Annales de l'institut Fourier

Christiane Meckert

Forme de contact sur la somme connexe de deux variétés de contact de dimension impaire

Annales de l'institut Fourier, tome 32, nº 3 (1982), p. 251-260
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1982__32_3_251_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
32, 3 (1982), 251-260

FORME DE CONTACT SUR LA SOMME CONNEXE DE DEUX VARIÉTÉS DE CONTACT DE DIMENSION IMPAIRE

par Christiane MECKERT

Le problème de l'existence de formes de contact sur les variétés compactes de dimension impaire a été résolu en dimension 3 à l'aide des chirurgies toriques [1]. En dimension supérieure à 3, les résultats sont peu nombreux : on connaît des structures de contact sur les nœuds associés à des hypersurfaces complexes, en particulier les sphères exotiques qui bordent une variété parallélisable [2], [3] et certains fibrés principaux en tores [4].

Or de nombreuses variétés sont décomposables en somme connexe de variété de contact. Il serait naturel de construire sur ces variétés une forme de contact à partir de cette décomposition. La difficulté réside dans le changement d'orientation nécessaire au recollement des formes dans les ouverts correspondants. On se propose dans le présent article de lever cette difficulté par une méthode de "fractionnement et de lissage".

On répond ainsi à des problèmes concernant les variétés compactes, simplement connexes de dimension 5 et dont la seconde classe de Stiefel-Whitney s'annule, posés par C.B. Thomas [2].

De manière précise on démontre le théorème suivant :

THEOREME. – *Soient* M *et* M' *deux variétés de dimension* $(2n+1)$ *munies de formes de contact* ω *et* ω'. *Alors il existe sur la somme connexe* $M \# M'$ *une forme de contact* ω'' *égale à* ω *sur* $M - U$ *et à* ω' *sur* $M' - U'$, U *(resp.* U'*) étant un ouvert suffisamment petit de* M *(resp.* M'*) contenant la sphère de recollement.*

I. PLAN DE LA CONSTRUCTION

Pour faire la somme connexe, on place les sphères de recollement S et S′ dans des ouverts de coordonnées de M et M′ tels que ω et ω' s'y expriment sous forme réduite. Ceci est possible grâce au théorème de Darboux. Si h est le difféomorphisme de recollement, on montre que sur une couronne sphérique C, contenant S et dont les bords sont les sphères S_0 et S_1, il existe une forme Ω égale à ω au voisinage de S_1 et à $h*\omega'$ ou $\lambda h*\omega'$ au voisinage de S_0, λ étant une fonction définie sur U et non nulle sur C.

Pour ce faire, on partage C en une chaîne de 6 couronnes C_i et sur chacune d'elles, on construit une forme de contact ω_i telle que :

$$\begin{cases} \omega_{i|C_i\cap C_j} = \omega_{j|C_i\cap C_j} & \text{si} \quad C_i \cap C_j \neq \phi \\ \omega_i = \lambda h * \omega' & \text{si} \quad C_i \supset S_0 \\ \omega_i = \omega & \text{si} \quad C_i \supset S_1\,. \end{cases}$$

La forme Ω ainsi obtenue n'est pas différentiable sur les bords des C_i mais le lemme de lissage ci-dessous permet de la modifier en une forme de classe C^∞, ω'', qui est de contact en tout point de C, qui coïncide avec $\lambda h*\omega'$ au voisinage de S_0 et avec ω au voisinage de S_1.

LEMME de lissage. – *Soit Σ une hypersurface de $\mathbf{R}^{2n+1}$ définie par $r=a$, a étant une constante positive et $r=\left(\sum\limits_{i=1}^{2n+1} x_i^2\right)^{1/2}$, et soient Σ_1 et Σ_2 deux voisinages tubulaires de Σ tels qu'aucun d'eux ne contienne l'autre.*

On suppose qu'il existe sur Σ_1 une forme de contact α_1 et sur Σ_2 une forme de contact α_2, qui coïncident sur Σ et telles que sur $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$ il existe une forme η définie par $\alpha_2 - \alpha_1 = (r-a)\,\eta$. On pose :

$$\left.\begin{cases} \alpha_j \wedge d\alpha_j^n = f_j v\,, \quad f_j > 0\,, \quad \forall j = 1, 2 \\ \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge d\alpha_j^{n-1} \wedge dr = (r-a)\,h_j v \end{cases}\right. \quad \textit{sur} \quad \Sigma_1 \cap \Sigma_2\,,$$

v étant une forme volume sur $\mathbf{R}^{2n+1}$.

Alors la condition $\{f_j - \frac{n}{3} |h_j| > 0 , \forall j = 1, 2\}$ *implique qu'il existe sur* $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ *une forme de contact qui coïncide avec* α_j *sur* $\Sigma_j - \Sigma_1 \cap \Sigma_2$, $j = 1, 2$.

II. DEMONSTRATIONS

1. Notations.

On considère deux variétés compactes de dimension $(2n + 1)$, M et M′ munies d'une forme de contact ω et ω'.

Soient U et U′ des ouverts de coordonnées de M et M′ contenant les sphères de recollement S et S′ dans lesquels :

$$\omega_{|u} = \sum_{j=1}^{n} \left(x_{2j-1}\, dx_{2j} - \frac{1}{4}\, x_{2j}\, dx_{2j-1}\right) + dx_{2n+1} .$$

$$\omega'_{|u'} = \sum_{j=1}^{n} y_{2j-1}\, dy_{2j} - dy_{2n+1} .$$

Ces formes réduites s'obtiennent aisément à partir du théorème de Darboux. On note :

$$r = \sqrt{\sum_{i=1}^{2n+1} x_i^2} \quad \text{et} \quad \lambda(r) = r^4 .$$

Le difféomorphisme du recollement $h \in \mathrm{Diff}(\mathbf{R}^{2n+1} \setminus \{0\})$ est défini par :

$$h : x_i \longmapsto y_i , \quad \forall i = 1, 2, \ldots, 2n + 1 \quad \text{avec} \quad y_i = \frac{x_i}{r^2} .$$

Les sphères de recollement sont définies par $r = 1$.

On se propose de démontrer que sur une couronne sphérique C dont les bords sont les sphères S_0 et S_1 définies par $r = R_0$ et $r = R_1$, $R_0 < 1 < R_1$, il existe une forme de contact égale à $r^4\, h * \omega'$ au voisinage de S_0 et à ω au voisinage de S_1.

2. Construction de la forme Ω.

Soit C la couronne de $\mathbf{R}^{2n+1}$ dont les bords sont les sphères S_0 et S_1 telles que $R_0 = \frac{3}{8}$ et $R_1 = 4$. On partage C en une chaîne de 6 couronnes C_i définies par $r_i \leqslant r \leqslant r_{i+1}$ avec

$$r_0 = R_0 , \quad r_1 = \frac{1}{2} , \quad r_2 = \frac{3}{4} , \quad r_3 = 3 , \quad r_4 = \frac{10}{3} , \quad r_5 = \frac{11}{3} , \quad r_6 = R_1 .$$

Sur chaque couronne C_i on construit une forme de contact ω_i telle que :

$$\begin{cases} \omega_0 = r^4 \, h * \omega' \\ \omega_5 = \omega \\ \forall i = 0, 1, 2, 3, 4, \quad \omega_i = \omega_{i+1} \quad \text{pour} \quad r = r_{i+1} . \end{cases}$$

On pose : $v = dx_1 \wedge dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_{2n+1}$,

$$dr = \frac{1}{r} (x_1 \, dx_1 + x_2 \, dx_2 + \cdots + x_{2n+1} \, dx_{2n+1}) ,$$

$$\omega_j \wedge d\omega_j^n = f_j v , \quad j = 0, \ldots, 5 .$$

a) Sur la couronne C_0 définie par $\frac{3}{8} \leqslant r \leqslant \frac{1}{2}$, on considère donc la forme de contact $\omega_0 = r^4 \, h * \omega'$,

$$\omega_0 = \sum_{j=1}^{n} \left(x_{2j-1} \, dx_{2j} - \frac{2}{r} \, x_{2j-1} \, x_{2j} \, dr \right) - r^2 \, dx_{2n+1} + 2x_{2n+1} \, rdr$$

et $f_0 = r^2 \, n!$

b) Soit $\quad \omega_1 = \omega_0 - \left(r - \frac{1}{2} \right) \sum_{j=1}^{n} x_{2j} \, dx_{2j-1}$.

Les formes ω_0 et ω_1 sont égales pour $r = \frac{1}{2}$ ·

$$\omega_1 = \sum_{j=1}^{n} \left[x_{2j-1} \, dx_{2j} - \left(r - \frac{1}{2} \right) x_{2j} \, dx_{2j-1} \right]$$
$$- r^2 \, dx_{2n+1} + 2 \left(x_{2n+1} - \frac{1}{r^2} \sum_{j=1}^{n} x_{2j-1} \, x_{2j} \right) rdr ;$$

$$f_1 = n!\left(r+\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left[r^2\left(2r-\frac{1}{2}\right)+(1-r)x_{2n+1}^2\right.$$
$$\left.+(2-3r)\sum_{j=1}^{n}x_{2j-1}^2-\frac{1}{r}x_{2n+1}\sum_{j=1}^{n}x_{2j-1}x_{2j}\right].$$

Puisque nous avons $\sum_{j=1}^{2n+1} x_i^2 = r^2$, l'expression $|x_{2n+1}\sum_{j=1}^{n} x_{2j-1}x_{2j}|$ est majorée par $\dfrac{r^3}{3\sqrt{3}}$.

On en déduit $f_1 > n!\left(r+\frac{1}{2}\right)^{n-1} r^2 \times \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3\sqrt{3}}\right)$.

ω_1 est donc une forme de contact sur la couronne C_1 définie par $\frac{1}{2} \leqslant r \leqslant \frac{3}{4}$.

c) Soit ω_2 la forme égale à ω_1 pour $r = \frac{3}{4}$ et définie par :

$$\omega_2 = \sum_{j=1}^{n}\left(x_{2j-1}\,dx_{2j}-\frac{1}{4}x_{2j}\,dx_{2j-1}\right)-\frac{4}{9}(3-r)\left[r^2\,dx_{2n+1}\right.$$
$$\left.+\frac{2}{r^2}\sum_{j=1}^{n}x_{2j-1}x_{2j}\,rdr\right]+2x_{2n+1}\,rdr,$$

$$f_2 = \left(\frac{5}{4}\right)^{n-1} n!\left\{\left[\frac{2}{3}+\frac{7}{9}(3-r)-\frac{32}{81}(3-r)^2\right]\sum_{j=1}^{n}x_{2j-1}^2\right.$$
$$\left.+\left[\frac{1}{6}-\frac{2}{9}(3-r)+\frac{32}{81}(3-r)^2\right]\sum_{j=1}^{n}x_{2j}^2+\frac{5}{3}\left(\frac{r}{3}+\frac{1}{2}\right)x_{2n+1}^2\right\}.$$

Or pour $\frac{3}{4} \leqslant r \leqslant 3$, $f_2 \geqslant \frac{13}{96}\left(\frac{5}{4}\right)^{n-1} n!\,r^2$ et ω_2 est une forme de contact sur la couronne C_2.

d) $$\omega_3 = \sum_{j=1}^{n}\left(x_{2j-1}\,dx_{2j}-\frac{1}{4}x_{2j}\,dx_{2j-1}\right)+2x_{2n+1}\,rdr$$
$$+3(r-3)\,dx_{2n+1},$$

$$f_3 = \left(\frac{5}{4}\right)^{n-1} n!\times\frac{1}{4}\left[r^2+15(r-3)+9x_{2n+1}^2\right.$$
$$\left.+\left(7-\frac{12}{r}\right)\sum_{j=1}^{n}x_{2j-1}^2+\left(1-\frac{3}{r}\right)\sum_{j=1}^{n}x_{2j}^2\right].$$

On voit immédiatement que pour $3 \leqslant r \leqslant \frac{10}{3}$, la forme ω_3 est une forme de contact.

e) Soit ω_4 la forme :

$$\omega_4 = \sum_{j=1}^{n} \left(x_{2j-1}\, dx_{2j} - \frac{1}{4}\, x_{2j}\, dx_{2j-1}\right) + dx_{2n+1} + 6\left(\frac{11}{3} - r\right) x_{2n+1}\, rdr\,.$$

Les deux formes ω_3 et ω_4 coïncident pour $r = \frac{10}{3}$.

$$f_4 = \left(\frac{5}{4}\right)^{n-1} n!\left\{\frac{5}{4} + 6\left(\frac{11}{3} - r\right)\left[\frac{5}{4}\, x_{2n+1}^2 + \sum_{j=1}^{n}\left(x_{2j-1}^2 + \frac{1}{4}\, x_{2j}^2\right)\right]\right\}$$

et ω_4 est bien une forme de contact sur la couronne C_4 définie par $\frac{10}{3} \leqslant r \leqslant \frac{11}{3}$.

f) La forme $\omega_5 = \sum_{j=1}^{n} (x_{2j-1}\, dx_{2j} - \frac{1}{4}\, x_{2j}\, dx_{2j-1}) + dx_{2n+1}$ coïncide avec ω_4 pour $r = \frac{11}{3}$. Elle est de contact sur $\mathbf{R}^{2n+1}$ et en particulier sur la couronne C_5.

$$f_5 = \left(\frac{5}{4}\right)^{n-1} n!$$

La condition de contact étant ouverte, la forme de contact ω_i définie sur chaque C_i reste de contact sur une couronne ouverte C_i' contenant C_i. On a donc construit une forme Ω définie sur C et qui coïncide pour tout $i = 0, 1, \ldots, 5$ avec ω_i sur C_i. Elle n'est pas de classe C^1 mais elle le devient après lissage tout en restant de contact.

3. Démonstration du lemme de lissage.

On n'enlève rien à la généralité du lemme en supposant les voisinages Σ_1 et Σ_2 de la forme :

$$\Sigma_j =]a - \epsilon_j\,,\ a + \epsilon_j'[\times \Sigma\,,\quad \epsilon_j\,,\ \epsilon_j' > 0\,,\ j = 1, 2\,.$$

Soit ϵ un nombre positif inférieur à ϵ_1, ϵ_2, ϵ'_1 et ϵ'_2 et

$$\Sigma' =]a-\epsilon,\ a+\epsilon[\times \Sigma \subset \Sigma_1 \cap \Sigma_2 .$$

Considérons une fonction φ de r, C^∞, définie sur $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$, positive ou nulle et vérifiant :

$$\begin{cases} \varphi(r) = 1 & \text{si} \quad r \leqslant a-\epsilon , \\ \varphi(r) = 0 & \text{si} \quad r \geqslant a+\epsilon , \\ |(r-a)\varphi'(r)| \leqslant \dfrac{1}{3} , \end{cases}$$

α_1 (resp. α_2) étant une forme de contact sur Σ_1 (resp. Σ_2), la forme $\beta = \varphi\alpha_1 + (1-\varphi)\alpha_2$ coïncide avec α_1 sur $\Sigma_1 - \Sigma'$ et avec α_2 sur $\Sigma_2 - \Sigma'$. Elle est de contact sur $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ si et seulement si elle est de contact sur Σ'. Il faut donc étudier si $\beta \wedge d\beta^n$ peut s'annuler sur Σ'.

$$d\beta^n = [\varphi\, d\alpha_1 + (1-\varphi)\, d\alpha_2]^n + n\varphi'(r)\,[\varphi\, d\alpha_1 + (1-\varphi)\, d\alpha_2]^{n-1} \wedge (\alpha_2 - \alpha_1) \wedge dr ,$$

$$\beta \wedge d\beta^n = [\varphi\alpha_1 + (1-\varphi)\,\alpha_2] \wedge [\varphi\, d\alpha_1 + (1-\varphi)\, d\alpha_2]^n + n\varphi'(r)\,[\varphi\, d\alpha_1 + (1-\varphi)\, d\alpha_2]^{n-1} \wedge \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge dr.$$

On démontre par récurrence sur k, que $\forall k \in \mathbf{N}^*$, il existe une forme γ_k telle que :

$$[\varphi\, d\alpha_1 + (1-\varphi)\, d\alpha_2]^k = \varphi\, d\alpha_1^k + (1-\varphi)\, d\alpha_2^k - \varphi(1-\varphi)\, d(\alpha_2 - \alpha_1)^2 \wedge \gamma_k .$$

Ainsi :

$$\beta \wedge d\beta^n = \{\varphi[f_1 + n\varphi'(r)\,(r-a)\,h_1] + (1-\varphi)\,[f_2 + n\varphi'(r)\,(r-a)\,h_2]\}\,v - \varphi(1-\varphi)\,\sigma ,$$

$$\sigma = (\alpha_2 - \alpha_1) \wedge d(\alpha_2 - \alpha_1) \wedge \delta_n + [\varphi\,\alpha_1 + (1-\varphi)\,\alpha_2] \wedge d(\alpha_2 - \alpha_1)^2 \wedge \gamma_n + n\varphi'\,\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge d(\alpha_2 - \alpha_1)^2 \wedge \gamma_{n-1} \wedge dr$$

avec $\delta_n = d\alpha_1^{n-1} + d\alpha_2 \wedge d\alpha_1^{n-2} + \cdots + d\alpha_2^{n-2} \wedge d\alpha_1 + d\alpha_1^{n-1}$.

Puisque $\alpha_2 - \alpha_1 = (r-a)\,\eta$ et que $|(r-a)\,\varphi'(r)| \leqslant \dfrac{1}{3}$ sur Σ', les formes $(\alpha_2 - \alpha_1) \wedge d(\alpha_2 - \alpha_1)$, $d(\alpha_2 - \alpha_1)^2$ et

$$\varphi' \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge d(\alpha_2 - \alpha_1)^2$$

s'annulent sur Σ. Il en est de même pour la forme σ.

Il existe donc ϵ suffisamment petit pour que la condition

$$\left\{ f_j - \frac{n}{3} |h_j| > 0 , \quad \forall j = 1, 2 \right\}$$

implique que $\beta \wedge d\beta^n$ est différent de 0 en tout point de Σ'.

4. Démonstration du Théorème.

On vérifie maintenant que les conditions du lemme sont réalisées pour $r = r_i$, $i = 1, 2, \ldots, 5$, ce qui achève la démonstration du théorème.

Puisque nous avons déjà calculé les expressions de f_i,

$$i = 0, 1, \ldots, 5$$

il suffit de déterminer les fonctions $h_{i,1}$ et $h_{i,2}$ telles que

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_i \wedge \omega_{i+1} \wedge d\omega_i^{n-1} \wedge dr = (r - r_{i+1}) h_{i,1} v , \\ \omega_i \wedge \omega_{i+1} \wedge d\omega_{i+1}^{n-1} \wedge dr = (r - r_{i+1}) h_{i,2} v , \end{array} \right. \qquad i = 0, 1, 2, 3, 4 .$$

On obtient :

$$h_{0,1} = (n-1)! \sum_{j=1}^{n} \left(r x_{2j}^2 + \frac{1}{r} x_{2j-1} x_{2j} x_{2n+1} \right),$$

$$h_{0,2} = \left(r + \frac{1}{2} \right)^{n-1} (n-1)! \sum_{j=1}^{n} \left(r x_{2j}^2 + \frac{1}{r} x_{2j-1} x_{2j} x_{2n+1} \right),$$

$$\frac{h_{1,1}}{\left(r + \frac{1}{2} \right)^{n-1}} = \frac{h_{1,2}}{\left(\frac{5}{4} \right)^{n-1}} = \frac{(n-1)!}{r} \sum_{j=1}^{n} \left(x_{2j-1} x_{2j} x_{2n+1} - \frac{4r^2}{9} x_{2j-1}^2 + \frac{11 - 4r}{9} r^2 x_{2j}^2 \right),$$

$$h_{2,1} = h_{2,2} = \left(\frac{5}{4} \right)^{n-1} (n-1)! \times \frac{1}{4r} \left(3 - \frac{4r^2}{9} \right) \sum_{j=1}^{n} (4 x_{2j-1}^2 + x_{2j}^2),$$

$$h_{3,1} = h_{3,2} = \left(\frac{5}{4} \right)^{n-1} (n-1)! \times \frac{3}{4r} \sum_{j=1}^{n} (4 x_{2j-1}^2 + x_{2j}^2),$$

$$h_{4,1} = h_{4,2} = 0 .$$

Un calcul facile permet de vérifier que pour tout $i = 0, 1, \ldots, 4$, on a bien $f_i - \frac{n}{3} \, |h_{i,1}| > 0$ et $f_{i+1} - \frac{n}{3} \, |h_{i,2}| > 0$ au voisinage de $r = r_{i+1}$.

III. APPLICATIONS

1.

Une forme affaiblie du théorème est le corollaire suivant :

COROLLAIRE. – *Sur toute somme connexe de deux variétés de contact, il existe une forme de contact.*

2.

Ce résultat permet de montrer qu'une classe assez large de variétés de dimension 5 admet une forme de contact. En effet, une condition nécessaire pour l'existence d'une presque- structure de contact sur une variété M^5, simplement connexe, de dimension 5 est que la troisième classe de Stiefel-Whitney de M^5 soit nulle.

Or les variétés M^5 telles que $\pi_1 = 0$ et $W_2 = 0$, satisfont à la condition précédente, $W_3(M)$ étant l'image de $W_2(M)$ par l'homomorphisme de Bockstein. Appelons $\mathcal{C}$ la classe de ces variétés. Il se trouve que les variétés de $\mathcal{C}$ sont sommes connexes de variétés M_k^5 dont le second groupe d'homotopie est d'ordre k^2 avec $M_0^5 = S^2 \times S^3$ et $M_1^5 = S^5$ [5].

Soit V_q la variété de Brieskorn définie par :

$$V_q = \{z \in C^4 \mid z_0^q + z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 = 0\} \cap S_\epsilon^7 ,$$

où S_ϵ^7 est la sphère de dimension 7 définie par $\sum_{j=0}^{3} z_j \bar{z}_j = \epsilon^2$.

On sait que V_q est une description de M_q^5 pour $q \neq 0, 1$ et si q n'est pas divisible par 3 [2].

Or V_q est une variété de contact, admettant comme forme de contact la forme induite de la forme ω_q :

$$\omega_q = \frac{i}{2}\left[q(z_0\,\overline{dz}_0 - \overline{z}_0\,dz_0) + 3\sum_{j=1}^{3}(z_j\,\overline{dz}_j - \overline{z}_j\,dz_j)\right]$$

et sur V_q il existe une action localement libre de S^1, sans points fixes et dont les sous-groupes d'isotropie sont finis [3]. Ainsi pour tout q non divisible par 3, M^5_q est une variété de contact. *En conclusion, à part éventuellement les variétés de* $\mathcal{C}$ *qui nécessitent une composante* M^5_{3p} *dans leur description, les variétés de* $\mathcal{C}$ *admettent une forme de contact.*

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. Martinet, Formes de contact sur les variétés de dimension 3. Proc. of Symposium on Singularities, 2, 1970, Liverpool. *Lecture Notes in Math.*, n° 209.

[2] C.B. Thomas, Almost regular contact manifolds, *Journal of Diff. Geometry*, vol. 11, 4 (1976), 521-533.

[3] R. Lutz et C. Meckert, Structures de contact sur certaines sphères exotiques, *C.R.A.S.*, Paris, 282 (mars 1976).

[4] R. Lutz, Sur la géométrie des structures de contact invariantes, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, 29, 1 (1979), 283-303.

[5] S. Smale, On the structure of 5-manifolds, *Ann. of Math.*, 75 (1962), 38-46.

Manuscrit reçu le 3 avril 1981
révisé le 9 novembre 1981.

Christiane Meckert,
Université Louis Pasteur
Département de Mathématiques
Institut de Recherche Mathématique Avancée
Laboratoire associé au CNRS n° 1
67084 – Strasbourg Cedex.