ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

VINCENT COSSART
CARLOS GALINDO
OLIVIER PILTANT

Un exemple effectif de gradué non noethérien associé à une valuation divisorielle

Annales de l'institut Fourier, tome 50, n° 1 (2000), p. 105-112
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_2000__50_1_105_0>

© Annales de l'institut Fourier, 2000, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (http://annalif.ujf-grenoble.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
50, 1 (2000), 105–112

UN EXEMPLE EFFECTIF DE GRADUÉ NON NOETHÉRIEN ASSOCIÉ À UNE VALUATION DIVISORIELLE

par V. COSSART, C. GALINDO(*) et O. PILTANT

Introduction.

En dimension 2, le gradué d'un anneau local régulier associé à une valuation divisorielle est noethérien [Gö], cor. 3.11, [Li], prop. 3.11 ou [S], th. 8.6. L'étude d'un tel gradué nécessite la théorie des idéaux complets [Z]. En dimension supérieure, il existe une théorie des idéaux complets à *supports finis* [L]. Cette note prouve que la structure du gradué associé à une valuation divisorielle à support fini, c'est-à-dire une valuation associée à un diviseur exceptionnel obtenu après une suite finie d'éclatements de points fermés, est loin d'être connue.

Notations et construction de la valuation.

On éclate $X_0 = \operatorname{Spec} R$ le long de son idéal maximal, soit X_1 la variété obtenue. Dans le diviseur exceptionnel $E_1 := \operatorname{Proj} k[x,y,z]$, soit la cubique C d'équation $x^2z + xy^2 + y^3$ et on note M_1 le point fermé de E_1 de coordonnées homogènes $(1:0:0)$. M_1 est un point lisse de C. On définit alors la suite d'éclatements :

$$X_0 \longleftarrow X_1 \longleftarrow \cdots \longleftarrow X_n,\ 10 \leq n,$$

(*) Le deuxième auteur remercie l'Université de Versailles-Saint-Quentin et plus particulièrement l'U.F.R. de Versailles pour son invitation d'un mois en 1998 sur un support de professeur. C'est durant cette visite que cet article a été écrit.

Mots-clés : (finitely supported) Divisorial valuations – Effective – Graded algebra (relative to a valuation).
Classification math. : 14B05 – 13F30.

où $X_i \longleftarrow X_{i+1}$ est l'éclatement centré en le point fermé M_i, exceptionnel pour $X_i \longleftarrow X_{i+1}$, sur le transformé strict de la cubique $\mathcal{C}$ dans X_i, $1 \leq i \leq n-1$. Soit $\mathfrak{M}_{n-1}$ l'idéal maximal définissant M_{n-1}, on prend pour ν la valuation $\mathfrak{M}_{n-1}$-adique de $\mathcal{O}_{X_{n-1},M_{n-1}}$. C'est-à-dire que, si on désigne par E_n le diviseur exceptionnel de $X_{n-1} \longleftarrow X_n$, ν=ord$_{E_n}$.

Calcul du gradué.

Posons $R_i = \mathcal{O}_{X_i,M_i}$, $1 \leq i \leq n-1$. On a :

$$R_1 = k[a_1, b_1, c_1]_{(a_1,b_1,c_1)}$$

où $a_1 = x$, $b_1 = \frac{y}{x}$, $c_1 = \frac{z}{x} + (\frac{y}{x})^2 + (\frac{y}{x})^3$ et

$$R_{n-1} = k[a_{n-1}, b_{n-1}, c_{n-1}]_{(a_{n-1},b_{n-1},c_{n-1})}$$

où $a_{n-1} = \frac{x}{b_1^{n-2}} = \frac{x^{n-1}}{y^{n-2}}$, $b_{n-1} = b_1$, $c_{n-1} = \frac{c_1}{b_1^{n-2}}$.

On en déduit : $\nu(a_1) = n-1, \nu(b_1) = 1, \nu(c_1) = n-1$. Soit

$$P = P_1 + \cdots + P_m \in (x,y,z)k[x,y,z]$$

avec $P_i \in k[x,y,z]$ homogène de degré i, $1 \leq i \leq m = \deg(P)$.

$$\begin{aligned} P &= a_1 P_1(1, b_1, c_1 - {b_1}^2 - {b_1}^3) + \cdots + a_1^m P_m(1, b_1, c_1 - {b_1}^2 - {b_1}^3) \\ &= a_1 Q_1(b_1, c_1) + \cdots + a_1^m Q_m(b_1, c_1) \end{aligned}$$

où $Q_j(b_1, c_1) = P_j(1, b_1, c_1 - {b_1}^2 - {b_1}^3)$, $1 \leq j \leq m$.

$$P = a_{n-1} b_{n-1}^{n-2} Q_1(b_{n-1}, b_{n-1}^{n-2} c_{n-1}) + \cdots + (a_{n-1} b_{n-1}^{n-2})^m Q_m(b_{n-1}, b_{n-1}^{n-2} c_{n-1}).$$

De ces calculs fastidieux, il ressort que la valeur d'un polynôme $P \in k[x,y,z]$ est la plus petite valeur de ses composantes homogènes : il suffit de faire le développement de P dans $k[a_1, b_1, c_1]$ et d'affecter à a_1 le poids $n-1$, à b_1 le poids 1 et à c_1 le poids $n-1$ [S], cor. 8.5, th. 8.6. Dans le langage de Spivakovsky, ν est monomiale en a_1, b_1, c_1.

Plus précisément, en posant $I_\alpha = \{r \in R \mid \nu(r) \geq \alpha\}$, l'anneau $\mathrm{gr}_\nu(R) = \bigoplus I_\alpha / I_{\alpha+1}$ qui est le "petit gradué" de R associé à ν est une sous $k[A_1]$-algèbre de $\mathrm{gr}_\nu(R_1) = k[A_1, B_1, C_1]$ où A_1 est la forme initiale de a_1 dans $\mathrm{gr}_\nu(R_1)$, B_1 celle de b_1 et C_1 celle de c_1, $\mathrm{gr}_\nu(R) = \bigoplus I_\alpha / I_{\alpha+1}$ est *bigradué*; il est gradué par les valeurs des α du semi-groupe de ν et par les degrés en A_1, un élément $A_1^m Q(B_1, C_1)$ est la forme initiale d'un polynôme homogène de degré m de $k[x,y,z]$.

PROPOSITION 1. — *Pour tout $m \in \mathbb{N} - \{0\}$, le k-espace vectoriel des éléments de la forme $A_1^m Q(B_1, C_1)$ de $\mathrm{gr}_\nu(R) \subset \mathrm{gr}_\nu(R_1) = k[A_1, B_1, C_1]$*

est engendré par les monômes $A_1^m B_1^a C_1^b$ *avec (1)* $m \geq 3b$ *et (2)* $a = 0$ *ou* $a \leq 3(m-3b)-1$.

Prouvons d'abord trois lemmes et nous reprendrons ensuite la preuve de la proposition 1.

LEMME 1. — *Avec les hypothèses et notations de la proposition 1, si* P *est un polynôme homogène de degré* m *et si* P *n'est pas divisible par* $C = x^2z + xy^2 + y^3$, *alors*

$$\operatorname{col}\left(c_1, P\left(1, b_1, \frac{z}{x}\right)\right) \leq 3m-1,$$

où $\operatorname{col}(c_1, r)$ *est la colongueur de l'idéal* $(c_1, r) \subset k[b_1, c_1]_{(b_1, \frac{z}{x})}$.

Preuve. — On a $P = a_1^m P(1, b_1, \frac{z}{x}) = a_1^m Q(b_1, c_1)$, où Q est un polynôme de degré total $\leq 3m$. Comme c_1 ne divise pas Q, on a $\operatorname{col}(c_1, Q(b_1, c_1)) = \operatorname{col}(c_1, Q(b_1, 0)) \leq \operatorname{col}(c_1, b_1^{3m}) = 3m$.

Supposons le lemme faux, alors, pour un P, $\operatorname{col}(P(1, b_1, \frac{z}{x}), c_1) = 3m$, $P(1, b_1, \frac{z}{x}) = \lambda b_1^{3m} \bmod c_1 R_1$, $\lambda \in k^*$. Donc : $P(1, b_1, \frac{z}{x}) = \lambda(\frac{z}{x})^m + \sum_{0 \leq j \leq m-1} (\frac{z}{x})^j P_j$, où $P_j \in k[b_1]$ est de degré au plus $m-j$. En substituant $\frac{z}{x} = c_1 - b_1^2 - b_1^3$, on a : $P(1, b_1, \frac{z}{x}) = \lambda(-1)^m(b_1^{3m} + m b_1^{3m-1}) + P' \bmod c_1 R_1$, où $P' \in k[b_1]$ est de degré $\leq 3m-2$, comme $m \neq 0$, on a une contradiction. *Rappelons que la caractéristique de* k *est nulle.*

LEMME 2. — *Pour tout* j, $0 \leq j \leq 3m-1$, *il existe un polynôme* $P_{j,m} \in k[x, y, z]$ *homogène de degré* m *tel que*

$$P_{j,m}(1, b_1, \frac{z}{x}) = \gamma_{j,m} b_1^j \bmod c_1 R_1,$$

avec $\gamma_{j,m} \in k[b_1]$ *et* $\gamma_{j,m}(0) \neq 0$.

Preuve. — Prouvons ce lemme par récurrence sur m. Dans le cas $m = 1$, il suffit de prendre $P_{0,1} = x$, $P_{1,1} = y$, $P_{2,1} = z$.

Passons au cas $m \geq 2$. On peut poser $P_{0,m} = x^m$, $P_{1,m} = x^{m-1}y$ et, par récurrence sur m, pour $2 \leq j \leq 3m-2$, $P_{j,m} = zP_{j-2,m-1}$. Il n'y a plus qu'à construire $P_{3m-1,m}$.

Soit P l'unique combinaison linéaire $P = y^m + \sum_{m \leq j \leq 3m-2} \alpha_j P_{j,m}$, $\alpha_j \in k$ telle que : $\operatorname{mult}_0[P(1, b_1, \frac{z}{x})] \bmod c_1 R_1 \geq 3m-1$. On a $P = y^m \bmod z$ et donc $x^2z + xy^2 + y^3$ ne divise pas P.

Par le lemme 1, on peut prendre $P_{3m-1,m} = P$.

LEMME 3. — *Dans le lemme 2 ci-dessus, on peut prendre* $P_{j,m} \in k[x, y, z]$ *de façon que* $\operatorname{in}_\nu(P_{j,m}) = \gamma_{j,m}(0) B_1^j A_1^m$.

Preuve. — En effet, si ce n'est pas le cas, $\mathrm{in}_\nu(P_{j,m}) = A_1^m \sum \lambda_{a,b} B_1^a C_1^b$ [S], th. 8.6, avec $9b + a \leq (n-1)b + a \leq \nu(B_1^j) = j \leq 3m - 1$ et donc $a \leq 3(m - 3b) - 1$ (la première inégalité est une conséquence de $10 \leq n$, c'est la première fois que nous utilisons cette hypothèse). On remplace alors $P_{j,m}$ par $P_{j,m} - \sum \lambda_{a,b}(x^2z + xy^2 + y^3)^b \gamma_{a,m-3b}(0)^{-1} P_{a,m-3b}$, une récurrence simple sur $\nu(P_{j,m})$ prouve l'assertion.

Preuve de la proposition 1. — Montrons que le k-espace vectoriel des éléments de la forme

$$A_1^m Q(B_1, C_1) \;=\; A_1^m \sum_{a+b \leq m} \lambda_{a,b} B_1^a C_1^b,\ \lambda_{a,b} \in k$$

de $\mathrm{gr}_\nu(R) \subset \mathrm{gr}_\nu(R_1) = k[A_1, B_1, C_1]$ est inclus dans le k-espace vectoriel engendré par les monômes $A_1^m B_1^a C_1^b$, $a \leq 3(m - 3b) - 1$ *ou* $a = 0$, $3b = m$. Soit $P \in k[x, y, z]$ homogène de degré m. $P = a_1^m P(1, b_1, \frac{z}{x}) = a_1^m Q(b_1, c_1)$, où Q est un polynôme de degré total $\leq 3m$. Si c_1 ne divise pas Q, on a $\mathrm{in}_\nu(P) = A_1^m \mathrm{in}_\nu(P(1, b_1, \frac{z}{x})) = A_1^m \sum \lambda_{a,b} B_1^a C_1^b$ avec $9b + a \leq (n-1)b + a = \nu(P) \leq 3m - 1$. Si c_1 divise Q, on se ramène au cas précédent en divisant P par la plus grande puissance possible de C.

Montrons l'inclusion inverse. Dans le cas $m{=}1$, on remarque que $\mathrm{in}_\nu(x) = A_1$, $\mathrm{in}_\nu(y) = A_1 B_1$, $\mathrm{in}_\nu(z) = A_1 B_1^2$. Dans le cas $m \geq 2$, si $a \leq 3(m{-}3b){-}1$ *ou* $a = 0$, $3b = m$, on a

$$A_1^m B_1^a C_1^b = \mathrm{in}_\nu(\gamma_{a,m-3b}(0)^{-1} P_{a,m-3b} C^b).$$

PROPOSITION 2. — *Le système* A_1, A_1B_1, $A_1^3C_1$, $A_1B_1^2$, $A_1^2B_1^5$, $A_1^3B_1^8$, $A_1^4B_1^{11}, \ldots, A_1^m B_1^{3m-1}, \ldots$ *est un système minimal de générateurs de la* k*-algèbre* $\mathrm{gr}_\nu(R) \subset \mathrm{gr}_\nu(R_1) = k[A_1, B_1, C_1]$. *En particulier,* $\mathrm{gr}_\nu(R)$ *n'est pas noethérien.*

Preuve. — Prouvons que ce système est générateur.

Dans le cas où $a \geq 3$, définissons $a' \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N} - \{0\}$ par : $a = (3q - 1) + a'$, $0 \leq a' \leq 2$. On a alors

$$A_1^m B_1^a C_1^b = (A_1^3 C_1)^b (A_1^q B_1^{3q-1})(A_1^{m-q-3b} B_1^{a'}),$$

la condition $a \leq 3(m - 3b) - 1$ est équivalente à $a' \leq 3(m - q - 3b)$. On se ramène donc à étudier les cas $a = 0, 1, 2$. Dans le cas $a = 0$, on a $m - 3b \geq 0$ et

$$A_1^m C_1^b = (A_1^3 C_1)^b A_1^{m-3b},$$

qui est engendré par le système de générateurs de l'énoncé.

Dans les cas $a = 1$ ou $a = 2$, on a

$$A_1^m B_1^a C_1^b = (A_1 B_1^a)(A_1^3 C_1)^b A_1^{m-3b-1},$$

en remarquant que la condition $a \leq 3(m-3b)-1$ implique $0 < m-3b$.

Montrons que le système est minimal. On se convainc qu'il suffit de montrer que, pour tout $p \geq 0$, le monôme $A_1^p B_1^{3p-1}$ n'est pas dans la k-algèbre engendrée par les monômes

$$A_1, A_1 B_1, A_1^3 C_1, A_1^m B_1^{3m-1},\ m < p.$$

Mais tout élément de l'algèbre ainsi engendrée est un polynôme $P = \sum_{p\beta<\alpha(3p-1),\gamma\in\mathbb{N}} A_1^\alpha B_1^\beta C_1^\gamma$ et donc ne peut être $A_1^p B_1^{3p-1}$.

PROPOSITION 3. — *La série de Poincaré de* $\mathrm{gr}_\nu(R)$ *est une fraction rationnelle.*

Preuve. — Notons $\mathrm{gr}_\nu(R)_\alpha$ la composante homogène de degré $\alpha \in \mathbb{N}$ de $\mathrm{gr}_\nu(R)$ pour sa graduation définie par le groupe de valeurs de ν et d_α la dimension du k-espace vectoriel $\mathrm{gr}_\nu(R)_\alpha$. On définit γ et σ par : $\gamma = n-1 \geq 9$ et $\sigma = 4\gamma = 4n-4$. Il y a une injection naturelle des k-espaces vectoriels $\mathrm{gr}_\nu(R)_\alpha \to \mathrm{gr}_\nu(R)_{\alpha+\sigma}$ qui consiste à multiplier par $A_1^3 C_1$, c'est-à-dire par $\mathrm{in}_\nu(x^2 z + xy^2 + y^3)$. On définit ϵ_α par : $d_{\alpha+\sigma} = d_\alpha + \epsilon_\alpha$. Posons $\alpha = \sigma q + r$, $0 \leq r \leq \sigma - 1$, $q, r \in \mathbb{N}$. On vérifie que

$$\begin{aligned}
\epsilon_\alpha = q+1 \ \text{ si } \ & 0 \leq r \leq \gamma - 1, \\
\text{ou } \ & \gamma + 3 \leq r \leq 2\gamma - 1, \\
\text{ou } \ & 2(\gamma+3) \leq r \leq 3\gamma - 1, \\
\text{ou } \ & 3(\gamma+3) \leq r \leq 4\gamma - 1, \\
\epsilon_\alpha = q+2 \ \text{ sinon.}
\end{aligned}$$

On en déduit aisément la rationalité de la série de Poincaré $\sum_{\alpha\in\mathbb{N}} d_\alpha T^\alpha$. Remarquons que l'inégalité $3(\gamma+3) \leq r \leq 4\gamma - 1$ n'a de sens que pour $\gamma \geq 10$.

Remarque 1. — Dans le cas où $1 \leq n \leq 9$, $\mathrm{gr}_\nu(R) = \bigoplus I_\alpha / I_{\alpha+1}$ est noethérien.

Donnons une esquisse de preuve. Notons S_n le transformé strict dans X_n du plan projectif $\mathbb{P}^2$ qui est le diviseur exceptionnel de $X_1 \longrightarrow X_0$, comme $n \leq 9$, S_n est obtenu à partir de $\mathbb{P}^2$ par au plus 8 éclatements de points fermés, S_n est une *surface de Del Pezzo dégénérée*, on peut déduire de [D], [GP] et [Z] que : *l'anneau des sections de* S_n, $1 \leq n \leq 9$

$$\bigoplus_{L\in \mathrm{Pic}\ (S_n)} H^0(L)$$

est noethérien.

Il s'agit d'un résultat non publié de L. Gruson. Donnons quelques indications de preuve.

1.1. — On remarque d'abord que *tout diviseur effectif* $\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}(S_n)$ *se décompose en* $\mathcal{L} = \mathcal{L}' \otimes \mathcal{L}''$ *avec* $\mathcal{L}''$ *sans courbe base et* $h^0(\mathcal{L}') = 1$. On prend pour $\mathcal{L}'$ le fibré correspondant à la composante fixe de $\mathcal{L}$, le fibré $\mathcal{L}''$ a au plus des points bases : il est numériquement effectif. Le premier point à prouver est que $\mathcal{L}''$ *est sans point base.*

• On montre ensuite que *le semi-groupe NEF des fibrés numériquement effectifs est engendré par les cubiques spéciales, les coniques spéciales (passant par* x_i, $1 \leq i \leq 4$*) , les droites générales et les droites passant par* x_1. On obtient ce résultat par une récurrence décroissante sur $m_1 + \cdots + m_n$, en tensorisant par les duaux des générateurs proposés et en se fondant sur le fait que si un fibré $\mathcal{L}$ est numériquement effectif, sa suite de multiplicités $(\delta, m_1, \cdots, m_{n-1})$ vérifie $m_1 \geq m_2 \geq \cdots \geq m_{n-1}$ et $\delta \geq m_1 + m_2 + m_5$ [GP], p. 412 ou [H], p. 405–406.

• On remarque que *le diviseur associé à une section décomposée réduite d'un fibré numériquement effectif* $\mathcal{L}$ *est connexe.* En effet, soit il s'agit de l'image inverse d'une droite ou d'une conique, soit ce diviseur contient une cubique qui rencontre toutes les sections des fibrés générateurs de NEF.

• Soit D un tel diviseur, on a donc $H^0(O_D) = k$, de la suite exacte de cohomologie :

$$H^0(O_{S_n}) = k \longrightarrow H^0(O_D) = k \longrightarrow H^1(O_{S_n}(-D)) \longrightarrow H^1(O_{S_n}) = 0$$

associée à la suite exacte :

$$0 \longrightarrow O_{S_n}(-D) \longrightarrow O_{S_n} \longrightarrow O_D \longrightarrow 0,$$

on déduit que $H^1(\mathcal{L}) = H^1(O_{S_n}(-D)) = 0$.

• Remarquons que *tout fibré numériquement effectif* $\mathcal{L}$ *est engendré par ses sections globales* : c'est clair pour les générateurs et donc pour tous les autres.

1.2. — D'après [Z], théorème 4.2, p. 571, l'anneau

$$S := \bigoplus_{L \in \mathrm{Pic}\,(S_n),\ L \text{ engendré par ses sections globales}} H^0(L)$$

est noethérien.

• Sachant que les fibrés $\mathcal{L}$ avec $h^0(\mathcal{L}) = 1$ sont engendrés par les fibrés correspondant aux composantes du diviseur exceptionnel de S_n, *l'anneau des sections de* S_n, $1 \leq n \leq 9$

$$\mathcal{S} := \bigoplus_{L \in \mathrm{Pic}(S_n)} H^0(L)$$

est noethérien.

1.3. Fin de la preuve de la remarque 1. — Notons π l'application $S_n \longrightarrow \mathbb{P}^2$. L'image de l'application

$$H^0(\pi_*(\pi^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(m)) \otimes \mathcal{O}_{S_n}(-a_2E_2' - \cdots - a_nE_n'))) \longrightarrow H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(m)) = k[x,y,z]_m$$

induite par l'isomorphisme

$$H^0(\pi_*(\pi^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(m)))) \simeq H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(m)) = k[x,y,z]_m,$$

est l'ensemble des polynômes homogènes de degré m et de valuation E_i-adique supérieure ou égale à a_i, $2 \leq i \leq n$, où $E_2 \cup \cdots \cup E_n$ est le diviseur exceptionnel réduit de $X_n \longrightarrow X_1$ et $E_i' = E_i \cap X_n$, $2 \leq i \leq n$. Donc l'image de

$$\bigoplus_{m,a_2,\cdots,a_{n-1}} H^0(\pi^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(m)) \otimes \mathcal{O}(-a_2E_2' - \cdots - a_nE_n')) \longrightarrow \bigoplus_m k[x,y,z]_m = k[x,y,z]$$

est l'idéal $\mathcal{I}_{a_n} = \{P \in k[x,y,z] | \nu(P) \geq a_n\}$. On a donc une surjection naturelle

$$\bigoplus_{L \in \mathrm{Pic}\ (S_n)} H^0(L) \longrightarrow \bigoplus_{a_n \in \mathbb{N}} \mathcal{I}_{a_n}.$$

Il suffit alors de remarquer que $\mathrm{gr}_\nu(R)$ est un quotient de $\bigoplus_{a_n \in \mathbb{N}} \mathcal{I}_{a_n}$.

Remarque 2. — Il existe d'autres exemples de valuations divisorielles sur des anneaux locaux normaux dont les gradués ne sont pas noethériens, dans [CS], ex. 6, p. 557, on trouvera un anneau dont le gradué associé a une fonction de Hilbert dont le comportement à l'infini implique la non-noetherianité. L'originalité de l'exemple construit ici est, outre son effectivité et sa simplicité, que la valuation utilisée est divisorielle à support fini au sens de [L].

Remarque 3. — Le cône caractéristique de la surface S_{10} n'est pas polyhédral rationnel [CGS]. C'est en étudiant l'anneau des sections de S_{10} (cf. remarque 1, 1.2 (1)) que nous est venu l'idée de cet exemple.

BIBLIOGRAPHIE

[CGS] A. CAMPILLO, G. GONZÁLEZ-SPRINBERG, On Characteristic cones, clusters and chains of infinitely near points, Singularities (Oberwolfach 1996) Progr. Math., 162, Birkhäuser, Basel (1998), 173–189.

[CS] D. CUTKOSKY, V. SRINIVAS, On a problem of Zariski on dimensions of linear systems, Ann. Math., 137 (1993), 531–559.

[D] M. DEMAZURE, Exposés sur les surfaces de Del Pezzo, Lect. Notes Math., 777 (1976), 21–70.

[Gö] H. GÖHNER, Semifactoriality and Muhly's condition (N) in two dimensional local rings, Jour. of Algebra, 34 (1975), 403–429.

[GP] L. GRUSON, C. PESKINE, Genre des courbes de l'espace projectif (II), Ann. Scient. Éc. Norm. Sup., 4^e série, 15 (1982), 401–429.

[H] R. HARTSHORNE, Algebraic Geometry, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag (1977).

[L] J. LIPMAN, On complete ideals in regular local rings, Algebraic Geometry and Commutative Algebra in honor of M. Nagata (1988), 203–231.

[S] M. SPIVAKOVSKY, Valuations in function fields of surfaces, Amer. Jour. Math., 112 (1990), 107–156.

[Z] O. ZARISKI, The theorem of Riemann-Roch for high multiples of an effective divisor on an algebraic surface, Ann. Math., 76 n°3 (November 1962), 560–615.

Manuscrit reçu le 27 mai 1999,
accepté le 8 septembre 1999.

V. COSSART,
Université de Versailles
Laboratoire E.P. 1755
45, avenue des États-Unis
78035 Versailles Cedex (France).
cossart@math.uvsq.fr

C. GALINDO,
Universidad Jaume I
Depto. de Matematicas
Campus Riu Sec
12071 Castellón (Spain)
galindo@mat.uji.es

O. PILTANT,
École polytechnique
Centre de Mathématiques
91128 Palaiseau Cedex (France).
piltant@math.polytechnique.fr