvent être identiques (ceci étant dû à la dimension impaire de $\hat{\mathcal{D}}$), et constantes pour x variant dans une composante connexe de $\mathcal{R}^+ \cup \mathcal{R}^-$ c'est-à-dire dans $\mathcal{R}^+$ ou dans $\mathcal{R}^-$. La figure 6 tente de représenter cette situation.

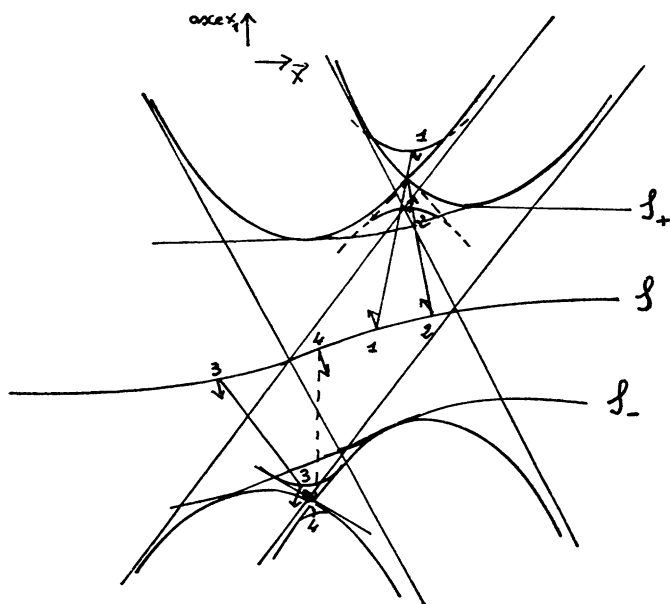
Orientons $\mathcal{S}$ par sa normale telle que la projection sur l'axe x_1 soit positive, alors selon qu'on tend vers un point $x \in \mathcal{R}^+$ (respectivement $\mathcal{R}^-$) l'orientation à prendre pour $\mathcal{S}$ est l'orientation positive (respectivement négative). Bien entendu, $\mathcal{R}^+$ et $\mathcal{R}^-$ sont décrits à deux reprises une fois avec

comme valeur au bord $f^+(x) = \lim_{\substack{\eta \in \mathcal{L} \\ \eta \rightarrow 0}} f(x + i\eta)$ et l'autre fois avec

$f^-(x) = \lim_{\substack{\eta \in \mathcal{L} \\ \eta \rightarrow 0}} f(x - i\eta)$ et le raisonnement précédent montre qu'on doit

ajouter les deux résultats.

Observons encore que l'intégrale sur Γ_1 , c'est-à-dire sur la partie complexe

FIG. 6. — Définition de l'orientation de Γ dans la formule (13).

de la frontière, est nulle et pour des raisons analogues à celles qu'on a rencontrées dans la section II. En effet, nous avons montré que par chaque point de Γ_1 passe une variété analytique de dimension complexe 1 contenue dans $\dot{\mathcal{D}}$ (ce sont les hyperboles décrites plus haut dans le calcul de l'enveloppe de $\mathcal{A}$). Il en résulte que la forme à intégrer est nulle en répétant *mutatis mutandis* un raisonnement fait plus haut. Nous pouvons donc écrire la formule finale :

$$f(y) = \frac{3}{\pi^4} \int_{\Gamma_1} \frac{\varepsilon(x)(f^+(x) + f^-(x)) \left(\sum_{1 \leq k \leq 4} (-1)^{k-1} (x_k + y_k - 2u_k) \bigwedge_{i \neq k} du_i \right) \wedge \left(\bigwedge_{1 \leq i \leq 4} dx_i \right)}{((x-u)^2 - (y-u)^2)^4} \quad (14)$$

avec

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{R}^+ \\ -1 & \text{si } x \in \mathbb{R}^- \end{cases}$$

Dans la formule (14), il est encore possible d'effectuer une intégration ; on remarque en effet que pour tout x fixé dans $\mathcal{R}^+ \cup \mathcal{R}^-$, la forme différentielle

$$\omega_x = \frac{\sum_{1 \leq k \leq 4} (-1)^{k-1} (x_k + y_k - 2u_k) \bigwedge_{\substack{1 \leq i \leq 4 \\ i \neq k}} du_i}{[(x-u)^2 - (y-u)^2]^4} \text{ est fermée.}$$

ω_x admet une primitive φ_x , bien définie dans le domaine d'intégration de u , c'est-à-dire :

$$\Gamma_{2,x} = \{ u \in \mathcal{S}; [(z-u)^2 - (x-u)^2 = 0] \in \mathcal{A} \}.$$

On peut prendre par exemple :

$$\varphi_x = \frac{1}{48} \frac{\sum_{ijkl} \varepsilon_{ijkl} (x_i + y_i - 2u_i) (x^j - y^j)^{-1} du_k \wedge du_l}{[(x-u)^2 - (y-u)^2]^3}$$

où ε_{ijkl} est le tenseur complètement antisymétrique tel que $\varepsilon_{1234} = +1$.

En appliquant le théorème de Stokes à la formule (14), il vient alors :

$$f(y) = \frac{1}{16\pi^4} \int_{\partial \Gamma_2} \frac{\varepsilon(x)(f^+(x) + f^-(x)) \left[\sum_{ijkl} \varepsilon_{ijkl} (x_i + y_i - 2u_i) (x^j - y^j)^{-1} du_k \wedge du_l \right] \wedge \left(\bigwedge_{1 \leq i \leq 4} dx_i \right)}{[(x-u)^2 - (y-u)^2]^2} \quad (15)$$

dans cette formule, le cycle d'intégration $\partial \Gamma_2$ est défini par :

$$\{ (x, u); x \in \mathcal{R}^+ \cup \mathcal{R}^-; u \in \mathcal{S}; [(z-u)^2 - (x-u)^2 = 0] \in \mathcal{A} \},$$

c'est-à-dire que seule la famille $\mathcal{A}$ des hyperboloïdes admissibles *limites* intervient dans le noyau de cette représentation intégrale.

Précisons l'orientation des régions d'intégration : pour $x \in \mathcal{R}^+ \cup \mathcal{R}^-$, on a l'orientation naturelle de $\mathbf{R}^4$; pour $u \in \Gamma_{2,x}$, l'orientation est donnée par la normale à $\mathcal{S}$, de première composante positive; enfin l'orientation de $\partial \Gamma_2$ se déduit de celle de Γ_2 par les conventions habituelles.

Une particularité des formules (14) et (15) est que la fonction analytique intervient dans l'intégrand par la *somme*, et non la différence, de ses valeurs au bord, contrairement à ce qui a lieu dans la formule de Jost-Lehmann-

Dyson. On montrera cependant au paragraphe 3 qu'après quelques transformations, la formule de Jost-Lehmann-Dyson redonne la formule (14). Auparavant nous allons illustrer le rôle des noyaux des formules (14) et (15) en étudiant un exemple extrêmement simple, comme nous l'avons fait pour l'étude des fonctions holomorphes dans les tubes de Lorentz.

2. — Un exemple.

Nous considérons pour simplifier un exemple à deux variables, au lieu de quatre. Dans $\mathbb{C}^2$, on introduit la forme quadratique de Lorentz :

$$z^2 = z_1^2 - z_2^2 \quad (z \equiv (z_1, z_2)).$$

On considère alors le domaine de Dyson associé à la région

$$\mathcal{R} = \{x_1, x_2 \text{ réels}; -a < x_1 < a\};$$

on a :

$$\mathcal{R}^\pm = \{x_1, x_2 \text{ réels}; \pm (x_1 \mp a) \geq 0\};$$

$$\mathcal{S} = \{x_1, x_2 \text{ réels}; x_1 = 0\}.$$

$\mathcal{A}$ est la famille des hyperboles dites admissibles d'équation

$$x_1^2 - (x_2 - u_2)^2 - \rho^2 = 0 \quad \text{où} \quad \rho \geq a.$$

$\dot{\mathcal{A}}$ est la sous-famille de $\mathcal{A}$ obtenue en se restreignant à $\rho = a$.

On obtient aisément les analogues (14') et (15') des formules (14) et (15) (seuls les coefficients numériques changent) :

$$f(y) = - \frac{1}{2\pi^2} \int_{\substack{x_1^2 \geq a^2 \\ (u_1 - x_2)^2 \leq x_1^2 - a^2}} \frac{\varepsilon(x_1) (f^+(x) + f^-(x)) (x_1 + y_1) du_2 \wedge dx_1 \wedge dx_2}{[x_1^2 - y_1^2 - \{(x_2 - u_2)^2 - (y_2 - u_2)^2\}]^2} \quad (14')$$

$$f(y) = - \frac{1}{\pi^2} \int_{x_1^2 \geq a^2} \frac{\varepsilon(x_1) (f^+(x) + f^-(x)) (x_1 + y_1) \sqrt{x_1^2 - a^2} dx_1 \wedge dx_2}{[x_1^2 - y_1^2 - (x_2 - y_2)^2]^2 + 4(x_2 - y_2)^2 (a^2 - y_1^2)} \quad (15')$$

Pour obtenir (15'), on a remarqué que le cycle d'intégration $\partial \Gamma_{2,x}$ de la formule (15) se réduit à $\{u_2 = x_2 \pm \sqrt{x_1^2 - a^2}\}$, et effectué cette intégration triviale; le symbole $\sqrt{x_1^2 - a^2}$ désigne la détermination positive du radical;

$$\varepsilon(x_1) = +1 \quad \text{si} \quad x_1 > 0, \quad \text{et} \quad -1 \quad \text{si} \quad x_1 < 0.$$

Nous nous proposons de calculer explicitement l'intégrale qui figure au second membre de (15') en utilisant des méthodes élémentaires, essentiellement le théorème des résidus. $f^\pm(x)$ sont supposés être les valeurs au bord d'une fonction holomorphe dans $\mathbb{D}$ et décroissant suffisamment vite à l'infini de manière que nous puissions le cas échéant fermer des contours à l'infini. Nous ferons le calcul pour y réel $\in \mathbb{D}$ et nous supposons de plus $y_1 \neq 0$, restriction qui sera levée par la suite. Remarquons qu'à x_2 réel fixé, f est une fonction analytique de x_1 dans un plan complexe coupé le long de l'axe réel de $-\infty$ à $-a$ et de $+a$ à $+\infty$. $f^\pm$ sont alors les limites de f sur l'axe réel quand on y tend respectivement par les demi-plans supérieur ou inférieur. En considérant dans ce même plan coupé la fonction $\sqrt{x_1^2 - a^2}$ qui prend au-dessus de l'axe $x_1 > a$ sa détermination positive, nous voyons qu'il est possible de transformer l'intégrale précédente en l'intégrale de contour

$$I = -\frac{1}{\pi^2} \int_{x_1 \in \mathbb{C}, x_2 \in \mathbb{R}'} \frac{f(x)(x_1 + y_1) \sqrt{x_1^2 - a^2} dx_1 \wedge dx_2}{[x_1^2 - y_1^2 - (x_2 - y_2)^2]^2 + 4(x_2 - y_2)^2(a^2 - y_1^2)}$$

où le contour C est représenté sur la figure 7.

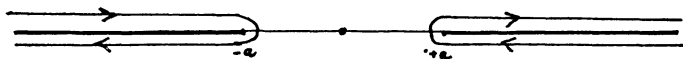


FIG. 7. — Le contour C de la formule de Dyson à deux dimensions.

Le dénominateur de l'intégrand s'annule en quatre points; il va nous être possible d'appliquer le théorème des résidus en fermant le contour C à l'infini. Comme de plus l'intégrand est régulier pour $x_2 = y_2$ l'intégrale est égale à la limite de celles qu'on obtient en enlevant au domaine une partie $C \times [y_2 - \varepsilon < x_2 < y_2 + \varepsilon]$. Dans ces conditions les quatre racines du dénominateur ne peuvent venir à se confondre. Désignons par $\omega(x_2 - y_2)$ la racine qui pour $x_2 - y_2 > 0$ est telle que $\text{Re } \omega > 0$ $\text{Im } \omega > 0$ et prolongeons-la dans le demi-plan $\text{Im } (x_2 - y_2) > 0$ privé du segment $x_2 - y_2 \neq i\lambda$, $0 \leq \lambda \leq a - \sqrt{a^2 - y_1^2}$, de telle sorte que pour $x_2 - y_2$ réel on ait

$$\omega(x_2 - y_2) = -\bar{\omega}(y_2 - x_2).$$

Les quatre racines du dénominateur sont alors ω , $-\omega$, $\bar{\omega}$ et $-\bar{\omega}$ avec

$$\begin{cases} \omega^2(x_2 - y_2) = y_1^2 + (x_2 - y_2)^2 + 2i(x_2 - y_2) \sqrt{a^2 - y_1^2} \\ 0 < \sqrt{a^2 - y_1^2} < a \end{cases}$$

La formule des résidus donne alors

$$I = -\frac{2i}{\pi} \lim_{\substack{\varepsilon > 0 \\ \varepsilon \rightarrow 0}} \int_{t \in \mathbb{R}_1 - [-\varepsilon < t < \varepsilon]} \frac{[f(\omega, y_2 + t) + f(\omega, y_2 - t)](\omega + y_1)(t + i\sqrt{a^2 - y_1^2})}{8i\omega t \sqrt{a^2 - y_1^2}} dt \\ + \frac{[f(-\omega, y_2 + t) + f(-\omega, y_2 - t)](-\omega + y_1)(t + i\sqrt{a^2 - y_1^2})}{-8i\omega t \sqrt{a^2 - y_1^2}} dt$$

Pour procéder à cette dernière intégration il est plus commode de choisir ω comme variable d'intégration et de définir la fonction

$$z(\omega) = t + i\sqrt{a^2 - y_1^2} = \sqrt{\omega^2 - a^2}$$

dans le plan complexe de ω coupé le long de l'axe réel de $-\infty$ à $-a$ et de $+a$ à $+\infty$ de telle façon que $\text{Im } z > 0$ pour ω réel compris entre $-a$ et $+a$. La fonction

$$f(\omega, y_2 - i\sqrt{a^2 - y_1^2} + \sqrt{\omega^2 - a^2})$$

est alors une fonction analytique de ω dans un domaine de ce plan coupé qui contient la région non hachurée de la figure 8 et qui est limité par la courbe

$$\text{Im } z = \frac{\sqrt{a^2 - y_1^2}}{2}.$$

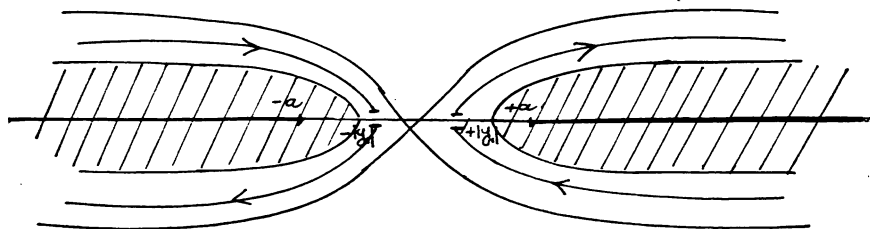
Il en est de même pour les trois autres fonctions qui interviennent dans la dernière expression de I .

Enfin

$$d\omega = \frac{t + i\sqrt{a^2 - y_1^2}}{\omega} d\omega$$

pourvu qu'on oriente le contour C' qui est l'image dans le plan de la variable ω du contour t réel comme l'indique la figure 8. Les termes se regroupent alors pour donner :

$$I = -\frac{1}{4\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{C'_\varepsilon} \frac{(\omega + y_1)[f(\omega, y_2 - i\sqrt{a^2 - y_1^2} + \sqrt{\omega^2 - a^2}) + f(\omega, y_2 + i\sqrt{a^2 - y_1^2} - \sqrt{\omega^2 - a^2})]}{(\sqrt{\omega^2 - a^2} - i\sqrt{a^2 - y_1^2}) \sqrt{a^2 - y_1^2}} d\omega$$

FIG. 8. — Le contour C' dans le plan de la variable ω .

où C'_ϵ désigne le contour C' privé d'un petit arc symétrique de longueur 2ϵ aux points $\omega = \pm y_1$. En somme l'intégrale que nous avons à faire est une intégrale de partie principale car le dénominateur s'annule aux points $\omega = \pm y_1$. On évalue cette intégrale à nouveau par la méthode des résidus en fermant le contour à l'infini. Il vient

$$I = -\frac{1}{4\pi} \cdot \pi i \left[(y_1 + |y_1|) \frac{2f(|y_1|, y_2)}{-i|y_1|} + (y_1 - |y_1|) \frac{2f(-|y_1|, y_2)}{i|y_1|} \right]$$

dans les deux cas $y_1 > 0$ et $y_1 < 0$ nous trouvons

$$I = f(y_1, y_2)$$

ce qu'il fallait prouver. Le cas y_1 nul doit être traité séparément si on utilise la méthode précédente mais l'intégrale étant continue on l'obtient directement par passage à la limite. Ceci achève la vérification que nous nous propositions puisque l'intégrale définit visiblement une fonction holomorphe dans $\mathcal{D}$ et que nous venons de montrer que cette fonction se confond avec f dans la partie réelle de $\mathcal{D}$.

3. — Relation avec la formule de Jost-Lehmann-Dyson.

Nous avons déjà souligné dans le cas de fonctions analytiques dans des tubes de Lorentz (cf. remarque *i*) à propos de la formule (8) qu'une autre méthode, utilisant la transformation de Fourier, permettait de retrouver la même représentation intégrale.

Dans le cas des domaines $\mathcal{D}$ étudiés dans ce chapitre, la méthode de Jost-Lehmann-Dyson fournit un autre exemple où la transformation de Fourier, utilisée avec ingéniosité, est un outil commode ⁽³⁾. Ici, nous nous proposons,

⁽³⁾ D'autres exemples de domaines où le même type de méthode s'applique avec succès ont été traités par V. Glaser (communication privée).

après avoir rappelé cette méthode, d'obtenir à nouveau la formule (14) en transformant un peu les formules que l'on trouve dans les articles cités aux références (4) et (5).

Pour toute fonction $f(y)$ analytique dans $\mathcal{D}$, à croissance lente à l'infini, possédant des valeurs au bord tempérées :

$$f^{\pm}(x) = \lim_{\eta \in \mathcal{L}, \eta \rightarrow 0} f(x \pm i\eta),$$

les transformées de Fourier de $f^{\pm}(x)$ sont des distributions tempérées ayant respectivement pour supports les cônes $\tilde{\mathcal{L}}$ et $-\tilde{\mathcal{L}}$ (Rappelons que

$$\mathcal{L} = \{ p \in \mathbf{R}^4; p_1^2 - \sum_{i=2}^4 p_i^2 > 0; p_1 > 0 \}.$$

Les conditions de continuité des valeurs au bord et de décroissance à l'infini que nous avons imposées à $f(y)$ dans tout ce qui précède se traduisent par le fait que $\tilde{f}^{\pm}(p)$ sont en outre des fonctions continues, sommables sur $\mathbf{R}^4$ ⁽⁴⁾.

Le problème traité par Jost, Lehmann et Dyson concerne en fait la différence des valeurs au bord : $C(x) = f^{+}(x) - f^{-}(x)$, et se pose de la manière suivante :

Trouver une représentation intégrale des fonctions continues et suffisamment décroissantes, $C(x)$ ($x \in \mathbf{R}^4$) telles que :

a) $C(x) = 0$ pour $x \in \mathcal{R}$ (défini comme ci-dessus).

b) $\tilde{C}(p) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int e^{-ip \cdot x} C(x) d^4x$ s'annule sur $\{ p \in \mathbf{R}^4; p^2 < 0 \}$.

En adjoignant 2 variables supplémentaires r_1, r_2 à l'espace des x et 2 variables S_1, S_2 à l'espace des p , on fait correspondre de façon biunivoque à toute fonction $C(x)$ vérifiant a) et b) une fonction $G(x, r_1, r_2)$ possédant les propriétés suivantes :

i) $G(x, 0, 0) = C(x)$.

⁽⁴⁾ La correspondance entre les propriétés des fonctions analytiques dans un tube de Lorentz et celles des transformées de Fourier de leurs valeurs au bord est étudiée du point de vue des distributions dans le livre de Streater et Wightman (réf. [9]) et dans le cours de H. Epstein (réf. [10]).

ii) $G(x, r_1, r_2)$ est une solution de l'équation des ondes dans $\mathbf{R}^6$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \sum_{i=2}^4 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - \frac{\partial^2}{\partial r_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial r_2^2} \right) G \equiv \square_6 G = 0$$

iii) $G(x, r_1, r_2)$ ne dépend de r_1 et r_2 que par l'intermédiaire de $r = \sqrt{r_1^2 + r_2^2}$ ⁽⁵⁾ (nous l'écrivons dans la suite $G(x, r)$).

La correspondance entre $\tilde{C}(p)$ et

$$\tilde{G}(p, s_1, s_2) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{-i[p_1 x_1 - \sum_{i=2}^4 p_i x_i - r_1 s_1 - r_2 s_2]} G(x, r_1, r_2) d^4 x dr_1 dr_2$$

est par définition la suivante :

$$\tilde{G}(p, s_1, s_2) = \frac{1}{\pi} \delta(p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 - p_4^2 - s_1^2 - s_2^2) \tilde{C}(p);$$

d'où l'on déduit pour les transformées de Fourier la relation correspondante :

$$G(x, r) = \lim_{\substack{\eta \in \mathbb{C} \\ \eta \rightarrow 0}} \frac{1}{2\pi^3} \int_{x' \in \mathbf{R}^4} C(x') \left\{ \frac{1}{[(x + i\eta - x')^2 - r^2]^2} + \frac{1}{[(x - i\eta - x')^2 - r^2]^2} \right\} d^4 x' \quad (16)$$

Les propriétés (i) (ii) (iii) de $G(x, r)$ sont immédiates à vérifier.

Soit Σ une surface du genre espace de $\mathbf{R}^6$ (c'est-à-dire telle que

$$(x' - x)^2 - (r' - r)^2 < 0; \forall (x, r), (x', r') \in \Sigma),$$

orientée par sa normale dans le cône futur $\mathcal{L}_+$. Les conditions de régularité imposées à $C(x)$ impliquent que sur Σ , $G(x, r)$ soit continue et sommable ainsi que ses dérivées du premier ordre. On peut alors écrire que $G(x, r)$ est la solution d'un problème de Cauchy ordinaire, exprimée en fonction des données de Cauchy sur Σ , c'est-à-dire :

$$G(x, r) = \frac{1}{4i\pi^3} \lim_{\substack{\eta \in \mathbb{C} \\ \eta \rightarrow 0}} \int_{(x', r') \in \Sigma} \sum_{1 \leq i \leq 4} \left\{ G(x', r'), \frac{\partial}{\partial x'_i} \left(\frac{1}{[(x' - x + i\eta)^2 - (r - r')^2]^2} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{[(x' - x - i\eta)^2 - (r - r')^2]^2} \right) \right\} (-1)^{i-1} \left(\bigwedge_{\substack{1 \leq j \leq 4 \\ j \neq i}} dx'_j \right) \wedge dr'_1 \wedge dr_2 \quad (17)$$

⁽⁵⁾ L'adjonction de deux variables r_1, r_2 , au lieu d'une ne se justifie que par le souci d'éviter l'intervention des fonctions spéciales dans les fonctions de Green de l'équation des ondes.

dans cette formule, la notation

$$\left\{ F, \frac{\partial}{\partial x_i} G \right\} \text{ signifie } F \frac{\partial G}{\partial x} - G \frac{\partial F}{\partial x_i}.$$

En faisant $r = 0$ dans la formule (17), on obtient une représentation de $C(x)$ qui ne fait qu'exprimer la propriété b).

D'autre part, d'après le théorème du « double cône » (cf. [3]) pour les solutions de l'équation des ondes, il résulte de la propriété a) de $C(x)$ que $G(x, r)$ s'annule dans une région $\mathcal{R}'$ obtenue de la manière suivante :

Dans le 4-plan $r = 0$, on considère les couples de points (x', x'') tels que $x' - x''$ soit dans $\mathcal{L}((x' - x'')^2 > 0, x'_1 - x''_1 > 0)$ et on construit dans $\mathbf{R}^6$ le double cône d'axe (x', x'') , c'est-à-dire l'ensemble des (x, r) tels que :

$$\begin{aligned} (x' - x)^2 - r^2 &> 0 & x'_1 - x_1 &> 0 \\ (x - x'')^2 - r^2 &> 0 & x_1 - x''_1 &> 0; \end{aligned}$$

par définition, $\mathcal{R}'$ est l'union de tous les doubles cônes d'axe (x', x'') tels que x' et x'' soient dans $\mathcal{R}$.

On choisit alors la surface d'intégration Σ de façon telle que la propriété a) de $C(x)$ soit automatiquement exprimée par la formule (17). Pour cela on remarque que la distribution :

$$\lim_{\eta \in \mathbb{L}, \eta \rightarrow 0} \left[\frac{1}{[(x + i\eta)^2 - r^2]^2} - \frac{1}{[(x - i\eta)^2 - r^2]^2} \right]$$

a son support sur le cône d'équation $x^2 - r^2 = 0$ (c'est à un facteur près $\epsilon(x_1) \delta'(x^2 - r^2)$). Si pour tout $x \in \mathcal{R}$, le cône de sommet x d'équation $(x' - x)^2 - r'^2 = 0$, coupe Σ suivant un ensemble situé entièrement dans $\mathcal{R}'$, il résulte des remarques précédentes que le deuxième membre de l'équation (17) s'annule pour $x \in \mathcal{R}$ et $r = 0$.

Un raisonnement géométrique montre qu'il en est ainsi pourvu que Σ contienne l'ensemble des points (x', r') tels que $x' \in \mathcal{S}$ et que l'hyperboloïde $H_{x', r'}$ du plan $r = 0$ d'équation $(x - x')^2 = r'^2$ appartienne à la famille $\mathcal{A}$ des hyperboloïdes admissibles limites (définie au début du chapitre). Le choix le plus naturel et que nous adopterons dans la suite est :

$$\Sigma = \{ (x', r'); x' \in \mathcal{S} \}.$$

Compte tenu de l'annulation de $G(x, r)$ sur $\Sigma \cap \mathcal{R}'$, nous obtenons donc

la représentation générale suivante des fonctions possédant les propriétés a) et b) :

$$C(x) = \frac{1}{4i\pi^3} \lim_{\substack{\eta \rightarrow 0 \\ \eta \in \mathbb{L}}} \int_{\substack{x' \in \mathbb{S} \\ \{r' : H_{x'r'} \in \mathcal{A}\}}} \sum_{1 \leq i \leq 4} \left\{ G(x', r'), \frac{\partial}{\partial x'_i} \left[\frac{1}{[(x' - x + i\eta)^2 - r'^2]^2} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{[(x' - x - i\eta)^2 - r'^2]^2} \right] \right\} (-1)^{i-1} \left(\bigwedge_{\substack{1 \leq j \leq 4 \\ j \neq i}} dx'_j \right) \wedge dr'_1 \wedge dr'_2 \quad (18)$$

la fonction de poids pouvant être recalculée en fonction de $C(x)$ à l'aide de la formule (16). Les formules (16) et (18) sont, aux notations près, les formules (31) et (48) de l'article de Dyson (réf. [5]).

Nous considérons maintenant la fonction analytique définie par l'intégrale suivante :

$$I(y) = \frac{i}{4\pi^3} \int_{\substack{x' \in \mathbb{S} \\ \{r' : H_{x'r'} \in \mathcal{A}\}}} \sum_{1 \leq i \leq 4} \left\{ G(x', r'), \frac{\partial}{\partial x'_i} \left(\frac{1}{(x' - y)^2 - r'^2} \right) \right\} \\ (-1)^{i-1} \left(\bigwedge_{\substack{1 \leq j \leq 4 \\ j \neq i}} dx'_j \right) \wedge dr'_1 \wedge dr'_2 \quad (19)$$

Il est clair que $I(y)$ est analytique dans le domaine de Dyson $\mathcal{D}$ puisque seuls des hyperboloïdes admissibles (c'est-à-dire de la famille $\mathcal{A}$) apparaissent au dénominateur de l'intégrand. En particulier $I(y)$ est analytique dans les tubes $\mathcal{T}_{\mathbb{L}}$ et $\mathcal{T}_{-\mathbb{L}}$. On vérifierait — à l'aide des propriétés de régularité et de décroissance de $G(x, r)$, elles-mêmes conséquences de celles de $f(y)$, données au départ — que le comportement de $I(y)$ dans $\mathcal{T}_{\pm\mathbb{L}}$ à l'infini implique que les transformées de Fourier $\tilde{I}^+(p)$, $\tilde{I}^-(p)$ des valeurs au bord

$$I^{\pm}(x) = \lim_{\eta \in \pm\mathbb{L}, \eta \rightarrow 0} I(x + i\eta)$$

sont continues et de supports respectifs $\bar{\mathbb{L}}$ et $-\mathbb{L}$.

Comme $I^+(x) - I^-(x) = C(x)$ (d'après la formule (18)) et que la décomposition de $\tilde{C}(p)$ en deux fonctions continues de supports $\mathbb{L}$ et $-\mathbb{L}$ est unique, il en résulte que $I^+(x) = f^+(x)$ et $I^-(x) = f^-(x)$.

Par suite $I(y)$ s'identifie avec la fonction analytique $f(y)$ donnée initialement.

Pour obtenir la représentation intégrale cherchée de $f(y)$, il nous reste maintenant à porter dans la formule (18) l'expression de $G(x, r)$ tirée de la

formule (16). Nous allons modifier un peu cette expression en remarquant que :

$$\lim_{\substack{\eta \in \mathbb{C} \\ \eta \rightarrow 0}} \frac{1}{2\pi^3} \int f^\pm(x'') \frac{1}{((x'' - x' \pm i\eta)^2 - r'^2)^2} \bigwedge_{1 \leq i \leq 4} dx'_i = 0$$

grâce au fait que $f^+(x)$ et $f^-(x)$ sont respectivement analytiques dans les tubes $\mathcal{G}_\mathbb{C}$ et $\mathcal{G}_{-\mathbb{C}}$, et s'annulent à l'infini. Par suite on peut, en ajoutant des termes nuls, réécrire la formule (16) de la manière suivante :

$$G(x', r) = \frac{1}{2\pi^3} \lim_{\substack{\eta \in \mathbb{C} \\ \eta \rightarrow 0}} \int (f^+(x'') + f^-(x'')) \left[\frac{1}{[(x'' - x' - i\eta)^2 - r'^2]^2} - \frac{1}{[(x'' - x' + i\eta)^2 - r'^2]^2} \right] \bigwedge_{1 \leq i \leq 4} dx'_i$$

Portant cette expression dans la formule (18), il vient :

$$f(y) = \lim_{\substack{y \in \mathbb{D} \\ \eta \in \mathbb{C} \\ \eta \rightarrow 0}} \frac{i}{8\pi^5} \int \sum_{1 \leq i \leq 4} \left[(f^+(x) + f^-(x)) \left\{ \frac{1}{[(x - u - i\eta)^2 - \sigma]^2} - \frac{1}{[(x - u + i\eta)^2 - \sigma]^2} \right\} \frac{\partial}{\partial u^i} \frac{1}{[(u - y)^2 - \sigma]^2} \right] d\sigma \wedge \left((-1)^{i-1} \bigwedge_{\substack{1 \leq j \leq 4 \\ j \neq i}} du_j \right) \wedge \left(\bigwedge_{1 \leq k \leq 4} dx_k \right) \quad (20)$$

où l'intégrale est prise sur $x \in \mathcal{R}^+ \cup \mathcal{R}^- \subset \mathbb{R}^4$ orienté, $u \in \mathcal{S}$ orienté, et pour tout $u : \sigma \geq K^2(u) > 0$ (c'est-à-dire tel que $H_{u,\sigma} \in \mathcal{A}$).

La formule (20) nous conduit pratiquement au résultat. Il suffit d'effectuer l'intégration sur σ ce que nous ferons en utilisant les formules de la théorie des distributions, c'est-à-dire en passant à la limite $\eta \rightarrow 0$. En effet

$$\begin{aligned} & \lim_{\substack{\eta \rightarrow 0 \\ \eta \in \mathbb{C} \\ \sigma \geq K^2(u) > 0}} \int_{u \in \mathcal{S}} \left\{ \frac{1}{[(x - u - i\eta)^2 - \sigma]^2} - \frac{1}{[(x - u + i\eta)^2 - \sigma]^2} \right\} \frac{\partial}{\partial u^i} \frac{1}{[(u - y)^2 - \sigma]^2} \\ & \quad \times d\sigma \wedge \left((-1)^{i-1} \bigwedge_{\substack{1 \leq j \leq 4 \\ j \neq i}} du_j \right) \\ & = 2i\pi \int_{\substack{u \in \mathcal{S} \\ \sigma \geq K^2(u) > 0}} \sum_{1 \leq i \leq 4} \left\{ \varepsilon(u_1 - x_1) \delta'((u - x)^2 - \sigma), \frac{\partial}{\partial u^i} \frac{1}{[(u - y)^2 - \sigma]^2} \right\} \\ & \quad \times d\sigma \wedge \left((-1)^{i-1} \bigwedge_{\substack{1 \leq j \leq 4 \\ j \neq i}} du_j \right) \end{aligned}$$

lorsque $u \in \mathcal{S}$, $x \in \mathcal{R}^+ \cup \mathcal{R}^-$, $u_1 - x_1$ ne peut s'annuler et $\varepsilon(u_1 - x_1)$ est $-\varepsilon(x)$ où $\varepsilon(x) = 1$ si $x \in \mathcal{R}^+$ et -1 si $x \in \mathcal{R}^-$. L'intégrale ci-dessus est donc encore égale à

$$2i\pi\varepsilon(x) \int_{\substack{u \in \mathcal{S} \\ \sigma \geq K^*(u) > 0}} \sum_{1 \leq i \leq 4} \left\{ \left(\frac{4(u_i - y_i)}{((u - y)^2 - \sigma)^3} \delta'((u - x)^2 - \sigma) + \frac{2(u_i - x_i) \delta''((u - x)^2 - \sigma)}{((u - y)^2 - \sigma)^2} \right) \times d\sigma \left((-1)^{i-1} \bigwedge_{1 \leq j \leq 4, j \neq i} du_j \right) \right\}$$

soit encore

$$24i\pi\varepsilon(x) \int_{\substack{u \in \mathcal{S} \\ \sigma \geq K^*(u) > 0}} \sum_{1 \leq i \leq 4} \left\{ \frac{(2u_i - y_i - x_i)}{((u - y)^2 - \sigma)^4} \delta((u - x)^2 - \sigma) d\sigma \wedge \left((-1)^{i-1} \bigwedge_{1 \leq j \leq 4, j \neq i} du_j \right) \right\}$$

En portant cette expression dans la formule (20) nous trouvons après intégration sur σ

$$f(y) = \frac{3}{\pi^4} \int_{y \in \mathcal{D}} \sum_{\substack{x \in \mathcal{R}^+ \cup \mathcal{R}^- \\ u \in \mathcal{S} \\ (x-u)^2 \geq K^*(u)}} \sum_{1 \leq i \leq 4} \left\{ \frac{\varepsilon(x) (f^+(x) + f^-(x))}{((u - y)^2 - (u - x)^2)^4} (x_i + y_i - 2u_i) (-1)^{i-1} \left(\bigwedge_{1 \leq j \leq 4, j \neq i} du_j \right) \right\} \wedge \left(\bigwedge_{1 \leq k \leq 4} dx_k \right)$$

C'est bien la formule (14) avec le cycle Γ que nous avons choisi.

Ceci achève la démonstration de l'équivalence de la méthode de Dyson avec celle des représentations que nous avons exposée sous les conditions très restrictives de valeurs au bord imposées à la fonction f . Cependant on devrait pouvoir remplacer fonction continue par distribution tempérée avec des restrictions sur le comportement à l'infini.

Le Docteur Raymond Stora nous a instruits et guidés. Qu'il en soit remercié ici.

RÉFÉRENCES

- [1] LERAY, Le calcul différentiel et intégral sur une variété analytique complexe (problème de Cauchy, III). *Bulletin de la Société Mathématique de France*, t. 87, fascicule II, 1959.
- [2] F. NORGUET, Problèmes sur les formes différentielles et les courants. *Annales de l'Institut Fourier*, t. 11, 1961, p. 1.
- [3] A. S. WIGHTMAN, *Analytic functions of several complex variables. Relations de dispersion et particules élémentaires* Hermann, 1960.

- [4] R. JOST et LEHMANN, Integral Darstellung kausaler Kommutatoren. *Nuovo Cimento*, t. 5, 1957, p. 1598.
- [5] F. J. DYSON, Integral representations of causal commutators. *Phys. Rev.*, t. 110, 1958, p. 1460.
- [6] H. EPSTEIN, Generalization of the « edge of wedge » theorem. *Journ. of Math. Phys.*, t. 1, 1960, p. 524.
- [7] J. BROS, AL. MESSIAH et R. STORA, A problem of analytic completion related to the Jost-Lehmann-Dyson formula. *Journ. of Math. Phys.*, t. 2, 1961, p. 639.
- [8] E. T. WHITTAKER et G. N. WATSON, *A course of modern analysis*, Cambridge, 1952.
- [9] R. F. STREATER et A. S. WIGHTMAN, *P. C. T., Spin and Statistics and all that* (Benjamin, New York).
- [10] H. EPSTEIN, Cours donné en 1965 au Brandeis Physics Summer Institute.

(Manuscrit reçu le 28 février 1966).
