ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

GEORGES GIRAUD

A. MEDINA

Existence de certaines connexions plates invariantes sur les groupes de Lie

Annales de l'institut Fourier, tome 27, nº 4 (1977), p. 233-245

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1977__27_4_233_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
27, 4 (1977), 233-245.

EXISTENCE DE CERTAINES CONNEXIONS PLATES INVARIANTES SUR LES GROUPES DE LIE

par G. GIRAUD et A. MEDINA

0. Introduction.

Soit G un groupe de Lie réel ou complexe d'algèbre de Lie g. La donnée d'une connexion invariante, réelle ou complexe, sur G, équivaut à la donnée d'une application, **R** ou **C**-linéaire, $\nabla : g \to gl(g)$. Une telle connexion est (localement) plate, c'est-à-dire de courbure et torsion nulles, si ∇ est un homomorphisme d'algèbre de Lie et

$$\nabla(x)y - \nabla(y)x = [x, y]$$

pour tout $x, y \in g$. On peut donc dire que la donnée d'une connexion linéaire invariante plate, ∇, n'est que la donnée d'un homomorphisme d'algèbre de Lie,

$$\theta : g \to g \oplus gl(g) \quad (\theta(x) = (x, \nabla_x), x \in g)$$

où $g \oplus gl(g)$ est l'algèbre affine de g.

Si θ est un tel homomorphisme le produit $x.y = \nabla(x)y$ fait de g une algèbre vérifiant :

$$(1) \qquad x.(y.z) - (x.y).z = y.(x.z) - (y.x).z$$

dont l'algèbre des commutateurs est l'algèbre de Lie de départ. Une structure d'algèbre satisfaisant la propriété (1) est appelée une structure symétrique à gauche ([6]). Réciproquement si l'algèbre g est l'algèbre de Lie des commutateurs (dite sous-jacente) d'une telle algèbre, l'application $x \to (x, L_x)$ où

$L_x y = x.y$ est un homomorphisme d'algèbre de Lie et définit donc une connexion linéaire plate invariante sur G.

Dans cet article on s'intéresse aux algèbres de Lie admettant une structure d'algèbre symétrique à gauche dont l'endomorphisme θ est à valeurs dans $g \oplus \mathrm{ad}(g)$, puis plus généralement dans $g \oplus \mathrm{Der} g$. Dans le premier cas les théorèmes A et B donnent une caractérisation de ces algèbres. Dans le deuxième cas, le théorème C assure que les algèbres de Lie qui admettent ce type de structure sont résolubles. Dire que θ est à valeurs dans $g \oplus \mathrm{ad}(g)$ (resp. $g \oplus \mathrm{Der}(g)$) équivaut, géométriquement, à dire que la connexion, associée à θ, est adaptée à une $\mathrm{Int}(g)$-structure (resp. $\mathrm{Aut}(g)$-structure) invariante à gauche sur G obtenue en faisant opérer le groupe $\mathrm{Int}(g)$ (resp. $\mathrm{Aut}(g)$) sur un parallélisme invariant à gauche.

Une condition plus faible que l'existence d'une connexion invariante plate adaptée à une $\mathrm{Int}(g)$-structure est évidemment la platitude de cette structure (au sens de la théorie des G-structures). Si l'on remarque que la O-connexion de Cartan est adaptée à une telle structure, on peut interpréter la 1-platitude par l'existence sur g d'une structure d'algèbre appelée ici de « type $\mathscr{P}_1$ » (§ 1). La propriété

$$((u * v) * w - w * (u * v) = (u * w) * v - v * (u * w))$$

définissant ce type d'algèbre n'est que la traduction du fait que la courbure de la O-conexion est un cobord dans la cohomologie de Spencer de $\mathrm{ad}(g)$. Nous montrons que l'algèbre de Lie sous-jacente à une structure de « type $\mathscr{P}_1$ » est résoluble (proposition 1.2). Ceci provient du fait que la propriété de 1-platitude dans les cas considérés, d'une part passe au quotient par le radical, d'autre part n'est pas vérifiée si le groupe de Lie est semi-simple.

Au paragraphe 2 on explicite les liens algébriques existant entre les structures de « type $\mathscr{P}_1$ » et celles à associateur symétrique à gauche définies par un θ à valeurs dans $g \oplus \mathrm{ad}(g)$.

1.

Dans ce papier toutes les algèbres considérées sont réelles ou complexes de dimension finie.

Une structure d'algèbre notée $*$ sur g est dite de type $(\mathscr{P}_1)$ si elle vérifie

$$(2) \quad (u * v) * w - w * (u * v) = (u * w) * v - v * (u * w)$$

quels que soient $u, v, w, \in, g$.

L'algèbre des commutateurs d'une telle algèbre est une algèbre de Lie.

La relation (2) peut s'écrire aussi :

$$[u * v, w] = [u * w, v] \qquad \text{ou} \qquad \mathrm{ad}_{u*v} \in (\mathrm{ad}\,(g))^{(1)}$$

Or sur une algèbre de Lie semi-simple adg (isomorphe à g) respectant la forme de Killing qui est non dégénérée :

$$(\mathrm{ad}\,(g))^{(1)} = 0 \quad (\text{voir [5]}).$$

Ainsi une algèbre de Lie semi-simple ne peut être sous-jacente à une structure de type $(\mathscr{P}_1)$.

g étant l'algèbre de Lie des commutateurs d'une structure de type $(\mathscr{P}_1)$, supposons que g s'écrive $h \oplus m$ où h est une sous-algèbre de Lie de g et m un supplémentaire de h dans g vérifiant $[h, m] \subset m$; le produit de type $(\mathscr{P}_1)$ induit alors un produit de même nature sur h.

En effet posons :

$u \circ v = (u * v)_h$ pour u et v dans h où $(u * v)_h$ dénote la projection de $u * v$ sur h parallèlement à m.

La relation (2), sous sa forme

$$[u * v, w] = [u * w, v]$$

donne :

$$\begin{aligned}[u \circ v, w] = [(u * v)_h, w] = [u * v, w] &= [u * w, v] \\ &= [(u * w)_h, v] = [u \circ w, u]\end{aligned}$$

On tire alors comme conséquence :

Proposition 1.1. — *Une algèbre de Lie réelle est algèbre de Lie sous-jacente à une algèbre de type $(\mathscr{P}_1)$ si et seulement si il en est de même de sa complexifiée.*

En effet g est réductive dans sa complexifiée.

Plus encore, on a :

PROPOSITION 1.2. — *L'algèbre de Lie sous-jacente à une algèbre de type* $(\mathscr{P}_1)$ *est nécessairement résoluble.*

Comme une algèbre de Lie semi-simple n'est pas sous-jacente à une structure de type $(\mathscr{P}_1)$, il suffira de prendre la décomposition de Levi de g pour constater que g coïncide avec son radical.

Noter aussi qu'un sous-groupe maximal compact étant réductif dans le groupe, on pourra assurer qu'un sous-groupe compact maximal d'un groupe de Lie dont l'algèbre de Lie est sous-jacente à une structure de type $(\mathscr{P}_1)$ est un toroïde.

2.

PROPOSITION 2.1. — *Si un groupe de Lie réel (resp. complexe)* G *admet une connexion plate invariante réelle (resp. complexe) dont la* 1*-forme prend ses valeurs dans* $\mathrm{ad}\,(g)$ *alors* G *est résoluble.*

Démonstration. — L'algèbre de Lie g de G est munie d'une structure d'algèbre à associateur symétrique à gauche $u.v = \mathrm{ad}_{f(u)}v$ où $f \in \mathrm{End}\,(g)$; ceci équivaut à l'existence d'un endomorphisme f d'espace vectoriel vérifiant

$$[u, v] = [f(u), v] + [u, f(v)] \tag{3}$$
$$[f\,[u, v], w] = [[f(u), f(v)], w] \tag{3'}$$

quels que soient $u, v, w \in g$.

Soit D une dérivation de l'algèbre de Lie g, la relation (3) donne :

$$[\mathrm{D}u, v] + [u, \mathrm{D}v] = [\mathrm{D}f(u), v] + [f(u), \mathrm{D}v] + [\mathrm{D}u, f(v)] + [u, \mathrm{D}f(v)]$$

or

$$[f(u), \mathrm{D}v] = [u, \mathrm{D}v] - [u, f\mathrm{D}v]$$

et

$$[\mathrm{D}u, f(v)] = [\mathrm{D}u, v] - [f\mathrm{D}u, v]$$

il vient :

$$\{[\mathrm{D}f(u), v] - [f\mathrm{D}u, v]\} - \{[u, f\mathrm{D}v] - [u, \mathrm{D}f(v)]\} = 0$$

donc

$$[[D, f](u), v] = [u, [f, D]v] = [[D, f]v, u]$$

En particulier pour $D = \mathrm{ad}_{u+2f(u)}$ on aura $[[\mathrm{ad}_{u+2f(u)}, f]v, w]$ symétrique en v et w.

$$\begin{aligned}[\mathrm{ad}_{u+2f(v)}, f]v &= [u + 2f(u), f(v)] - f[u + 2f(u), v] \\ &= [u, f(v)] + 2[f(u), f(v)] - 2f[u, v] - f\{2[f(u), v] - [u, v]\} \\ &= -vu - f(uv + vu) + 2[f(u), f(v)] - 2f[u, v].\end{aligned}$$

Mais $[f(u), f(v)] - f[u, v]$ appartenant au centre de g d'après (3'), l'expression $-vu - f(uv + vu)$ vérifie encore $[-vu - f(uv + vu), w]$ symétrique en v et w.

$$u * v = -vu - f(uv + vu)$$

définie un produit de type $(\mathscr{P}_1)$ car

$$u * v - v * u = -vu + uv = [u, v] \qquad \text{et} \qquad [u * v, w]$$

est symétrique en v et w. L'assertion découle alors de la proposition 1.2.

3.

Étudions les algèbres de Lie qui sont sous-jacentes à une structure d'algèbre à associateur symétrique à gauche du type : $u.v = \mathrm{ad}_{f(u)}v$; $f \in \mathrm{End.}\,(g)$. L'endomorphisme f vérifie donc

$$[u, v] = [f(u), v] + [u, f(v)].$$

Considérons d'abord le cas particulier où f est un automorphisme de g.

Proposition 3.1. — *g est munie d'une structure à associateur symétrique $u.v = \mathrm{ad}_{f(u)}v$ où f est un automorphisme d'algèbre de Lie si et seulement si g est 2-nilpotente.*

L'inverse de f vérifie la relation :

$$f^{-1}([x, y]) = [f^{-1}(x), y] + [x, f^{-1}(y)]$$

et, est aussi un homomorphisme d'algèbre de Lie. La démonstration de la proposition est évidente à partir du lemme suivant :

LEMME 3.1. — Une algèbre de Lie admet un automorphisme qui est une dérivation si et seulement si elle est 2-nilpotente.

Soit α un tel automorphisme et $g = \Sigma g_{\mu_i}$ la décomposition primaire de g (ou de sa complexifiée si g réelle) relative à α. Le fait que α soit un automorphisme et une dérivation entraîne ([3]) :

$$[g_{\mu_i}, g_{\mu_j}] = \begin{cases} 0 \\ \text{ou} \\ \subset g_{\mu_i\mu_j} \qquad \text{si} \qquad \mu_i\mu_j \text{ est valeur propre} \end{cases}$$

$$[g_{\mu_i}, g_{\mu_j}] = \begin{cases} 0 \\ \text{ou} \\ \subset g_{\mu_i+\mu_j} \qquad \text{si} \qquad \mu_i + \mu_j \text{ est valeur propre} \end{cases}$$

Par conséquent si $x \in g_{\mu_i}$, $y \in g_{\mu_j}$

$$[x, y] \neq 0 \Longrightarrow \mu_i\mu_j = \mu_i + \mu_j$$

est encore valeur propre.

Pour $z \in g_{\mu_k}$

$$\begin{aligned}[][[x, y], z] \neq 0 \Longrightarrow (\mu_i\mu_j).\mu_k &= (\mu_i\mu_j) + \mu_k \\ &= \mu_i + \mu_j + \mu_k = (\mu_i + \mu_j)\mu_k\end{aligned}$$

Jacobi indiquant, que l'un des crochets $[y, z]$ ou $[x, z]$ est non nul cela ajoute des relations au système qui alors n'a pas de solution non nulle. Ainsi $[[g, g], g] = C^2g = 0$, c'est-à-dire g est 2-nilpotente.

Réciproquement, si g est 2-nilpotente il suffira de poser $\alpha(x) = 4x$ pour $x \in Dg$ et $\alpha(x) = 2x$ pour x élément d'un sous-espace supplémentaire de Dg dans g, pour obtenir un endomorphisme qui est à la fois un automorphisme et une dérivation. Q.E.D.

Étudions le cas où l'algèbre g est sans centre.

$u.v = \mathrm{ad}_{f(u)}v$ est une structure à associateur symétrique équivaut aux relations

$$(4) \qquad [x, y] = [f(x), y] + [x, f(y)]$$

$$(4') \qquad f[x, y] = [f(x), f(y)]$$

Soit $g = \Sigma g_{\lambda_i}$ la décomposition primaire de g relative à f qui peut s'écrire :

$$g = g_0 \oplus g_1 \oplus g' \oplus B$$

avec

$$g_0 = \{x \in g / f^l(x) = 0 \quad \text{pour un certain } l\}$$
$$g_1 = \{x \in g / (f - \mathrm{I}d)^l(x) = 0 \quad \text{pour un certain } l\}$$
$$g' = g_\alpha \oplus g_\beta$$

avec

$$\alpha = 1/2 + i\sqrt{3}/2 \qquad \text{et} \qquad \beta = 1/2 - i\sqrt{3}/2$$

$B = \Sigma_{\lambda_i}$ sommation pour λ_i différent de $0, 1, \alpha, \beta$.

La formule :

(5)
$$(1 - \lambda - \mu)^p[x, y] = \sum_{0 \leqslant q \leqslant p} \binom{p}{q} [(f - \lambda \mathrm{I})^q(x), (f - \mu \mathrm{I})^{p-q}(y)]$$

provenant de la relation (4) indique que :

Pour $x \in g_{\lambda_i} y \in g_{\lambda_j}$, si $[x, y] \neq 0$ alors $\lambda_i + \lambda_j = 1$. La relation (2) dit que : $[x, y] \in g_{\lambda_i \lambda_j}$.

Ainsi pour $\lambda_i \neq \dfrac{1}{2}$ chaque g_{λ_i} est abélien.

On constate que $[g_0 + g_1 + g_\alpha + g_\beta, B] = 0$ et que, la restriction de f à la sous-algèbre B étant un automorphisme de B, d'après la proposition 3.1, B est 2-nilpotente.

Mais alors l'idéal dérivé $D(B)$ vérifie :

$$[D(B), B] = 0 \qquad \text{et} \qquad [D(B), g_0 + g_1 + g'] = 0$$

donc $D(B) \subset z(g) = 0$ et B est abélienne, donc nécessairement nulle. Les valeurs de α et β sont telles que

$$\alpha + \beta = 1 = \alpha . \beta \qquad \text{donc} \qquad [g_\alpha, g_\beta] \subset g_1 ;$$

mais la relation de Jacobi entraîne que $[g_\alpha, g_\beta] \subset z(g)$ et par conséquent g' est abélienne.

Les relations

(6)
$$[x, y] = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} [f^{(k)}(x), f^{(n-k)}(y)]$$

et

$$f\,[x, y] = [f(x), f(y)]$$

indiquent que g_0 est un idéal abélien.

Ainsi l'algèbre g, sans centre, s'écrit $g = g_0 \oplus g_1$ où g_0 est un idéal abélien et g_1 une sous-algèbre abélienne.

Réciproquement, si une algèbre de Lie g est de la forme $g_0 \oplus g_1$ c'est-à-dire extension inessentielle d'une abélienne par une abélienne alors la projection de g sur g_1, parallèlement à g_0, définit un endomorphisme f associé à une structure à associateur symétrique à gauche du type $u.v = \mathrm{ad}_{f(u)}v$.

Si g est réelle, une telle décomposition de sa complexifiée, induit sur g une décomposition de même nature.

Tout ceci peut s'énoncer :

Théorème A. — *Une algèbre de Lie g, sans centre, admet une structure d'algèbre symétrique à gauche du type*

$$u.v = \mathrm{ad}_{f(u)}v \quad u, v \in g,$$

si et seulement si : $g = g_0 \oplus g_1$ avec g_0 idéal abélien et g_1 sous-algèbre abélienne.

Remarquons qu'une algèbre *de Lie* du type précédent est nécessairement 2 résoluble.

Corollaire. — *Soit* G *un groupe de Lie de centre discret et d'algèbre de Lie g;* G *admet une connexion plate invariante à valeurs dans* $\mathrm{ad}(g)$ *si et seulement si g est une extension inessentielle d'une algèbre abélienne par une algèbre abélienne.*

4.

Supposons maintenant que g ait un centre, $z(g)$, non nul; l'endomorphisme f en plus de la condition

$$[x, y] = [f(x), y] + [x, f(y)]$$

vérifie seulement $\mathrm{ad}_{f[x,y]} = \mathrm{ad}_{[f(x),\, f(y)]}$ au lieu d'être un homomorphisme.

Considérons encore la décomposition primaire de g (ou de sa complexifiée) relative à f: $g = g_0 + g_1 + g' + B$ avec g_0, g_1, g_α, g_β les espaces correspondants aux valeurs propres 0, 1, $\alpha = 1/2 + i\sqrt{3}/2$, $\beta = 1/2 - i\sqrt{3}/2$, $g' = g_\alpha + g_\beta$; $B = \Sigma g_{\lambda_i}$ pour λ_i valeur propre différente de 0, 1, α, β.

f étant un homomorphisme d'algèbre de Lie modulo le centre, si λ et μ sont deux valeurs propres arbitraires de f on aura :

$$[g_\lambda, g_\mu] \subset g_{\lambda\mu} + z(g)$$

Mais, d'après la formule (5), le crochet de g_λ avec g_μ ne sera non nul que si $\lambda + \mu = 1$. Chaque g_1 est abélien sauf si $\lambda = 1/2$. On en déduit aussi que

$$[g_0 + g_1, g' + B] = 0 \qquad \text{et} \qquad [g_0 + g_1 + g', B] = 0.$$

Nous savons que $[g_\alpha, g_\beta] \subset g_1$ mais

$$[g_\alpha, g_0 + g_1 + B] = [g_\beta, g_0 + g_1 + B] = 0$$

donc par Jacobi on montre que

$$[g_\alpha, g_\beta] \subset z(g) \qquad \text{ou} \qquad [g', g'] \subset g_1 \cap z(g).$$

La relation (6) indique que g_0 est une sous-algèbre abélienne, mais au lieu d'être un idéal, elle vérifie :

$$[g_0, g_1] \subset g_0 + z(g).$$

On démontre comme au paragraphe précédent que B est une sous-algèbre 2-nilpotente.

THÉORÈME B. — *Un groupe de Lie* G, *d'algèbre* g, *admet une connexion linéaire plate invariante à valeur dans* ad (g) *si et seulement si* g *se décompose sous la forme :*

$$g = g_0 \oplus g_1 \oplus g' \oplus B$$

où B *est une sous-algèbre 2-nilpotente en somme directe avec* $g_0 \oplus g_1 \oplus g'$, g' *un sous-espace tel que* $[g', g'] \subset g_1 \cap z(g)$, g_0 *et* g_1 *des sous-algèbres abéliennes telles que*

$$[g_0, g_1] \subset g_0 + z(g).$$

En effet, si g admet une telle décomposition on peut construire une connexion linéaire plate invariante à valeurs dans ad (g) en posant :

$$\nabla_u v = \mathrm{ad}_{f(u)} v \quad \text{avec} \quad f(u) = u_{g_1} + 1/2 u_{g'} + 1/2 u_{\mathrm{B}}$$

(u_{g_1}, $u_{g'}$, u_B étant les projections de u respectivement sur g_1, g' et B).

$$\nabla_u v = [u_{g_1} + 1/2u_{g'} + 1/2u_{B'} v]$$
$$= [u_{g_1}, v_{g_0}] + 1/2[u_{g'}, v_{g'}] + 1/2[u_B, v_B]$$

donc

$$\nabla_u v - \nabla_v u = [u, v] = [u_{g_0}, v_{g_1}] + [u_{g_1}, v_{g_0}]$$
$$+ [u_{g'}, v_{g'}] + [u_{B'}, v_B].$$
$$[f(u), f(v)] = 1/4[u_{g'}, v_{g'}] + 1/4[u_B, v_B]$$

et

$$f[u, v] = [u_{g'}, v_{g'}] + 1/2[u_B, v_B].$$

Tous ces termes étant dans le centre :

$$\mathrm{ad}_{f[u,v]} = \mathrm{ad}_{[f(u), f(v)]} = 0.$$

Une structure de « type ($\mathscr{P}_1$) » associée à cette connexion est :

$$u * v = -\nabla_v u + f(\nabla_u v + \nabla_v u)$$

Elle vérifie la propriété $(u * v) * w = (u * w) * v$ et est alors dite de « type ($\mathscr{P}$) ». L'existence d'une telle structure est une condition suffisante pour la platitude de la Int (g)-structure invariante sur G définie à l'aide d'une base de g.

On remarque que, si $z(g) = 0$, $g' = B = 0$ et la connexion devient $\nabla_u v = [u_{g_1}, v]$.

Si $g_0 = g_1 = g' = 0$ on retrouve la connexion sur les algèbres 2-nilpotentes, donnée au paragraphe 3.

5.

Intéressons-nous maintenant au cas où la connexion plate invariante prend ses valeurs dans l'algèbre, Der (g), des dérivations de l'algèbre de Lie g.

Considérons un élément $\lambda \in g^* \otimes g^* \otimes \mathrm{Der}(g)$ vérifiant :

(7) $$\lambda(u)v - \lambda(v)u = \mathrm{ad}_{[n,v]}$$

$$(\lambda(u)v)w = (\lambda(u)w)v \qquad \forall u, v, w \in g$$

et supposons que g ne soit pas résoluble. L'algèbre quotient $g/_{R(g)}$ où $R(g)$ est le radical de g, est semi-simple.

Si $v_1 \in R(g)$ et $u, w \in g$ l'élément $(\lambda(u)v_1)w = (\lambda(u)w)v_1$ appartient à $R(g)$ car $\lambda(u)v \in \operatorname{Der}(g)$.

Pour $u_1 \in R(g)$ l'identité $\lambda(u_1)v - \lambda(v)u_1 = \operatorname{ad}_{[u_1, v]}$ rend possible d'interpréter $\lambda(u_1)$ comme une application de g dans $\operatorname{Hom}(g, R(g))$. Par conséquent l'application $\bar{\lambda}$ qui au triplet $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$ d'éléments de $g/_{R(g)}$ fait correspondre l'élément $\overline{(\lambda(u)v)w}$ est bien définie. Elle jouit aussi des mêmes propriétés que λ.

Cependant le fait que le premier prolongement d'une algèbre de Lie semi-simple (ou plus précisément de son algèbre adjointe) est nul montre la non-existence d'un tel $\bar{\lambda}$ pour ces algèbres. Ainsi l'existence de λ sur g, satisfaisant (7), implique la nullité de $g/_{R(g)}$, c'est-à-dire la résolubilité de l'algèbre.

Avec les notations données dans l'introduction, nous allons montrer :

Théorème C. — *Si un groupe de Lie* G, *d'algèbre* g, *admet une connexion linéaire plate invariante à valeurs dans* $\operatorname{Der}(g)$, *alors l'algèbre de Lie* g *est résoluble.*

Montrons d'abord que l'expression $[D, L_\alpha](\beta) - L_{D(\alpha)}(\beta)$ est symétrique en α et β (i.e. appartient à $(\operatorname{Der} g)^{(1)}$), $D \in \operatorname{Der} g$.

$$\begin{aligned}\{[D, L_\alpha](\beta) - L_{D(\alpha)}(\beta)\} &- \{[D, L_\beta](\alpha) - L_{D(\beta)}(\alpha)\}\\ &= D(L_\alpha\beta - L_\beta\alpha) - L_\alpha D(\beta) + L_\beta D\alpha - L_{D(\alpha)}\beta + L_{D(\beta)}\alpha\\ &= D[\alpha, \beta] - [D\alpha, \beta] - [\alpha, D\beta] = 0.\end{aligned}$$

Considérons maintenant la dérivation $\operatorname{ad}_u + 2L_u$ où $u \in g$ et posons

$$(\lambda(u)v)w = [\operatorname{ad}_u + 2L_u, L_v](w) - L_{(\operatorname{ad}_u + 2L_u)(v)}(w)$$

d'après ce qui précède cette expression est symétrique en v et w.

Montrons que : $\lambda(u)v - \lambda(v)u = \operatorname{ad}_{[u, v]}$

$$\begin{aligned}[\operatorname{ad}_u + 2L_u, L_v] &- L_{[u, v] + 2L_u v} - [\operatorname{ad}_v + 2L_v, L_u] + L_{[v, u] + 2L_v u}\\ &= [\operatorname{ad}_u, L_v] - [\operatorname{ad}_v, L_u] + 4[L_u, L_v] - 2L_{[u, v]} - L_{2(L_u v - L_v u)}\end{aligned}$$

L étant un homomorphisme d'algèbre de Lie il reste :

$$[\operatorname{ad}_u, L_v] - [\operatorname{ad}_v, L_u] = -\operatorname{ad}_{L_v u} + \operatorname{ad}_{L_u v} = \operatorname{ad}_{[u, v]}$$

ainsi le λ écrit vérifie les conditions (7) et d'après ce qui précède g est résoluble.

Exemples :

1) Considérons l'algèbre de Lie g déterminée par le tableau :

$$[e_1, g] = [e_4, g] = [e_2, e_6] = [e_3, e_5] = [e_3, e_6] = 0$$
$$[e_2, e_3] = e_1, \ [e_2, e_5] = e_4, \ [e_5, e_6] = e_6$$

Une décomposition de g comme celle du théorème B est

$$g = g_0 \oplus g_1 \oplus \mathrm{B}$$

avec g_0 engendré par e_2, e_6; g_1 engendré par e_3, e_5, B engendré par e_1, e_4.

On a bien $[g_0 \oplus g_1, \mathrm{B}] = 0$, $[g_0, g_1] \subset g_0 + z(g)$. L'endomorphisme

$$f(e_1) = \lambda e_1, \ f(e_2) = 0, \ f(e_3) = e_3$$
$$f(e_4) = \lambda e_4, \ f(e_5) = e_5, \ f(e_6) = 0$$

(où λ est un coefficient arbitraire) définira une connexion linéaire invariante plate à valeurs dans ad (g) sur le groupe de Lie simplement connexe dont l'algèbre de Lie est g.

De plus si $u = \Sigma u_i e_i$, $v = \Sigma v_i e_i$ sont deux éléments quelconques de f, une structure de type $(\mathcal{P}_1)$ associée est donnée par :

$$u * v = - [v_3 e_3 + v_5 e_5, u] = u_2 v_3 e_1 + u_2 v_3 e_4 - u_6 v_5 e_6$$

On remarque que ce produit vérifie en plus

$$0 = (u * v) * w = (u * w) * v = 0$$

2) Soit g l'algèbre donnée par

$$[e_1, e_2] = e_5 [e_1, e_3] = e_3 [e_2, e_4] = e_4$$
$$[e_1, e_4] = [e_2, e_3] = [e_3, e_4] = [e_5, g] = 0$$

Cette algèbre ne vérifie pas les conditions du théorème B; il n'existe pas de connexion plate invariante à valeur dans ad g, sur le groupe de Lie, G, associé à g. Par contre on peut munir g d'une structure de type $(\mathcal{P}_1)$ en posant :

$$u * v = - (u_3 v_1) e_3 - (u_4 v_2) e_4 + u_1 v_2 e_5.$$

Ce produit vérifie $(u * v) * w = (u * w) * v$; ce qui assure la platitude de la Int (g)-structure définie sur G par l'action du groupe des automorphismes intérieurs de G sur le parallélisme de G défini par une base g.

3) Tous les groupes de Lie non semi-simples de dimension $\leqslant 3$ et tous les groupes nilpotents de dimension 4 admettent une connexion plate invariante à valeurs dans l'algèbre adjointe.

BIBLIOGRAPHIE

[1] N. Boyom, Doctorat de 3e cycle « Algèbres à associateur symétrique et algèbres de Lie réductives » juin 1968, Grenoble.

[2] J. Helmstetter, Doctorat de 3e cycle « Radical et groupe formel d'une algèbre symétrique à gauche » novembre 1975, Grenoble.

[3] N. Jacobson, Lie Algebras, Interscience Publishers 1962.

[4] J. L. Koszul, Domaines bornés homogènes et orbites de groupes de transformations affines, *Bull. Soc. Math. France*, 89 (1961), 515-533.

[5] Singer-Sternberg, On the infinite groups of Lie and Cartan, *Journal d'Analyse de Jérusalem*, 15 (1965), 1-114.

[6] E. B. Vinberg, Convex homogeneous cones, 1963, *Translations of the Moscow Math. Soc.*, N° 12, 340-403.

Manuscrit reçu le 2 novembre 1976
Proposé par J. L. Koszul.

G. Giraud,
Institut de Mathématiques
Université des Sciences
et Techniques du Languedoc
Montpellier.

A. Medina,
Université des Sciences
et Techniques du Languedoc,
34000 Montpellier.
et Universidad Nacional
de Colombia
Bogota.