Annales de la faculté des sciences de Toulouse

David Sanchez

Phénomène de couche limite dans un modèle de ferromagnétisme

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 6e série, tome 11, nº 2 (2002), p. 239-261

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_2002_6_11_2_239_0>

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse Vol. XI, n° 2, 2002
pp. 239–261

Phénomène de couche limite dans un modèle de ferromagnétisme (*)

DAVID SANCHEZ (1)

RÉSUMÉ. — On étudie le comportement asymptotique des solutions des équations de Landau-Lifschitz lorsque le coefficient d'échange tend vers zéro. Au bord du matériau se forme alors une couche limite que nous allons décrire.

ABSTRACT. — In this paper we study the asymptotic behaviour of the solution of Landau-Lifschitz equations as the exchange coefficient goes to zero. In order to perform this limit in regular spaces, we have to take into account the singularity induced by a boundary layer term.

1. Introduction

Le micromagnétisme est l'étude des phénomènes électromagnétiques dans les matériaux dits ferromagnétiques. Ces matériaux sont caractérisés par une magnétisation spontanée modélisée par le moment magnétique, qui est un champ de vecteurs unitaires u défini dans Ω, le domaine où est confiné le matériau :

$$u \ : \Omega \rightarrow \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3.$$

Les variations de u sont décrites par l'équation de Landau-Lifschitz :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u \wedge H_e - u \wedge (u \wedge H_e) \text{ dans } \mathbb{R}^+ \times \Omega, \tag{1.1}$$

(*) Reçu le 19 décembre 2001, accepté le 21 janvier 2003

(1) Mathématiques Appliquées de Bordeaux, UMR 5466, Université Bordeaux 1, 351 Cours de la Libération, 33405 Talence Cedex, France.
e-mail : sanchez@math.u-bordeaux.fr

avec les conditions initiales et les conditions au bord

$$\begin{cases} u(0,x) = u_0(x) \text{ dans } \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ sur } \mathbb{R}^+ \times \Omega, \end{cases} \tag{1.2}$$

où ν est la normale au bord unitaire sortante, et où le champ efficace H_e est donné par :

$$H_e = \varepsilon^2 \Delta u + H(u),$$

$H(u)$ est appelé champ démagnétisant et Ω est un ouvert régulier de $\mathbb{R}^3$. Dans [5], Carbou et Fabrie démontrent l'existence locale et globale à données petites des solutions régulières de (1.1) dans le cas quasi-stationnaire lorsque le coefficient d'échange est fixé. Lorsque ε tend vers zéro, l'estimation obtenue donne un temps d'existence des solutions $\mathbb{H}^2$ en espace qui tend vers zéro. Ceci est dû à l'apparition d'une couche limite au bord de l'ouvert Ω que Carbou, Fabrie et Guès mettent en évidence dans [6] en effectuant un développement asymptotique de u à l'ordre 1 en ε.
Dans cette étude, nous allons remplacer le terme $H(u)$ par un champ d'anisotropie $\varphi(x,\xi) = -\nabla_\xi \Phi(x,\xi)$ où $\Phi(x,.)$ est une forme quadratique définie positive pour ξ dans $\mathbb{R}^3$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ en x sur $\mathbb{R}^3$:

$$H_e = \varepsilon^2 \Delta u + \varphi(x,u),$$

et nous poussons le développement asymptotique à l'ordre 2.

Remarque 1.1. — Le champ d'anisotropie $\varphi(x,\xi)$ apparait naturellement sous la forme du gradient d'une forme quadratique définie positive dans le modèle considéré. Nous utiliserons en fait que $\varphi(x,.)$ est une application linéaire à coefficients $\mathcal{C}^\infty$ qui opère naturellement dans les espaces de Sobolev.

Dans la suite, nous nous donnons $\psi : \Omega \to \mathbb{R}$, une fonction $\mathcal{C}^\infty$ telle que $\psi(x) = d(x, \partial\Omega)$ dans un voisinage $\mathcal{O}_1$ de $\partial\Omega$. On remarque que si x appartient à $\partial\Omega$, $\nabla\psi(x) = -\nu(x)$ et que, de plus, $\dfrac{\partial \psi}{\partial \nu} = -1$. D'autre part, $|\nabla\psi| = 1$ dans $\mathcal{O}_1$. On note $\nu(x) = -\nabla\psi(x)$ dans $\mathcal{O}_1$. Soit aussi μ une fonction de troncature $\mathcal{C}^\infty$ à support compact contenu dans $\mathcal{O}_1$.

On cherche un développement asymptotique de u, la solution de (1.1) et (1.2), sous la forme :

$$u(t,x) = U^0\left(t,x,\frac{\psi(x)}{\varepsilon}\right) + \varepsilon U^1\left(t,x,\frac{\psi(x)}{\varepsilon}\right) + \varepsilon^2 U^2\left(t,x,\frac{\psi(x)}{\varepsilon}\right) + \dots$$

où les fonctions U^i se décomposent sous la forme :

$$U^i(t,x,z) = \overline{U^i}(t,x) + \widetilde{U^i}(t,x,z),$$

avec $\overline{U^i}(t,x) = \lim_{z\to+\infty} U^i(t,x,z)$.
On suppose de plus que $\widetilde{U^i}$, ainsi que toutes ses dérivées partielles aussi bien en x qu'en z tendent vers 0 lorsque z tend vers $+\infty$.

THÉORÈME 1.1. — *Soit* $\overline{u}_0^0 \in \mathbb{W}^{5,\infty}(\Omega)$ *telle que* $|\overline{u}_0^0| = 1$ *dans* Ω *et* $\dfrac{\partial \overline{u}_0^0}{\partial \nu} = 0$ *sur* $\partial\Omega$. *Il existe alors des fonctions*

- $\overline{U^0} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+, \mathbb{W}^{5,\infty}(\Omega))$,
- $\widetilde{U^1} \in \mathbb{H}^2\left(0,T; \mathbb{W}^{4,\infty}(\mathcal{O}_1) \otimes \mathbb{H}^4(\mathbb{R}^+)\right)$, *pour tout* $T > 0$,
- $\overline{U^2} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+, \mathbb{W}^{3,\infty}(\Omega))$,
- $\widetilde{U^2} \in \mathbb{H}^2\left(0,T; \mathbb{W}^{3,\infty}(\mathcal{O}_1) \otimes \mathbb{H}^4(\mathbb{R}^+)\right)$, *pour tout* $T > 0$.

telles que si la donnée initiale $u_0^\varepsilon(x)$ *est de la forme*

$$u_0^\varepsilon(x) = \overline{u}_0^0(x) + \varepsilon\widetilde{U^1}\left(t=0, x, \frac{\psi(x)}{\varepsilon}\right) + \varepsilon^2\widetilde{U^2}\left(t=0, x, \frac{\psi(x)}{\varepsilon}\right) + \varepsilon^2 v_0^\varepsilon(x),$$

où v_0^ε *vérifie que* $\|v_0^\varepsilon\|_{\mathbb{H}^1(\Omega)} + \varepsilon\|\Delta v_0^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}$ *est bornée indépendamment de* ε, *la solution* u^ε *de l'équation (1.1) avec la donnée initiale* u_0^ε *admet un développement asymptotique pour tout* $t < T^\varepsilon$ *de la forme :*

$$u^\varepsilon(t,x) = \overline{U^0}(t,x) + \varepsilon\mu(x)\widetilde{U^1}\left(t, x, \frac{\psi(x)}{\varepsilon}\right) + \varepsilon^2\left(\overline{U^2}(t,x) + \mu(x)\widetilde{U^2}\left(t, x, \frac{\psi(x)}{\varepsilon}\right)\right) + \varepsilon^2 v^\varepsilon(t,x),$$

où T^ε *est le temps maximum d'existence de* u^ε *et où* $r^\varepsilon \in \mathbb{L}^\infty(0,T;\mathbb{H}^1(\Omega))$, $\varepsilon r^\varepsilon \in \mathbb{L}^\infty(0,T;\mathbb{H}^2(\Omega))$ *et* $\varepsilon^2 r^\varepsilon \in \mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{H}^3(\Omega))$ *pour tout* $T < T_\varepsilon$. *De plus, il existe une constante* C_T *indépendante de* ε *qui majore les normes précédentes, et le temps d'existence* T_ε *tend vers* $+\infty$ *lorsque* ε *tend vers zéro.*

Remarque 1.2. — Les données initiales pour tous les profils autres que $\overline{U^0}$ seront choisies de telle sorte qu'elles relèvent la condition au bord. Nous nous plaçons ainsi dans le cadre de données initiales bien préparées.

La partie 2 renferme des lemmes de régularité utiles dans la suite. Dans la partie 3, on démontre le théorème 1.1 en effectuant un développement asymptotique de la solution u^ε de (1.1) : on étudie dans la partie 3.2 les profils de u^ε et on prouve l'existence du reste au moyen d'estimations d'énergie dans la partie 3.3.

2. Résultats préliminaires

LEMME 2.1 (voir Adams [1], Agmon [2]). — *Soit Ω un ouvert borné régulier. Il existe une constante C telle que pour tout u dans $\mathbb{H}^2(\Omega)$ tel que $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ sur $\partial\Omega$,*

$$\|u\|_{\mathbb{H}^2(\Omega)} \leq C\left(\|u\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \|\Delta u\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\right)^{1/2},$$

$$\|\nabla u\|^2_{\mathbb{L}^4(\Omega)} \leq C\|u\|_{\mathbb{L}^\infty(\Omega)}\left(\|u\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \|\Delta u\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\right)^{1/2}.$$

Pour tout $u \in \mathbb{H}^1(\Omega)$ avec Ω dans $\mathbb{R}^3$, on a :

$$\|u\|_{\mathbb{L}^3(\Omega)} \leq C\|u\|_{\mathbb{H}^{1/2}(\Omega)} \leq C\left(\|u\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \|u\|^{1/2}_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\|\nabla u\|^{1/2}_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\right).$$

THÉORÈME 2.1 *(voir Dautray-Lions [7] et Adams [1]).— Soient $1 \leq p \leq +\infty$, et Ω un ouvert régulier de $\mathbb{R}^n$. On a alors :*

$$\mathbb{W}^{m,p}(\Omega) \subset \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}),$$

dès que $mp > n$, avec injection continue. Si de plus Ω est borné, l'injection est compacte. Si $mp < n$, on a

$$\mathbb{W}^{m,p}(\Omega) \subset \mathbb{L}^q(\Omega),$$

pour $p \leq q \leq np/(n-mp)$, avec injection continue. Si de plus Ω est borné, l'injection est également compacte si $q < np/(n-mp)$. Si $mp = n$, l'injection précédente reste vraie avec $p \leq q < +\infty$.

THÉORÈME 2.2. — *Traces pour les espaces $\mathbb{W}^{m,p}(\Omega)$, $1 < p \leq +\infty$. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ régulier, et soit $m \in \mathbb{N}^*$, alors l'application*

$$u \mapsto \gamma u = \{\gamma_0 u, \ldots, \gamma_{m-1} u\}$$

(où $\gamma_j u = \dfrac{\partial^j u}{\partial n^j}$ sur $\Gamma = \partial\Omega$ est la trace de la dérivée normale d'ordre j de u sur Γ) est continue et surjective de $\mathbb{W}^{m,p}(\Omega)$ dans $\displaystyle\prod_{k=0}^{m-1} \mathbb{W}^{m-k-1/p,p}(\Gamma)$.

En particulier, une fonction de $\mathbb{W}^{m,p}(\Omega)$ admet une trace dans $\mathbb{W}^{m-1/p,p}(\Gamma)$.

LEMME 2.2 (GRONWALL). — *Lemme de comparaison*
Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$, croissante en sa seconde variable. Supposons de plus que $y : I \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ est une fonction continue satisfaisant :

$$\forall t > 0, \; y(t) \leq y_0 + \int_0^t f(\tau, y(\tau)) \, d\tau.$$

Soit $z : J \mapsto \mathbb{R}$ la solution maximale de

$$\begin{cases} z'(t) = f(t, z(t)), \\ z(0) = y_0. \end{cases}$$

Alors $\forall t \in I \cap J$, $y(t) \leq z(t)$.

3. Construction du développement asymptotique de u^ε

Pour effectuer le développement asymptotique, on travaille avec une forme équivalente de (1.1) (car $|u| = 1$ p.p.) :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \varepsilon^2 \Delta u = \varepsilon^2 u |\nabla u|^2 + \varepsilon^2 u \wedge \Delta u + u \wedge \varphi(x,u) - u \wedge (u \wedge \varphi(x,u)), \quad (3.1)$$

qui isole le terme dissipatif (voir [5]).
On va maintenant chercher les équations vérifiées par les profils U^i. Pour cela, on remplace u par son développement asymptotique dans (3.1), et on identifie les termes aux différents ordres à 0.

3.1. Les équations

Ordre -1 : La condition au bord dans (1.2) donne $\dfrac{\partial \psi}{\partial \nu} U_z^0 = 0$ pour x appartenant à $\partial\Omega$ et $z = 0$. Donc :

$$U_z^0 = 0 \text{ pour } x \in \mathcal{O}_1 \text{ et } z = 0.$$

Ordre 0 : on peut tirer de l'équation (3.1) :

$$\frac{\partial U^0}{\partial t} - |\nabla\psi|^2 U_{zz}^0 = |\nabla\psi|^2 |U_z^0|^2 U_0 + |\nabla\psi|^2 U^0 \wedge U_{zz}^0$$
$$+ U^0 \wedge \varphi(x, U^0) - U^0 \wedge (U^0 \wedge \varphi(x, U^0)).$$

En faisant tendre z vers $+\infty$, on obtient :

$$\frac{\partial \overline{U^0}}{\partial t} = \overline{U^0} \wedge \varphi(x, \overline{U^0}) - \overline{U^0} \wedge (\overline{U^0} \wedge \varphi(x, \overline{U^0})). \quad (3.2)$$

En soustrayant de l'équation sur U^0 l'équation obtenue pour $\overline{U^0}$, on obtient l'équation suivante :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \widetilde{U^0}}{\partial t} - |\nabla\psi|^2\widetilde{U^0_{zz}} = \; & |\nabla\psi|^2|\widetilde{U^0_z}|^2(\overline{U^0}+\widetilde{U^0}) + |\nabla\psi|^2(\overline{U^0}+\widetilde{U^0})\wedge \widetilde{U^0_{zz}} \\ & +\widetilde{U^0}\wedge\varphi(x,\widetilde{U^0}) + \widetilde{U^0}\wedge\varphi(x,\overline{U^0}) + \overline{U^0}\wedge\varphi(x,\widetilde{U^0}) \\ & -\widetilde{U^0}\wedge(U^0\wedge\varphi(x,U^0)) - U^0\wedge(\widetilde{U^0}\wedge\varphi(x,U^0)) \\ & -U^0\wedge(U^0\wedge\varphi(x,\widetilde{U^0})).\end{aligned}$$

Or, à l'ordre -1, on avait obtenu que $U^0_z = 0$ pour x dans $\mathcal{O}_1$ et $z = 0$. On peut donc prendre $\widetilde{U^0} \equiv 0$, solution de l'équation puisque $\widetilde{u}^0_0$ est nul.
On écrit maintenant la condition de Neumann à l'ordre 0 :

$$\frac{\partial \overline{U^0}}{\partial \nu} + \widetilde{U^1_z}\frac{\partial\psi}{\partial\nu} = 0 \text{ pour } x \in \partial\Omega \text{ et } z = 0.$$

Ordre 1 : A l'ordre 1, on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{\partial U^1}{\partial t} - |\nabla\psi|^2 U^1_{zz} = \; & |\nabla\psi|^2 U^0\wedge U^1_{zz} + U^0\wedge\varphi(x,U^1) + U^1\wedge\varphi(x,U^0) \\ & -U^1\wedge(U^0\wedge\varphi(x,U^0)) - U^0\wedge(U^1\wedge\varphi(x,U^0)) \\ & -U^0\wedge(U^0\wedge\varphi(x,U^1)).\end{aligned}$$

En faisant tendre z vers $+\infty$, on a :

$$\begin{aligned}\frac{\partial\overline{U^1}}{\partial t} = \; & \overline{U^0}\wedge\varphi(x,\overline{U^1}) + \overline{U^1}\wedge\varphi(x,\overline{U^0}) - \overline{U^1}\wedge(\overline{U^0}\wedge\varphi(x,\overline{U^0})) \\ & -\overline{U^0}\wedge(\overline{U^1}\wedge\varphi(x,\overline{U^0})) - \overline{U^0}\wedge(\overline{U^0}\wedge\varphi(x,\overline{U^1})).\end{aligned}$$

Or la condition initiale est $\overline{U^1} = 0$, donc on peut prendre $\overline{U^1} \equiv 0$ pour tout (t,x) dans $\mathbb{R}^+ \times \Omega$. Pour $\widetilde{U^1}$, nous obtenons alors l'équation suivante :

$$\begin{aligned}\frac{\partial\widetilde{U^1}}{\partial t} - |\nabla\psi|^2\widetilde{U^1_{zz}} = \; & |\nabla\psi|^2\overline{U^0}\wedge\widetilde{U^1_{zz}} \\ & +\overline{U^0}\wedge\varphi(x,\widetilde{U^1}) + \widetilde{U^1}\wedge\varphi(x,\overline{U^0}) \\ & -\widetilde{U^1}\wedge(\overline{U^0}\wedge\varphi(x,\overline{U^0})) \\ & -\overline{U^0}\wedge(\widetilde{U^1}\wedge\varphi(x,\overline{U^0})) \\ & -\overline{U^0}\wedge(\overline{U^0}\wedge\varphi(x,\widetilde{U^1})).\end{aligned} \tag{3.3}$$

La condition de Neumann à l'ordre 1 nous donne :

$$\frac{\partial U^1}{\partial\nu} + \frac{\partial\psi}{\partial\nu}U^2_z = 0 \text{ pour } x \in \partial\Omega \text{ et } z = 0.$$

Ordre 2 : On obtient :

– pour $\overline{U^2}$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \overline{U^2}}{\partial t} = \quad & \overline{U^0} \wedge \varphi(x, \overline{U^2}) + \overline{U^2} \wedge \varphi(x, \overline{U^0}) \\
& - \overline{U^2} \wedge (\overline{U^0} \wedge \varphi(x, \overline{U^0})) \\
& - \overline{U^0} \wedge (\overline{U^2} \wedge \varphi(x, \overline{U^0})) \\
& - \overline{U^0} \wedge (\overline{U^0} \wedge \varphi(x, \overline{U^2})) \\
& + |\nabla \overline{U^0}|^2 \overline{U^0} + \overline{U^0} \wedge \Delta \overline{U^0} + \Delta \overline{U^0},
\end{aligned} \tag{3.4}$$

– pour $\widetilde{U^2}$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \widetilde{U^2}}{\partial t} - |\nabla \psi|^2 \widetilde{U^2_{zz}} = \quad & |\nabla \psi|^2 \overline{U^0} \wedge \widetilde{U^2_{zz}} \\
& + \overline{U^0} \wedge \varphi(x, \widetilde{U^2}) + \widetilde{U^2} \wedge \varphi(x, \overline{U^0}) \\
& - \widetilde{U^2} \wedge (\overline{U^0} \wedge \varphi(x, \overline{U^0})) \\
& - \overline{U^0} \wedge (\overline{U^0} \wedge \varphi(x, \widetilde{U^2})) \\
& - \overline{U^0} \wedge (\widetilde{U^2} \wedge \varphi(x, \overline{U^0})) \\
& + \nabla \widetilde{U^1_z} \nabla \psi + \widetilde{U^1_z} \Delta \psi \\
& + |\nabla \psi|^2 |\widetilde{U^1_z}|^2 \overline{U^0} + 2 \nabla \overline{U^0} \widetilde{U^1_z} \nabla \psi \overline{U^0} \\
& + \overline{U^0} \wedge (2 \nabla \widetilde{U^1_z} \nabla \psi + \widetilde{U^1_z} \Delta \psi) \\
& + |\nabla \psi|^2 \widetilde{U^1} \wedge \widetilde{U^1_{zz}} + \widetilde{U^1} \wedge \varphi(x, \widetilde{U^1}) \\
& - \widetilde{U^1} \wedge (\overline{U^0} \wedge \varphi(x, \widetilde{U^1})) \\
& - \widetilde{U^1} \wedge (\widetilde{U^1} \wedge \varphi(x, \overline{U^0})) \\
& - \overline{U^0} \wedge (\widetilde{U^1} \wedge \varphi(x, \widetilde{U^1})).
\end{aligned} \tag{3.5}$$

3.2. Existence des profils

3.2.1. Existence de $\overline{U^0}$

On définit $\overline{U^0}$ comme étant la solution de l'équation différentielle ordinaire en temps suivante :

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial \overline{U^0}}{\partial t} = \overline{U^0} \wedge \varphi(x, \overline{U^0}) - \overline{U^0} \wedge (\overline{U^0} \wedge \varphi(x, \overline{U^0})) \text{ sur } [0, T[\times \Omega, \\
\overline{U^0}(0, x) = \overline{u}_0^0(x) \text{ sur } \Omega.
\end{cases} \tag{3.6}$$

On a alors :

PROPOSITION 3.1. — *L'équation (3.6) admet une unique solution qui est dans* $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+, \mathbb{W}^{k,\infty}(\Omega))$ *dès que* $\overline{u_0^0}$ *appartient à* $\mathbb{W}^{k,\infty}(\Omega)$ *avec* $k \in \mathbb{N}$.

Preuve. — On utilise le théorème de Cauchy-Lipschitz dans $\mathbb{L}^\infty$ et on obtient l'existence et l'unicité de $\overline{U^0}$ sur un intervalle de temps $(0, T)$.
En multipliant l'équation par $\overline{U^0}$, on s'aperçoit que $\dfrac{\partial|\overline{U^0}|^2}{\partial t} = 0$, donc $\overline{U^0}$ reste de norme constante égale à 1 car $\overline{u_0^0}$ vérifie cette propriété, donc $\overline{U^0} \in \mathcal{C}^\infty(0, T; \mathbb{L}^\infty(\Omega))$. Nous allons maintenant montrer que $\overline{U^0}$ est dans $\mathcal{C}^\infty(0, T; \mathbb{W}^{k,\infty}(\Omega))$.
Pour cela, on dérive en espace l'équation (3.6), et on l'intègre en temps. On majore ensuite en norme $\mathbb{L}^\infty$, le second membre étant au plus linéaire en la dérivée en espace :

$$\|\nabla\overline{U^0}\|_{\mathbb{L}^\infty(\Omega)}(t) \leq \|\nabla u_0\|_{\mathbb{L}^\infty(\Omega)} + C\int_0^t \|\nabla\overline{U^0}\|_{\mathbb{L}^\infty(\Omega)}(s)\, ds.$$

Donc, d'après le lemme de Gronwall, $\overline{U^0} \in \mathcal{C}^\infty\left([0, T]; \mathbb{W}^{1,\infty}(\Omega)\right)$. On réitère le procédé pour les dérivées aux ordres supérieurs, le second membre de l'équation étant à chaque fois au plus linéaire en la dérivée d'ordre le plus élevé. On a finalement que $\overline{U^0} \in \mathcal{C}^\infty\left([0, T]; \mathbb{W}^{k,\infty}(\Omega)\right)$, à condition que la donnée initiale soit suffisamment régulière.
Le lemme de Gronwall appliqué à ces inégalités nous montre alors que $\overline{U^0}$ reste borné en norme $\mathbb{W}^{k,\infty}(\Omega)$ sur tout intervalle de temps borné, donc $\overline{U^0}$ est globale à valeurs dans $\mathbb{W}^{k,\infty}(\Omega)$. □

3.2.2. Existence de $\widetilde{U^1}$

On cherche une solution $\widetilde{U^1}$ de l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\widetilde{U^1}}{\partial t} - |\nabla\psi|^2\widetilde{U^1_{zz}} = & |\nabla\psi|^2\overline{U^0} \wedge \widetilde{U^1_{zz}} \\ & +\overline{U^0} \wedge \varphi(x, \widetilde{U^1}) + \widetilde{U^1} \wedge \varphi(x, \overline{U^0}) \\ & -\widetilde{U^1} \wedge (\overline{U^0} \wedge \varphi(x, \overline{U^0})) \\ & -\overline{U^0} \wedge (\widetilde{U^1} \wedge \varphi(x, \overline{U^0})) \\ & -\overline{U^0} \wedge (\overline{U^0} \wedge \varphi(x, \widetilde{U^1})), \\ \\ \widetilde{U^1_z} = \dfrac{\partial\overline{U^0}}{\partial\nu} \text{ pour } x \in \mathcal{O}_1 \text{ et } z = 0, \text{ et } \lim\limits_{z\to+\infty} \widetilde{U^1} = 0. \end{cases} \tag{3.7}$$

PROPOSITION 3.2. — *Pour tout $T > 0$, l'équation (3.7) admet une solution*

$$\widetilde{U^1} \in \mathbb{H}^m(0,T;\mathbb{W}^{k,\infty}(\mathcal{O}_1) \otimes \mathbb{H}^l(\mathbb{R}^+)),$$

pour tout $l, m \in \mathbb{N}^2$, dès que $\overline{u}_0^0$ est dans $\mathbb{W}^{k+1,\infty}(\Omega)$ avec $k \in \mathbb{N}$.

Remarque 3.1. — Pour prouver le théorème 1.1, nous n'avons pas besoin d'autant de régularité, mais comme nous avons affaire ici à une équation du type équation de la chaleur, nous obtenons immédiatement cette régularité car nous avons choisi une donnée initiale bien préparée.

Preuve. — Pour résoudre ce problème, on introduit un relèvement de la condition au bord, en utilisant la proposition 3.1 :

$$f(t,x,z) = \rho(z)\frac{\partial \overline{U^0}}{\partial \nu}(t,x) \in \mathcal{C}^\infty\left(\mathbb{R}^+;\mathbb{W}^{k,\infty}(\mathcal{O}_1) \otimes \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^+)\right),$$

où ρ est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^+$ vérifiant $\rho(0) = 0$, $\rho'(0) = 1$, $\rho^{(k)}(0) = 0$ pour $k > 1$ et $\rho(z) = 0$ pour $z \geq 1$.
On cherche alors $\widetilde{U^1}$ sous la forme sous la forme $w + f$ avec $w(t,0) = 0$. Le problème (3.7) se ramène donc à :

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial w}{\partial t} - w_{zz} = \begin{array}[t]{l} \overline{U^0} \wedge w_{zz} + \overline{U^0} \wedge \varphi(x,w) + w \wedge \varphi(x,\overline{U^0}) \\ -w \wedge (\overline{U^0} \wedge \varphi(x,\overline{U^0})) - \overline{U^0} \wedge (w \wedge \varphi(x,\overline{U^0})) \\ -\overline{U^0} \wedge (\overline{U^0} \wedge \varphi(x,w)) + G(t,x,z), \end{array} \\ \\ w(0,x,z) = 0 \text{ sur } \mathcal{O}_1 \times \mathbb{R}^+, \\ \\ w_z = 0 \text{ pour } x \in \partial\Omega \text{ et } z = 0. \end{array}\right. \tag{3.8}$$

avec $G(t,x,z) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+;\mathbb{W}^{k,\infty}(\Omega) \otimes \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^+))$ telle que $\dfrac{\partial^k G}{\partial z^k}_{|z=0} = 0$ pour tout $k > 1$.
Pour établir l'existence de la solution, on résout le problème pour z dans $]0, L[$ avec les conditions aux limites suivantes :

$$w_z = 0 \text{ pour } z = 0 \text{ et } z = L.$$

Nous allons maintenant prouver l'existence de w *via* un procédé de Galerkin. Nous prenons donc comme base de décomposition la base $(w_i)_{i\in\mathbb{N}}$ des vecteurs propres de $I - \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ avec condition de Neumann homogène au bord.

Soient $W_N = Vect(w_1, \dots, w_N)$ et $w^N \in W_N$ l'approximation de Galerkin de w. Elle vérifie :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w^N}{\partial t} - w^N_{zz} = & P_N\Big[\overline{U^0} \wedge w^N_{zz} + \overline{U^0} \wedge \varphi(x, w^N) + w^N \wedge \varphi(x, \overline{U^0}) \\ & -w^N \wedge (\overline{U^0} \wedge \varphi(x, \overline{U^0})) - \overline{U^0} \wedge (w^N \wedge \varphi(x, \overline{U^0})) \\ & -\overline{U^0} \wedge (\overline{U^0} \wedge \varphi(x, w^N)) + G(t,x,z)\Big], \\ w^N(0,x,z) = 0 \text{ sur } \mathcal{O}_1 \times (0,L), \end{cases}$$

où P_N est la projection orthogonale sur W_N (la base $(w_i)_{i\in\mathbb{N}}$ étant choisie orthonormale dans $\mathbb{L}^2$ et orthogonale dans $\mathbb{H}^1$).

Nous avons maintenant besoin d'estimations *a priori* portant sur $w = w^N$ et ne dépendant ni de L, ni de N :

Estimation $\mathbb{L}^\infty(\mathcal{O}_1) \otimes \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^+)$: On multiplie par w :

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|w\|^2_{\mathbb{L}^2(0,L)} + \|w_z\|^2_{\mathbb{L}^2(0,L)} \le C\|w\|^2_{\mathbb{L}^2(0,L)} + \|G(t,x,\cdot)\|^2_{\mathbb{L}^2(0,L)},$$

puis,

$$\|w(t,.)\|^2_{\mathbb{L}^\infty(\mathcal{O}_1)\otimes\mathbb{L}^2(0,L)} \le C\int_0^t \|w(s,.)\|^2_{\mathbb{L}^\infty(\mathcal{O}_1)\otimes\mathbb{L}^2(0,L)}\, ds + \int_0^t \|G(s,.)\|^2_{\mathbb{L}^\infty(\mathcal{O}_1)\otimes\mathbb{L}^2(0,L)}\, ds,$$

Estimation $\mathbb{L}^\infty(\mathcal{O}_1) \otimes \mathbb{H}^1(\mathbb{R}^+)$: On multiplie par $-w_{zz}$ et on intègre par parties. De même :

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|w_z\|^2_{\mathbb{L}^2(0,L)} + \|w_{zz}\|^2_{L^2(0,L)} \le C\|w_z\|^2_{\mathbb{L}^2(0,L)} + \|G_z(t,x,\cdot)\|^2_{\mathbb{L}^2(0,L)},$$

$$\|w_z(t,.)\|^2_{\mathbb{L}^\infty(\mathcal{O}_1)\otimes\mathbb{L}^2(0,L)} \le C\int_0^t \|w_z(s,.)\|^2_{\mathbb{L}^\infty(\mathcal{O}_1)\otimes\mathbb{L}^2(0,L)}\, ds + \int_0^t \|G_z(s,.)\|^2_{\mathbb{L}^\infty(\mathcal{O}_1)\otimes\mathbb{L}^2(0,L)}\, ds,$$

Comme la base considérée dans le processus de Galerkin est la base de vecteurs propres de $I - \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$, on peut obtenir une régularité supérieure :

Estimation $\mathbb{L}^\infty(\mathcal{O}_1) \otimes \mathbb{H}^2(\mathbb{R}^+)$: On multiplie par w_{zzzz} et on intègre deux fois par parties :

$$\frac{\partial}{\partial t}\|w_{zz}\|_{\mathbb{L}^2(0,L)} + \|w_{zzz}\|_{\mathbb{L}^2(0,L)} \leq C\|w_{zz}\|^2_{\mathbb{L}^2(0,L)} + C\|G_z(t,x,\cdot)\|_{\mathbb{L}^2(0,L)},$$

puis

$$\|w_{zz}(t,.)\|^2_{\mathbb{L}^\infty(\mathcal{O}_1)\otimes\mathbb{L}^2(0,L)} \leq C\int_0^t \|w_{zz}(s,.)\|^2_{\mathbb{L}^\infty(\mathcal{O}_1)\otimes\mathbb{L}^2(0,L)}\, ds + \int_0^t \|G_z(s,.)\|_{\mathbb{L}^\infty(\mathcal{O}_1)\otimes\mathbb{L}^2(0,L)}\, ds.$$

On obtient de même une estimation $\mathbb{H}^l$ pour tout $l \in \mathbb{N}$ en intégrant chaque terme l ou $l-1$ fois par parties (les intégrations par parties sont licites car on a décomposé sur une base de Galerkin adaptée et car $\dfrac{\partial^l G}{\partial z^l}(z=0, z>1) = 0$ pour tout $l \geq 2$). On peut ensuite augmenter la régularité en x. On dérive l'équation (3.8) par rapport à x :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \nabla w}{\partial t} - \nabla w_{zz} = \; & \overline{U^0} \wedge \nabla w_{zz} + \overline{U^0} \wedge \varphi(x, \nabla w) + \nabla w \wedge \varphi(x, \overline{U^0}) \\
& - \nabla w \wedge (\overline{U^0} \wedge \varphi(x, \overline{U^0})) - \overline{U^0} \wedge (\nabla w \wedge \varphi(x, \overline{U^0})) \\
& - \overline{U^0} \wedge (\overline{U^0} \wedge \varphi(x, \nabla w)) + \nabla\overline{U^0} \wedge w_{zz} \\
& + \nabla\overline{U^0} \wedge \varphi(x, w) + \overline{U^0} \wedge \nabla\varphi(x, w) \\
& + w \wedge \nabla\varphi(x, \overline{U^0}) + w \wedge \varphi(x, \nabla\overline{U^0}) \\
& - w \wedge (\nabla\overline{U^0} \wedge \varphi(x, \overline{U^0}) - w \wedge (\overline{U^0} \wedge \nabla\varphi(x, \overline{U^0}) \\
& - w \wedge (\nabla\overline{U^0} \wedge \varphi(x, \nabla\overline{U^0})) - \nabla\overline{U^0} \wedge (w \wedge \varphi(x, \overline{U^0})) \\
& - \overline{U^0} \wedge (w \wedge \nabla\varphi(x, \overline{U^0})) - \overline{U^0} \wedge (w \wedge \varphi(x, \nabla\overline{U^0})) \\
& - \nabla\overline{U^0} \wedge (\overline{U^0} \wedge \varphi(x, w)) - \overline{U^0} \wedge (\nabla\overline{U^0} \wedge \varphi(x, w)) \\
& - \overline{U^0} \wedge (\overline{U^0} \wedge \nabla\varphi(x, w)) + \nabla G(t, x, z).
\end{aligned}$$

A partir de cette équation, on obtient de même les majorations $L^\infty(\mathcal{O}_1) \otimes \mathbb{H}^l(0, L)$ pour tout $l \in \mathbb{N}$. En réitérant jusqu'à l'ordre k, et d'après le lemme (2.2), on obtient que :

$$w \in \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{W}^{k,\infty}(\mathcal{O}_1) \otimes \mathbb{H}^l(0, L)) \cap \mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{W}^{k,\infty}(\mathcal{O}_1) \otimes \mathbb{H}^{l+1}(0, L)),$$

et ceci pour tout $T > 0$, $L > 0$ et $l \in \mathbb{N}$.

On peut donc passer à la limite en N et L, et on obtient, pour tout $l \in \mathbb{N}$:

$$w \in \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{W}^{k,\infty}(\mathcal{O}_1) \otimes \mathbb{H}^l(\mathbb{R}^+)) \cap \mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{W}^{k,\infty}(\mathcal{O}_1) \otimes \mathbb{H}^{l+1}(\mathbb{R}^+)).$$

En reportant ce résultat dans (3.8), on obtient de la régularité en temps :

$$w \in \mathbb{W}^{m,\infty}(0,T;\mathbb{W}^{k,\infty}(\mathcal{O}_1)\otimes\mathbb{H}^l(\mathbb{R}^+))\cap\mathbb{H}^m(0,T;\mathbb{W}^{k,\infty}(\mathcal{O}_1)\otimes\mathbb{H}^l(\mathbb{R}^+)),$$

pour tout $l,m\in\mathbb{N}$ et pour tout $T>0$. Finalement

$$\widetilde{U^1}\in\mathbb{H}^m(0,T;\mathbb{W}^{k,\infty}(\mathcal{O}_1)\otimes\mathbb{H}^l(\mathbb{R}^+)),$$

pour tout $T>0$, $(l,m)\in\mathbb{N}^2$. □

3.2.3. Existence de $\overline{U^2}$

On définit $\overline{U^2}$ comme étant la solution de l'équation différentielle ordinaire en temps suivante :

$$\left\{\begin{array}{rl}\dfrac{\partial\overline{U^2}}{\partial t} = & \overline{U^0}\wedge\varphi(x,\overline{U^2})+\overline{U^2}\wedge\varphi(x,\overline{U^0}) \\ & -\overline{U^2}\wedge(\overline{U^0}\wedge\varphi(x,\overline{U^0})) \\ & -\overline{U^0}\wedge(\overline{U^2}\wedge\varphi(x,\overline{U^0})) \\ & -\overline{U^0}\wedge(\overline{U^0}\wedge\varphi(x,\overline{U^2})) \\ & +|\nabla\overline{U^0}|^2\overline{U^0}+\overline{U^0}\wedge\Delta\overline{U^0}+\Delta\overline{U^0}, \\ & \\ \overline{U^2}(0,x)=0 \text{ sur } \Omega. & \end{array}\right. \tag{3.9}$$

On a alors :

Proposition 3.3. — *L'équation (3.9) admet une unique solution dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+,\mathbb{W}^{k,\infty}(\Omega))$ dès que $\overline{u}_0^0$ appartient à $\mathbb{W}^{k+2,\infty}(\Omega)$ avec $k\in\mathbb{N}$.*

Preuve. — L'équation (3.9) se met sous la forme :

$$\frac{\partial u}{\partial t}=F(t,x,u)+G(t,x),$$

où $F(t,x,u)$ est linéaire en u et $G(t,x)=\Delta\overline{U^0}+|\nabla\overline{U^0}|^2\overline{U^0}+\overline{U^0}\wedge\Delta\overline{U^0}$. Comme $\overline{u}_0^0$ appartient à $\mathbb{W}^{k+2,\infty}(\Omega)$, G est dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+,\mathbb{W}^{k,\infty}(\Omega))$ et $\|F(t,x,u)\|_{\mathbb{W}^{k,\infty}(\Omega)}\le K(t)\|u\|_{\mathbb{W}^{k,\infty}(\Omega)}$ avec $K\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+;\mathbb{R})$. De même que lors de la résolution de (3.6), on a alors l'existence d'un temps T et de $\overline{U^2}$ telle que $\overline{U^2}$ vérifie (3.9) et $\overline{U^2}$ appartient à $\mathcal{C}^\infty(0,T,\mathbb{W}^{k,\infty}(\Omega))$.
En intégrant en temps, comme $\mathbb{W}^{k,\infty}(\Omega)$ est une algèbre, on obtient :

$$\|\overline{U^2}\|_{\mathbb{W}^{k,\infty}(\Omega)}\le C\int_0^t K(s)\|\overline{U^2}\|_{\mathbb{W}^{k,\infty}(\Omega)}(s)\,ds+\int_0^t\|G\|_{\mathbb{W}^{k,\infty}(\Omega)}(s)\,ds.$$

D'après le lemme de Gronwall (lemme 2.2), on obtient que $\overline{U^2}$ est définie sur $\mathbb{R}^+$ tout entier. Donc $\overline{U^2}$ appartient à $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+, \mathbb{W}^{k,\infty}(\Omega))$. □

3.2.4. Existence de $\widetilde{U^2}$

On cherche une solution $\widetilde{U^2}$ de l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\left\{\begin{array}{rl}\dfrac{\partial \widetilde{U^2}}{\partial t} - |\nabla\psi|^2\widetilde{U^2_{zz}} = & |\nabla\psi|^2\overline{U^0} \wedge \widetilde{U^2_{zz}} \\ & +\overline{U^0} \wedge \varphi(x, \widetilde{U^2}) + \widetilde{U^2} \wedge \varphi(x, \overline{U^0}) \\ & -\widetilde{U^2} \wedge (\overline{U^0} \wedge \varphi(x, \overline{U^0})) \\ & -\overline{U^0} \wedge (\overline{U^0} \wedge \varphi(x, \widetilde{U^2})) \\ & -\overline{U^0} \wedge (\widetilde{U^2} \wedge \varphi(x, \overline{U^0})) \\ & +\nabla\widetilde{U^1_z}\nabla\psi + \widetilde{U^1_z}\Delta\psi + |\nabla\psi|^2|\widetilde{U^1_z}|^2\overline{U^0} \\ & +2\nabla\overline{U^0}\widetilde{U^1_z}\nabla\psi\overline{U^0} \\ & +\overline{U^0} \wedge (2\nabla\widetilde{U^1_z}\nabla\psi + \widetilde{U^1_z}\Delta\psi) \\ & +|\nabla\psi|^2\widetilde{U^1} \wedge \widetilde{U^1_{zz}} + \widetilde{U^1} \wedge \varphi(x, \widetilde{U^1}) \\ & -\widetilde{U^1} \wedge (\overline{U^0} \wedge \varphi(x, \widetilde{U^1})) \\ & -\widetilde{U^1} \wedge (\widetilde{U^1} \wedge \varphi(x, \overline{U^0})) \\ & -\overline{U^0} \wedge (\widetilde{U^1} \wedge \varphi(x, \widetilde{U^1})), \\ & \\ \widetilde{U^2_z} = \dfrac{\partial \widetilde{U^1}}{\partial \nu} & \text{pour } x \in \mathcal{O}_1 \text{ et } z = 0, \text{ et } \lim\limits_{z\to+\infty} \widetilde{U^2} = 0. \end{array}\right. \tag{3.10}$$

PROPOSITION 3.4. — *Pour tout $T > 0$, l'équation (3.10) admet une solution*

$$\widetilde{U^2} \in \mathbb{H}^m(0, T; \mathbb{W}^{k,\infty}(\mathcal{O}_1) \otimes \mathbb{H}^l(\mathbb{R}^+)),$$

pour tout $(l, m) \in \mathbb{N}^2$, dès que $\overline{u}^0_0 \in \mathbb{W}^{k+2,\infty}(\Omega)$ avec $k \in \mathbb{N}$.

Preuve. — On considère un relèvement $f = \rho(z)\dfrac{\partial \widetilde{U^1}}{\partial \nu}$ de la condition au bord et on se ramène à un problème de Neumann avec condition homogène en posant $\widetilde{U^2} = w + f$ avec la condition initiale $w(t = 0) = 0$, puis on utilise un procédé de Galerkin (voir la preuve de la proposition 3.2). □

3.3. Estimation du reste

Dans cette section, nous allons prouver le théorème 1.1 :

3.3.1. Preuves

Soit $\Theta \in \mathcal{C}^\infty(0,T;\mathbb{H}^4(\Omega))$ telle que $\dfrac{\partial \Theta}{\partial \nu}(t,x) = \dfrac{\partial \overline{U^2}}{\partial \nu}(t,x) + \dfrac{\partial \widetilde{U^2}}{\partial \nu}(t,x,0)$ sur $(0,T)\times \mathcal{O}_1$.

On pose :

$$u^\varepsilon(t,x) = \overline{U^0}(t,x) + \varepsilon\mu(x)\widetilde{U^1}\left(t,x,\frac{\psi(x)}{\varepsilon}\right)$$
$$+\varepsilon^2\left(\overline{U^2}(t,x) + \mu(x)\widetilde{U^2}\left(t,x,\frac{\psi(x)}{\varepsilon}\right)\right) + \varepsilon^2\Theta(t,x) + \varepsilon^2 v^\varepsilon(t,x),$$

où μ est une fonction de troncature $\mathcal{C}^\infty$, à support compact inclus dans $\mathcal{O}_1$ et valant 1 sur un voisinage de $\partial\Omega$, qui prend en compte le fait que les termes de couche limite ne sont définis que dans $\mathcal{O}_1$. On note :

$$a^\varepsilon(t,x) = \overline{U^0}(t,x) + \varepsilon\mu(x)\widetilde{U^1}\left(t,x,\frac{\psi(x)}{\varepsilon}\right)$$
$$+\varepsilon^2\left(\overline{U^2}(t,x) + \mu(x)\widetilde{U^2}\left(t,x,\frac{\psi(x)}{\varepsilon}\right)\right) + \varepsilon^2\Theta(t,x).$$

Un calcul algébrique donne que v^ε vérifie l'équation suivante :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v^\varepsilon}{\partial \nu} = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \\ v^\varepsilon(0,x) = v_0^\varepsilon(x) \text{ dans } \Omega, \\ \dfrac{\partial v^\varepsilon}{\partial t} - \varepsilon^2\Delta v^\varepsilon = T_1 + \ldots + T_8 + F^\varepsilon \text{ sur } [0,T]\times\Omega, \end{cases} \tag{3.11}$$

où Ω est un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^3$ et

$T_1 = \varepsilon^6|\nabla v^\varepsilon|^2 v^\varepsilon$,
$T_2 = \varepsilon^4(|\nabla v^\varepsilon|^2 a^\varepsilon + 2(\nabla a^\varepsilon, \nabla v^\varepsilon)v^\varepsilon)$,
$T_3 = \varepsilon^2(|\nabla a^\varepsilon|^2 v^\varepsilon + 2(\nabla v^\varepsilon, \nabla a^\varepsilon)a^\varepsilon)$,
$T_4 = \varepsilon^2 v^\varepsilon \wedge \Delta a^\varepsilon + \varepsilon^2 a^\varepsilon \wedge \Delta v^\varepsilon + \varepsilon^4 v^\varepsilon \wedge \Delta v^\varepsilon$,
$T_5 = a^\varepsilon \wedge \varphi(x,v^\varepsilon) + v^\varepsilon \wedge \varphi(x,a^\varepsilon) + \varepsilon^2 v^\varepsilon \wedge \varphi(x,v^\varepsilon)$,
$T_6 = -\big(a^\varepsilon \wedge (a^\varepsilon \wedge \varphi(x,v^\varepsilon)) + a^\varepsilon \wedge (v^\varepsilon \wedge \varphi(x,a^\varepsilon)) + v^\varepsilon \wedge (a^\varepsilon \wedge \varphi(x,a^\varepsilon))\big)$,
$T_7 = -\varepsilon^2\big(a^\varepsilon \wedge (v^\varepsilon \wedge \varphi(x,v^\varepsilon)) + v^\varepsilon \wedge (a^\varepsilon \wedge \varphi(x,v^\varepsilon)) + v^\varepsilon \wedge (v^\varepsilon \wedge \varphi(x,a^\varepsilon))\big)$,
$T_8 = -\varepsilon^4 v^\varepsilon \wedge (v^\varepsilon \wedge \varphi(x,v^\varepsilon))$.

F^ε est précisée dans l'annexe 3.3.

PROPOSITION 3.5. — *Pour tout p, $1 \le p \le +\infty$, et tout $T > 0$, il existe des constantes C_p indépendantes de ε telles que pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $t \in [0, T]$,*

$$\|a^\varepsilon\|_{\mathbb{W}^{1,p}(\Omega)} \le C_p,$$

$$\varepsilon \|D^2 a^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^p(\Omega)} \le C_p$$

$$\varepsilon^2 \|\nabla \Delta a^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^p(\Omega)} \le C_p,$$

$$\|F^\varepsilon\|_{\mathbb{H}^1(\Omega)} \le C_2.$$

Preuve. — En considérant l'expression de a^ε, il suffit de regarder la régularité des fonctions $\overline{U^2}$, $\widetilde{U^2}$ et Θ. Les inégalités de Sobolev rappelées dans le théorème 2.1 nous donnent alors le résultat. □

On démontre l'existence de v^ε par un procédé de Galerkin : on prend pour base les vecteurs propres du laplacien avec des conditions de Neumann au bord et on procède aux estimations *a priori* sur le problème approché :

Estimation $\mathbb{L}^2$: On multiplie (3.11) par v^ε et on intègre sur Ω. Les intégrations par parties sont licites car $\dfrac{\partial v^\varepsilon}{\partial \nu}$ est nul sur le bord de Ω. On obtient :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|v^\varepsilon\|^2_{\mathbb{L}^2}\right) + \varepsilon^2 \|\nabla v^\varepsilon\|^2_{\mathbb{L}^2} = \int_\Omega (T_1 + \ldots + T_8 + F^\varepsilon) v^\varepsilon \, dx.$$

On majore chaque $\int_\Omega T_i v^\varepsilon \, dx$ de la manière suivante :

$$\left|\int_\Omega T_1 v^\varepsilon \, dx\right| \le \varepsilon^6 \|v^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^\infty} \|v^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2} \|\nabla v^\varepsilon\|^2_{\mathbb{L}^4},$$

$$\left|\int_\Omega T_2 v^\varepsilon \, dx\right| \le$$
$$\varepsilon^4 \left(\|a^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^\infty} \|v^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2} \|\nabla v^\varepsilon\|^2_{\mathbb{L}^4} + 2\|v^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^\infty} \|\nabla a^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^\infty} \|v^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2} \|\nabla v^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2}\right),$$

$$\left|\int_\Omega T_3 v^\varepsilon \, dx\right| \le$$
$$\varepsilon^2 \left(\|\nabla a^\varepsilon\|^2_{\mathbb{L}^\infty} \|v^\varepsilon\|^2_{\mathbb{L}^2} + 2\|a^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^\infty} \|\nabla a^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^\infty} \|v^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2} \|\nabla v^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2}\right),$$

$$\left|\int_\Omega T_4 v^\varepsilon \, dx\right| \le \varepsilon^2 \|\nabla a^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^\infty} \|v^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2} \|\nabla v^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2},$$

$$\left|\int_\Omega T_5 v^\varepsilon \, dx\right| \le C \|a^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^\infty} \|v^\varepsilon\|^2_{\mathbb{L}^2},$$

$$\left|\int_\Omega T_6 v^\varepsilon \, dx\right| \le C \|a^\varepsilon\|^2_{\mathbb{L}^\infty} \|v^\varepsilon\|^2_{\mathbb{L}^2},$$

$$\left|\int_\Omega T_7 v^\varepsilon \ dx\right| \leq \quad C\varepsilon^2 \|a^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^\infty} \|v^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^\infty} \|v^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2}^2,$$

$$\left|\int_\Omega T_8 v^\varepsilon \ dx\right| = \quad 0,$$

$$\left|\int_\Omega F^\varepsilon v^\varepsilon \ dx\right| \leq \quad \|F^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2} \|v^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2}.$$

En utilisant les majorations (3.5) et le lemme 2.1, et puisque $\varepsilon^2 v^\varepsilon$ est borné en norme $\mathbb{L}^\infty$ indépendamment de ε (et donc en norme $\mathbb{L}^p$ pour $1 \leq p \leq \infty$ car Ω est borné), on obtient, pour $0 < \varepsilon \leq 1$, qu'il existe une constante C telle que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2}^2 + \varepsilon^2 \|\nabla v^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2}^2 \leq C(\varepsilon^8 \|\Delta v^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2}^4 + \|v^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2}^2 + 1). \tag{3.12}$$

Estimation $\mathbb{H}^1$: On multiplie (3.11) par $-\Delta v^\varepsilon$ et on intègre par parties. On peut le faire une fois car v^ε vérifie des conditions de Neumann au bord. On obtient la majoration suivante, en utilisant les inégalités de Sobolev :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|\nabla v^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2}^2\right) + \varepsilon^2 \|\Delta v^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2}^2 = \int_\Omega (T_1 + \ldots + T_8 + F^\varepsilon)\Delta v^\varepsilon \ dx,$$

et on majore le terme de droite de la manière suivante :

$$\left|\int_\Omega T_1 \Delta v^\varepsilon \ dx\right| \leq \varepsilon^6 \|v^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^\infty} \|\nabla v^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^4}^2 \|\Delta v^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2},$$

$$\left|\int_\Omega T_2 \Delta v^\varepsilon \ dx\right| \leq$$

$$\varepsilon^4(\|a^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^\infty} \|\nabla v^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^4}^2 + 2\|\nabla a^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^\infty} \|v^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^\infty} \|\nabla v^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2}) \|\Delta v^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2},$$

$$\left|\int_\Omega T_3 \Delta v^\varepsilon \ dx\right| \leq$$

$$\varepsilon^2(\|\nabla a^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^\infty}^2 \|v^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2} + 2\|a^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^\infty} \|\nabla a^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^\infty} \|\nabla v^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2}) \|\Delta v^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2},$$

$$\left|\int_\Omega T_4 \Delta v^\varepsilon \ dx\right| \leq \varepsilon^2 \|\Delta a^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^\infty} \|v^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2} \|\Delta v^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2},$$

$$\left|\int_\Omega T_5 \Delta v^\varepsilon \ dx\right| \leq C \|\nabla v^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2}$$

$$(\|\nabla a^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^\infty} \|v^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2} + \|a^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^\infty} \|v^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2} + \|a^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^\infty} \|\nabla v^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2})$$

$$+C\varepsilon^2 \|v^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^\infty} (\|v^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2} + \|\nabla v^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2}) \|\nabla v^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2},$$

$$\left|\int_\Omega T_6 \Delta v^\varepsilon \, dx\right| \leq C\|\nabla v^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2}\|a^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^\infty}$$
$$(\|\nabla a^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^\infty}\|v^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2} + \|a^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^\infty}\|v^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2} + \|a^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^\infty}\|\nabla v^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2}),$$

$$\left|\int_\Omega T_7 \Delta v^\varepsilon \, dx\right| \leq C\varepsilon^2\|\nabla v^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2}\|v^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^\infty}$$
$$(\|\nabla a^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^\infty}\|v^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2} + \|a^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^\infty}\|v^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2 2} + \|a^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^\infty}\|\nabla v^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2}),$$

$$\left|\int_\Omega T_8 \Delta v^\varepsilon \, dx\right| \leq C\varepsilon^4\|v^\varepsilon\|^2_{\mathbb{L}^\infty}\|\nabla v^\varepsilon\|^2_{\mathbb{L}^2},$$
$$\left|\int_\Omega F^\varepsilon \Delta v^\varepsilon \, dx\right| \leq \|\nabla F^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2}\|\nabla v^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2}.$$

On utilise l'injection de $\mathbb{H}^1(\Omega)$ dans $\mathbb{L}^4(\Omega)$ pour T_1, et le lemme (2.1) pour T_2 :

$$\left|\int_\Omega T_1 \Delta v^\varepsilon \, dx\right| \leq C\varepsilon^6\|v^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^\infty}\|\nabla v^\varepsilon\|^2_{\mathbb{H}^1}\|\Delta v^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2}$$
$$\leq C\varepsilon^6\|v^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^\infty}\left(\|v^\varepsilon\|^2_{\mathbb{L}^2} + \|\Delta v^\varepsilon\|^2_{\mathbb{L}^2}\right)\|\Delta v^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2},$$

$$\left|\int_\Omega T_2 \Delta v^\varepsilon \, dx\right| \leq \varepsilon^4\left(C\|a^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^\infty}\|v^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^\infty}(\|v^\varepsilon\|^2_{\mathbb{L}^2} + \|\Delta v^\varepsilon\|^2_{\mathbb{L}^2})\right.$$
$$\left. +2\|\nabla a^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^\infty}\|v^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^\infty}\|\nabla v^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2}\right)\|\Delta v^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2},$$

et on en déduit :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|\nabla v^\varepsilon\|^2_{\mathbb{L}^2}\right) + \varepsilon^2\|\Delta v^\varepsilon\|^2_{\mathbb{L}^2} \leq C\varepsilon^4\|\Delta v^\varepsilon\|^3_{\mathbb{L}^2} + \frac{\varepsilon^2}{2}\|\Delta v^\varepsilon\|^2_{\mathbb{L}^2}$$
$$+ C(\varepsilon^{10}+\varepsilon^2)\|v^\varepsilon\|^4_{\mathbb{L}^2} + C(\varepsilon^2+1)\|\nabla v^\varepsilon\|^2_{\mathbb{L}^2} + C\|v^\varepsilon\|^2_{\mathbb{L}^2} + C.$$

puis,

$$\frac{d}{dt}\left(\|\nabla v^\varepsilon\|^2_{\mathbb{L}^2}\right) + \varepsilon^2\|\Delta v^\varepsilon\|^2_{\mathbb{L}^2}(1 - C\varepsilon^2\|\Delta v^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2}) \leq C(\varepsilon^{10}+\varepsilon^2)\|v^\varepsilon\|^4_{\mathbb{L}^2}$$
$$+C\|v^\varepsilon\|^2_{\mathbb{L}^2} + C(\varepsilon^2+1)\|\nabla v^\varepsilon\|^2_{\mathbb{L}^2} + C. \tag{3.13}$$

Estimation $\mathbb{H}^2$: On multiplie par $\varepsilon^2\Delta^2 v^\varepsilon$ et on intègre une fois par parties sur Ω :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\varepsilon^2\|\Delta v^\varepsilon\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\right) + \varepsilon^4\|\nabla\Delta v^\varepsilon\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \leq \int_\Omega \varepsilon^2\left(T_1 + \ldots + T_8 + F^\varepsilon\right)\Delta^2 v^\varepsilon \, dx.$$

On majore chaque $\int_\Omega \varepsilon^2 T_i \Delta^2 v^\varepsilon \, dx$ de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
\left|\varepsilon^2 \int_\Omega T_1 \Delta^2 v^\varepsilon \, dx\right| &\leq \varepsilon^8 \left(\|\nabla v^\varepsilon\|^3_{\mathbb{L}^6} + 2\|\nabla v^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^6}\|\Delta v^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^3}\right)\|\nabla\Delta v^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2}, \\
\left|\varepsilon^2 \int_\Omega T_2 \Delta^2 v^\varepsilon \, dx\right| &\leq \varepsilon^6 \Big(2\|a^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^\infty}\|\nabla v^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^6}\|\Delta v^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^3} + 3\|\nabla a^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^\infty}\|\nabla v^\varepsilon\|^2_{\mathbb{L}^4} \\
&\quad +2\|\nabla a^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^\infty}\|v^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^\infty}\|\Delta v^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2} \\
&\quad +2\|\Delta a^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^\infty}\|\nabla v^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2}\|v^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^\infty}\Big)\|\nabla\Delta v^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2}, \\
\left|\varepsilon^2 \int_\Omega T_3 \Delta^2 v^\varepsilon \, dx\right| &\leq \varepsilon^4 \Big(3\|\nabla a^\varepsilon\|^2_{\mathbb{L}^\infty}\|\nabla v^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2} + 2\|\nabla a^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^\infty}\|\Delta a^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^\infty}\|v^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2} \\
&\quad +2\|a^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^\infty}\|\Delta a^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^\infty}\|\nabla v^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2} \\
&\quad +2\|\nabla a^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^\infty}\|a^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^\infty}\|\Delta v^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2}\Big)\|\nabla\Delta v^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2}, \\
\left|\varepsilon^2 \int_\Omega T_4 \Delta^2 v^\varepsilon \, dx\right| &\leq \varepsilon^4 \Big(\|\Delta a^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^\infty}\|\nabla v^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2} + \|\nabla\Delta a^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^4}\|v^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^4} \\
&\quad +\|\nabla a^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^\infty}\|\Delta v^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2}\Big)\|\nabla\Delta v^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2} \\
&\quad +\varepsilon^6\|\nabla v^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^6}\|\Delta v^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^3}\|\nabla\Delta v^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2}, \\
\left|\varepsilon^2 \int_\Omega T_5 \Delta^2 v^\varepsilon \, dx\right| &\leq C\varepsilon^2 \Big(\|a^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^\infty}\|\nabla v^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2} + \|a^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^\infty}\|v^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2} \\
&\quad +\|\nabla a^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^\infty}\|v^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2}\Big)\|\nabla\Delta v^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2} \\
&\quad +C\varepsilon^4\|v^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^\infty}\Big(\|v^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2} + \|\nabla v^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2}\Big)\|\nabla\Delta v^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2}, \\
\left|\varepsilon^2 \int_\Omega T_6 \Delta^2 v^\varepsilon \, dx\right| &\leq C\varepsilon^2 \Big(\|a^\varepsilon\|^2_{\mathbb{L}^\infty}\|v^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2} + \|a^\varepsilon\|^2_{\mathbb{L}^\infty}\|\nabla v^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2} \\
&\quad +\|\nabla a^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^\infty}\|a^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^\infty}\|v^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2}\Big)\|\nabla\Delta v^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left|\varepsilon^2 \int_\Omega T_7 \Delta^2 v^\varepsilon \, dx\right| &\leq C\varepsilon^4 \Big(\|a^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^\infty}\|v^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^\infty}\|v^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2} + \|\nabla a^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^\infty}\|v^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^\infty}\|v^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2} \\
&\quad +\|a^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^\infty}\|v^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^\infty}\|\nabla v^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2}\Big)\|\nabla\Delta v^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2}, \\
\left|\varepsilon^2 \int_\Omega T_8 \Delta^2 v^\varepsilon \, dx\right| &\leq C\varepsilon^6\|v^\varepsilon\|^2_{\mathbb{L}^\infty}\left(\|v^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2} + \|\nabla v^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2}\right)\|\nabla\Delta v^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2}, \\
\left|\varepsilon^2 \int_\Omega F^\varepsilon \Delta^2 v^\varepsilon \, dx\right| &\leq \varepsilon^2\|\nabla F^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2}\|\nabla\Delta v^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2}.
\end{aligned}$$

En utilisant le lemme (2.1), on en déduit :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\varepsilon^2\|\Delta v^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2}^2\right)+\varepsilon^4\|\nabla\Delta v^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2}^2 \leq \frac{\varepsilon^4}{2}\|\nabla\Delta v^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2}^2+C\varepsilon^6\|\Delta v^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2}\|\nabla\Delta v^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2}^2$$
$$+P(\|v^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2}^2,\|\nabla v^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2}^2)$$
$$+Q(\|v^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2}^2,\|\nabla v^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2}^2)\|\varepsilon\Delta v^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2}^2$$
$$+C\varepsilon^8\|\Delta v^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2}^4+C\varepsilon^{12}\|\Delta v^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2}^6,$$

avec $P(x,y)=C(y^4+x+1)$ et $Q(x,y)=C(1+y)$ (les ε sont majorés par 1 dans P et Q). Ce qui s'écrit :

$$\frac{d}{dt}\left(\varepsilon^2\|\Delta v^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2}^2\right)+\varepsilon^4\|\nabla\Delta v^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2}^2\left(1-C\varepsilon^2\|\Delta v^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2}\right)\leq P(\|v^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2}^2,\|\nabla v^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2}^2)$$
$$+Q(\|v^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2}^2,\|\nabla v^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2}^2)\|\varepsilon\Delta v^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2}^2+C\varepsilon^8\|\Delta v^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2}^4+C\varepsilon^{12}\|\Delta v^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2}^6. \tag{3.14}$$

Soit T_ε le premier temps où $\|\varepsilon\Delta v^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2}$ atteint $\dfrac{1}{2C\varepsilon}$. Montrons que ce temps T_ε est minoré par une constante strictement positive indépendante de ε. On reprend l'estimation $\mathbb{L}^2$ sur v^ε pour $t<T_\varepsilon$:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2}^2+\varepsilon^2\|\nabla v^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2}^2\leq K(1+\|v^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2}^2)$$

Donc

$$\|v^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2}^2(t)\leq h(t)=M(e^{Kt}-1)\text{ pout } t<T_\varepsilon$$

On obtient ensuite par l'estimation $\mathbb{H}^1$, toujours pour $t<T_\varepsilon$:

$$\frac{d}{dt}\left(\|\nabla v^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2}^2\right)+\frac{\varepsilon^2}{2}\|\Delta v^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2}^2\leq C(\varepsilon^{10}+\varepsilon^2)\|v^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2}^4$$
$$+C(\varepsilon^2+1)\|\nabla v^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2}^2+C\|v^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2}^2+C\leq a(t)+K'\|\nabla v^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2}^2,$$

avec $a(t)=C\left(2h^2(t)+h(t)+1\right)$. On en déduit que :

$$\|\nabla v^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2}^2\leq k(t)\text{ pour } t<T_\varepsilon,$$

où $k(t)=\int_0^t a(s)e^{K'(t-s)}\,ds$.

Enfin, en reportant dans (3.14), on a :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\|\varepsilon\Delta v^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2}^2\right)+\frac{\varepsilon^4}{2}\|\nabla\Delta v^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2}^2 &\le P(\|v^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2}^2,\|\nabla v^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2}^2)\\ &\quad+Q(\|v^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2}^2,\|\nabla v^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2}^2)\|\varepsilon\Delta v^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2}^2\\ &\quad+C\varepsilon^8\|\Delta v^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2}^4+C\varepsilon^{12}\|\Delta v^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2}^6\\ &\le r(t)+s(t)\|\varepsilon\Delta v^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2}^2\end{aligned}$$

où $r(t)=P(h(t),k(t))+\dfrac{1}{16C^3}+\dfrac{1}{64C^5}$ et $s(t)=Q(h(t),k(t))$. Il s'en suit que :

$$\|\varepsilon\Delta v^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2}^2\le l(t) \text{ pour } t<T_\varepsilon$$

avec $l(t)=\displaystyle\int_0^t r(u)e^{\int_u^t s(v)\,dv}\,du$. La fonction l étant continue, il est clair que T_ε tend vers $+\infty$ quand ε tend vers 0.

4. Expression de F^ε

Le terme F^ε peut s'écrire sous la forme :

$$F^\varepsilon=A_0+\varepsilon A_1+\ldots+\varepsilon^6A_6$$

avec

$$\begin{aligned}A_0=\frac{\partial\Theta}{\partial t}-U^0\wedge\varphi(x,\Theta)-\Theta\wedge\varphi(x,U^0)+U^0\wedge(U^0\wedge\varphi(x,\Theta))\\ +U^0\wedge(\Theta\wedge\varphi(x,U^0))+\Theta\wedge(U^0\wedge\varphi(x,U^0))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A_1= &-|\nabla\psi|^2|U^1_z|^2U^1-2(\nabla U^0,\nabla U^1)U^0-\Delta U^1-\Delta\psi U^1_z-|\nabla U^0|^2U^1\\ &-2\nabla\psi\nabla U^2_z-2\nabla\psi(\nabla U^0,U^1_z)U^1-2\nabla\psi(\nabla U^1,U^1_z)U^0\\ &-2\nabla\psi(\nabla U^0,U^2_z)U^0-2|\nabla\psi|^2(U^1_z,U^2_z)U^0-|\nabla\psi|^2U^1\wedge U^2_{zz}\\ &-\Delta\psi U^0\wedge U^1_z-|\nabla\psi|^2U^2\wedge U^1_{zz}-U^0\wedge\Delta U^1-2\nabla\psi U^1\wedge\nabla U^1_z\\ &-\Delta\psi U^1\wedge U^1_z-|\nabla\psi|^2\Theta\wedge U^1_{zz}-2\nabla\psi U^0\wedge\nabla U^2_z-U^1\wedge\Delta U^0\\ &-U^1\wedge\varphi(x,U^2)-U^1\wedge\varphi(x,\Theta)-U^2\wedge\varphi(x,U^1)-\Theta\wedge\varphi(x,U^1)\\ &+U^0\wedge(U^1\wedge\varphi(x,\Theta))+U^0\wedge(U^1\wedge\varphi(x,U^2))\\ &+U^0\wedge(U^2\wedge\varphi(x,U^1))+U^0\wedge(\Theta\wedge\varphi(x,U^1))\\ &+U^1\wedge(U^1\wedge\varphi(x,U^1)+U^1\wedge(\Theta\wedge\varphi(x,U^0))\\ &+U^1\wedge(U^0\wedge\varphi(x,U^2))+U^1\wedge(U^2\wedge\varphi(x,U^0))\\ &+U^1\wedge(U^0\wedge\varphi(x,\Theta))+U^2\wedge(U^1\wedge\varphi(x,U^0))\\ &+U^2\wedge(U^0\wedge\varphi(x,U^1))+\Theta\wedge(U^0\wedge\varphi(x,U^1))+\Theta\wedge(U^1\wedge\varphi(x,U^0))\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
A_2 = &-\Delta U^2 - \Delta\Theta - |\nabla\psi|^2|U_z^1|^2U^2 - 2(\nabla U^0, \nabla U^1)U^1 - |\nabla\psi|^2|U_z^1|^2\Theta \\
&-|\nabla U^1|^2U^0 - |\nabla U^0|^2U^2 - |\nabla U^0|^2\Theta - 2\nabla\psi(\nabla U^1, U_z^1)U^1 \\
&-2|\nabla\psi|^2(U_z^1, U_z^2)U^1 - 2\nabla\psi(\nabla U^0, U_z^2)U^1 - 2\nabla\psi(\nabla U^0, U_z^1)U^2 \\
&-2\nabla\psi(\nabla U^0, U_z^1)\Theta - 2\nabla\psi(\nabla U^1, U_z^2)U^0 - 2\nabla\psi(\nabla U^2, U_z^1)U^0 \\
&-2\nabla\psi(\nabla\Theta, U_z^1)U^0 - |\nabla\psi|^2|U_z^2|^2U^0 - 2(\nabla U^0, \nabla U^2)U^0 \\
&-2(\nabla U^0, \nabla\Theta)U^0 - |\nabla\psi|^2U^2 \wedge U_{zz}^2 - \Delta\psi U^2 \wedge U_z^1 - \Delta\Psi\Theta \wedge U_z^1 \\
&-2\nabla\psi U^2 \wedge \nabla U_z^1 - U^0 \wedge \Delta U^2 - \Theta \wedge \Delta U^0 - U^1 \wedge \Delta U^1 \\
&-\Delta\psi U^1 \wedge U_z^1 - 2\nabla\psi U^1 \wedge \nabla U_z^2 - 2\nabla\psi\Theta \wedge \nabla U_z^1 - |\nabla\psi|^2\Theta \wedge U_{zz}^2 \\
&-U^0 \wedge \Delta\Theta - U^2 \wedge \Delta U^0 - U^2 \wedge \varphi(x, U^2) - U^2 \wedge \varphi(x, \Theta) \\
&-\Theta \wedge \varphi(x, U^2) - \Theta \wedge \varphi(x, \Theta) + U^0 \wedge (U^2 \wedge \varphi(x, U^2)) \\
&+U^0 \wedge (U^2 \wedge \varphi(x, \Theta)) + U^0 \wedge (\Theta \wedge \varphi(x, U^2)) + U^0 \wedge (\Theta \wedge \varphi(x, \Theta)) \\
&+U^1 \wedge (U^1 \wedge \varphi(x, U^2)) + U^1 \wedge (U^1 \wedge \varphi(x, \Theta)) + U^1 \wedge (U^2 \wedge \varphi(x, U^1)) \\
&+U^1 \wedge (\Theta \wedge \varphi(x, U^1)) + U^2 \wedge (U^2 \wedge \varphi(x, U^0)) + U^2 \wedge (U^0 \wedge \varphi(x, \Theta)) \\
&+U^2 \wedge (U^0 \wedge \varphi(x, U^2)) + U^2 \wedge (U^1 \wedge \varphi(x, U^1)) + U^2 \wedge (\Theta \wedge \varphi(x, U^0)) \\
&+\Theta \wedge (U^1 \wedge \varphi(x, U^1)) + \Theta \wedge (U^0 \wedge \varphi(x, U^2)) + \Theta \wedge (U^0 \wedge \varphi(x, \Theta)) \\
&+\Theta \wedge (U^2 \wedge \varphi(x, U^0)) + \Theta \wedge (\Theta \wedge \varphi(x, U^0))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A_3 = &-2(\nabla U^0, \nabla U^2)U^1 - 2(\nabla U^0, \nabla U^1)\Theta - |\nabla\psi|^2|U_z^2|^2U^1 \\
&-2(\nabla U^0, \nabla U^1)U^2 - 2(\nabla U^0, \nabla\Theta)U^1 - |\nabla U^1|^2U^1 - 2\nabla\psi(\nabla U^1, U_z^1)U^2 \\
&-2\nabla\psi(\nabla U^1, U_z^1)\Theta - 2\nabla\psi(\nabla U^1, U_z^2)U^1 - 2\nabla\psi(\nabla U^2, U_z^1)U^1 \\
&-2|\nabla\psi|^2(U_z^1, U_z^2)U^2 - 2|\nabla\psi|^2(U_z^1, U_z^2)\Theta - 2\nabla\psi(\nabla\Theta, U_z^1)U^1 \\
&-2\nabla\psi(\nabla U^0, U_z^2)U^2 - 2\nabla\psi(\nabla U^0, U_z^2)\Theta - 2\nabla\psi(\nabla U^2, U_z^2)U^0 \\
&-2\nabla\psi(\nabla\Theta, U_z^2)U^0 - 2(\nabla U^1, \nabla U^2)U^0 - 2(\nabla U^1, \nabla\Theta)U^0 - U^2 \wedge \Delta U^1 \\
&-\Theta \wedge \Delta U^1 - U^1 \wedge \Delta U^2 - U^1 \wedge \Delta\Theta - 2\nabla\psi U^2 \wedge \nabla U_z^2 - \Delta\psi\Theta \wedge U_z^1 \\
&-2\nabla\psi\Theta \wedge \nabla U_z^2 - \Delta\psi U^2 \wedge U_z^1 + U^1 \wedge (U^2 \wedge \varphi(x, U^2)) \\
&+U^1 \wedge (U^2 \wedge \varphi(x, \Theta)) + U^1 \wedge (\Theta \wedge \varphi(x, U^2)) + U^1 \wedge (\Theta \wedge \varphi(x, \Theta)) \\
&+U^2 \wedge (U^1 \wedge \varphi(x, U^2)) + U^2 \wedge (U^2 \wedge \varphi(x, U^1)) + U^2 \wedge (U^1 \wedge \varphi(x, \Theta)) \\
&+U^2 \wedge (\Theta \wedge \varphi(x, U^1)) + \Theta \wedge (U^2 \wedge \varphi(x, U^1)) + \Theta \wedge (U^1 \wedge \varphi(x, U^2)) \\
&+\Theta \wedge (\Theta \wedge \varphi(x, U^1)) + \Theta \wedge (U^1 \wedge \varphi(x, \Theta))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A_4 = &-2(\nabla U^1, \nabla\Theta)U^1 - 2(\nabla U^0, \nabla U^2)\Theta - 2(\nabla U^1, \nabla U^2)U^1 \\
&-2(\nabla U^0, \nabla U^2)U^2 - 2(\nabla U^0, \nabla\Theta)U^2 - 2(\nabla U^0, \nabla\Theta)\Theta \\
&-2(\nabla U^2, \nabla\Theta)U^0 - 2\nabla\psi(\nabla U^1, U^2_z)U^2 - 2\nabla\psi(\nabla U^1, U^2_z)\Theta \\
&-2\nabla\psi(\nabla U^2, U^1_z)U^2 - 2\nabla\psi(\nabla U^2, U^1_z)\Theta - 2\nabla\psi(\nabla\Theta, U^1_z)U^2 \\
&-2\nabla\psi(\nabla\Theta, U^1_z)\Theta - 2\nabla\psi(\nabla U^2, U^2_z)U^1 - 2\nabla\psi(\nabla\Theta, U^2_z)U^1 \\
&-|\nabla\psi|^2|U^2_z|^2U^2 - |\nabla\psi|^2|U^2_z|^2\Theta - |\nabla\Theta^2|^2U^0 - |\nabla U^1|^2U^2 \\
&-|\nabla U^1|^2\Theta - |\nabla U^2|^2U^0 - U^2\wedge\Delta U^2 - U^2\wedge\Delta\Theta - \Theta\wedge\Delta U^2 \\
&-\Theta\wedge\Delta\Theta + U^2\wedge(U^2\wedge\varphi(x,U^2)) + U^2\wedge(U^2\wedge\varphi(x,\Theta)) \\
&+U^2\wedge(\Theta\wedge\varphi(x,U^2)) + U^2\wedge(\Theta\wedge\varphi(x,\Theta)) + \Theta\wedge(U^2\wedge\varphi(x,U^2)) \\
&+\Theta\wedge(U^2\wedge\varphi(x,\Theta)) + \Theta\wedge(\Theta\wedge\varphi(x,U^2)) + \Theta\wedge(\Theta\wedge\varphi(x,\Theta))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A_5 = &-|\nabla U^2|^2U^1 - |\nabla\Theta|^2U^1 - 2(\nabla U^1, \nabla U^2)U^2 - 2(\nabla U^1, \nabla U^2)\Theta \\
&-2(\nabla U^1, \nabla\Theta)U^2 - 2(\nabla U^1, \nabla\Theta)\Theta - 2(\nabla\Theta, \nabla U^2)U^1 \\
&-2\nabla\psi(\nabla U^2, U^2_z)U^2 - 2\nabla\psi(\nabla U^2, U^2_z)\Theta \\
&-2\nabla\psi(\nabla\Theta, U^2_z)U^2 - 2\nabla\psi(\nabla\Theta, U^2_z)\Theta
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A_6 = &-|\nabla U^2|^2U^2 - |\nabla U^2|^2\Theta - |\nabla\Theta|^2U^2 - |\nabla\Theta|^2\Theta \\
&\qquad -2(\nabla U^2, \nabla\Theta)U^2 - 2(\nabla U^2, \nabla\Theta)\Theta
\end{aligned}
$$

Remerciements

Je tiens à remercier chaleureusement Pierre Fabrie et Gilles Carbou de m'avoir permis de travailler sur ce sujet ainsi que pour les conseils qu'ils m'ont prodigués. Merci aussi au rapporteur pour ses remarques et ses commentaires.

Bibliographie

[1] ADAMS (R.A.). — *Sobolev Spaces, Pure and Applied Math.*, Academic press, 65 (1975).

[2] AGMON (S.). — *Lectures on elliptic boundary value problems.*, Van Nostrand company, 1965.

[3] BREZIS (H.). — *Analyse fonctionnelle*, Masson, Paris, 1993.

[4] CARBOU (G.) et FABRIE (P.). — *Time average in Micromagnetism*, Journal of Differential Equations, 147 (1998), 383-409.

[5] CARBOU (G.) et FABRIE (P.). — *Regular Solutions for Landau-Lifschitz Equation in a Bounded Domain*, Comm. Appl. Anal. 5, N° 1 (2001), 17-30.

[6] CARBOU (G.), FABRIE (P.) et GUÈS (O.). — *Couche limite dans un modèle de ferromagnétisme*, Comm. Partial Diff. Eq. 27, N° 7-8 (2002), 1467-1495.

[7] DAUTRAY (R.) et LIONS (J.L.). — Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques, Tomes 1, 2 et 3, Coll. du C.E.A., Masson.

[8] GRENIER (E.) et GUÈS (O.). — *Boundary layers for viscous perturbations of noncharacteristic quasilinear hyperbolic problems*, Journal of Differential Equations, 143 (1998), 110-146.

[9] GUÈS (O.). — *Perturbations visqueuses de problèmes mixtes hyperboliques et couches limites*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 45 (1995), 973-1006.

[10] LIONS (J.L.). — *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Gauthier-Villars, 1969.

[11] TAYLOR (M.). — *Partial Differential Equation III, Non Linear Equation*, Applied Mathematical Science Vol. 117, Springer Verlag.