

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

G. RIDEAU

Les produits tensoriels des représentations unitaires irréductibles du groupe de Poincaré

Annales de l'I. H. P., section A, tome 3, n° 3-4 (1965), p. 339-362

http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1965__3_3-4_339_0

© Gauthier-Villars, 1965, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section A » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Les produits tensoriels des représentations unitaires irréductibles du groupe de Poincaré

par

G. RIDEAU
(Institut Henri Poincaré, Paris).

INTRODUCTION

Nous nous proposons ici de traiter le problème de la réduction du produit tensoriel de deux représentations unitaires irréductibles du groupe de Poincaré. Nous ne nous intéresserons qu'aux représentations dites physiques : masse réelle, positive ou nulle, $p_0 > 0$, spin fini.

Ce problème n'est pas seulement d'ordre mathématique. Il se pose, de façon essentielle, dans la théorie relativiste des systèmes de particules en interaction, où doivent même être considérés des produits tensoriels d'un nombre quelconque de représentations (cf. [7]). Mais les produits tensoriels de deux représentations sont un cas particulier très important en pratique, notamment en théorie de la diffusion où les états initial et final sont, généralement, des états à deux particules. Une connaissance détaillée de la décomposition du produit tensoriel en composantes irréductibles apporte alors des informations sur la structure de la matrice de diffusion [3].

Les résultats que nous présenterons ici ne sont pas inédits et ont déjà été obtenus en grande partie par d'autres auteurs [1] [2] [3], soit par des méthodes assez différentes [1] [2], soit par des méthodes apparentées [3]. Notre objectif essentiel est une présentation systématique et aussi simple que possible. Nous essayons d'y atteindre par un recours constant à la théorie des représentations induites de Mackey [5] d'une part; d'autre part,

les représentations irréductibles elles-mêmes, et la réduction de leur produit tensoriel, n'étant définies qu'à une équivalence près, nous profitons de la liberté ainsi accordée pour recourir aux formes de représentations et aux systèmes de coordonnées qui nous paraissent les plus propres au calcul. On rencontrera donc ici des objets bien connus sous un aspect quelque peu inhabituel, qui est étroitement lié à des décompositions des éléments de $SL(2, \mathbb{C})$ résultant naturellement de son caractère de groupe semi-simple [6]. Nous espérons ainsi rendre plus évidente la structure des produits tensoriels et plus claire la signification mathématique des coefficients de Clebsch-Gordan.

Dans un premier paragraphe nous indiquerons quelle forme nous adoptons pour les représentations unitaires irréductibles, physiquement significatives, du groupe de Poincaré. Les deux autres paragraphes seront consacrés à l'application du théorème d'induction-réduction dû à Mackey [5] au produit tensoriel de deux représentations de masse non nulle, puis aux produits tensoriels d'une représentation de masse non nulle par une représentation de masse nulle, spin fini et de deux représentations de masse nulle, spin fini.

§ 1. — LES REPRÉSENTATIONS UNITAIRES IRRÉDUCTIBLES DU GROUPE DE POINCARÉ

1. Les représentations de masse non nulle.

Tout élément $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}$ de $SL(2, \mathbb{C})$ peut s'écrire univoquement :

$$(1) \quad \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u & v \\ -\bar{v} & \bar{u} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ z & \lambda^{-1} \end{vmatrix}, \quad |u|^2 + |v|^2 = 1, \quad \lambda > 0.$$

où :

$$(2) \quad \lambda = (|\beta|^2 + |\delta|^2)^{-1/2}, \\ z = \frac{\alpha\bar{\beta} + \gamma\bar{\delta}}{(|\beta|^2 + |\delta|^2)^{1/2}}, \quad u = \frac{\bar{\delta}}{(|\beta|^2 + |\delta|^2)^{1/2}}, \quad v = \frac{\beta}{(|\beta|^2 + |\delta|^2)^{1/2}}.$$

Les points de la nappe supérieure Ω_+ de l'hyperboloïde Ω d'équation :

$$(3) \quad p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 = M^2$$

peuvent alors être mis en correspondance avec les matrices $\begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ z & \lambda^{-1} \end{vmatrix}$, selon les formules :

$$(4) \quad p_0 = \frac{M}{2} (\lambda^2 + \lambda^{-2} + |z|^2), \quad p_3 = \frac{M}{2} (\lambda^2 - \lambda^{-2} + |z|^2), \quad p_2 + ip_1 = -M \frac{z}{\lambda}$$

exprimant que le point (p_0, p_1, p_2, p_3) est le transformé du sommet P_0 de Ω_+ par la transformation du groupe de Lorentz homogène correspondant à l'élément $\begin{vmatrix} \lambda^{-1} & 0 \\ -z & \lambda \end{vmatrix}$ de $SL(2, C)$. $\varphi_j(\lambda, z)$ désignant $(2s+1)$ fonctions telles que :

$$\sum_{j=-s}^{+s} \int \frac{d\lambda dz}{\lambda^3} |\varphi_j(\lambda, z)|^2 < \infty,$$

la représentation unitaire irréductible décrivant une particule de masse M et de spin s dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ ainsi défini, que nous noterons $U_{+,M}^s$ est alors donnée par :

$$(5) \quad U_{+,M}^s \left(a, \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \right) \varphi_j(\lambda, z) = e^{ia \cdot P} \sum_{j'=-s}^s D_{jj'}^s(\tilde{u}_1) \varphi_{j'}(\lambda_1, z_1)$$

où a désigne la translation quadridimensionnelle, P le point de Ω_+ correspondant à $\begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ z & \lambda^{-1} \end{vmatrix}$. Les $D_{jj'}^s(\tilde{u}_1)$ sont les éléments de matrice de la représentation de spin s de $SU(2)$ relatifs à la matrice unitaire $\tilde{u}_1$. Quant à $\tilde{u}_1$, λ_1, z_1 , ils sont obtenus en appliquant la décomposition (1) à la matrice :

$$\begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ z & \lambda^{-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix},$$

soit :

$$(6) \quad \begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ z & \lambda^{-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \tilde{u}_1 \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 \\ z & \lambda_1^{-1} \end{vmatrix}.$$

Dans la forme habituelle des représentations de masse non nulle, on fait correspondre à un point P de l'hyperboloïde la transformation pure de Lorentz transformant P_0 en P , c'est-à-dire une matrice hermitique de $SL(2, C)$. On se convainc aisément de l'équivalence avec la forme que nous avons prise qui nous paraît souvent faciliter les calculs, les matrices $\begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ z & \lambda^{-1} \end{vmatrix}$ formant elles-mêmes un groupe, alors que le produit de deux matrices hermitiques n'est pas nécessairement hermitique.

2. Les représentations de masse nulle, spin fini.

Nous désignerons par C_+ la nappe postérieure du cône de lumière, et par P_0 le point de C_+ ayant pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}, 0, 0, -\frac{1}{2}\right)$. Le sous-groupe de $SL(2, C)$ laissant P_0 invariant est formé des matrices de la forme $\begin{vmatrix} e^{i\varphi} & \zeta \\ 0 & e^{-i\varphi} \end{vmatrix}$, homomorphe au groupe euclidien à deux dimensions. Pour $\delta \neq 0$, ce qui n'exclut qu'un ensemble de mesure nulle, nous pouvons écrire :

$$(7) \quad \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{i\varphi} & \zeta \\ 0 & e^{-i\varphi} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ z & \lambda^{-1} \end{vmatrix}, \quad \lambda > 0$$

avec :

$$(8) \quad \lambda = |\delta|^{-1}, \quad z = \gamma \frac{\bar{\delta}}{|\delta|}, \quad e^{i\varphi} = \frac{\bar{\delta}}{|\delta|}, \quad \zeta = \frac{\beta}{|\delta|}.$$

L'existence de cette décomposition nous facilitera par la suite la réduction des produits tensoriels où intervient une représentation de masse nulle car elle permettra une application presque textuelle des méthodes et calculs utilisés dans la réduction des produits tensoriels de deux représentations de masse non nulle. Par ailleurs et comme plus haut, nous pouvons mettre en correspondance les points P de C_+ avec les matrices $\begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ z & \lambda^{-1} \end{vmatrix}$, les coordonnées de P étant données par :

$$(9) \quad p_0 = \frac{1}{2} (|\lambda|^2 + |z|^2), \quad p_3 = \frac{1}{2} (|z|^2 - \lambda^{-2}), \quad p_2 + ip_1 = -\frac{z}{\lambda}.$$

Nous réaliserons la représentation de masse nulle et spin s , notée $U_{+,0}^s$, dans l'espace de Hilbert des fonctions $\varphi(\lambda, z)$ telles que :

$$\int |\varphi(\lambda, z)|^2 \frac{d\lambda dz}{\lambda^3} < \infty,$$

sous la forme :

$$(10) \quad U_{+,0}^s \left(a, \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \right) \varphi(\lambda, z) = e^{ia \cdot P} \left(\frac{z\beta + \delta\lambda^{-1}}{|z\beta + \delta\lambda^{-1}|} \right)^s \varphi(\lambda_1, z_1)$$

où a est une translation quadridimensionnelle; P le point correspondant à la matrice $\begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ z & \lambda^{-1} \end{vmatrix}$. Quant à λ_1, z_1 ils s'obtiennent en appliquant la

décomposition (7) à la matrice $\begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ z & \lambda^{-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}$:

$$(11) \quad \begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ z & \lambda^{-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{i\varphi_1} & \zeta_1 \\ 0 & e^{-i\varphi_1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 \\ z_1 & \lambda_1^{-1} \end{vmatrix}.$$

§ 2. — LA RÉDUCTION DU PRODUIT TENSORIEL DE DEUX REPRÉSENTATIONS DE MASSE NON NULLE

1. Détermination des doubles classes et désintégration de la mesure.

M_1 et M_2 , s_1 et s_2 désigneront les masses et spins respectifs des deux représentations dont nous formons le produit tensoriel. Ω_1^+ et Ω_2^+ seront les nappes supérieures des hyperboloïdes d'équations :

$$(12) \quad p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 = M_1^2, \quad p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 = M_2^2$$

dont les sommets seront les points P_1^0 et P_2^0 .

Aux points de Ω_1^+ seront attachées les matrices $\begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 \\ z_1 & \lambda_1^{-1} \end{vmatrix}$ et aux points de Ω_2^+ , les matrices $\begin{vmatrix} \lambda_2 & 0 \\ z_2 & \lambda_2^{-1} \end{vmatrix}$. Le produit tensoriel $U_{+,M_1}^{s_1} \otimes U_{+,M_2}^{s_2}$ sera alors réalisé dans l'espace de Hilbert des fonctions :

$$\{ \varphi_{i_1, i_2}(\lambda_1, z_1; \lambda_2, z_2), \quad -s_1 \leq i_1 \leq s_1, \quad -s_2 \leq i_2 \leq s_2 \}$$

telles que :

$$(13) \quad \sum_{i_1=-s_1}^{s_1} \sum_{i_2=-s_2}^{s_2} \int \frac{d\lambda_1 dz_1}{\lambda_1^3} \frac{d\lambda_2 dz_2}{\lambda_2^3} | \varphi_{i_1, i_2}(\lambda_1 z_1; \lambda_2 z_2) |^2 < \infty.$$

Et l'on aura :

$$(14) \quad U_{+,M_1}^{s_1} \otimes U_{+,M_2}^{s_2} \left(a, \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \right) \varphi_{i_1, i_2}(\lambda_1 z_1; \lambda_2 z_2) = e^{ia \cdot (P_1 + P_2)} \sum_{j_1=-s_1}^{s_1} \sum_{j_2=-s_2}^{s_2} D_{i_1 j_1}^{s_1}(\tilde{u}'_1) D_{i_2 j_2}^{s_2}(\tilde{u}'_2) \varphi_{j_1 j_2}(\lambda'_1, z'_1, \lambda'_2, z'_2)$$

où les matrices unitaires $\tilde{u}'_1, \tilde{u}'_2$ et les $\lambda'_1, z'_1, \lambda'_2, z'_2$ se calculent en appliquant la décomposition (1) aux matrices :

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 \\ z_1 & \lambda_1^{-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} \lambda_2 & 0 \\ z_2 & \lambda_2^{-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}$$

respectivement.

Pour appliquer le théorème d'induction-réduction ⁽¹⁾ de Mackey, nous devons d'abord déterminer les doubles classes :

$$(a, \text{SU}(2)) \times (a, \text{SU}(2)) \backslash \mathcal{F} \times \mathcal{F} / \Delta$$

où $\mathcal{F} \times \mathcal{F}$ est le produit cartésien du groupe de Poincaré par lui-même, et Δ son sous-groupe diagonal, isomorphe à $\mathcal{F}$. Il revient au même de déterminer les orbites de $\mathcal{F}$ dans $\Omega_1^+ \times \Omega_2^+$, identiques aux orbites de $\text{SL}(2, \mathbb{C})$, puisque les translations quadridimensionnelles agissent identiquement dans $\Omega_1^+ \times \Omega_2^+$. Soit donc (P_1, P_2) un point quelconque de $\Omega_1^+ \times \Omega_2^+$. L'orbite $(P_1, P_2)\Delta$ qui contient ce point contient tous les points transformés de (P_1, P_2) par la même transformation du groupe de Lorentz homogène. Il existe toujours une telle transformation transformant P_1 en P_1^0 et P_2 en P_2' . Ensuite, par une rotation qui laisse P_1^0 invariant, nous pourrons appliquer la partie spatiale de P_2' sur la partie positive de l'axe Ox_3 . Par conséquent, nous pourrons prendre comme point représentatif de l'orbite $(P_1, P_2)\Delta$ le point (P_1^0, Π) où Π est un point de Ω_2^+ tel que Π_1 et Π_2 soient nuls et Π_3 positif. Il est facile de voir que la classe $(P_1, P_2)\Delta$ ne contient qu'un seul point répondant à ces conditions. En définitive une double classe est univoquement déterminée par un couple de matrices :

$$(15) \quad \left(\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & \Lambda^{-1} \end{vmatrix} \right), \quad \Lambda > 1.$$

A deux valeurs différentes de Λ correspondent des doubles classes distinctes et toutes les doubles classes sont ainsi caractérisées.

Cette paramétrisation des doubles classes va conduire à une nouvelle paramétrisation de $\Omega_1^+ \times \Omega_2^+$. En effet, on vérifie immédiatement que le sous-groupe de $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ laissant invariant le point représentatif d'une double classe est le groupe des rotations autour de Ox_3 , c'est-à-dire que

⁽¹⁾ Pour ce théorème, cf. [5]. On trouvera un exposé simplifié du théorème, sous sa forme générale dans : Séminaire sur la théorie des représentations, Institut H. Poincaré, 1963-1964 et dans [3] dans le cas particulier qui nous intéresse.

l'ensemble des points de la double classe est identique au quotient de $SL(2, \mathbb{C})$ par le groupe des matrices unitaires diagonales. En prenant pour élément représentatif de chaque classe de ce quotient la matrice :

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+|z|^2}} & -\frac{\bar{z}}{\sqrt{1+|z|^2}} \\ \frac{z}{\sqrt{1+|z|^2}} & \frac{1}{\sqrt{1+|z|^2}} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} L & 0 \\ \zeta & L^{-1} \end{vmatrix}, L > 0$$

nous pourrons donc faire correspondre à chaque point d'une double classe le couple de matrices :

$$(16) \quad \left(\begin{vmatrix} L & 0 \\ \zeta & L^{-1} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & \Lambda^{-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+|z|^2}} & -\frac{\bar{z}}{\sqrt{1+|z|^2}} \\ \frac{z}{\sqrt{1+|z|^2}} & \frac{1}{\sqrt{1+|z|^2}} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} L & 0 \\ \zeta & L^{-1} \end{vmatrix} \right)$$

ce qui définit un nouveau système de paramètres sur $\Omega_1^+ \times \Omega_2^+$. Pour alléger l'écriture, nous désignerons par $\omega(z, \Lambda)$ et $K(z, \Lambda)$ les matrices obtenues en appliquant la décomposition (1) à :

$$\begin{vmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & \Lambda^{-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+|z|^2}} & -\frac{\bar{z}}{\sqrt{1+|z|^2}} \\ \frac{z}{\sqrt{1+|z|^2}} & \frac{1}{\sqrt{1+|z|^2}} \end{vmatrix},$$

$\omega(z, \Lambda)$ étant unitaire. Le passage de $\lambda_1, z_1, \lambda_2, z_2$ aux nouveaux paramètres Λ, z, L, ζ est alors contenu dans les égalités matricielles :

$$(17) \quad \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 \\ z_1 & \lambda_1^{-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} L & 0 \\ \zeta & L^{-1} \end{vmatrix}, \quad K(z, \Lambda) \begin{vmatrix} L & 0 \\ \zeta & L^{-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda_2 & 0 \\ z_2 & \lambda_2^{-1} \end{vmatrix}.$$

La mesure $d\mu = \frac{d\lambda_1 dz_1}{\lambda_1^3} \frac{d\lambda_2 dz_2}{\lambda_2^3}$ devient dans le passage aux nouvelles variables :

$$(18) \quad d\mu = 2 \frac{(1 - \Lambda^4)^2}{\Lambda^5} \frac{1}{(1 + |z|^2)^2} \frac{1}{L^3} d\Lambda dz dL d\zeta$$

qui donne sous forme explicite, la désintégration de la mesure liée aux doubles classes, puisque la mesure $\frac{dz dL d\zeta}{L^3(1 + |z|^2)^2}$ n'est rien d'autre que la

mesure invariante par $\mathcal{F}$ définie sur chaque double classe, considérée comme espace homogène.

La caractérisation simple des doubles classes contenue dans (15) est, en fait, mal adaptée à la suite de notre travail. En effet, le point $P_1^0 + \Pi$ (où Π est le point de Ω_2^+ correspondant à la matrice $\begin{vmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & \Lambda^{-1} \end{vmatrix}$) doit jouer ultérieurement le rôle de point stationnaire des représentations irréductibles, composantes du produit tensoriel. Pour les faire apparaître directement sous la forme (5), il faudrait évidemment que $P_1^0 + \Pi$ soit situé sur l'axe Ox_0 , ce qui n'est généralement pas le cas. Mais nous pouvons remarquer que les doubles classes sont, aussi bien, caractérisées par le couple de matrices :

$$\left(\begin{vmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu^{-1} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \Lambda\mu & 0 \\ 0 & \Lambda^{-1}\mu^{-1} \end{vmatrix} \right)$$

et nous choisirons μ pour que le point (Π_1, Π_2) correspondant soit tel que $\Pi_1 + \Pi_2$ est porté par Ox_0 . Le calcul donne alors :

$$(19) \quad \mu^4 = \frac{M_1 + M_2\Lambda^{-2}}{M_1 + M_2\Lambda^2}$$

la valeur de $(\Pi_1 + \Pi_2)_0$ étant :

$$(20) \quad M = (\Pi_1 + \Pi_2)_0 = [M_1^2 + M_2^2 + M_1M_2(\Lambda^2 + \Lambda^{-2})]^{1/2}.$$

Avec cette nouvelle caractérisation des doubles classes, le passage de $\lambda_1, z_1, \lambda_2, z_2$ aux Λ, z, L, ζ se fait par :

$$(21) \quad \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 \\ z_1 & \lambda_1^{-1} \end{vmatrix} = K(z, \mu) \begin{vmatrix} L & 0 \\ \zeta & L^{-1} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \lambda_2 & 0 \\ z_2 & \lambda_2^{-1} \end{vmatrix} = K(z, \Lambda\mu) \begin{vmatrix} L & 0 \\ \zeta & L^{-1} \end{vmatrix}$$

la mesure subordonnée à la décomposition en doubles classes étant toujours donnée par (18).

La signification géométrique de ce changement de coordonnées est simple. Soient en effet, Π'_1 et Π'_2 deux points de Ω_1^+ et Ω_2^+ respectivement, tels que $\Pi'_1 + \Pi'_2 = \Pi_1 + \Pi_2 = P^0$. Il existe une rotation (définie à une rotation autour de Ox_3 près) qui transforme Π_1 en Π'_1 et Π_2 en Π'_2 . Si θ et φ sont les coordonnées sphériques du transformé du vecteur unitaire de Ox_3 par cette rotation, nous pouvons alors la caractériser par le nombre complexe $z = i \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi}$. Les points de P_1 , de paramètres λ_1, z_1 et P_2 , de

paramètres λ_2, z_2 , sont ensuite obtenus en faisant agir sur Π'_1 et Π'_2 la transformation de $SL(2, C)$ qui applique P^0 sur le point $P = P_1 + P_2$ de la nappe Ω^+ de l'hyperboloïde de sommet P^0 .

2. Réduction du produit tensoriel.

Nous poserons :

$$(22) \quad f_{i_1 i_2}(\Lambda, z, L, \zeta) = \varphi_{i_1 i_2}(\lambda_1 z_1; \lambda_2 z_2)$$

où au second membre, $\lambda_1 z_1$ et $\lambda_2 z_2$ sont les expressions de ces paramètres en fonction de Λ, z, L, ζ qui résultent de (21). Ce produit tensoriel sera ainsi réalisé dans l'espace de Hilbert des fonctions $f_{i_1 i_2}(\Lambda, z, L, \zeta)$ telles que :

$$\sum_{i_1=-s_1}^{+s_1} \sum_{i_2=-s_2}^{+s_2} \int |f_{i_1 i_2}(\Lambda, z, L, \zeta)|^2 \frac{(1 - \Lambda^4)^2}{\Lambda^5} \frac{1}{(1 + |z|^2)^2} \frac{1}{L^3} d\Lambda dz dL d\zeta < \infty.$$

Pour transcrire, dans la nouvelle paramétrisation de $\Omega_1^+ \times \Omega_2^+$, la formule (14), nous devons exprimer en fonction de Λ, z, L, ζ les matrices :

$$\begin{vmatrix} \lambda'_1 & 0 \\ z'_1 & \lambda'^{-1}_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \lambda'_2 & 0 \\ z'_2 & \lambda'^{-1}_2 \end{vmatrix}, \tilde{u}'_1 \text{ et } \tilde{u}'_2.$$

Pour cela, nous poserons :

$$(23) \quad \begin{vmatrix} L & 0 \\ \zeta & L^{-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \tilde{u} \begin{vmatrix} L_1 & 0 \\ \zeta_1 & L_1^{-1} \end{vmatrix}$$

où $\tilde{u}$ est la matrice unitaire $\begin{vmatrix} u & v \\ -\bar{v} & \bar{u} \end{vmatrix}$. Si l'on remarque que :

$$(24) \quad \omega(z, 1)\tilde{u} = \begin{vmatrix} \frac{u + \bar{v}z}{|\bar{u} + vz|} & 0 \\ 0 & \frac{\bar{u} + vz}{|\bar{u} + vz|} \end{vmatrix} \omega\left(\frac{uz - \bar{v}}{vz + \bar{u}}, 1\right)$$

il viendra :

$$(25) \quad \begin{vmatrix} \lambda'_1 & 0 \\ z'_1 & \lambda'^{-1}_1 \end{vmatrix} = K\left(\frac{uz - \bar{v}}{vz + \bar{u}}, \mu\right) \begin{vmatrix} L_1 & 0 \\ \zeta_1 & L_1^{-1} \end{vmatrix}$$

$$(26) \quad \begin{vmatrix} \lambda'_2 & 0 \\ z'_2 & \lambda'^{-1}_2 \end{vmatrix} = K\left(\frac{uz - \bar{v}}{vz + \bar{u}}, \Lambda\mu\right) \begin{vmatrix} L_1 & 0 \\ \zeta_1 & L_1 \end{vmatrix}$$

où nous avons tenu compte de :

$$(27) \quad K(z, \mu) = \omega(z, \mu)^{-1} \begin{vmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu^{-1} \end{vmatrix} \omega(z, 1)$$

qui résulte de la définition même de $K(z, \mu)$.

(25) et (26) expriment qu'au point de $\Omega_1^+ \times \Omega_2^+$ correspondant au couple de matrices :

$$\left(\begin{vmatrix} \lambda'_1 & 0 \\ z'_1 & \lambda'^{-1}_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \lambda'_2 & 0 \\ z'_2 & \lambda'^{-1}_2 \end{vmatrix} \right)$$

nous pouvons associer les valeurs $\Lambda, \frac{uz - \bar{v}}{vz + \bar{u}}, L_1, \zeta_1$ des nouveaux paramètres. Le même calcul qui nous conduit à (25) et (26) permet aussi d'obtenir :

$$(28) \quad \tilde{u}'_1 = \omega(z, \mu)^{-1} \begin{vmatrix} \frac{u + \bar{v}z}{|\bar{u} + vz|} & 0 \\ 0 & \frac{\bar{u} + vz}{|\bar{u} + vz|} \end{vmatrix} \omega\left(\frac{uz - \bar{v}}{vz + \bar{u}}, \mu\right).$$

$$(29) \quad \tilde{u}'_2 = \omega(z, \Lambda\mu)^{-1} \begin{vmatrix} \frac{u + \bar{v}z}{|\bar{u} + vz|} & 0 \\ 0 & \frac{\bar{u} + vz}{|\bar{u} + vz|} \end{vmatrix} \omega\left(\frac{uz - \bar{v}}{vz + \bar{u}}, \Lambda\mu\right).$$

Considérons enfin le point $(P_1 + P_2)$. P_1 et P_2 sont les transformés de P_1^0 et P_2^0 par les transformations de Lorentz correspondant aux éléments :

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 \\ z_1 & \lambda_1^{-1} \end{vmatrix}^{-1} \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} \lambda_2 & 0 \\ z_2 & \lambda_2^{-1} \end{vmatrix}^{-1}$$

de $SL(2, C)$ respectivement, ce que nous écrivons :

$$P_1 = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 \\ z_1 & \lambda_1^{-1} \end{vmatrix}^{-1} P_1^0, \quad P_2 = \begin{vmatrix} \lambda_2 & 0 \\ z_2 & \lambda_2^{-1} \end{vmatrix}^{-1} P_2^0$$

soit encore, d'après (27) :

$$P_1 = \begin{vmatrix} L & 0 \\ \zeta & L^{-1} \end{vmatrix}^{-1} \omega(z, 1)^{-1} \begin{vmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu^{-1} \end{vmatrix}^{-1} \omega(z, \mu) P_1^0$$

$$P_2 = \begin{vmatrix} L & 0 \\ \zeta & L^{-1} \end{vmatrix}^{-1} \omega(z, 1)^{-1} \begin{vmatrix} \Lambda\mu & 0 \\ 0 & \Lambda^{-1}\mu^{-1} \end{vmatrix}^{-1} \omega(z, \Lambda\mu) P_2^0.$$

Par conséquent :

$$P_1 + P_2 = \begin{vmatrix} L & 0 \\ \zeta & L^{-1} \end{vmatrix}^{-1} \omega(z, 1)^{-1} \Pi_1 + \begin{vmatrix} L & 0 \\ \zeta & L^{-1} \end{vmatrix}^{-1} \omega(z, 1)^{-1} \Pi_2 = \begin{vmatrix} L & 0 \\ \zeta & L^{-1} \end{vmatrix}^{-1} (\Pi_1 + \Pi_2)$$

puisque, d'après le choix de μ , $\Pi_1 + \Pi_2$ est invariant par rotation. Nous poserons $P^0 = \Pi_1 + \Pi_2$ et $P = \begin{vmatrix} L & 0 \\ \zeta & L^{-1} \end{vmatrix}^{-1} P^0$. Le produit tensoriel des représentations $U_{+M_1}^{s_1}$ et $U_{+M_2}^{s_2}$ s'écrit maintenant :

$$U_{+M_1}^{s_1} \otimes U_{+M_2}^{s_2} \left(a, \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \right) f_{i_1 i_2}(\Lambda, z, L, \zeta) = e^{ia \cdot P} \sum_{j_1=-s_1}^{+s_1} \sum_{j_2=-s_2}^{+s_2} D_{i_1 j_1}^{s_1}(\tilde{u}_1') D_{i_2 j_2}^{s_2}(\tilde{u}_2') f_{j_1 j_2} \left(\Lambda, \frac{uz - \bar{v}}{vz + u}, L_1, \zeta_1 \right)$$

où $\tilde{u}_1'$ et $\tilde{u}_2'$ sont données par (28) et (29). Si nous posons :

$$(30) \quad F_{i_1 i_2}(\Lambda, z, L, \zeta) = \sum_{j_1=-s_1}^{s_1} \sum_{j_2=-s_2}^{s_2} D_{i_1 j_1}^{s_1}(\omega(z, \mu)) D_{i_2 j_2}^{s_2}(\omega(z, \Lambda \mu)) f_{j_1 j_2}(\Lambda, z, L, \zeta)$$

on obtiendra :

$$(31) \quad U_{+M_1}^{s_1} \otimes U_{+M_2}^{s_2} \left(a, \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \right) F_{i_1 i_2}(\Lambda z, L, \zeta) = e^{iaP} \left(\frac{\bar{u} + vz}{|u + vz|} \right)^{2i_1 + 2i_2} \times F_{i_1 i_2} \left(\Lambda, \frac{uz - \bar{v}}{vz + u}, L_1, \zeta_1 \right).$$

On notera qu'avec le choix qui a été fait des représentatifs des doubles classes, l'application pure et simple du théorème d'induction-réduction de Mackey nous aurait directement conduit à la formule (31). Mais la voie que nous avons suivie, et qui n'est rien d'autre qu'une redémonstration du théorème, aura eu l'intérêt de fournir une détermination explicite de la transformation unitaire qui permet de passer de (14) à (31).

Il nous reste maintenant à poursuivre la décomposition de (31) pour faire apparaître finalement les représentations unitaires irréductibles. Nous introduirons d'abord :

$$(32) \quad \sigma = i_1 + i_2, \quad \tau = i_1 - i_2$$

et nous poserons :

$$\varphi_{\sigma\tau}(\Lambda, z, L, \zeta) = F_{\frac{\sigma+\tau}{2}, \frac{\sigma-\tau}{2}}(\Lambda, z, L, \zeta).$$

Nous remarquerons ensuite que, pour presque tous Λ , L et ζ , nous avons :

$$\int |\varphi_{\sigma\tau}(\Lambda, Z, L, \zeta)|^2 \frac{dz}{(1 + |z|^2)^2} < \infty.$$

Par conséquent, les fonctions $h_m(z)$ étant une base orthonormée relativement à la mesure $\frac{dz}{(1 + |z|^2)^2}$, nous pourrons écrire :

$$(33) \quad \varphi_{\sigma\tau}(\Lambda, z, L, \zeta) = \sum_m \varphi_{\sigma\tau}^m(\Lambda, L, \zeta) h_m(z)$$

la norme carrée de $\varphi_{\sigma\tau}(\Lambda, z, L, \zeta)$ étant alors égale à :

$$\sum_m \int |\varphi_{\sigma\tau}^m(\Lambda, L, \zeta)|^2 \frac{(1 - \Lambda^4)^2}{\Lambda^5} \frac{d\Lambda dL d\zeta}{L^3}$$

choisissons comme famille $h_m(z)$, des fonctions $h_{s,i}^\sigma(z)$ telles que :

$$(34) \quad \left(\frac{\bar{u} + vz}{|\bar{u} + vz|} \right)^{2\sigma} h_{s,i}^\sigma \left(\frac{uz - \bar{v}}{vz + \bar{u}} \right) = \sum_{j=-s}^{+s} h_{s,j}^\sigma(z) D_{ji}^s(\tilde{u})$$

en désignant toujours par $\tilde{u}$ la matrice unitaire $\begin{vmatrix} u & v \\ -\bar{v} & \bar{u} \end{vmatrix}$. Evidemment $|i| \leq s$ et il est facile de montrer que s , entier, ou demi-entier en même temps que σ , doit être tel que $s \geq |\sigma|$. Les fonctions $h_{s,i}^\sigma(z)$ forment une base orthonormée complète car elles réalisent la décomposition en représentations irréductibles de la représentation unitaire de $SU(2)$ dans laquelle la fonction $h(z)$, de carré sommable pour la mesure $\frac{dz}{(1 + |z|^2)^2}$, est transformée en :

$$\left(\frac{\bar{u} + vz}{|\bar{u} + vz|} \right)^{2\sigma} h \left(\frac{uz - \bar{v}}{vz + \bar{u}} \right)$$

par l'opérateur correspondant à l'élément $\tilde{u}$ de $SU(2)$.

(33) s'écrit maintenant :

$$(35) \quad \varphi_{\sigma\tau}(\Lambda, z, L, \zeta) = \sum_{s \geq |\sigma|} \sum_{i=-s}^{+s} \varphi_{\sigma\tau}^{s,i}(\Lambda, L, \zeta) h_{s,i}^\sigma(z).$$

Revenant à (31) et tenant compte de (32), (34) et (35), il vient :

$$(36) \quad U_{+,M_1}^{s_1} \otimes U_{+,M_2}^{s_2} \left(a, \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \right) \varphi_{\sigma\tau}^{s,i}(\Lambda, L, \zeta) = e^{ia \cdot p} \sum_{j=-s}^{+s} D_{ij}^s(\tilde{u}) \varphi_{\sigma\tau}^{s,j}(\Lambda, L_1, \zeta_1)$$

ce qui achève la réduction, car l'on reconnaît au second nombre la représentation unitaire de $\mathfrak{F}$ de spin s et de masse M donnée par (20).

3. Remarques sur les « coefficients » de Clebsch-Gordan.

Désignons par $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ les espaces de Hilbert où sont réalisées les représentations $U_{+,M_1}^{s_1}$ et $U_{+,M_2}^{s_2}$ respectivement. Par ailleurs, soit $\mathcal{H}$ l'espace de Hilbert des fonctions :

$$\varphi_{\sigma\tau}^{s,i}(\Lambda, L, \zeta), \left(-s \leq i \leq s, \quad s \geq |\sigma|, \quad \frac{|\sigma + \tau|}{2} \leq s_1, \quad \frac{|\sigma - \tau|}{2} \leq s_2 \right)$$

telles que :

$$(37) \quad \sum_{|\sigma + \tau| \leq 2s_1, |\sigma - \tau| \leq 2s_2} \sum_{s \geq |\sigma|} \sum_{i=-s}^{+s} \int |\varphi_{\sigma\tau}^{s,i}(\Lambda, L, \zeta)|^2 \frac{(1 - \Lambda^4)}{\Lambda^5} \frac{d\Lambda dL d\zeta}{L^3} < +\infty.$$

Nous venons d'établir l'existence d'une application de $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ sur $\mathcal{H}$ par laquelle est effectuée la décomposition en intégrale hilbertienne de représentations irréductibles de la représentation $U_{+,M_1}^{s_1} \otimes U_{+,M_2}^{s_2}$. Nous désignerons par $\mathcal{U}$ cet isomorphisme.

Il est habituel, en physique, d'introduire dans $\mathcal{H}_1(\mathcal{H}_2)$ une pseudo-base ⁽²⁾ formée par les « vecteurs propres » des opérateurs P_μ et s_3 , troisième composante du spin. Ces vecteurs sont notés $|P_1, i_1\rangle$ et $|P_2, i_2\rangle$ respectivement, P_1 et P_2 étant les points courants de Ω_1^+ et Ω_2^+ , i_1 et i_2 étant entiers ou demi-entiers compris entre $-s_1, +s_1$ et $-s_2, +s_2$ respectivement (cf. [1] [3]). Un quelconque vecteur de $\mathcal{H}_1$, φ^1 , s'écrit alors :

$$(38) \quad \varphi^1 = \sum_{i_1} \int dP_1 \varphi_{i_1}^1(P_1) |P_1, i_1\rangle$$

⁽²⁾ Nous employons cette expression pour souligner que les vecteurs de la base n'appartiennent pas à $\mathcal{H}_1$. La pseudo-base joue pour les éléments de $\mathcal{H}_1$ le même rôle que les fonctions e^{ikx} pour les éléments de $L_2(-\infty, +\infty)$. Pour une définition mathématiquement rigoureuse de la pseudo-base, on se reportera à Gelfand et Vilenkin, Les distributions, IV, chap. I^{er}, § 4.

où les $\varphi_{i_1}^1(P_1)$ sont telles que :

$$\sum_{i_1} \int |\varphi_{i_1}^1(P_1)|^2 d\mu(P_1) < \infty$$

où $d\mu(P_1)$ est la mesure invariante sur Ω_1^+ . Dans $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$, nous sommes alors amenés à introduire la pseudo-base $|P_1, i_1\rangle \otimes |P_2, i_2\rangle$ que nous noterons pour simplifier $|P_1, P_2; i_1, i_2\rangle$. De même dans $\mathcal{H}$, nous pourrions considérer la pseudo-base $|P, i; M, s, \sigma, \tau\rangle$, où P est le point courant de la nappe supérieure de l'hyperboloïde d'équation :

$$P_0^2 - P_1^2 - P_2^2 - P_3^2 = M^2$$

où M est donnée en fonction de Λ par (20).

Les vecteurs $|P, i; M, s; \sigma, \tau\rangle$ sont ainsi les « vecteurs propres » simultanés des opérateurs $P_\mu, P_\mu P^\mu, s_3$ et s . On appelle alors coefficient de Clebsch-Gordan associé à $U_{+,M_1}^{s_1} \otimes U_{+,M_2}^{s_2}$ la quantité :

$$(39) \quad \langle P_1, P_2; i_1, i_2 | U^{-1} | P, i; M, s; \sigma, \tau \rangle \\ = C(P_1, P_2; i_1, i_2 | P, i; M, s; \sigma, \tau).$$

La signification mathématique d'une telle expression est, *a priori*, peu claire, puisque ni $|P, i; M, s; \sigma, \tau\rangle$ ni $|P_1, P_2; i_1, i_2\rangle$ n'appartiennent à $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$. Nous allons voir qu'en fait (39) n'est rien d'autre qu'une distribution définie sur des sous-espaces convenables de $\mathcal{H}$ et de $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$.

Désignons par $\mathcal{D}_{\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2}$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ de la forme :

$$\varphi^{1,2} = \sum_{i_1, i_2} \int \varphi_{i_1, i_2}(P_1, P_2) |P_1, P_2; i_1, i_2\rangle d\mu(P_1) d\mu(P_2)$$

où les $\varphi_{i_1, i_2}(P_1, P_2)$ sont des fonctions infiniment dérivables de P_1, P_2 nulles en dehors d'un compact de $\Omega_1^+ \times \Omega_2^+$.

De même $\mathcal{D}_{\mathcal{H}}$ sera l'ensemble des éléments de $\mathcal{H}$ s'écrivent :

$$\Phi = \sum_{\sigma, \tau, s, i} \int \varphi_{\sigma, \tau}^{s, i}(M, P) |P, i; M, s; \sigma, \tau\rangle d\omega(M) d\mu(P)$$

où $d\omega(M)$ ⁽³⁾ est la mesure $\frac{(1 - \Lambda^4)^2}{\Lambda^5} d\Lambda$ et où les $\varphi_{\sigma, \tau}^{s, i}(M, P)$ sont indéfiniment dérivables à support compact en M et P et ne diffèrent de zéro que pour un nombre fini de valeurs de s . Il est facile de se convaincre que les sous-espaces $\mathcal{D}_{\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2}$ et $\mathcal{D}_{\mathcal{H}}$ sont denses dans $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ et dans $\mathcal{H}$ respec-

⁽³⁾ Par l'absorption dans $\varphi_{\sigma, \tau}^{s, i}(M, P)$ d'une fonction convenable de M , il est toujours possible de se ramener à $d\omega(M) = dM^2$.

tivement. D'après la continuité de $\mathcal{U}^{-1}$, cette application est complètement déterminée si l'on connaît :

$$(40) \quad (\varphi^{1,2}, \mathcal{U}^{-1}\Phi)$$

pour tout $\varphi^{1,2} \in \mathcal{D}\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ et tout $\Phi \in \mathcal{D}\mathcal{H}$. Mais, d'après (39) :

$$(\varphi^{1,2}, \mathcal{U}^{-1}\Phi) = \sum_{i_1, i_2} \sum_{\sigma, \tau, s, i} \int \overline{\varphi_{i_1, i_2}(P_1, P_2)} C(P_1, P_2; i_1, i_2 | P, i; M, s; \sigma, \tau) \times \\ \Phi_{\sigma, \tau}^{s, i}(M, P) d\mu(P_1) d\mu(P_2) d\omega | M) d\mu(P).$$

Autrement dit, au coefficient de Clebsch-Gordan (39) nous pouvons associer une distribution C sur $\overline{\mathcal{D}\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2} \times \mathcal{D}\mathcal{H}$, invariante par les transformations du groupe de Poincaré et, bien évidemment la connaissance de C est équivalente à celle du coefficient de Clebsch-Gordan (39).

Il est facile, à partir des résultats du paragraphe précédent de donner la valeur de C sur tout élément de $\overline{\mathcal{D}\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2} \times \mathcal{D}\mathcal{H}$. Dans nos notations et en tenant compte de (35), (32) et (30), il vient :

$$(41) \quad (\varphi^{1,2}, \mathcal{U}^{-1}\Phi) = C(\overline{\varphi^{1,2}} \times \Phi) = \sum_{i_1, i_2, s, i, \sigma, \tau} \int \overline{\varphi(\Lambda, L, z, \zeta)} D_{i_1, \frac{\sigma-\tau}{2}}^{s_1}(\omega(z, \mu)^{-1}) \\ D_{i_2, \frac{\sigma-\tau}{2}}^{s_2}(\omega(z, \Lambda_\mu)^{-1}) h_{s, i}^\sigma(z) \varphi_{\sigma, \tau}^{s, i}(\Lambda, L, \zeta) \frac{(1 - \Lambda_4)}{\Lambda^5} \frac{dz}{(1 + |z|^2)^2} \frac{dL d\zeta}{L^3} d\Lambda.$$

Compte tenu de ce qui vient d'être dit (41) nous paraît devoir remplacer (39) dans une formulation mathématiquement cohérente de la théorie des coefficients de Clebsch-Gordan.

M. Guillet a obtenu une définition similaire des coefficients de Clebsch-Gordan en tant que distributions sous une forme plus précise, en s'appuyant sur les travaux de Guelfand et Vilenkin, déjà cités [9].

§ 3. — LA RÉDUCTION DU PRODUIT TENSORIEL D'UNE REPRÉSENTATION DE MASSE NON NULLE ET D'UNE REPRÉSENTATION DE MASSE NULLE A SPIN FINI

1. Détermination des doubles classes. Désintégration de la mesure.

Nous désignerons toujours par Ω_1^+ la nappe supérieure de l'hyperboloïde d'équation :

$$P_0^2 - P_1^2 - P_2^2 - P_3^2 = M_1^2$$

et C^+ sera le cône postérieur. Si P_1 et P_2 sont deux points de Ω_1^+ et C^+ respectivement, nous pouvons toujours ramener P_1 au sommet P_1^0 de Ω_1^+ par une transformation de Lorentz qui transforme alors P_2 en P_2' . Une rotation pure, laissant P_1^0 invariant, amènera ensuite P_2' sur la partie négative de Ox_3 . Autrement dit, en tenant compte de la paramétrisation de C^+ indiquée au paragraphe 1, la double classe engendrée par P_1 et P_2 pourra être repérée par le couple de matrices :

$$(42) \quad \left(\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & \Lambda^{-1} \end{vmatrix} \right) \quad \text{avec} \quad \Lambda > 0$$

et toutes les doubles classes sont ainsi obtenues.

Le sous-groupe de $(SL(2, C))$ laissant invariant chaque représentatif des doubles classes est encore le groupe des rotations autour de Ox_3 et l'on pourra paramétrer $\Omega_1^+ \times C^+$ par les couples de matrices :

$$\left(\begin{vmatrix} L & 0 \\ \zeta & L^{-1} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & \Lambda^{-1} \end{vmatrix} \omega(z, 1) \begin{vmatrix} L & 0 \\ \zeta & L^{-1} \end{vmatrix} \right)$$

où $\omega(z, 1)$ est la matrice unitaire introduite précédemment.

Pour les mêmes raisons que plus haut, nous sommes amenés à modifier la caractérisation (42) des doubles classes et à remplacer P_1^0 et Π (Π , point de C^+ correspondant à $\begin{vmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & \Lambda^{-1} \end{vmatrix}$) par des points Π_1 et Π_2 appartenant à la même double classe et tels que $\Pi_1 + \Pi_2$ soit porté par Ox_0 . Dans ces conditions, chaque double classe est repérée par le couple de matrices :

$$(43) \quad \left(\begin{vmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu^{-1} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \Lambda\mu & 0 \\ 0 & \Lambda^{-1}\mu^{-1} \end{vmatrix} \right)$$

avec :

$$(44) \quad \mu^4 = \frac{M_1 \Lambda^2 + 1}{M_1 \Lambda^2}.$$

Les points Π_1 et Π_2 sont dans le plan (x_0, x_3) et l'on a :

$$(45) \quad (\Pi_1 + \Pi_2)_0 = M = \sqrt{M_1(M_1 + \Lambda^{-2})}.$$

Pour simplifier l'écriture, nous noterons $E(z, \mu)$ et $K_E(z, \mu)$ les matrices intervenant lorsque la décomposition (7) est appliquée à :

$$\begin{vmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu^{-1} \end{vmatrix} \omega(z, 1).$$

Les paramètres initiaux (λ_1, z_1) et (λ_2, z_2) s'expriment alors en fonction de Λ, z, L, ζ par :

$$(46) \quad \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 \\ z_1 & \lambda_1^{-1} \end{vmatrix} = K(z, \mu) \begin{vmatrix} L & 0 \\ \zeta & L^{-1} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \lambda_2 & 0 \\ z_2 & \lambda_2^{-1} \end{vmatrix} = K_E(z, \Lambda\mu) \begin{vmatrix} L & 0 \\ \zeta & L^{-1} \end{vmatrix}.$$

La mesure invariante sur $\Omega_1^+ \times C^+$ étant encore $\frac{d\lambda_1 dz_1}{\lambda_1^3} \frac{d\lambda_2 dz_2}{\lambda_2^3}$, sa désintégration ne pose pas de problèmes nouveaux et est donnée par (18) en fonction des nouveaux paramètres.

2. Décomposition du produit tensoriel.

Si $U_{+, \mathbf{M}_1}^{s_1}$ et $U_{+, 0}^n$ désignent les deux représentations dont nous formons le produit, nous avons :

$$(47) \quad U_{+, \mathbf{M}_1}^{s_1} \otimes U_{+, 0}^n \left(a, \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \right) f_i(\lambda_1, z_1; \lambda_2, z_2) \\ = e^{ia(P_1 + P_2)} \sum_{j_1} D_{i_1 j_1}^{s_1}(\tilde{u}'_1) e^{in\varphi'_2} f_{j_1}(\lambda'_1, z'_1; \lambda'_2, z'_2)$$

où P_1 et P_2 sont les points de Ω_1 et C^+ de paramètres (λ_1, z_1) et (λ_2, z_2) respectivement; $\tilde{u}_1, \lambda'_1, z'_1$ proviennent de la décomposition canonique (1) appliquée à $\begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 \\ z_1 & \lambda_1^{-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}$ et $\varphi'_2, \lambda'_2, z'_2$ de la décomposition (7) appliquée à $\begin{vmatrix} \lambda_2 & 0 \\ z_2 & \lambda_2^{-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}$.

Le même raisonnement qu'au paragraphe 2.2, nous montre que $P_1 + P_2$ se déduit de $P^0 = \Pi_1 + \Pi_2$ en lui appliquant $\begin{vmatrix} L & 0 \\ \zeta & L^{-1} \end{vmatrix}^{-1}$. Par ailleurs, posant encore (23), nous avons de nouveau (24), (25) et (28). Enfin, si l'on tient compte de :

$$(48) \quad K_E(z, \mu) = E(z, \mu)^{-1} \begin{vmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu^{-1} \end{vmatrix} \omega(z, 1),$$

il vient :

$$K_E(z, \Lambda\mu) \begin{vmatrix} L & 0 \\ \zeta & L^{-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = E(z, \Lambda\mu)^{-1} \\ \begin{vmatrix} \frac{\bar{v}z + u}{|vz + \bar{u}|} & 0 \\ 0 & \frac{vz + \bar{u}}{|vz + u|} \end{vmatrix} E\left(\frac{uz - \bar{v}}{vz + u}, \Lambda\mu\right) K_E\left(\frac{uz - \bar{v}}{vz + u}, \Lambda\mu\right) \begin{vmatrix} L_1 & 0 \\ \zeta_1 & L_1^{-1} \end{vmatrix}$$

d'où résulte, d'une part :

$$(49) \quad e^{i\varphi'_2} = e^{-i\varphi(z, \Lambda\mu)} \frac{\bar{v}\bar{z} + u}{|\bar{v}\bar{z} + \bar{u}|} \left(i\varphi\left(\frac{uz - \bar{v}}{\bar{v}\bar{z} + \bar{u}}, \Lambda\mu\right) \right)$$

en notant $\varphi(z, \mu)$ l'argument apparaissant dans les termes diagonaux de $E(z, \mu)$, et d'autre part :

$$(50) \quad \begin{vmatrix} \lambda'_2 & 0 \\ z'_2 & \lambda'^{-1}_2 \end{vmatrix} = K_E\left(\frac{uz - \bar{v}}{\bar{v}\bar{z} + \bar{u}}, \Lambda\mu\right) \begin{vmatrix} L_1 & 0 \\ \zeta_1 & L_1^{-1} \end{vmatrix}.$$

Introduisant alors :

$$(51) \quad F_{i_1}(\Lambda, z, L, \zeta) = e^{in\varphi(z, \Lambda\mu)} \sum_{j_1} D_{i_1 j_1}^{s_1}(\omega(z, \mu)) f_{i_1}(\lambda_1, z_1; \lambda_2, z_2)$$

où, au second membre, les $\lambda_1, z_1, \lambda_2, z_2$ doivent être remplacés par leurs expressions en fonction de Λ, z, L, ζ , (47) s'écrit maintenant :

$$(52) \quad U_{+, \mathbf{m}_1}^{s_1} \otimes U_{+, 0}^n \left(a, \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \right) F_{i_1}(\Lambda, z, L, \zeta) \\ = e^{ia \cdot P} \left(\frac{\bar{v}\bar{z} + \bar{u}}{|\bar{v}\bar{z} + \bar{u}|} \right)^{2i_1 - n} F_{i_1} \left(\Lambda, \frac{uz - \bar{v}}{\bar{v}\bar{z} + \bar{u}}, L_1, \zeta_1 \right)$$

où P est le point de Ω^+ , nappe supérieure d'hyperboloïde de sommet $P^0 = \Pi_1 + \Pi_2$, correspondant à la matrice $\begin{vmatrix} L & 0 \\ \zeta & L^{-1} \end{vmatrix}$. (52) ayant la même forme que (31), les raisonnements du paragraphe 2 s'appliquent sans modification et conduisent à la décomposition cherchée. Posant $i_1 - \frac{n}{2} = \sigma$, nous introduirons, de nouveau, les fonctions $h_{s,i}^\sigma(z)$, vérifiant (34); on peut alors écrire :

$$F_{i_1}(\Lambda, z, L, \zeta) = \sum_{s,i} \varphi_\sigma^{s,i}(\Lambda, L, \zeta) h_{s,i}^\sigma(z).$$

En reportant dans (52) et en tenant compte de (34), il vient :

$$U_{+, \mathbf{m}_1}^{s_1} \otimes U_{+, s}^n \left(a, \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \right) \varphi_\sigma^{s,i}(\Lambda, L, \zeta) = e^{ia \cdot P} \sum_{j=-s}^{+s} D_{ij}^s(\tilde{u}) \varphi_\sigma^{s,j}(\Lambda, L_1, \zeta_1)$$

ce qui achève la réduction.

§ 4. — DÉCOMPOSITION DU PRODUIT TENSORIEL DE DEUX REPRÉSENTATIONS DE MASSE NULLE ET DE SPIN FINI

1. Détermination des doubles classes et désintégration de la mesure.

Le produit tensoriel $U_{+,0}^{s_1} \otimes U_{+,0}^{s_2}$ agit dans l'espace de Hilbert des fonctions $\varphi(\lambda_1, z_1; \lambda_2, z_2)$ telles que :

$$(53) \quad \int |\varphi(\lambda_1, z_1; \lambda_2, z_2)|^2 \frac{d\lambda_1 dz_1}{\lambda_1^3} \frac{d\lambda_2 dz_2}{\lambda_2^3} < \infty$$

et l'on a :

$$(54) \quad U_{+,0}^{s_1} \otimes U_{+,0}^{s_2} \left(a, \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \right) \varphi(\lambda_1, z_1; \lambda_2, z_2) \\ = e^{ia \cdot (P_1 + P_2)} \left(\frac{z_1 \beta + \delta \lambda_1^{-1}}{|z_1 \beta + \delta \lambda_1^{-1}|} \right)^{s_1} \left(\frac{z_2 \beta + \delta \lambda_2^{-1}}{|z_2 \beta + \delta \lambda_2^{-1}|} \right)^{s_2} \times \varphi(\lambda'_1 z'_1; \lambda'_2 z'_2)$$

où P_1 et P_2 sont les points correspondants aux paramètres λ_1, z_1 et λ_2, z_2 respectivement, tandis que $\lambda'_1 z'_1$ et $\lambda'_2 z'_2$ s'obtiennent en appliquant la décomposition (7) aux matrices :

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 \\ z_1 & \lambda_1^{-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}$$

et :

$$\begin{vmatrix} \lambda_2 & 0 \\ z_2 & \lambda_2^{-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}$$

respectivement.

Pour réduire (54), nous devons commencer par déterminer les orbites de $SL(2, C)$ sur la variété $C^+ \times C^+$. Soient donc P_1 et P_2 deux points de C^+ . Par une transformation de $SL(2, C)$ nous pouvons appliquer P_1 sur un point Π_1 du rayon OP_1^0 , en désignant par P_1^0 le point de coordonnées :

$$\left(\frac{1}{2}, 0, 0, -\frac{1}{2} \right).$$

Dans cette transformation P_2 devient P'_2 . Il est aisé de vérifier qu'il existe

toujours une transformation de la forme $\begin{vmatrix} e^{i\varphi} & \zeta \\ 0 & e^{-i\varphi} \end{vmatrix}$ laissant donc Π_1

invariant, qui applique P'_2 sur un point Π_2 du rayon OP_2^0 , en désignant par P_2^0 le point de coordonnées $(\frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{2})$. Ce raisonnement suppose évidemment que P_1 et P_2 ne sont pas situés sur un même rayon ce qui n'exclut qu'un ensemble négligeable d'orbites. Par conséquent, à un ensemble de mesure nulle près, toutes les orbites cherchées sont déterminées par la donnée d'un point Π_1 sur OP_1^0 et d'un point Π_2 sur OP_2^0 et nous pouvons toujours choisir les points Π_1 et Π_2 tels que $\Pi_1 + \Pi_2$ soit porté par Ox_0 . Dans la paramétrisation de C^+ introduite au paragraphe 1, au point Π_1 correspond une matrice de la forme $\begin{vmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & \Lambda^{-1} \end{vmatrix}$, $\Lambda > 0$. Quant à Π_2 c'est un des points de C^+ qui échappent à cette paramétrisation, c'est-à-dire qui se déduit de P_1^0 par l'action d'un $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}$ avec $\delta = 0$. Mais on vérifie aisément que :

$$(55) \quad \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{i\varphi} & \zeta \\ 0 & e^{-i\varphi} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & \lambda \\ -\lambda^{-1} & 0 \end{vmatrix}$$

avec :

$$(56) \quad e^{i\varphi} = \frac{\beta}{|\beta|}, \quad \zeta = -\alpha |\beta|, \quad \lambda = |\beta|.$$

Nous pouvons donc faire correspondre à Π_2 une matrice de la forme :

$$\begin{vmatrix} 0 & \lambda \\ -\lambda^{-1} & 0 \end{vmatrix}, \quad \lambda > 0,$$

avec $\lambda = \Lambda$ si l'on veut que $\Pi_1 + \Pi_2 = P^0$ soit porté par Ox_0 . En conclusion, à un ensemble de mesure nulle près, toutes les doubles classes cherchées, orbites de $SL(2, C)$ dans $C^+ \times C^+$ peuvent être caractérisées par le couple de matrices :

$$(57) \quad \left(\begin{vmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & \Lambda^{-1} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & \Lambda \\ -\Lambda^{-1} & 0 \end{vmatrix} \right), \quad \Lambda > 0.$$

Notons, pour la suite que :

$$(\Pi_1 + \Pi_2)_0 = M = \Lambda^{-2}.$$

Le sous-groupe de $SL(2, C)$ laissant simultanément invariants Π_1 et Π_2 est encore le groupe des rotations autour de Ox_3 ce qui permet d'attacher

à chaque point des doubles classes le produit de matrices $\omega(z, 1) \begin{vmatrix} L & 0 \\ \zeta & L^{-1} \end{vmatrix}$.

Nous poserons pour simplifier :

$$(58) \quad \begin{vmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & \Lambda^{-1} \end{vmatrix} \omega(z, 1) = E(z, \Lambda) H(z, \Lambda)$$

$$(59) \quad \begin{vmatrix} 0 & \Lambda \\ -\Lambda^{-1} & 0 \end{vmatrix} \omega(z, 1) = \varepsilon(z, \Lambda) \mathcal{H}(z, \Lambda)$$

exprimant le résultat de la décomposition (7) appliquée aux premiers membres (59) ayant un sens dès que $z \neq 0$.

Nous avons donc le changement de variables :

$$(60) \quad \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 \\ z_1 & \lambda_1^{-1} \end{vmatrix} = H(z, \Lambda) \begin{vmatrix} L & 0 \\ \zeta & L^{-1} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \lambda_2 & 0 \\ z_2 & \lambda_2^{-1} \end{vmatrix} = \mathcal{H}(z, \Lambda) \begin{vmatrix} L & 0 \\ \zeta & L^{-1} \end{vmatrix}$$

définissant une nouvelle paramétrisation de $C^+ \times C^+$ à un ensemble de mesure nulle près ⁽⁴⁾. On notera les relations :

$$(61) \quad \begin{aligned} \mathcal{H}(z, \Lambda) &= H\left(-\frac{1}{z}, \Lambda\right) \\ \varepsilon(z, \Lambda) &= \begin{vmatrix} \frac{z}{|z|} & 0 \\ 0 & \frac{1}{|z|} \end{vmatrix} E\left(-\frac{1}{z}, \Lambda\right). \end{aligned}$$

La mesure $d\mu = \frac{d\lambda_1 dz_1}{\lambda_1^3} \frac{d\lambda_2 dz_2}{\lambda_2^3}$ s'écrit en fonction des nouveaux paramètres :

$$(62) \quad d\mu = \frac{2}{\Lambda} d\Lambda \frac{dz}{(1 + |z|^2)^2} \frac{dL d\zeta}{L^3}.$$

Ce qui exprime la désintégration de $d\mu$ relativement à l'introduction des doubles classes.

1. Réduction du produit tensoriel.

Nous poserons :

$$(63) \quad F(\Lambda, z, L, \zeta) = \varphi(\lambda_1, z_1; \lambda_2, z_2)$$

⁽⁴⁾ La nouvelle paramétrisation ne s'applique pas aux couples (P_1, P_2) tels que P_1 et P_2 appartiennent à un même rayon de C^+ , ni aux couples (P_1, P_2) tels que P_1 soit sur $0 P_1^0$ et P_2 sur $0 P_2^0$.

où, au second membre, $\lambda_1, z_1, \lambda_2, z_2$ sont remplacés par leurs expressions (60) en fonctions de Λ, z, L, ζ .

En écrivant :

$$(64) \quad \begin{vmatrix} L & 0 \\ \zeta & L^{-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \tilde{u} \begin{vmatrix} L_1 & 0 \\ \zeta_1 & L_1^{-1} \end{vmatrix}$$

et en tenant compte de :

$$(65) \quad H(z, \Lambda) = E(z, \Lambda)^{-1} \begin{vmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & \Lambda^{-1} \end{vmatrix} \omega(z, 1).$$

Nous avons :

$$\begin{aligned} H(z, \Lambda) \begin{vmatrix} L & 0 \\ \zeta & L^{-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} &= E(z, \Lambda)^{-1} \begin{vmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & \Lambda^{-1} \end{vmatrix} \omega(z, 1) \tilde{u} \begin{vmatrix} L_1 & 0 \\ \zeta_1 & L_1^{-1} \end{vmatrix} \\ &= E(z, \Lambda)^{-1} \begin{vmatrix} \frac{u + \bar{v}z}{|u + \bar{v}z|} & 0 \\ 0 & \frac{vz + \bar{u}}{|vz + \bar{u}|} \end{vmatrix} E(\tilde{u}z, \Lambda) H(\tilde{u}z, \Lambda) \begin{vmatrix} L_1 & 0 \\ \zeta_1 & L_1^{-1} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

d'où l'on tire :

$$\begin{vmatrix} \lambda'_1 & 0 \\ z'_1 & \lambda'^{-1}_1 \end{vmatrix} = H(\tilde{u}z, \Lambda) \begin{vmatrix} L_1 & 0 \\ \zeta_1 & L_1^{-1} \end{vmatrix}$$

et :

$$\frac{\overline{z_1\beta + \delta\lambda_1^{-1}}}{|z_1\beta + \delta\lambda_1^{-1}|} = e^{-i\varphi(z, \Lambda)} \frac{u + \bar{v}z}{|vz + \bar{u}|} e^{i\varphi(\tilde{u}z, \Lambda)}$$

où :

$$\tilde{u}z = \frac{uz - \bar{v}}{vz + \bar{u}} \quad \text{si} \quad \tilde{u} = \begin{vmatrix} u & v \\ -\bar{v} & \bar{u} \end{vmatrix} \quad \text{et avec} \quad E(z, \Lambda) = \begin{vmatrix} e^{i\varphi(z, \Lambda)} & \zeta(z, \Lambda) \\ 0 & e^{-i\varphi(z, \Lambda)} \end{vmatrix}$$

De même, en tenant compte de (61) :

$$\begin{vmatrix} \lambda'_2 & 0 \\ z'_2 & \lambda'^{-1}_2 \end{vmatrix} = \mathcal{H}(\tilde{u}z, \Lambda) \begin{vmatrix} L_1 & 0 \\ \zeta_1 & L_1^{-1} \end{vmatrix}$$

et :

$$\frac{\overline{z_2\beta + \delta\lambda_2^{-1}}}{|z_2\beta + \delta\lambda_2^{-1}|} = e^{-i\varphi\left(-\frac{1}{z}, \Lambda\right)} \frac{\bar{z}}{|z|} \frac{uz - \bar{v}}{|\bar{u}z - v|} e^{i\varphi\left(-\frac{1}{\tilde{u}z}, \Lambda\right)}.$$

Avec les paramètres Λ, z, L, ζ , (54) s'écrit donc :

$$\begin{aligned}
 (66) \quad & U_{+,0}^{s_1} \otimes U_{+,0}^{s_2} \left(a, \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \right) F(\Lambda, z, L, \zeta) \\
 &= e^{ia \cdot P} e^{-is_1 \varphi(z, \Lambda)} e^{-is_2 \varphi\left(-\frac{1}{z}, \Lambda\right)} \left(\frac{\bar{z}}{|z|} \right)^{s_2} \\
 &\times e^{is_1 \varphi(\tilde{u}z, \Lambda)} e^{is_2 \varphi\left(-\frac{1}{\tilde{u}z}, \Lambda\right)} \left(\frac{u + \bar{v}z}{|vz + \bar{u}|} \right)^{s_1} \left(\frac{uz - \bar{v}}{|\bar{u}z - v|} \right)^{s_2} F(\Lambda, \tilde{u}z, L_1, \zeta_1)
 \end{aligned}$$

où P est le point de l'hyperboloïde de sommet $\Pi_1 + \Pi_2$ correspondant à la matrice $\begin{vmatrix} L & 0 \\ \zeta & L^{-1} \end{vmatrix}$.

Si, maintenant, nous posons :

$$(67) \quad \Phi(\Lambda, z, L, \zeta) = e^{is_1 \varphi(z, \Lambda) + is_2 \varphi\left(-\frac{1}{z}, \Lambda\right)} \left(\frac{\bar{z}}{|z|} \right)^{-s_2} F(\Lambda, z, L, \zeta).$$

(66) devient :

$$U_{+,0}^{s_1} \otimes U_{+,0}^{s_2} \left(a, \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \right) \Phi(\Lambda, z, L, \zeta) = e^{ia \cdot P} \left(\frac{vz + \bar{u}}{|vz + \bar{u}|} \right)^{s_2 - s_1} \Phi(\Lambda, \tilde{u}z, L_1, \zeta_1).$$

Introduisant, de nouveau, les fonctions $h_{s,i}^{s_2-s_1}(z)$ telles que :

$$\left(\frac{vz + \bar{u}}{|vz + \bar{u}|} \right)^{s_1 - s_2} h_{s,i}^{s_2-s_1}(\tilde{u}z) = \sum h_{s,j}^{s_2-s_1}(z) D_{j,i}^s(\tilde{u}), \quad s \geq \frac{|s_2 - s_1|}{2}$$

et écrivant :

$$(68) \quad \Phi(\Lambda, z, L, \zeta) = \sum_{s,i} \varphi_{s_2-s_1}^{s,i}(\Lambda, L, \zeta) h_{s,i}^{s_2-s_1}(z)$$

il vient finalement :

$$(69) \quad U_{+,0}^{s_1} \otimes U_{+,0}^{s_2} \left(a, \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \right) \varphi_{s_2-s_1}^{s,i}(\Lambda, L, \zeta) = e^{ia \cdot P} \sum_j D_{i,j}^s(\tilde{u}) \varphi_{s_2-s_1}^{s,j}(\Lambda, L_1, \zeta_1)$$

les $\varphi_{s_2-s_1}^{s,i}(\Lambda, L, \zeta)$ étant telles que :

$$(70) \quad \sum_{s,i} \int |\varphi_{s_2-s_1}^{s,i}(\Lambda, L, \zeta)|^2 \frac{d\Lambda}{\Lambda^4} \frac{dL d\zeta}{L^3} < \infty.$$

Les formules (63), (67), (68), (69) et (70) résument les modalités de la décomposition cherchée.

En terminant, l'auteur tient à adresser ses remerciements au Centre National de la Recherche Scientifique dont le soutien financier lui permet de poursuivre ses recherches, au Docteur Guillot et au Professeur Stora pour d'utiles et fructueuses discussions, au Professeur L. Michel, dont les remarques auront contribué à améliorer la rédaction de cet article.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] JOOS, *Fortschritte der Physik*, 10, 65, 1962.
- [2] PUKANSKY, *Journal of Math. and Mec.*, 10, 475, 1961.
- [3] STORA et MOUSSA, Conférence de BOULDER et STORA, Séminaire sur la représentation des groupes, Institut Poincaré, Paris, 1964-1965. Ronéotypé.
- [4] WIGNER, *Ann. of Math.*, 40, 149, 1939.
- [5] MACKEY, *Ann. of Math.*, 55, 101, 1952 et 56, 193, 1953 (Voir aussi, Séminaire sur la représentation des groupes, Institut Poincaré, Paris, 1963-1964; ronéotypé).
- [6] NAIMARK, *Représentations linéaires du groupe de Lorentz*. Dunod, Paris.
- [7] WIGHTMAN, École d'Été des Houches. *Relations de dispersion et particules élémentaires*. Hermann, 1960.
- [8] SCHWEBER, Introduction to Relativistic Quantum Field Theory.
- [9] GUILLOT, *A paraître*.

(Manuscrit reçu le 26 mai 1965).