

JEAN-MARIE LION

Densité des ensembles semi-pfaffiens

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 6^e série, tome 7, n° 1
(1998), p. 87-92

http://www.numdam.org/item?id=AFST_1998_6_7_1_87_0

© Université Paul Sabatier, 1998, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Densité des ensembles semi-pfaffiens^(*)

JEAN-MARIE LION⁽¹⁾

RÉSUMÉ. — À l'aide d'une formule intégrale de Cauchy-Crofton, on prouve que les ensembles semi-pfaffiens ont la propriété de densité en tout point de leur adhérence. Ceci généralise des résultats de Lelong, Kurdyka-Poly-Raby et Roche.

ABSTRACT. — Using Cauchy-Crofton's formula, we prove the existence of densities in each boundary point of a semi-pfaffian set. It is a generalisation of some results of Lelong, Kurdyka-Poly-Raby and Roche.

AMS Classification : primaire 32C05, 32C25, 58A99; secondaire 14G30, 32B20, 34C35

0. Introduction

Lelong [Lel] et Vitushkin [Vit] ont utilisé la géométrie intégrale pour prouver des propriétés des sous-ensembles analytiques. Dans cet esprit, on emploie la formule intégrale de Cauchy-Crofton pour étudier le comportement asymptotique d'un ensemble semi-pfaffien [Li2] et [LRol]. Avant d'énoncer notre résultat définissons les objets étudiés.

Densité

Soient Y un sous-ensemble de \mathbb{R}^n muni de la métrique euclidienne canonique, a un point de \mathbb{R}^n et $k \in \mathbb{N}$ un entier. Si $\varepsilon > 0$, on pose $Y_a^\varepsilon = \{x \in Y \mid \|x - a\| < \varepsilon\}$. On suppose que si $\varepsilon > 0$ est petit, le volume k -dimensionnel $\text{vol}_k(Y_a^\varepsilon)$ de Y_a^ε est bien défini et fini. Dans le cas d'une sous-variété différentiable analytique de dimension k de \mathbb{R}^n , ce volume coïncide

(*) Reçu le 5 janvier 1996, accepté le 12 mai 1997

(1) CNRS UMR 5584, Université de Bourgogne, B.P. 400, F-21011 Dijon Cedex (France)

e-mail : lion@u-bourgogne.fr

avec le volume riemannien usuel. Notons σ_k le volume k -dimensionnel de la boule unité de \mathbb{R}^k . La limite

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \text{vol}_k(Y_a^\varepsilon) / \sigma_k \varepsilon^k,$$

si elle existe, est appelée *densité k -dimensionnelle* de Y au point a . On dit alors que le sous-ensemble Y possède la propriété de k -densité au point a .

Lelong [Lel] montre que les sous-ensembles analytiques complexes possèdent la propriété de densité. Kurdyka, Poly et Raby ([KuRa], [KPR]) établissent que cette propriété est vérifiée par les sous-ensembles sous-analytiques de \mathbb{R}^n [DS]. Roche [Roc] prouve qu'une *feuille de Rolle* possède une densité en tout point de son adhérence. Nous généralisons ce résultat aux ensembles semi-pfaffiens de \mathbb{R}^n et à leurs composantes connexes. Les ensembles semi-pfaffiens forment une classe d'ensembles naturellement associés à des équations différentielles analytiques. Cette classe contient strictement celles des semi-analytiques [Loj].

Ensemble semi-pfaffien ([MR1], [MR2], [Li2], [LRol])

Dans toute la suite on désigne par M un ouvert semi-analytique M de \mathbb{R}^n . On étudie certains sous-ensembles de cet ouvert.

Un sous-ensemble V de M est une *feuille de Rolle* s'il vérifie les deux conditions suivantes. C'est une feuille d'un feuilletage de M induit par une 1-forme différentielle analytique, intégrable au voisinage de \overline{M} et sans singularité dans M . Tout arc différentiable $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ d'extrémités dans V est tangent à ce feuilletage en un point (propriété de Rolle).

Un *ensemble semi-pfaffien* est un élément de la plus petite classe de sous-ensembles de M contenant les feuilles de Rolle, les semi-analytiques de \mathbb{R}^n inclus dans M , stable par intersection finie, réunion finie et différence symétrique.

La propriété de Rolle est une condition de non-spiralement [MR2] qui implique des propriétés de finitude pour les ensembles pfaffiens ([MR1] et [MR2], voir aussi [Kho]) (qui sont aux semi-pfaffiens ce que les ensembles analytiques sont aux semi-analytiques) et pour les semi-pfaffiens ([Li2], [LRol]). Plus précisément, on utilise dans cet article la propriété de finitude suivante (conséquence de la proposition 1 de [LRol] ou du théorème III.1 de [Li2]).

PROPRIÉTÉ DE FINITUDE POUR LES SEMI-PFAFFIENS [LRol]. — Soit $W \subset M$ un ensemble semi-pfaffien relativement compact et soient f et g deux applications continues et semi-analytiques définies respectivement sur $\overline{M} \times [0, 1]^N$ et $\overline{M} \times [0, 1]^{N'}$ et à valeurs dans des espaces vectoriels réels de dimension finie. Il existe alors un entier B_0 majorant le nombre de composantes connexes de tout ensemble du type $\{x \in W \mid f(x, \varepsilon) > 0, g(x, \varepsilon') = 0\}$ indépendamment du choix de $\varepsilon \in [0, 1]^N$ et de $\varepsilon' \in [0, 1]^{N'}$.

Un ensemble semi-pfaffien est la réunion d'une famille localement finie de sous-variétés différentiables analytiques de \mathbb{R}^n (voir [Li2] ou [LRol]). En tout point de son adhérence, sa dimension est donc définie. Possède-t-il une densité finie en ces points? En utilisant la propriété de finitude précédente et en faisant un peu de géométrie intégrale, on répond positivement à cette question.

THÉORÈME. — *Un ensemble semi-pfaffien de dimension k en un point de son adhérence possède une k -densité finie en ce point.*

La preuve proposée est une adaptation au cadre de la géométrie intégrale (voir [KPR]) des preuves des théorèmes comparables de [KuRa] et [Roc]. Nous la donnerons après avoir introduit des notations et fait des rappels de géométrie intégrale ([San], [Lan]).

1. Un peu de géométrie intégrale

L'espace vectoriel \mathbb{R}^n est muni de la métrique euclidienne canonique. Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un sous-espace vectoriel euclidien de \mathbb{R}^n . On note B_E la boule unité ouverte de E . Soit $k \in \mathbb{N}$ un entier. On note \mathcal{G}_k la grassmannienne des k -plans vectoriels euclidiens de \mathbb{R}^n . On note \mathbf{B}_k l'espace $\mathbf{B}_k\{(y, B_E) \mid y \in B_E, E \in \mathcal{G}_k\}$. Les espaces \mathcal{G}_k et \mathbf{B}_k sont munis de mesures canoniquement obtenues à partir de la métrique euclidienne de \mathbb{R}^n .

Soit $V \subset \mathbb{R}^n$ une sous-variété différentiable analytique de dimension k et soit $E \in \mathcal{G}_k$ un k -plan vectoriel. On note π la projection orthogonale sur E . La sous-variété V est munie de la métrique riemannienne induite par la métrique euclidienne de \mathbb{R}^n .

Soit $\varepsilon > 0$ un réel strictement positif. On pose $V^\varepsilon = \{x \in V \mid \|x\| < \varepsilon\}$. On définit les fonctions $\underline{\theta}_{V,E}^\varepsilon$, $\theta_{V,E}^\varepsilon$, et $\overline{\theta}_{V,E}^\varepsilon$ suivantes. S'il existe un entier qui majore le cardinal de toute fibre $\pi^{-1}(z) \cap V^\varepsilon$ avec $z \in E \setminus \{0\}$, on pose

$$\begin{aligned}\forall y \in B_E \setminus \{0\}, \quad \theta_{V,E}^\varepsilon(y) &= \text{Card}(\pi^{-1}(\varepsilon y) \cap V^\varepsilon), \\ \underline{\theta}_{V,E}^\varepsilon(y) &= \inf\{\theta_{V,E}^t(y) \mid 0 < t \leq \varepsilon\}, \\ \bar{\theta}_{V,E}^\varepsilon(y) &= \sup\{\theta_{V,E}^t(y) \mid 0 < t \leq \varepsilon\}.\end{aligned}$$

Sinon on pose $\underline{\theta}_{V,E}^\varepsilon \equiv \theta_{V,E}^\varepsilon \equiv \bar{\theta}_{V,E}^\varepsilon$. On note $\underline{\Theta}_V^\varepsilon$, Θ_V^ε et $\bar{\Theta}_V^\varepsilon$ les fonctions définies sur \mathbf{B}_k par

$$\underline{\Theta}_V^\varepsilon(y, B_E) = \underline{\theta}_{V,E}^\varepsilon(y), \quad \Theta_V^\varepsilon(y, B_E) = \theta_{V,E}^\varepsilon(y) \quad \text{et} \quad \bar{\Theta}_V^\varepsilon(y, B_E) = \bar{\theta}_{V,E}^\varepsilon(y).$$

Les fonctions $\underline{\Theta}_V^\varepsilon$, Θ_V^ε et $\bar{\Theta}_V^\varepsilon$ sont mesurables. Si elles sont bornées, elles sont sommables. C'est ce que nous supposons. D'après la formule de Cauchy–Crofton (voir [San] ou [Lan]), le volume k -dimensionnel $\text{vol}_k(W^\varepsilon)$ de l'ensemble W^ε , image de V^ε par l'homothétie de rapport $1/\varepsilon$ et de centre l'origine vérifie l'égalité

$$\text{vol}_k(W^\varepsilon) = c_k \int_{\mathbf{B}_k} \Theta_V^\varepsilon$$

où c_k est une constante universelle. Or le volume $\text{vol}_k(V^\varepsilon)$ est égal à $\varepsilon^k \text{vol}_k(W^\varepsilon)$. Ainsi en intégrant les inégalités $\underline{\Theta}_V^\varepsilon \leq \Theta_V^\varepsilon \leq \bar{\Theta}_V^\varepsilon$, on obtient

$$0 \leq \int_{\mathbf{B}_k} \underline{\Theta}_V^\varepsilon \leq \frac{\text{vol}_k(V^\varepsilon)}{c_k \varepsilon^k} = \int_{\mathbf{B}_k} \Theta_V^\varepsilon \leq \int_{\mathbf{B}_k} \bar{\Theta}_V^\varepsilon < +\infty.$$

Pour que la sous-variété $V \subset \mathbb{R}^n$ de dimension k possède la propriété de k -densité à l'origine, il suffit donc que les limites quand $\varepsilon > 0$ tend vers 0 des intégrales $\int_{\mathbf{B}_k} \underline{\Theta}_V^\varepsilon$ et $\int_{\mathbf{B}_k} \bar{\Theta}_V^\varepsilon$ existent et soient finies et égales.

2. Preuve du théorème

Nous allons appliquer ces résultats à la situation semi-pfaffienne pour prouver la propriété de densité.

Tout semi-pfaffien est une réunion localement finie disjointe de composantes connexes de semi-pfaffiens relativement compacts qui sont des sous-variétés différentiables analytiques (voir [Li2] ou [LRol]). Pour prouver le théorème il suffit donc de prouver qu'une composante connexe V d'un semi-pfaffien relativement compact qui est une sous-variété différentiable analytique possède la propriété de densité à l'origine de \mathbb{R}^n . On considère une telle composante connexe V . On note k sa dimension.

D'après la propriété de finitude pour les semi-pfaffiens, il existe un entier indépendant de $\varepsilon > 0$ qui majore les fonctions sommables $\underline{\Theta}_V^\varepsilon$, Θ_V^ε et $\overline{\Theta}_V^\varepsilon$.

Or les fonctions $\underline{\Theta}_V^\varepsilon$ et $\overline{\Theta}_V^\varepsilon$ convergent simplement, lorsque ε tend vers 0, vers deux fonctions notées $\underline{\Theta}_V$ et $\overline{\Theta}_V$. Ces dernières sont donc sommables et uniformément bornées.

Soit $E \in \mathcal{G}_k$ un k -plan et soit $\vec{u} \in E$ un vecteur unitaire. Supposons les applications $\underline{\Theta}_{V,E}^\varepsilon$, $\Theta_{V,E}^\varepsilon$ et $\overline{\Theta}_{V,E}^\varepsilon$ non identiquement nulles pour $\varepsilon > 0$ petit. Le nombre de composantes connexes de $\pi^{-1}(\{t\vec{u} \mid 0 < t < \varepsilon\}) \cap V^\varepsilon$ est un entier p indépendant de $\varepsilon > 0$ petit. D'après le lemme de sélection de courbes de la géométrie pfaffienne [Li1], [Li2] et [LRoc], chaque composante C_i^ε , $i = 1, \dots, p$, est une courbe analytique qui aboutit à l'origine avec une tangente \vec{v}_i ($\|\vec{v}_i\| = 0$) et la projection $\pi : C_i^\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}\vec{u}$ est un plongement. Pour $i = 1, \dots, p$, on note t_i le réel vérifiant $\pi(\vec{v}_i) = t_i\vec{u}$. Si $t \in]0, 1[$ est différent de t_1, \dots, t_p , alors les nombres $\underline{\Theta}_{V,E}^\varepsilon(t\vec{u})$, $\Theta_{V,E}^\varepsilon(t\vec{u})$ et $\overline{\Theta}_{V,E}^\varepsilon(t\vec{u})$ sont égaux et indépendants de $\varepsilon > 0$ petit (voir un argument analogue chez [KuRa], [KPR] et [Roc]). En appliquant le théorème de Fubini, on déduit alors que les fonctions $\underline{\Theta}_V$ et $\overline{\Theta}_V$ coïncident en dehors d'un ensemble de mesure nulle.

Il en découle, d'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue et de la double inégalité $\underline{\Theta}_V \leq \Theta_V \leq \overline{\Theta}_V$ que la somme $\int_{\mathbf{B}_k} \Theta_V^\varepsilon$ qui est égale à $\text{vol}_k(V^\varepsilon)/c_k\varepsilon^k$, converge quand ε tend vers 0 vers les sommes $\int_{\mathbf{B}_k} \underline{\Theta}_V$ et $\int_{\mathbf{B}_k} \overline{\Theta}_V$ qui sont égales. Ceci prouve la propriété de densité et conclut la preuve. \square

En adaptant la preuve précédente, on prouve facilement le corollaire suivant.

COROLLAIRE. — *Soit W un ensemble semi-pfaffien de \mathbb{R}^{n+m} . Si la restriction de la projection canonique π de \mathbb{R}^{n+m} sur \mathbb{R}^n à \overline{W} est propre, alors l'ensemble $\pi(W)$ possède la propriété de densité en tout point de son adhérence. C'est vrai en particulier pour un sous-analytique.*

Remarque. — La technique proposée ici peut certainement servir à prouver d'autres propriétés des ensembles semi-pfaffiens. En particulier elle doit permettre de retrouver la finitude homologique de ces ensembles [LRol].

Remerciements

Je remercie O. Couture, R. Langevin et C. A. Roche qui m'ont aidé à rendre ces propos exacts.

Bibliographie

- [DS] DENKOWSKA (S.) et STASICA (J.) . — *Ensembles sous-analytiques à la polonaise*, preprint (1985).
- [Kho] KHOVANSKII (A. G.) . — *Real analytic varieties with finiteness property and complex abelian integrals*, *Funct. Anal. and Appl.* **18** (1984), pp. 119-127.
- [KPR] KURDYKA, (K.), POLY (J.-B.) et RABY (G.) . — *Moyennes des fonctions sous-analytiques, densité, cône tangent*, L.N.M. 1420 (proceedings Trento 1988), pp. 170-177.
- [KuRa] KURDYKA (K.) et RABY (G.) . — *Densité des ensembles sous-analytiques*, *Ann. Institut Fourier* **39**, n° 3 (1989), pp. 753-771.
- [Lan] LANGEVIN (R.) . — *Un peu de géométrie intégrale*, *Images des Mathématiques*, CNRS (1995), pp. 58-67.
- [Lel] LELONG (P.) . — *Intégration sur un ensemble analytique complexe*, *Bull. Soc. math. France* **85** (1957), pp. 239-262.
- [LRoc] LION (J.-M.) et ROCHE (C.-A.) . — *Topologie des hypersurfaces pfaffiennes*, *Bull. Soc. math. France*, **124** (1996), pp. 35-59.
- [LRol] LION (J.-M.) et ROLIN (J.-P.) . — *Homologie des ensembles semi-pfaffiens*, *Ann. Institut Fourier* **46**, n° 3 (1996), pp. 723-741.
- [Li1] LION (J.-M.) . — *Partitions normales de Lojasiewicz et hypersurfaces pfaffiennes*, *C.R.A.S. de Paris, Série I*, **311** (1990), pp. 453-456.
- [Li2] LION (J.-M.) . — *Étude des hypersurfaces pfaffiennes*, Thèse de l'Université de Bourgogne, novembre 1991.
- [Loj] LOJASIEWICZ (S.) . — *Ensembles semi-analytiques*, Preprint I.H.E.S. (1965).
- [MR1] MOUSSU (R.) et ROCHE (C.-A.) . — *Théorie de Hovanskii et problème de Dulac*, *Invent. Math.* **105** (1991), pp. 431-441.
- [M-R1] MOUSSU (R.) et ROCHE (C.-A.) . — *Théorèmes de finitude uniforme pour les variétés pfaffiennes de Rolle*, *Ann. Institut Fourier* **42**, n° 1-2 (1992), pp. 393-420.
- [Roc] ROCHE (C.-A.) . — *Densities for certain leaves of real analytic foliations*, *Astérisque* **222** (1994), pp. 373-387.
- [San] SANTALÓ (L. A.) . — *Integral geometry and geometric probability* dans "Encyclopedia of mathematics and its applications", Addison-Wesley, Reading, **1** (1976),
- [Vit] VITUSHKIN (A. G.) . — *Variation multidimensionnelle*, *Go. Tekh. Izdat Moscou*, 1955 (en russe).