

AUGUSTIN FRUCHARD

CHANGGUI ZHANG

**Remarques sur les développements asymptotiques**

*Annales de la faculté des sciences de Toulouse 6<sup>e</sup> série*, tome 8, n° 1  
(1999), p. 91-115

[http://www.numdam.org/item?id=AFST\\_1999\\_6\\_8\\_1\\_91\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AFST_1999_6_8_1_91_0)

© Université Paul Sabatier, 1999, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## Remarques sur les développements asymptotiques<sup>(\*)</sup>

AUGUSTIN FRUCHARD et CHANGGUI ZHANG<sup>(1)</sup>

---

**RÉSUMÉ.** — Étant donnée une fonction analytique complexe bornée sur un secteur et admettant un développement asymptotique dans une direction du secteur, on démontre que le domaine de validité du développement asymptotique s'étend à tout le secteur. On considère d'une part l'asymptotique au sens de Poincaré et d'autre part celle au sens Gevrey. Dans ce dernier cas, on précise le type dans les estimations Gevrey. On compare aussi la fonction à certaines transformées de Laplace tronquées de la transformée de Borel de son développement. Le travail est fait en détails pour le cas Gevrey d'ordre 1. On décrit ensuite les modifications à apporter dans le cas Gevrey d'ordre  $k$  quelconque. L'article termine sur un résultat analogue concernant les développements  $q$ -Gevrey.

**ABSTRACT.** — Consider a complex function analytic and bounded on some sector and suppose that this function has an asymptotic expansion in one direction of the sector. Then it is proven that the asymptotics remains valid on the whole sector. Both asymptotics in the Poincaré sense and in the Gevrey sense are considered. In the later case, explicit Gevrey estimates are given. The function is also compared with some truncated Laplace transforms of the Borel transform of its expansion. The proofs are given in details for the case Gevrey of order 1. Modifications for the general case of Gevrey of order  $k$  are outlined. The article ends with a  $q$ -analog of the main result.

**MOTS-CLÉS :** Asymptotique Gevrey, transformée de Borel-Laplace, formule de Cauchy-Heine, asymptotique  $q$ -Gevrey.

**AMS Classification :** 40G10, 41A60, 30E15, 30E20.

---

(\*) Reçu le 9 janvier 1998, accepté le 17 juin 1998

(1) Laboratoire de Mathématiques, Université de La Rochelle, Pôle Sciences et Technologie, Avenue Marillac, F-17042 La Rochelle Cedex (France)  
E-mail : czhang@math.univ-lr.fr

## 1. Introduction

Soit  $\tilde{\mathbb{C}}^*$  la surface de Riemann de la fonction logarithme et  $\log$  la détermination principale du logarithme. On a  $\log x = \ln |x| + i \arg x$  pour tout  $x \in \tilde{\mathbb{C}}^*$ . Étant donnés  $\rho, \alpha, \beta$  des nombres réels tels que  $\rho > 0$  et  $\alpha < \beta$ , on note  $S(\alpha, \beta; \rho)$  le secteur ouvert

$$S(\alpha, \beta; \rho) := \{x \in \tilde{\mathbb{C}}^* \mid 0 < |x| < \rho, \arg x \in ]\alpha, \beta[ \}.$$

Un élément  $\theta$  de l'intervalle  $]\alpha, \beta[$  s'appellera *direction* de  $S(\alpha, \beta; \rho)$ .

Étant donnés

$$\hat{f} := \sum_{n \geq 0} a_n x^n \in \mathbb{C}[[x]]$$

une série entière et  $N \in \mathbb{N}^*$  un entier naturel, on note  $\hat{f}_N$  la somme partielle d'ordre  $(N - 1)$  de  $\hat{f}$ , c'est-à-dire  $\hat{f}_N = \sum_{n=0}^{N-1} a_n x^n$ .

Soit  $S := S(\alpha, \beta; \rho)$  un secteur,  $\theta$  une direction de  $S$  et  $f$  une fonction analytique dans  $S$ . Par définition, on dira que  $f$  possède  $\hat{f}$  pour *développement asymptotique dans la direction*  $\theta$  si, pour tout  $N \in \mathbb{N}^*$  et tout  $x \in S$  avec  $\arg x = \theta$ , on a

$$|f(x) - \hat{f}_N(x)| < C_N |x|^N,$$

$C_N$  étant une constante  $> 0$  dépendant de  $N$ . Si, de plus, les constantes  $C_N$  peuvent être choisies telles que  $C_N = CA^N N!$  avec des constantes  $C, A > 0$  indépendantes de  $N$ , on dira que  $f$  possède  $\hat{f}$  pour *développement asymptotique Gevrey d'ordre 1 dans la direction*  $\theta$ . Dans ce cas,  $R > 0$  étant donné, si pour tout  $\delta > 0$  la constante  $A$  précédente peut être choisie égale à  $1/R + \delta$ , on dira que la fonction  $f$  possède  $\hat{f}$  pour *développement asymptotique Gevrey d'ordre 1 et de type  $R$*  dans la direction  $\theta$ .

Les définitions ci-dessus sont issues de l'asymptotique réelle et adaptées à  $\mathbb{C}$ . Habituellement en analyse asymptotique complexe on considère plutôt des développements asymptotiques sur des secteurs ouverts (cf. [7, chap. III] et [3]). L'objectif de cet article est d'établir un lien entre ces deux asymptotiques. Notre résultat principal est le théorème suivant.

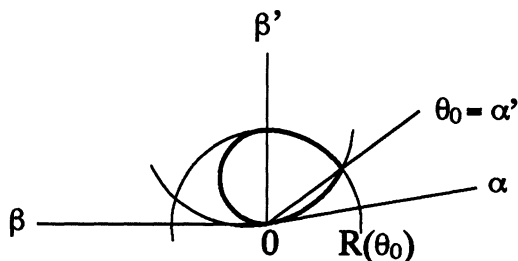
**THÉORÈME 1.** — *Soit  $f$  une fonction analytique et bornée sur un secteur ouvert  $S := S(\alpha, \beta; \rho)$  avec  $\alpha < \beta$  et  $\rho > 0$ .*

- (1) *S'il existe une direction de  $S$  dans laquelle la fonction  $f$  admet  $\hat{f}$  pour développement asymptotique, alors  $\hat{f}$  est un développement asymptotique de  $f$  sur le secteur  $S$  tout entier.*
- (2) *On a le même énoncé dans le cas d'un développement asymptotique Gevrey d'ordre 1.*

Plus précisément, si  $f$  possède  $\hat{f}$  pour développement asymptotique Gevrey d'ordre 1 et de type  $R(\theta_0)$  dans une direction  $\theta_0 \in ]\alpha, \beta[$ , alors dans toute direction  $\theta$  de  $S$ ,  $f$  possède  $\hat{f}$  pour développement asymptotique Gevrey d'ordre 1 et de type  $R(\theta)$ , où  $R(\theta)$  est défini de la façon suivante. En posant  $\alpha' = \min(\theta_0, \alpha + \pi/2)$  et  $\beta' = \max(\theta_0, \beta - \pi/2)$ , on a

$$R(\theta) = \begin{cases} R(\theta_0) \frac{\sin(\theta - \alpha)}{\sin(\alpha' - \alpha)} & \text{si } \theta \in ]\alpha, \alpha'] \\ R(\theta_0) & \text{si } \theta \in [\alpha', \beta'] \\ R(\theta_0) \frac{\sin(\theta - \beta)}{\sin(\beta' - \beta)} & \text{si } \theta \in [\beta', \beta]. \end{cases}$$

Graphiquement, l'application  $] \alpha, \beta[ \rightarrow \mathbb{C}, \theta \mapsto R(\theta) e^{i\theta}$  admet pour courbe représentative la réunion de trois arcs de cercles, l'un centré en 0 et de rayon  $R(\theta_0)$ , le deuxième passant par les points 0 et  $R(\theta_0) e^{i\alpha'}$  et tangent à la direction  $\alpha$  et le troisième défini de même en remplaçant  $\alpha$  et  $\alpha'$  par  $\beta$  et  $\beta'$ .



**Fig. 1** Représentation du type  $R(\theta)$  en fonction de l'angle  $\theta \in ]\alpha, \beta[$  que satisfait le développement asymptotique d'une fonction  $f$  supposée bornée dans un secteur  $S(\alpha, \beta; \rho)$  et admettant un développement asymptotique Gevrey d'ordre 1 et de type  $R(\theta_0)$  dans une direction  $\theta_0 \in ]\alpha, \beta[$ .

Avant de continuer, nous voudrions faire le lien avec ce qui existe déjà sur ce sujet. Considérons par exemple une fonction  $f$  bornée sur un secteur d'ouverture inférieure à  $\pi$  et possédant un développement asymptotique  $\hat{f}$  Gevrey-1 de type  $R$  aux deux bords du secteur. Alors dans ce cas les résultats classiques permettent d'en déduire aisément que  $f$  admet le même développement asymptotique  $\hat{f}$  Gevrey-1 sur tout le secteur. En effet, les coefficients du développement lui-même satisfont des estimations Gevrey-1 de type  $R$ , donc la transformée de Borel de  $\hat{f}$  définit une fonction  $\varphi$  analytique dans le disque de centre 0 et de rayon  $R$ . La transformée de Laplace tronquée  $\mathcal{L}_a\varphi$  de  $\varphi$  le long d'un segment  $[0, a]$  médian au secteur (avec  $|a| < R$  arbitraire) satisfait des estimations Gevrey dans tout le secteur. Il s'ensuit que la différence  $f - \mathcal{L}_a\varphi$  est exponentiellement petite aux deux bords du secteur (d'après la formule de Stirling) donc dans tout le secteur (d'après le théorème de Phragmén–Lindelöf), ce qui prouve que  $f$  admet  $\hat{f}$  comme développement asymptotique Gevrey-1 dans tout le secteur (en utilisant de nouveau Stirling).

La nouveauté ici est, d'une part, que l'on suppose que le développement asymptotique Gevrey-1 n'est donné que dans une direction du secteur et, d'autre part, que nous précisons le type et nous obtenons un type optimal en un certain sens (voir la remarque (3) de la section 5) contrairement à celui qui découlerait du raisonnement précédent. Par ailleurs, nous obtenons des résultats plus précis concernant le domaine d'analyticité de la transformée de Borel  $\varphi$  et la comparaison de  $f$  avec certaines transformées de Laplace (voir la proposition 9).

*Remarque.* — On peut remplacer l'hypothèse *bornée* par celle d'*asymptotiquement bornée* dans le sens suivant. Une fonction analytique sur un secteur  $S := S(\alpha, \beta; \rho)$  est dite asymptotiquement bornée sur  $S$  si elle est bornée sur tout sous-secteur propre de  $S$ ,  $S' = S(\alpha', \beta'; \rho')$ ,  $\alpha < \alpha' < \beta' < \beta$ ,  $0 < \rho' < \rho$ . Le théorème 1 montre qu'il est équivalent de posséder un développement asymptotique (resp. Gevrey d'ordre 1) sur un secteur ou d'être asymptotiquement borné sur le secteur et de posséder un développement asymptotique (resp. Gevrey d'ordre 1) dans une direction du secteur.

## Plan de la suite de l'article

Dans la section 2, on présente quelques résultats auxiliaires, dont certains confirment le théorème 1 dans le cas des développements asymptotiques nuls. On rappelle ensuite deux résultats sur la transformée de Borel–Laplace,

l'un concernant le calcul du type d'asymptoticité de la transformée de Laplace incomplète et l'autre portant sur le domaine de validité de la transformée de Borel d'une famille de fonctions exponentiellement proches. La preuve, ainsi qu'une généralisation du théorème 1, seront données dans la section 4; voir le théorème 10. Après quelques remarques générales, on donne les modifications à apporter pour le cas Gevrey d'ordre  $k$  général. Enfin, on donne un énoncé analogue à notre résultat principal concernant les développements  $q$ -Gevrey.

## 2. Développements asymptotiques nuls

La notation  $S(\alpha, \beta; \rho)$  a été introduite au début de l'article. Pour des raisons de commodité, on considérera souvent des secteurs de rayon  $\rho = 1$ , qu'on notera  $S(\alpha, \beta)$ . On note  $\bar{S}(\alpha, \beta)$  le secteur "fermé" correspondant  $\{x \in \tilde{\mathbb{C}}^* \mid 0 < |x| \leq 1, \arg x \in [\alpha, \beta]\}$ . On désigne par  $\mathcal{H}_b(\alpha, \beta)$  l'ensemble des fonctions continues et bornées sur le secteur fermé  $\bar{S}(\alpha, \beta)$  et analytiques sur  $S(\alpha, \beta)$ .

Nous utiliserons à plusieurs reprises le théorème de Phragmén–Lindelöf [5, p. 177] sous la forme suivante.

**THÉOREME.** — *Soit  $f$  une fonction analytique dans un secteur  $S = S(\alpha, \beta; \rho)$ , continue et bornée par  $M$  sur  $\partial S \setminus \{0\}$ . On suppose de plus :*

$$\exists K, L > 0, \exists a < \frac{\beta - \alpha}{\pi}, \quad \forall x \in S, \quad |f(x)| < K \exp \left( \frac{L}{|x|^a} \right).$$

*Alors  $f$  est bornée par  $M$  dans tout le secteur  $S$ .*

Citons également la conséquence suivante (cf. [5, p. 179]).

*Étant donnée  $f \in \mathcal{H}_b(\alpha, \beta)$ , si  $f(x)$  admet une limite pour  $x$  tendant vers zéro sur chacune des directions  $\alpha$  et  $\beta$ , alors les deux limites sont égales. De plus,  $f$  converge uniformément vers la même limite lorsque  $x$  tend vers zéro dans  $S(\alpha, \beta)$ .*

Nous présentons un résultat similaire dans le lemme suivant. On suppose ici que la fonction est bornée sur le secteur et tend vers 0 dans une direction du secteur. Quitte à considérer séparément les deux sous-secteurs

bordés par cette direction, on peut supposer qu'il s'agit d'un bord du secteur. Bien que ce résultat semble classique, nous ne l'avons pas rencontré explicitement dans la littérature. On trouvera des résultats et des techniques de démonstration analogues chez Titchmarsh [5, chap. V].

LEMME 2. — Soit  $f \in \mathcal{H}_b(\alpha, \beta)$ . On suppose qu'il existe  $C \geq 1$ ,  $\lambda \geq 0$  tels que pour tout  $x \in S(\alpha, \beta)$  on ait  $|f(x)| \leq 1$  et pour tout  $x \in \overline{S}(\alpha, \beta)$  avec  $\arg x = \alpha$  on ait

$$|f(x)| \leq C|x|^\lambda.$$

Alors, pour tout  $x \in \overline{S}(\alpha, \beta)$ , en notant  $\theta = \arg x$ , on a

$$|f(x)| \leq C^{(\beta-\theta)/(\beta-\alpha)} |x|^{(\beta-\theta)\lambda/(\beta-\alpha)}.$$

Preuve. — On considère la fonction  $g$  définie et continue sur le secteur  $\overline{S}(\alpha, \beta)$  et analytique sur  $S(\alpha, \beta)$ , donnée par

$$g(x) = \exp \left( ia \frac{(\log x)^2}{2} + (b + ic) \log x \right) f(x),$$

avec

$$a = -\frac{\lambda}{\beta - \alpha}, \quad b = -\frac{\lambda\beta}{\beta - \alpha}, \quad c = -\frac{\ln C}{\beta - \alpha}.$$

On a

$$|g(x)| = |x|^{-a \arg x + b} e^{-c \arg x} |f(x)| = |x|^{(\theta-\beta)\lambda/(\beta-\alpha)} C^{\theta/(\beta-\alpha)} |f(x)|,$$

avec  $\theta = \arg x$ . Ceci montre que la fonction  $g$  admet une *croissance sous-exponentielle* lorsque  $x$  tend vers zéro dans  $S(\alpha, \beta)$ . De plus, on vérifie aisément l'estimation suivante, pour tout  $x \in \partial S(\alpha, \beta) (:= \overline{S}(\alpha, \beta) \setminus S(\alpha, \beta))$  :

$$|g(x)| \leq C^{\beta/(\beta-\alpha)}.$$

Nous appliquons finalement le théorème de Phragmén–Lindelöf à la fonction  $g$ , ce qui termine la preuve du lemme.  $\square$

En ce qui concerne le développement asymptotique nul au sens de Poincaré, on déduit immédiatement du lemme 2 la proposition suivante.

PROPOSITION 3. — Soit  $f$  une fonction analytique et bornée sur un secteur ouvert  $S(\alpha, \beta; \rho)$  avec  $\alpha < \beta$  et  $\rho > 0$ . Si  $f$  admet le développement

asymptotique nul dans une direction  $\theta_0 \in ]\alpha, \beta[$ , alors elle admet le développement asymptotique nul sur le secteur  $S(\alpha, \beta; \rho)$  tout entier.

Une fonction admettant le développement asymptotique nul est traditionnellement appelée *fonction plate*. On sait également (cf. [6, pp. 7-8]) que  $f$  admet le développement asymptotique nul Gevrey d'ordre 1 et de type  $R > 0$  dans une direction  $\theta_0$  si et seulement si lorsque  $x$  tend vers zéro sur la direction  $\theta_0$ , pour tout  $\delta > 0$ , on a

$$|f(x)| = O(e^{-(R-\delta)/|x|}).$$

Dans ce cas,  $f$  sera appelée *fonction exponentiellement plate* (d'ordre 1) de type  $R$  dans la direction  $\theta_0$  ou simplement *fonction exponentiellement plate* dans la direction  $\theta_0$  lorsqu'on ne précise pas le type correspondant. Par convention (et non par extension), une fonction exponentiellement plate de type  $R = 0$  signifiera que la fonction est bornée. Le résultat suivant est classique. Il est souvent présenté comme une variante du théorème de Phragmén-Lindelöf.

LEMME 4. — Soit  $f \in \mathcal{H}_b(\alpha, \beta)$ . On suppose que  $\beta - \alpha < \pi$  et que  $f$  est exponentiellement plate de type  $R(\alpha) > 0$  (resp.  $R(\beta) \geq 0$ ) dans la direction  $\alpha$  (resp.  $\beta$ ). Alors, dans toute direction  $\theta \in [\alpha, \beta[$ ,  $f$  est exponentiellement plate de type  $R(\theta)$  donné par

$$R(\theta) = \frac{R(\beta) \sin(\theta - \alpha) - R(\alpha) \sin(\theta - \beta)}{\sin(\beta - \alpha)}.$$

*Preuve.* — Appliquer le théorème de Phragmén-Lindelöf à la fonction  $f_a : x \mapsto f(x)e^{a/x}$ , où  $a \in \mathbb{C}$  est tel que  $[0, a]$  est un diamètre de  $\mathcal{C}$  défini ci-dessous.  $\square$

*Remarque.* — Si  $R(\beta) > 0$ , la courbe  $\gamma : ]\alpha, \beta[ \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\theta \mapsto R(\theta)e^{i\theta}$  représente ici le cercle  $\mathcal{C}$  circonscrit aux points 0,  $R(\alpha)e^{i\alpha}$  et  $R(\beta)e^{i\beta}$ . Si  $R(\beta) = 0$  ( $f$  est supposée seulement bornée dans la direction  $\beta$ ), c'est le cercle tangent en 0 à la direction  $\beta$  et passant par le point d'affixe  $R(\alpha)e^{i\alpha}$ .

Nous proposons à présent une amélioration du lemme de Watson [2, p. 14]. Ce lemme est le suivant.

LEMME. — Soit  $f \in \mathcal{H}_b(\alpha, \beta)$ . Si  $\beta - \alpha \geq \pi$  et si  $f$  est exponentiellement plate dans les directions  $\alpha$  et  $\beta$ , alors  $f$  est identiquement nulle.



Grâce au lemme 4 précédent, on obtient le résultat suivant.

LEMME 5. — Soit  $f \in \mathcal{H}_b(\alpha, \beta)$ . On suppose que  $\beta - \alpha \geq \pi$  et que  $f$  est exponentiellement plate dans la direction  $\alpha$ . Alors  $f$  est identiquement nulle.

Preuve. — Il suffit de traiter le cas où  $\beta - \alpha = \pi$ . Quitte à effectuer une rotation de la variable  $x$ , on peut supposer que  $\alpha = -\pi/2$  et  $\beta = \pi/2$ . Puisque  $f$  est exponentiellement plate de type  $R > 0$  dans la direction  $\alpha$ , d'après le lemme 4 appliqué à la fonction  $f$  sur le secteur  $\overline{S}(-\pi/2, 0)$  (ici  $R(0) = 0$ ) on obtient que, dans toute direction comprise entre  $-\pi/2$  et  $-\pi/4$ ,  $f$  est exponentiellement plate de type  $R/\sqrt{2}$ . On vérifie que la fonction  $f(x)e^{-(1+i)R/2x}$  satisfait les conditions du lemme de Watson sur  $\overline{S}(-\pi/2, \pi/2)$  et on en déduit que  $f$  est identiquement nulle.  $\square$

En combinant les lemmes 4 et 5, on en déduit la proposition suivante.

PROPOSITION 6. — Soit  $f$  une fonction analytique et bornée sur un secteur ouvert  $S(\alpha, \beta; \rho)$  avec  $\alpha < \beta$  et  $\rho > 0$ . On suppose que  $f$  admet le développement asymptotique nul Gevrey d'ordre 1 et de type  $R > 0$  dans une direction  $\theta_0 \in ]\alpha, \beta[$ . Alors :

- (1) si  $\beta - \alpha > \pi$ ,  $f$  est identiquement nulle;
- (2) si  $\beta - \alpha \leq \pi$ , dans chaque direction  $\theta \in ]\alpha, \theta_0]$  (resp.  $\theta \in [\theta_0, \beta[$ ) la fonction  $f$  admet le développement asymptotique nul Gevrey d'ordre 1 et de type  $R(\theta)$  avec

$$R(\theta) = R \frac{\sin(\theta - \alpha)}{\sin(\theta_0 - \alpha)}, \quad \text{respectivement } R \frac{\sin(\theta - \beta)}{\sin(\theta_0 - \beta)}. \quad \square$$

On a ainsi démontré dans le cas des développements asymptotiques nuls le théorème 1 annoncé dans l'introduction. Au moyen des théorèmes de Borel–Ritt (resp. Borel–Ritt–Gevrey), on va ramener le cas d'un développement asymptotique (resp. Gevrey) quelconque au cas qu'on vient de traiter. Pour le théorème de Borel–Ritt classique, voir Wasow [7, theorem 9.3, p. 43]. Dans le paragraphe suivant, nous allons étudier la transformée de Borel–Laplace, laquelle permet d'établir le théorème de Borel–Ritt dans le cas Gevrey [6, pp. 10-12] (voir aussi [4, pp. 200-201]).

### 3. Sur la transformation de Borel-Laplace

Soit  $R > 0$ . On considère une série entière  $\hat{f} := \sum_{n \geq 0} a_n x^{n+1}$  supposée être Gevrey d'ordre 1 et de type  $R$ , c'est-à-dire telle que, pour tout  $\delta > 0$ , il existe  $C_\delta > 0$  tel que  $|a_n| < C_\delta (1/R + \delta)^n n!$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Soit

$$R_\delta := \frac{R}{1 + \delta R}.$$

La série entière  $\sum_{n \geq 0} (a_n/n!) t^n$ , appelée *transformée de Borel formelle de  $\hat{f}$*  et notée  $\widehat{B}\hat{f}$ , converge dans tout disque  $D(0; R_\delta)$  de centre 0 et de rayon  $R_\delta$ , donc converge dans le disque de Borel  $D(0; R)$ . On note  $\varphi$  la somme de cette série. Soit  $z \in D(0; R)$  arbitrairement fixé. Pour tout  $x \in \tilde{\mathbb{C}}^*$ , on pose

$$\mathcal{L}_z \varphi(x) := \int_0^z \varphi(t) e^{-t/x} dt,$$

laquelle s'appelle *transformée de Laplace tronquée à  $z$  de  $\varphi$* .

LEMME 7. — (Théorème de Borel-Ritt-Gevrey) Soient  $R > 0$ ,  $z \in D(0; R)$  et  $\hat{f} := \sum_{n \geq 0} a_n x^{n+1}$  une série entière Gevrey d'ordre 1 et de type  $R$ . La fonction  $f := \mathcal{L}_z \varphi$  définie ci-dessus possède  $\hat{f}$  pour développement asymptotique Gevrey d'ordre 1 sur  $S := S(\arg z - \pi/2; \arg z + \pi/2)$ . De plus, dans toute direction  $\theta$  de  $S$ , le type  $R(\theta)$  de ce développement est donnée par  $R(\theta) = |z| \cos(\theta - \arg z)$ .

*Preuve.* — Nous donnons ici une preuve faite dans [6, pp. 10-12]. Quitte à effectuer une rotation de la variable  $x$ , on supposera que  $z = r > 0$ , c'est-à-dire  $\arg z = 0$ . Pour tout  $N \in \mathbb{N}^*$  fixé, on note

$$\varphi_N(t) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{a_n}{n!} t^n$$

la  $N$ -ième somme partielle de  $\varphi$ . Par définition de la fonction Gamma, on obtient

$$\hat{f}_N(x) = \int_0^{+\infty} \varphi_N(t) e^{-t/x} dt.$$

Soit

$$\delta_N(x) = \int_0^r (\varphi - \varphi_N)(t) e^{-t/x} dt, \quad \sigma_N(x) = \int_r^{+\infty} \varphi_N(t) e^{-t/x} dt.$$

Puisque  $r \in ]0, R[$  et que

$$|\varphi(t) - \tilde{\varphi}_N(t)| \leq C_1 \left| \frac{a_N}{N!} \right| t^N \leq C \left( \frac{t}{r} \right)^N, \quad \text{pour } t \in [0, r]$$

( $C_1, C > 0$  indépendants de  $N$ ), on trouve, pour tout  $x \in S$  ( $\theta = \arg x \in ]-\pi/2, \pi/2[$ ) :

$$\begin{aligned} |\delta_N(x)| &\leq C \int_0^r \frac{t^N}{r^N} \left| \exp\left(-\frac{t}{x}\right) \right| dt \\ &\leq C \frac{|x|^{N+1}}{r^N (\cos \theta)^{N+1}} \int_0^r \left( \frac{t \cos \theta}{|x|} \right)^N \exp\left(-\frac{t \cos \theta}{|x|}\right) d\left(-\frac{t \cos \theta}{|x|}\right) \\ &\leq \frac{C|x|}{\cos \theta} N! \left( \frac{|x|}{r \cos \theta} \right)^N. \end{aligned}$$

D'autre part, pour  $t \geq r$ , on a

$$|\hat{\varphi}_N(t)| \leq \left( \sum_{n=0}^{N-1} \left| \frac{a_n}{n!} \right| r^n \right) \left( \frac{t}{r} \right)^{N-1} < D \left( \frac{t}{r} \right)^{N-1}$$

avec  $D$  indépendant de  $N$  (mais dépendant de  $R$ ). Un calcul identique à celui que l'on vient de faire pour  $|\delta_N(t)|$  prouve que, pour tout  $x \in S$ ,

$$|\sigma_N(x)| < rD(N-1)! \left( \frac{|x|}{r \cos \theta} \right)^N.$$

D'où, pour tout  $x \in S$ , en notant  $\theta = \arg x$ , on a

$$|f(x) - \hat{f}_N(x)| < KN! \left( \frac{|x|}{r \cos \theta} \right)^N$$

avec  $K > 0$  indépendant de  $x$  et de  $N$ . Autrement dit, le type du développement  $\hat{f}$  de  $f$  dans chaque direction  $\theta \in ]-\pi/2, \pi/2[$  est  $r \cos \theta$ .  $\square$

Nous conservons les notations  $S(\alpha, \beta)$ ,  $\mathcal{H}_b(\alpha, \beta)$  introduites au début de la section 2. Soit  $D^* \subset \mathbb{C}^*$  le disque unité privé de l'origine et  $S_j := S(\alpha_j, \beta_j)$ ,  $1 \leq j \leq m$ , des secteurs ouverts. On dit que les  $S_j$  constituent un bon recouvrement de  $D^*$  si

$$\alpha_1 < \beta_m - 2\pi < \alpha_2 < \beta_1 < \alpha_3 < \beta_2 < \dots < \alpha_m < \beta_{m-1} < \alpha_1 + 2\pi.$$

LEMME 8. — (Théorème 1 de [1, p. 1001]) Soit  $S_j := S(\alpha_j, \beta_j)$  ( $1 \leq j \leq m$ ) un bon recouvrement du disque unité privé de l'origine, et soit  $f_j \in \mathcal{H}_b(\alpha_j, \beta_j)$ . On suppose que, pour chaque  $j = 1, \dots, m$ , il existe une direction  $\varphi_j \in ]\alpha_{j+1}, \beta_j[$  dans laquelle la fonction différence  $f_{j+1} - f_j$  (avec  $\alpha_{m+1} = \alpha_1 + 2\pi$ ,  $f_{m+1} = f_1$ ) est exponentiellement plate de type  $\gamma_j > 0$ . Alors, on a les assertions suivantes :

- (1) il existe une série entière  $\hat{f}$  qui est le développement asymptotique Gevrey d'ordre 1 de  $f_j$  sur  $S(\alpha_j, \beta_j)$  pour tout  $j = 1, \dots, m$ ;
- (2) la transformée de Borel formelle de  $\hat{f}$  peut être prolongée analytiquement sur le convexe

$$C = \bigcap_{j=1}^m H_j, \quad H_j := \{t \in \mathbb{C} \mid \Re(te^{i\varphi_j}) < \gamma_j\}. \quad \square$$

Ce résultat est un raffinement du théorème de Ramis–Sibuya ([3], [4]).

On peut en affaiblir les hypothèses, en demandant à chaque  $f_j$  d'être asymptotiquement bornée sur son secteur  $S_j$  (il suffira de restreindre  $S_j$  pour que  $f_j$  soit bornée).

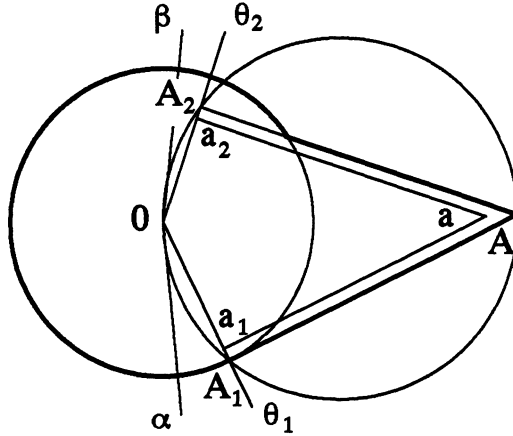
Le résultat qui suit est un résultat de comparaison d'une fonction ayant une asymptotique Gevrey dans deux directions avec la transformée de Borel–Laplace incomplète de son développement. On trouve une meilleure asymptotique entre les deux directions, de même que le lemme 4 améliorerait le type dans les directions intermédiaires pour une fonction exponentiellement plate dans deux directions. On trouvera dans [1] un résultat voisin, avec cependant une preuve très différente. Ce résultat n'est pas utilisé dans la preuve du théorème 1. En revanche il sert pour la preuve du théorème 10.

PROPOSITION 9. — Soit  $S := S(\alpha, \beta)$  un secteur ouvert d'ouverture  $\beta - \alpha < \pi$ ,  $f \in \mathcal{H}_b(\alpha, \beta)$  et  $\hat{f}$  une série entière sans terme constant. On suppose que  $f$  possède  $\hat{f}$  pour développement asymptotique Gevrey d'ordre 1 et de type respectivement  $R_1 > 0$  et  $R_2 > 0$  dans deux directions  $\theta_1$  et  $\theta_2$  de  $S$  telles que  $\alpha < \theta_1 < \theta_2 < \beta$ . On note  $A_j = R_j e^{i\theta_j}$ ,  $j = 1, 2$ , et  $A$  le point tel que  $[0, A]$  est un diamètre du cercle circonscrit aux points  $A_1, A_2$  et 0.

Alors on a les assertions suivantes :

- (1) la fonction  $\varphi$  somme de  $\hat{B}\hat{f}$  dans le disque  $D(0; \max(R_1, R_2))$  se prolonge analytiquement sur le triangle ouvert  $]A, A_1, A_2[$  en une fonction notée  $\tilde{\varphi}$ ;

- (2) pour tout point  $a \in ]0, A[$ , la fonction différence  $f_a := f - \mathcal{L}_a \tilde{\varphi}$  est exponentiellement plate de type  $R_a(\theta)$  dans toute direction  $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$  où  $[\theta_1, \theta_2] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\theta \mapsto R_a(\theta) e^{i\theta}$  est une paramétrisation par l'angle de l'arc correspondant du cercle de diamètre  $[0, a]$ .



**Fig. 2** À la transformée de Borel formelle de  $\hat{f}$  correspond une fonction  $\varphi$  analytique dans la réunion du disque  $D(0; \max(R_1, R_2))$  et du triangle  $]A, A_1, A_2[$ .

*Preuve.* — Quitte à effectuer une rotation de la variable  $x$ , on supposera que  $-\pi/2 < \alpha < 0 < \beta < \pi/2$ . On peut aussi supposer  $R_1 \geq R_2$ . Fixons  $a \in ]0, A[$  un point arbitrairement proche de  $A$  et désignons par  $a_1$  (resp.  $a_2$ ) le projeté du point  $a$  sur le segment  $[0, A_1]$  (resp.  $[0, A_2]$ ). Voir la figure 2.

Puisque  $f$  possède  $\hat{f}$  pour développement Gevrey d'ordre 1 et de type  $R_2$  dans la direction  $\theta_2$ , la série  $\hat{f}$  est Gevrey d'ordre 1 et de type  $R_2$  et la fonction  $\varphi$ , somme de la transformée de Borel formelle  $\hat{\mathcal{B}}\hat{f}$  est définie et analytique dans le disque  $D(0; R_2)$ .

(1) Les points  $a, a_j$  pouvant être choisis arbitrairement proches des points  $A, A_j$ , il suffit de montrer que  $\varphi$  est analytique dans le triangle  $]a, a_1, a_2[$ . On pose  $r = |a_1|$  ( $\geq |a_2|$ ). On considère les couples  $(f_j, S_j)_{1 \leq j \leq 5}$  donnés de la façon suivante. On pose :  $f_1 = f$ ,  $S_1 = S(\alpha, \beta)$ ; pour  $j = 2, \dots, 5$ ,  $f_j = \mathcal{L}_{z_j} \varphi$  et  $S_j = S(\arg z_j - \pi/2, \arg z_j + \pi/2)$  avec  $z_2 = r e^{i\theta_2}$ ,  $z_3 = r e^{i(\theta_1 + \pi)}$ ,  $z_4 = r e^{i(\theta_2 + \pi)}$  et  $z_5 = r e^{i(\theta_1 + 2\pi)} = a_1$ . À ce stade de la preuve, il nous faut utiliser l'assertion suivante.

ASSERTION. — Si  $f$  et  $g$  admettent le même développement asymptotique Gevrey d'ordre 1 et de type respectivement  $r_1$  et  $r_2$  dans une direction  $\theta$ , alors la différence  $f - g$  est exponentiellement plate de type  $r = \min(r_1, r_2)$  dans la direction  $\theta$ .

Cette assertion est une conséquence directe de la remarque qui suit la proposition 3.

La fonction  $f_1$  possède  $\hat{f}$  pour développement asymptotique Gevrey 1 de type  $|a_2|$  dans la direction  $\theta_2$ . Il en est de même de la fonction  $f_2 = \mathcal{L}_{z_2} \varphi$  d'après le lemme 7. Donc la différence  $f_2 - f_1$  est exponentiellement plate de type  $\gamma_1 = |a_2|$  dans la direction  $\varphi_1 = \theta_2$ . De même, en notant  $\theta = (\theta_1 + \theta_2)/2$ , dans les directions

$$\varphi_2 = \frac{1}{2}(\arg z_2 + \arg z_3) = \theta + \frac{\pi}{2}, \quad \varphi_3 = \theta + \pi, \quad \varphi_4 = \theta + \frac{3\pi}{2} \text{ et } \varphi_5 = \theta_1,$$

on a  $f_{j+1} - f_j$  exponentiellement plate de type  $\gamma_j$  avec

$$\begin{aligned} \gamma_2 &= \min(|z_2| \cos(\varphi_2 - \arg z_2), |z_3| \cos(\varphi_2 - \arg z_3)) \\ &= r \cos\left(\frac{1}{2}(\arg z_3 - \arg z_2)\right) \\ \gamma_3 &= r \cos\left(\frac{1}{2}(\arg z_4 - \arg z_3)\right) \\ \gamma_4 &= r \cos\left(\frac{1}{2}(\arg z_5 - \arg z_4)\right) \\ \gamma_5 &= |a_1| = r. \end{aligned}$$

Ainsi le demi-plan  $H_2 = \{t \in \mathbb{C} \mid \Re(t e^{i\varphi_2}) < \gamma_2\}$  est bordé par la droite passant par les points  $z_2$  et  $z_3$ . De même les demi-plans  $H_3$  et  $H_4$  définis de manière identique sont bordés par les droites  $z_3 z_4$  et  $z_4 z_5$ . Enfin les demi-plans  $H_5$  et  $H_1$  sont bordés par les droites  $z_5 a$  et  $a_2 a$ . Il s'ensuit que le convexe  $C = \cap_{j=1}^5 H_j$  contient le triangle  $]a, a_1, a_2[$  et le lemme 8 fournit le résultat.

(2) Soit  $j = 1$  ou 2 fixé. Dans la direction  $\theta_j$ , on a

$$\mathcal{L}_a \varphi(x) - \mathcal{L}_{a_j} \varphi(x) = \int_{a_j}^a \varphi(t) e^{-t/x} dt = O(e^{-|a_j|/|x|})$$

où le chemin d'intégration est le segment  $[a_j, a]$ . Par ailleurs, puisque  $\mathcal{L}_{a_j} \varphi$  (resp.  $f$ ) possède  $\hat{f}$  pour développement asymptotique Gevrey d'ordre 1

et de type  $|a_j|$  (resp.  $R_j$ ), la différence  $f - \mathcal{L}_{a_j}\varphi$  est exponentiellement plate de type  $\min(|a_j|, R_j) = |a_j|$ . Par conséquent, la fonction  $f_a$  est exponentiellement plate de type  $|a_j|$  dans la direction  $\theta_j$ . En appliquant le lemme 4 (et la remarque qui le suit) à la fonction  $f_a$  sur le secteur  $\overline{S}(\theta_1, \theta_2)$ , on obtient le cercle voulu.  $\square$

#### 4. Preuve du théorème 1 et généralisation

Nous présentons ici une preuve n'utilisant pas les résultats de [1]. En revanche la preuve de la généralisation qui suit utilisera la proposition 9, qui est elle-même une conséquence de ces résultats.

##### Preuve du théorème 1

Soit  $\omega \in ]0, \pi/2[$  fixé (par exemple  $\omega = \pi/4$ ). D'après le théorème de Borel–Ritt [7, chap. III], il existe une fonction analytique  $f_0$  sur  $S(\alpha - \omega, \beta + \omega; \rho)$  qui y admet  $\hat{f}$  pour développement asymptotique. La fonction différence  $g := f - f_0$ , analytique et bornée sur  $S = S(\alpha, \beta; \rho)$ , admet alors le développement asymptotique nul dans la direction  $\theta_0$ . La première assertion du théorème 1 s'obtient en appliquant à la fonction  $g$  la proposition 3 (sect. 2).

On suppose à présent que la fonction  $f$  possède  $\hat{f}$  pour développement asymptotique Gevrey d'ordre 1 et de type  $R(\theta_0)$  dans la direction  $\theta_0$ . La série formelle  $\hat{f}$  est donc Gevrey d'ordre 1 et de type  $R(\theta_0)$ . On note  $\varphi$  la somme de  $\hat{\mathcal{B}}\hat{f}$  dans le disque  $D(0; R(\theta_0))$ . On distingue deux cas différents.

*Cas des petits secteurs.* —  $\theta_0 - \pi/2 < \alpha < \theta_0 < \beta < \theta_0 + \pi/2$ . Soit  $r \in ]0, R(\theta_0)[$  arbitrairement fixé. D'après le lemme 7 (sect. 3), la fonction  $\mathcal{L}_{re^{i\theta_0}}\varphi$  possède  $\hat{f}$  pour développement asymptotique Gevrey d'ordre 1 et de type  $r \cos(\theta - \theta_0)$  dans chaque direction  $\theta$  de  $S$  puisque  $\overline{S}$  est inclus dans  $S(\theta_0 - \pi/2, \theta_0 + \pi/2; +\infty)$ . La fonction différence  $g = f - f_0$  possède alors le développement asymptotique nul Gevrey d'ordre 1 et de type  $r$  dans la direction  $\theta_0$ . Elle l'est également dans chaque direction  $\theta \in ]\alpha, \theta_0]$  (resp.  $\theta \in [\theta_0, \beta[$ ) de  $S$  avec le type correspondant

$$R(\theta) = r \frac{\sin(\theta - \alpha)}{\sin(\theta_0 - \alpha)}, \quad \text{respectivement } r \frac{\sin(\theta - \beta)}{\sin(\theta_0 - \beta)},$$

d'après la proposition 6(2) (sect. 2). Puisque  $R(\theta) \leq r \cos(\theta - \theta_0)$ , on obtient que  $f$  possède  $\hat{f}$  pour développement asymptotique Gevrey d'ordre 1 et de type  $R(\theta)$  dans chaque direction de  $S$ . Le nombre  $r$  pouvant être choisi arbitrairement proche de  $R(\theta_0)$ , on a ainsi démontré la deuxième assertion du théorème 1 dans ce premier cas.

*Cas général.* — Soit  $\varepsilon \in [0, \pi/2]$ . On considère les directions  $(\theta_j)_{-\ell \leq j \leq m}$  ( $\ell, m \in \mathbb{N}$ ) données par  $\theta_j = \theta_0 + j\varepsilon$  et telles que

$$\theta_{-\ell} - \frac{\pi}{2} < \alpha < \theta_{-\ell} \quad \text{et} \quad \theta_m < \beta < \theta_m + \frac{\pi}{2}.$$

En procédant de la même façon que précédemment, on obtient successivement que  $f$  possède  $\hat{f}$  pour développement asymptotique Gevrey d'ordre 1 dans chacune des directions  $(\theta_j)_{-\ell \leq j \leq m}$  et donc dans  $S$  tout entier.

Il reste alors à montrer que, pour toute direction  $\theta \in [\alpha + \pi/2, \theta_0] \cup [\theta_0, \beta - \pi/2]$ , le type  $R(\theta)$  du développement est supérieur ou égal à  $R(\theta_0)$ . On supposera que  $\theta \in [\theta_0, \beta - \pi/2]$ , l'autre cas étant similaire. À chaque  $N \in \mathbb{N}^*$ , on associe les  $N$  directions  $\theta_{N,k} := \theta_0 + (\theta - \theta_0)k/N$ ,  $k$  allant de 1 à  $N$ . Pour  $N > 2(\theta - \theta_0)/\pi$ , on a  $\theta_{N,k+1} \in ]\theta_{N,k}, \theta_{N,k} + \pi/2[$  pour tout  $k = 1, \dots, N-1$ . Par un raisonnement identique à ce qu'on a fait précédemment dans le cas des petits secteurs, on obtient successivement que le type  $R(\theta_{N,k})$  du développement  $\hat{f}$  pour la fonction  $f$  dans chaque direction  $\theta_{N,k}$  satisfait  $R(\theta_{N,k+1}) \geq R(\theta_{N,k}) \cos(\theta_{N,k+1} - \theta_{N,k})$ , donc est au moins égal à

$$R(\theta_0) \left( \cos\left(\frac{\theta - \theta_0}{N}\right) \right)^k,$$

donc

$$R(\theta) \geq R(\theta_0) \left( \cos\left(\frac{\theta - \theta_0}{N}\right) \right)^N.$$

En faisant tendre  $N$  vers l'infini, on obtient  $R(\theta) \geq R(\theta_0)$ , ce qui termine la preuve du théorème 1.  $\square$

Les résultats présentés dans le théorème 1 sont en apparence des résultats d'extrapolation. On ne sait rien de la fonction  $f$  en dehors de la direction  $\theta_0$ , si ce n'est qu'elle est bornée sur le secteur  $S(\alpha, \beta; \rho)$ , et on en déduit que le développement asymptotique s'étend à tout le secteur. En réalité, si l'on assimile la propriété d'être borné à celle d'avoir un développement asymptotique Gevrey d'ordre 1 et de type 0, un résultat similaire est obtenu par interpolation.



THÉOREME 10. — Soit  $S := S(\alpha, \beta; \rho)$  un secteur ouvert de  $\tilde{\mathbb{C}}^*$ ,  $f$  une fonction analytique et asymptotiquement bornée dans  $S$  et  $\hat{f}$  une série entière. Soient  $\theta_1, \theta_2$  tels que  $\alpha < \theta_1 < \theta_2 < \beta$  et  $R_1, R_2 > 0$  avec  $R_1 \geq R_2$  pour fixer les idées. Soit  $\theta_\mu \in ]\theta_2 - \pi/2, \theta_2]$  déterminé par  $\cos(\theta_2 - \theta_\mu) = R_2/R_1$ . On suppose que  $f$  possède  $\hat{f}$  pour développement asymptotique Gevrey d'ordre 1 et de type respectivement  $R_1$  et  $R_2$  dans les directions  $\theta_1$  et  $\theta_2$ .

Alors,  $f$  possède  $\hat{f}$  pour développement asymptotique Gevrey d'ordre 1 et de type  $R(\theta)$  dans toute direction  $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$ , avec

$$R(\theta) = \begin{cases} R_1 & \text{si } \theta \in [\theta_1, \theta_\mu] \\ R_1 \cos(\theta - \theta_\mu) & \text{si } \theta \in [\theta_\mu, \theta_2]. \end{cases}$$

Remarque. — L'application  $[\theta_\mu, \theta_2] \rightarrow \mathbb{C}, \theta \mapsto R(\theta) e^{i\theta}$  est une paramétrisation de l'arc correspondant du cercle passant par les points  $R_2 e^{i\theta_2}$  et 0 et tangent au cercle centré en 0 et de rayon  $R_1$  (fig. 3).

### Preuve du théorème 10

Cas des petits secteurs  $\theta_2 - \theta_1 < \pi$ . — On conserve les notations  $\varphi, A, a, A_1, A_2$  utilisées dans la preuve de la proposition 9 et on choisit  $a \in ]0, A[$  arbitrairement proche de  $A$ . On pose, pour tout  $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$ ,

$$Z_{a,\theta} := (R_1 - |A - a|) e^{i\theta}.$$

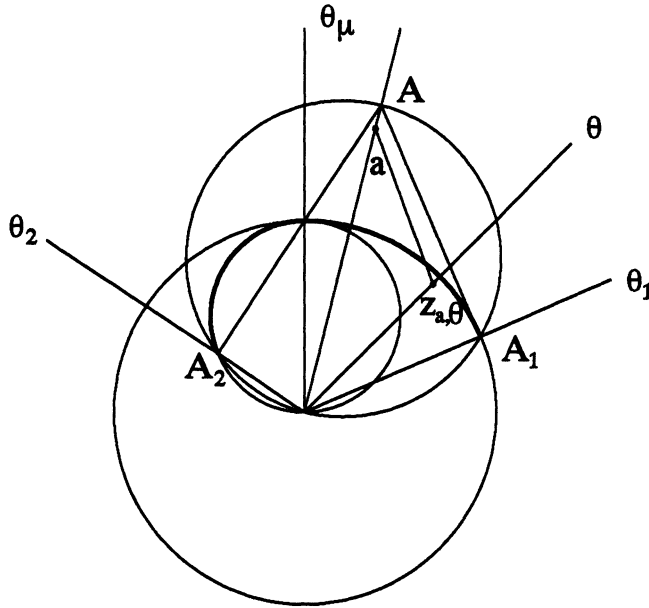
Quitte à prendre un sous-secteur de  $S$ , on peut supposer que  $\beta - \alpha < \pi$ . Rappelons que d'après la proposition 9, la fonction  $(f - \mathcal{L}_a \varphi)$  est exponentiellement plate de type  $R(\theta)$ , où  $R(\theta)$  est une paramétrisation du cercle de diamètre  $[0, a]$ .

Soit  $\theta \in [\theta_1, \theta_\mu]$ . Le segment  $[Z_{a,\theta}, a]$  restant dans le domaine de définition de  $\varphi$ , on a

$$(\mathcal{L}_a \varphi - \mathcal{L}_{Z_{a,\theta}} \varphi)(x) = \int_{Z_{a,\theta}}^a \varphi(t) e^{-t/x} dt = O(e^{\Re(-Z_{a,\theta}/x)}),$$

ce qui implique que  $(\mathcal{L}_a \varphi - \mathcal{L}_{Z_{a,\theta}} \varphi)(x)$  est exponentiellement plate de type  $|Z_{a,\theta}|$  dans la direction  $\arg x = \theta$ . Puisque  $|Z_{a,\theta}| < R(\theta)$ , on en déduit que  $(f - \mathcal{L}_{Z_{a,\theta}} \varphi)$  est exponentiellement plate de type  $|Z_{a,\theta}|$  dans la direction

$\theta$ . Par conséquent, la fonction  $f$ , de même que la transformée de Laplace tronquée  $\mathcal{L}_{Z_{a,\theta}}\varphi$  elle-même, possède  $\hat{f}$  pour développement asymptotique Gevrey d'ordre 1 et de type  $|Z_{a,\theta}|$  dans la direction  $\theta \in [\theta_1, \theta_\mu]$ , où le type  $|Z_{a,\theta}|$  tend vers  $R_1$  quand  $a$  tend vers  $A$ .



**Fig. 3** Représentation du type  $R(\theta)$  en fonction de l'angle  $\theta \in [\theta_1, \theta_2] \subset ]\alpha, \beta[$  que satisfait le développement asymptotique d'une fonction  $f$  supposée bornée dans un secteur  $S(\alpha, \beta; \rho)$  et admettant un développement asymptotique Gevrey d'ordre 1 et de type  $R_1$  (resp.  $R_2$ ) dans la direction  $\theta_1$  (resp.  $\theta_2$ ) de  $S$ .

Pour toute direction  $\theta \in ]\theta_\mu, \theta_2]$ , puisque le segment  $[Z_{a,\theta}, a]$  n'est plus inclus dans le triangle  $]A, A_1, A_2[$  pour  $a$  suffisamment proche de  $A$ , la transformée de Laplace tronquée  $\mathcal{L}_{Z_{a,\theta}}\varphi$  n'est peut-être pas définie. On considère alors les fonctions  $(f - \mathcal{L}_a\varphi)$  et  $(\mathcal{L}_a\varphi - \mathcal{L}_{Z_{a,\theta_\mu}}\varphi)$  et, par des estimations analogues on obtient (avec  $a \rightarrow A$ ) que  $f$  possède  $\hat{f}$  pour développement asymptotique Gevrey d'ordre 1 et de type  $R_1 \cos(\theta - \theta_\mu)$  dans toute direction  $\theta \in ]\theta_\mu, \theta_2]$ .

*Cas général.* — Avec le résultat obtenu précédemment dans le cas des petits secteurs, il suffit de noter la propriété suivante, déduite du théorème 1 (avec  $\theta_0 = \theta_1$  et  $R = R_1$ ) : la fonction  $f$  possède  $\hat{f}$  pour développement asymptotique Gevrey d'ordre 1 et de type constant  $R_1$  dans toute direction  $\theta \in [\theta_1, \theta_2 - \pi/2]$ .  $\square$

## 5. Autres remarques

*Remarque 1.* — On peut considérer le théorème 1 comme un cas limite du théorème 10.

*Remarque 2.* — Les énoncés de l'article suggèrent de définir une *courbe type* pour un comportement asymptotique global sur tout un secteur de la façon suivante. Étant donnée une courbe paramétrée par l'angle  $\gamma : ]\alpha, \beta[ \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\theta \mapsto \gamma(\theta) = R(\theta)e^{i\theta}$ , la fonction  $f$ , analytique dans  $S = S(\alpha, \beta, \rho)$ , admet  $\hat{f}$  pour développement de type  $\gamma$  si pour tout  $\delta > 0$  il existe  $C > 0$  tel que pour tout  $x$  dans  $S$  et tout entier  $N$  :

$$|f(x) - \hat{f}_N(x)| \leq C \left( \frac{1}{R(\theta)} + \delta \right)^N N!$$

avec  $\theta = \arg x$ . Il convient de remarquer qu'il ne suffit pas a priori d'avoir une asymptotique de type  $R(\theta)$  dans chaque direction  $\theta$  du secteur pour obtenir l'asymptotique de type  $\gamma$ . En effet la constante  $C$  pourrait dépendre de  $\theta$ . Cependant, compte tenu de notre définition du type dans une direction et des preuves de l'article, il se trouve que ces deux notions sont équivalentes.

*Remarque 3.* — Le type  $R(\theta)$  donné dans le théorème 1 (ainsi que dans le théorème 10) est optimal comme le montre l'exemple classique de la série d'Euler. Détaillons cet exemple. L'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t/x}}{1+t} dt$$

définit une fonction analytique dans le demi-plan  $\{x \in \mathbb{C} \mid \Re(x) > 0\}$  et possède la série d'Euler  $\hat{f} := \sum_{n \geq 0} n!(-1)^n x^{n+1}$  pour développement asymptotique Gevrey d'ordre 1 dans la direction  $\mathbb{R}^+$  avec le type 1. De plus, cette fonction se prolonge en une fonction  $f$  analytique et asymptotiquement

bornée sur le secteur  $S(-3\pi/2, 3\pi/2; +\infty)$  de  $\tilde{\mathbb{C}}^*$ . Pour le voir il suffit d'écrire  $f$  sous la forme

$$f(x) = \int_0^\infty e^{i\alpha} \frac{e^{-t/x}}{1+t} dt$$

avec  $\alpha \in ]-\pi, \pi[$  et  $\arg x \in ]\alpha - \pi/2, \alpha + \pi/2[$ .

On sait aussi que  $f$  possède  $\hat{f}$  pour développement asymptotique Gevrey d'ordre 1 et de type  $R(\theta)$  dans chaque direction  $\theta \in ]-3\pi/2, 3\pi/2[$ , avec  $R(\theta)$  tel que l'application  $]-3\pi/2, 3\pi/2[ \rightarrow \tilde{\mathbb{C}}^*, \theta \mapsto R(\theta)e^{iR(\theta)}$  admet pour courbe le cercle unité plus un cercle centré en  $1/2$  et de rayon  $1/2$ , c'est-à-dire  $R(\theta) = 1$  pour  $\theta \in [-\pi, \pi]$ , et  $R(\theta) = \cos(\theta + \pi)$  pour  $\theta \in [-3\pi/2, -\pi]$  et  $\theta \in [\pi, 3\pi/2]$ . C'est exactement ce que donne le théorème 1.

*Remarque 4.* — Soit  $\hat{f}$  une série entière Gevrey d'ordre 1 et  $f$  une fonction analytique et asymptotiquement bornée sur un secteur ouvert  $S(\alpha, \beta; \rho) \subset \tilde{\mathbb{C}}^*$ , avec  $\beta - \alpha > \pi$  et  $\rho > 0$ . Si  $f$  admet  $\hat{f}$  pour développement asymptotique Gevrey d'ordre 1 dans une direction  $\theta_0 \in ]\alpha, \beta[$ , alors  $f$  est la somme de Borel de  $\hat{f}$  dans la direction  $(\alpha + \beta)/2$ .

Pour la définition de la somme de Borel d'une série entière, voir [3] ou [2].

## 6. Développements Gevrey d'ordre $k$

Soit  $k > 0$ ,  $S := S(\alpha, \beta; \rho)$  un secteur,  $\theta$  une direction de  $S$  et  $f$  une fonction analytique dans  $S$ . Comme précédemment, étant donnés  $\hat{f}(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n \in \mathbb{C}[[x]]$  et  $N \in \mathbb{N}^*$ , on note  $\hat{f}_N$  la somme partielle  $\hat{f}_N(x) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n x^n$ . On dira que  $f$  possède  $\hat{f}$  pour développement asymptotique Gevrey d'ordre  $k$  et de type  $R$  dans la direction  $\theta$  si, pour tout  $\delta > 0$ , il existe  $C > 0$  tel que :

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \forall x \in S \text{ avec } \arg x = \theta,$$

$$|f(x) - \hat{f}_N(x)| < C \Gamma\left(1 + \frac{N}{k}\right) \left(\frac{1}{R} + \delta\right)^N |x|^N.$$

On vérifie qu'une fonction  $f$  est asymptotique à la série nulle Gevrey d'ordre  $k$  et de type  $R$  dans la direction  $\theta$  si et seulement si elle satisfait :

$$\forall \delta > 0, \exists C > 0, \forall x \in S \text{ avec } \arg x = \theta, \\ |f(x)| < C \exp \left( - \left( \frac{R - \delta}{|x|} \right)^k \right).$$

La généralisation du théorème 1 est la suivante.

**THÉORÈME 11.** — *Si  $f$  possède  $\hat{f}$  pour développement asymptotique Gevrey d'ordre  $k$  et de type  $R(\theta_0)$  dans une direction  $\theta_0 \in ]\alpha, \beta[$ , alors dans toute direction  $\theta$  de  $S$ ,  $f$  possède  $\hat{f}$  pour développement asymptotique Gevrey d'ordre  $k$  et de type  $R(\theta)$ , où  $R(\theta)$  est défini de la façon suivante : en posant*

$$\alpha' = \min \left( \theta_0, \alpha + \frac{\pi}{2k} \right) \quad \text{et} \quad \beta' = \max \left( \theta_0, \beta - \frac{\pi}{2k} \right),$$

on a

$$R(\theta) = \begin{cases} R(\theta_0) \left( \frac{\sin k(\theta - \alpha)}{\sin k(\alpha' - \alpha)} \right)^{1/k} & \text{si } \theta \in ]\alpha, \alpha'] \\ R(\theta_0) & \text{si } \theta \in [\alpha', \beta'] \\ R(\theta_0) \left( \frac{\sin k(\theta - \beta)}{\sin k(\beta' - \beta)} \right)^{1/k} & \text{si } \theta \in [\beta', \beta]. \end{cases}$$

Nous avons volontairement limité les parenthèses dans les formules, espérant ne pas créer de confusion : la notation  $\sin k\xi$  doit se lire  $\sin(k\xi)$ .

La représentation graphique est analogue à celle de la figure 1 : la courbe entre  $\alpha'$  et  $\beta'$  reste un arc de cercle, celles entre  $\alpha$  et  $\alpha'$  et entre  $\beta$  et  $\beta'$  sont des arcs de fleurs, où on appelle *fleur* l'image par  $z \mapsto z^{1/k}$  d'un cercle tangent à l'origine. Lorsque  $k$  est entier, la fleur image du cercle de diamètre  $[0, z]$  est en fait la lemniscate à  $k$  pétales

$$\ell(z_1, \dots, z_k; C) := \left\{ \zeta \in \mathbb{C} \mid \prod_{\nu=1}^k |\zeta - z_\nu| = C \right\}$$

où les  $z_\nu$  sont toutes les racines  $k$ -ièmes de  $z/2$  et où  $C = |z/2|$ . Mentionnons que les disques de Borel d'ordre  $k$  intervenant dans la théorie de la  $k$ -sommabilité sont bordés par un seul pétale (cf. [3]).

*Preuve du théorème 11.* — Le schéma de démonstration est le même que précédemment. On démontre d'abord le résultat pour le développement nul. En appliquant le théorème de Phragmén-Lindelöf à la fonction  $f(x) \exp((Re^{i\theta}/x)^k)$ , on obtient l'analogue du lemme 4 où  $R(\xi)$  est à remplacer par  $R(\xi)^k$  et  $\sin \xi$  par  $\sin k\xi$ . On en déduit l'analogue de la proposition 6 où  $\pi$  est remplacé par  $\pi/k$  et le type  $R(\theta)$  est donné par

$$R(\theta) = R \left( \frac{\sin k(\theta - \alpha)}{\sin k(\theta_0 - \alpha)} \right)^{1/k}.$$

On utilise ensuite les transformées de Borel et de Laplace tronquée d'ordre  $k$ , données par

$$\begin{aligned} \hat{B} \left( \sum_{n \geq 0} a_n x^{n+1} \right) &:= \sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{\Gamma(1 + n/k)} t^n, \\ \mathcal{L}_{k,a} F(z) &:= k \int_0^a e^{-(t/z)^k} F(t) \frac{dt}{t}. \end{aligned}$$

Le théorème de Borel-Ritt-Gevrey (lemme 7) reste valide pour l'ordre  $k$  en remplaçant le secteur par  $S(\arg z - \pi/2k, \arg z + \pi/2k)$  et la dernière formule par  $R(\theta) = |z|(\cos k(\theta - \arg z))^{1/k}$ . La suite de la preuve (sect. 4) est identique.  $\square$

Il est possible de modifier le théorème 10 de manière analogue, en utilisant des variantes des lemme 8 et proposition 9. Concernant le lemme 8, le domaine où la transformée de Borel d'ordre  $k$  peut être prolongée n'est plus nécessairement convexe et est donné par  $C = \bigcap_{j=1}^m H_j$  avec  $H_j = \{t \in \mathbb{C} \mid \Re(t^k e^{ik\varphi_j}) < \gamma_j^k\}$ . Pour cela il faut adapter la preuve faite dans [1] avec la formule de Borel-Heine d'ordre  $k$  suivante :

$$\begin{aligned} F(t) &= \frac{1}{2k\pi i} \sum_{j=1}^m \int_0^{x_j} (f_{j+1}(z) - f_j(z)) e^{t^k/z^k} \frac{dz}{z} + \\ &+ \frac{1}{2k\pi i} \sum_{j=1}^m \int_{x_{j-1}}^{x_j} f_j(z) e^{t^k/z^k} \frac{dz}{z}. \end{aligned}$$

En ce qui concerne la proposition 9, le secteur est supposé d'ouverture  $\beta - \alpha < \pi/k$ , les points  $A_1, A_2$  sont sur un pétale de diamètre  $[0, A]$ , le triangle  $]A, A_1, A_2[$  n'a plus des bords droits, mais paramétrés par

$$R = \frac{R_i}{(\cos k(\theta - \varphi_i))^{1/k}}, \quad i = 1, 2$$

et  $\theta \mapsto R_a(\theta) e^{i\theta}$  ne paramétrise plus un arc de cercle mais un arc de pétale :

$$R_a(\theta) = |a|(\cos k(\theta - \arg a))^{1/k}.$$

## 7. Développements $q$ -Gevrey

Pour simplifier l'exposé, nous avons choisi de ne traiter que le cas de l'ordre 1, en privilégiant la direction  $\mathbb{R}^+$ , et sans préciser le type Gevrey. On ne considère aussi que le cas où  $q$  est un nombre réel strictement supérieur à 1.

On note  $\tilde{\mathbb{C}}^*$  la surface de Riemann du logarithme, et  $\tilde{D}(0, R)$  le “disque en colimaçon”  $\tilde{D}(0, R) := \{x \in \tilde{\mathbb{C}}^* \mid 0 < |x| < R\}$ . On rappelle les définitions et notations suivantes (cf. [8]).

$$\log_q(x) := \frac{\log x}{\log q}, \quad \arg_q(x) := \frac{\arg x}{\log q}.$$

Une série formelle  $\hat{f}(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$  est dite  $q$ -Gevrey (d'ordre 1) s'il existe deux constantes  $K, A > 0$  telles que pour tout entier  $n$  on ait  $|a_n| \leq K A^n q^{n^2/2}$ . On écrit dans ce cas  $\hat{f} \in \mathbb{C}[[x]]_{q,1}$ . Soit  $f$  une fonction analytique sur  $\tilde{D}(0, R)$ . On dit que  $f$  est *asymptotique à la série  $\hat{f}$   $q$ -Gevrey d'ordre 1* s'il existe deux constantes  $K, A > 0$  telles que pour tout entier  $n$  et tout  $x \in \tilde{D}(0, R)$  on ait

$$\left| f(x) - \sum_{n=0}^N a_n x^n \right| \leq K A^N q^{(N^2 + \arg_q^2 x)/2} |x|^N.$$

On dira  $f$  est asymptotique  $q$ -Gevrey à  $\hat{f}$  en restriction à  $\mathbb{R}^+$  si la condition ci-dessus est satisfaite pour  $x \in ]0, R[$ .

La fonction  $f$  est dite à *décroissance  $q$ -exponentielle* (resp. en restriction à  $\mathbb{R}^+$ ) s'il existe  $\mu \in \mathbb{R}$  et  $K > 0$  tels que pour tout  $x \in \tilde{D}(0, R)$  (resp. tout  $x \in ]0, R[$ ), on ait

$$|f(x)| \leq K |x|^\mu |q^{-(1/2) \log_q^2 x}|.$$

On trouvera dans [8, prop. 2.2.1 et 2.2.2] une preuve du résultat suivant.

LEMME 12

- (1) La fonction  $f$  est asymptotique  $q$ -Gevrey d'ordre 1 à la série nulle (resp. en restriction à  $\mathbb{R}^+$ ) si et seulement si  $f$  est à décroissance  $q$ -exponentielle (resp. en restriction à  $\mathbb{R}^+$ ).
- (2) Pour toute série formelle  $q$ -Gevrey  $\hat{f}$ , il existe une fonction analytique au voisinage de 0 dans  $\tilde{\mathbb{C}}^*$  admettant  $\hat{f}$  pour développement asymptotique  $q$ -Gevrey d'ordre 1.

Nous proposons à présent le  $q$ -analogue suivant du théorème 1.

THÉORÈME 13. — Soit

$$\hat{f}(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n \in \mathbb{C}[[x]]_{q,1}$$

et  $f$  une fonction analytique sur  $\tilde{D}(0, R)$ . Alors  $f$  est asymptotique  $q$ -Gevrey d'ordre 1 à  $\hat{f}$  si et seulement si :

- (i)  $\exists K, A > 0, \forall x \in ]0, R[$ ,

$$\left| f(x) - \sum_{n=0}^N a_n x^n \right| \leq K A^N q^{N^2/2} x^N,$$

- (ii)  $\exists K > 0, \forall x \in \tilde{D}(0, R)$ ,

$$|f(x)| \leq K q^{(1/2) \arg_q^2 x}.$$

De même que précédemment, on commence par démontrer le résultat dans le cas du développement nul. Auparavant, remarquons que les deux conditions (i) et (ii) sont clairement nécessaires : si  $f$  est asymptotique  $q$ -Gevrey à  $\hat{f}$ , on obtient (i) par restriction à l'axe  $\mathbb{R}^+$  et (ii) en posant  $N = 0$ . On se bornera donc à montrer que ces conditions sont suffisantes. Nous aurons besoin du lemme suivant.

LEMME 14. — Soit  $g$  une fonction définie et continue sur le quart de plan fermé  $Q = \{t = u + iv \in \mathbb{C} \mid u \geq 0 \text{ et } v \geq 0\}$  et analytique sur l'intérieur de  $Q$ . Soit  $M > 0$ . On suppose :



- (i)  $\forall u \geq 0, |g(u)| \leq M,$   
 (ii)  $\forall t \in Q, |g(t)| \leq Me^{u^2}.$

Alors  $g$  est bornée par  $M$  en module sur tout  $Q$ .

*Preuve.* — Pour  $\varepsilon > 0$  quelconque, on considère la fonction  $g_\varepsilon(t) = g(t)e^{i\varepsilon t}$ . On a  $|g_\varepsilon(t)| = |g(t)|e^{-\varepsilon uv}$  donc sur  $\mathbb{R}^+$  on a  $g_\varepsilon(u) \leq M$  et sur  $Q$ ,  $|g_\varepsilon(t)| \leq Me^{u(u-\varepsilon v)}.$

Appliquons le théorème de Phragmén–Lindelöf à la fonction  $g_\varepsilon$  sur le secteur  $V_\varepsilon = \{t = u + iv \in \mathbb{C} \mid 0 < v < u/\varepsilon\}$ ; on a  $g_\varepsilon$  à croissance au plus exponentielle d'ordre 2 sur  $V_\varepsilon$ , bornée par  $M$  sur  $\partial V_\varepsilon$  et  $V_\varepsilon$  est d'ouverture strictement inférieure à  $\pi/2$ , donc  $g_\varepsilon$  est bornée par  $M$  sur tout  $V_\varepsilon$ . On en déduit que  $g$  est bornée par  $Me^{\varepsilon uv}$  sur  $V_\varepsilon$  pour tout  $\varepsilon > 0$ , donc bornée par  $M$  sur  $Q$ .  $\square$

### *Preuve du théorème 13*

*Cas du développement nul.* — D'après le lemme 12(1), il suffit de démontrer le résultat suivant.

LEMME 15. — Soit  $f$  analytique sur  $\tilde{D}(0, R)$  satisfaisant les deux conditions suivantes :

- (i)  $\exists \mu \in \mathbb{R}, \exists K > 0, \forall x \in ]0, R[,$   
 $|f(x)| \leq Kq^{-(1/2)\log_q^2 x} x^\mu ;$   
 (ii)  $\exists K > 0, \forall x \in \tilde{D}(0, R),$   
 $|f(x)| \leq Kq^{(1/2)\arg_q^2 x}.$

Alors il existe  $\mu \in \mathbb{R}$  et  $K > 0$  tels que, pour tout  $x \in \tilde{D}(0, R)$ ,

$$|f(x)| \leq K|q^{-(1/2)\log_q^2 x} x^\mu|,$$

*Preuve.* — Soit  $t = \log_q x$  et  $g(t) = f(x)q^{(1/2)\log_q^2 x} x^{-\mu}$ . La fonction  $g$  est définie dans le demi-plan à gauche  $P = \{t \in \mathbb{C} \mid \Re t < \log_q R\}$ , bornée sur  $] -\infty, \log_q R[$  et majorée en module par  $q^{(1/2)(\Re t)^2 - \mu \Re t}$  sur  $P$ . D'après le lemme 14 appliqué à chacun des deux quarts de plans, la fonction  $g$  est donc bornée sur  $P$ .  $\square$

*Cas général.* — Étant donnée  $f$  satisfaisant les conditions (i) et (ii) de l'énoncé, soit  $f_0$  une fonction asymptotique  $q$ -Gevrey à  $\hat{f}$  donnée par le lemme 12(2). La fonction  $f - f_0$  est asymptotique à 0  $q$ -Gevrey d'ordre 1 en restriction à  $\mathbb{R}^+$ , donc à décroissance  $q$ -exponentielle dans cette direction d'après le lemme 12(1). De plus, on a pour tout  $x \in \tilde{D}(0, R)$ ,

$$|f(x) - f_0(x)| \leq |f(x)| + |f_0(x)| = O(q^{-(1/2)\log_q^2 x}).$$

D'après le lemme 15, il s'ensuit que  $f - f_0$  est à décroissance  $q$ -exponentielle dans tout  $\tilde{D}(0, R)$ . A fortiori, pour tout  $x \in \tilde{D}(0, R)$  et tout entier  $n$ , on a

$$|f(x) - f_0(x)| = O(A^n q^{(n^2 + \arg_q^2 x)/2} |x|^n).$$

On en déduit que  $f$  est asymptotique  $q$ -Gevrey à  $\hat{f}$  en utilisant  $|f - \hat{f}_n| \leq |f - f_0| + |f_0 - \hat{f}_n|$  où  $\hat{f}_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , sont les sommes partielles de  $\hat{f}$ .  $\square$

## Remerciements

Nous remercions J.-P. Ramis, R. Schäfke et G. Wallet pour leurs suggestions et leurs encouragements. Merci aussi au referee pour sa lecture attentive.

## Références

- [1] FRUCHARD (A.) et SCHÄFKE (R.) . — *On the Borel transform*, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I, **323** (1996), pp. 999-1004.
- [2] MALGRANGE (B.) . — *Sommation des séries divergentes*, Exp. Math. **13**, n° 2-3 (1995), pp. 163-222.
- [3] RAMIS (J.-P.) . — *Les séries  $k$ -sommables et leurs applications*, Complex Analysis, Microlocal Calculus and Relativistic Quantum Theory, Lecture Notes in Physics **126** (1980), pp. 178-199.
- [4] SIBUYA (Y.) . — *Linear differential equations in the complexe domain, problems of analytical continuation*, A.M.S., Providence (RI), 1990.
- [5] TITCHMARSH (E. C.) . — *The Theory of Functions*, Second edition, Oxford Science Publications (1939).
- [6] TOUGERON (J.-CL.) . — *An introduction to the theory of Gevrey expansions and to the Borel-Laplace transform with some applications*, Preprint University of Toronto, Canada (1990).
- [7] WASOW (W.) . — *Asymptotic expansions for ordinary differential equations*, Interscience, New-York (1965).
- [8] ZHANG (C.) . — *Les développements asymptotiques  $q$ -Gevrey, les séries  $Gq$ -sommables et leurs applications*, Ann. Inst. Fourier **49**, n° 1 (1999) à paraître.