Annales de la faculté des sciences de Toulouse

Michel Belliart

Actions localement libres de groupes non unimodulaires

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 6e série, tome 7, nº 1 (1998), p. 35-50

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1998_6_7_1_35_0>

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse Vol. VII, n° 1, 1998

Actions localement libres de groupes non unimodulaires(*)

MICHEL BELLIART(1)

RÉSUMÉ. — Soit G un groupe de Lie connexe. Nous supposons qu'il existe $\gamma \in G$ tel que les valeurs propres $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ de $\mathrm{Ad}(\gamma)$ vérifient la condition $\forall i, j, |\alpha_1 \cdots \alpha_n| > |\alpha_i \alpha_j^{-1}|$. Alors, nous montrons que toute action localement libre et isochore de classe C^r $(r \geq 2)$ de G sur une variété fermée de dimension $\dim(G) + 1$ est C^r-conjuguée à une action homogène. Nous donnons aussi une preuve simple de la stabilité différentiable des feuilletages formés par les orbites de Φ pour $r \geq 3$.

ABSTRACT. — Let G be a connected Lie group. Assuming that there is a $\gamma \in G$ such that the eigenvalues $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ of $\mathrm{Ad}(\gamma)$ fulfill the condition $\forall i, j, |\alpha_1 \cdots \alpha_n| > |\alpha_i \alpha_j^{-1}|$, we show that every locally free, volume-preserving, C^r $(r \geq 2)$ action of G on a closed manifold M with dimension $\dim(G) + 1$ is C^r-conjugated to a homogeneous action. We also give a simple proof of the differentiable stability of the foliation of M by the Φ-orbits for $r \geq 3$.

Introduction

On sait combien la notion de *stabilité structurelle* est naturelle en théorie des systèmes dynamiques ([AI], [Ma]); pour autant, depuis une vingtaine d'années, on connaît des systèmes ayant une rigidité supérieure. Nous allons étudier de tels systèmes; nos objets seront les suivants : un groupe de Lie connexe G, une variété fermée connexe M de dimension $n+1 = \dim(G)+1$ et une action Φ de classe C^r $(2 \leq r \leq \omega)$ de G sur M. Nous supposons Φ localement libre, de sorte que ses orbites forment un feuilletage $\mathcal{F}$. Dans le cas particulier où G agit par translations à gauche sur un espace homogène

(*) Reçu le 24 février 1998, accepté le 16 mars 1998

(1) U.R.A. G.A.T au C.N.R.S., Université de Lille I, F-59651 Villeneuve-d'Ascq Cedex (France)
e-mail : belliart@gat.univ-lille1.fr

H/Γ (H un sur-groupe de Lie de G et Γ un sous-groupe discret uniforme de H), nous dirons que l'action et le feuilletage sont des *modèles*. Nous ne chercherons pas à décrire les modèles trop en détail car ils ont fait l'objet d'une littérature abondante dont le lecteur trouvera la trace dans [Go], ouvrage de référence sur la théorie des feuilletages.

Nous commencerons par étudier l'existence d'une conjugaison différentiable de Φ à un modèle. Dans le cas le plus simple ($G = \mathbb{R}$), celle-ci n'existe génériquement pas : il n'existe même pas de conjugaison topologique de $\mathcal{F}$ à un modèle, car les modèles ont des orbites toutes fermées ou toutes denses alors que selon [Pe], un $\mathcal{F}$ générique possède un nombre fini > 0 de feuilles fermées. Selon [GHM], ce manque de rigidité est partagé par de nombreux groupes nilpotents. Par contre, les actions de groupes à croissance exponentielle semblent plus rigides; pour le plus simple d'entre eux, qui est le groupe GA des transformations $x \to ax + b$ ($a > 0$) de $\mathbb{R}$, il y a dans [Gh] le résultat suivant.

THÉORÈME (Ghys). — *($G = \mathrm{GA}$). Si Φ préserve un volume continu, Φ est C^r-conjuguée à un modèle.*

L'hypothèse supplémentaire d'invariance du volume serait très forte dans le cas d'un groupe nilpotent, car elle excluerait de nombreux cas intéressants, comme les flots de Morse-Smale pour $G = \mathbb{R}$. Par contre, GA préserve toujours une mesure de Borel qui charge les ouverts, et celle-ci est sans doute un volume (Ghys l'a démontré quand $H^1(M, \mathbb{R}) = 0$). D'autre part, on dispose d'un autre théorème.

THÉORÈME (Ghys). — *Soit Φ une action localement libre de classe C^r d'un groupe de Lie non unimodulaire (un groupe de Lie est non unimodulaire si sa fonction modulaire $\Delta(g) = \det(\mathrm{Ad}(g))$ n'est pas constante) G sur une variété fermée M de dimension $\dim(G) + 1$. Si Φ préserve un volume continu, celui-ci est de classe C^{r-1}.*

Les méthodes utilisées par Ghys pour prouver son théorème dépassent de loin le cadre du groupe GA. En les adaptant, nous prouvons ce théorème.

THÉORÈME A. — *Soit Φ une action localement libre de classe C^r ($r \geq 2$) d'un groupe de Lie G sur une variété fermée M de dimension $\dim(G)+1$. Si Φ préserve un volume continu (donc C^{r-1}) et s'il existe un $\gamma \in G$ tel que les valeurs propres $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ et le déterminant $\Delta(\gamma)$ de $\mathrm{Ad}(\gamma)$ vérifient $\Delta(\gamma) > \mathrm{Sup}\, |\alpha_i \alpha_j^{-1}|$, alors Φ est C^r-conjuguée à un modèle.*

Noter que ce théorème est valable pour de nombreux groupes mais ne s'applique pas à GA (pour lequel $n = 2$, $\alpha_1 = \Delta(\gamma)$ et $\alpha_2 = 1$ quel que soit γ). Dans un premier article [BB] sur le sujet, écrit en collaboration avec O. Birembaux, nous avions obtenu le cas particulier où $|\alpha_i| > 1$ pour tout $i < n$; nous fournissons ici une preuve plus simple basée sur le même principe. L'ingrédient principal en est la proposition qui suit.

PROPOSITION 1.— *Il existe un feuilletage $\mathcal{F}^\perp$ de dimension* 1*, de classe C^r, transverse à $\mathcal{F}$ et invariant par Φ.*

Grâce à cette proposition, nous disposons de deux feuilletages transverses de dimension complémentaire; ceux-ci ont des structures très particulières : l'existence de Φ implique que $\mathcal{F}^\perp$ est transversalement de Lie de groupe G, et l'existence d'un volume Φ-invariant implique que $\mathcal{F}$ est transversalement affine. Il est alors facile de conclure.

Voilà pour le problème de classification; considérons ensuite le problème de la stabilité. Dans [GS] sont classifiés les feuilletages $\mathcal{F}$ de dimension 2 sans feuille compacte sur les 3-variétés fermées à groupe fondamental résoluble. Il s'avère que pour un groupe fondamental non nilpotent, $\mathcal{F}$ est un GA-modèle, d'où le corollaire suivant.

THÉORÈME (Ghys–Sergiescu).— *Il existe des feuilletages $\mathcal{F}$ de classe C^ω et sans feuille compacte* (si nous disons *sans feuille compacte*, c'est qu'on connaissait depuis longtemps de tels phénomènes de stabilité pour des feuilletages n'ayant *que* des feuilles compactes (théorème de Reeb). L'intérêt de [GS] fut de fournir les premiers exemples dynamiquement intéressants de stabilité C^r*) tels que si $\mathcal{F}'$ est un feuilletage C^r $(r \geq 2)$ suffisamment proche de $\mathcal{F}$ en topologie C^0, alors $\mathcal{F}'$ est C^r-conjugué à $\mathcal{F}$.*

Prolongeant le travail précédent, l'article [EN] construit un grand nombre de feuilletages $\mathcal{F}$ de toutes dimensions et codimensions et qui possèdent la propriété (plus faible) que tout feuilletage proche de $\mathcal{F}$ en topologie C^∞ est C^∞-conjugué à $\mathcal{F}$. Les méthodes sont ici l'analyse de Fourier et un critère homologique d'Hamilton; les exemples fournis sont transverses à une fibration en tores sur le cercle, avec quelques conditions de spectre les plaçant *de facto* parmi les flots d'Anosov algébriques nilpotents. En codimension 1, nous pouvons préciser le résultat de [EN].

THÉORÈME B. — *Supposons que l'action modèle Φ du groupe non unimodulaire G vérifie la proposition 1. Alors tout feuilletage $\mathcal{F}'$ de classe C^r $(r \geq 3)$, suffisamment C^1-proche d'un modèle, est C^r-conjugué à un modèle voisin.*

Ceci fait bien comprendre certaines des hypothèses spectrales de [EN] : pour que $\mathcal{F}$ soit C^r-stable, il faut et suffit que l'espace des feuilletages modèles soit réduit à un point. Dans le cas contraire, $\mathcal{F}$ n'est pas même structurellement stable, et cependant, tous ses déformés sont homogènes.

1. Preuve du théorème A

Nous nous plaçons sous les hypothèses du théorème A. Nous notons Ω le volume invariant, $\mathcal{G}$ l'algèbre de Lie de G, $X_1, \ldots, X_n$ une base de $\mathcal{G}$ et ω la 1-forme $i_{X_1} \cdots i_{X_n}\Omega$. Nous allons montrer la proposition 1. Avant toute chose, il nous faut expliquer pourquoi celle-ci implique le théorème A. Puisque Ω est invariant, et puisque le n-vecteur $X_1 \wedge \cdots \wedge X_n$ évolue selon la loi $g_*X_1 \wedge \cdots \wedge X_n = \Delta(g)X_1 \wedge \cdots \wedge X_n$ sous l'action adjointe de G, on a $g^*\omega = \Delta(g)\omega$. Supposons la proposition 1 montrée, soit Y l'unique champ de vecteurs de classe C^{r-1} tangent à $\mathcal{F}^\perp$ et tel que $\omega(Y) = 1$. On aura

$$g_*Y = \Delta(g)^{-1}Y\,, \tag{1}$$

et cette équation algébrique signifie que le flot de Y prolonge Φ en une action transitive du groupe H défini comme le produit fibré ci-dessous :

$$\begin{array}{ccc} H & \longrightarrow & G \\ \big\downarrow & & \big\downarrow {\scriptstyle \Delta^{-1}} \\ \mathrm{GA} & \xrightarrow{\ \Delta\ } & \mathbb{R}_+^* \end{array} \tag{2}$$

D'autre part, dans des cartes locales adaptées il est facile de voir que le champ Y a un flot C^r et pas seulement C^{r-1}. En d'autres termes, Φ est C^r-conjuguée à une action homogène, et on a le théorème A (tout ceci est expliqué plus en détail dans [BB]; voir aussi le lemme 2 *infra*). Nous pourrions encore dire que les modèles sont définis par les deux propriétés de posséder un feuilletage transverse invariant et d'être *transversalement affines* [Go, p. 169]. Rappelons la définition de cette dernière structure : tout feuilletage de codimension un peut se décrire par un *atlas feuilleté* constitué de cartes (x,t) ($x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$) avec des changements de cartes de la forme $(x,t) \to (\phi(x,t), \psi(t))$; le feuilletage est le lieu des hypersurfaces de niveau de la fonction t, et si les fonctions ψ sont des transformations affines, on dit que le feuilletage est affine. Ici, en partant de (1) ou de (2) on peut montrer l'existence d'une forme fermée α de classe C^r telle que $d\omega = \alpha \wedge \omega$; cette forme est H-invariante et son noyau est engendré par Y et par l'algèbre de Lie du noyau de Δ dans G; il est connu que la donnée de deux formes telles que α et ω équivaut à celle d'un atlas affine.

Pour montrer la proposition 1, nous construisons un champ de droites continu, transverse à $\mathcal{F}$ et invariant par Φ, puis nous vérifions qu'il s'intègre en un feuilletage de classe C^r. Lorsque l'on veut intégrer un champ de droites, on doit faire face à deux problèmes : d'une part, en l'absence d'une autre hypothèse, un champ continu n'est pas toujours uniquement intégrable (il a toujours des courbes intégrales, mais il en passe parfois plusieurs par un même point). D'autre part, même si un feuilletage a toutes ses feuilles de classe C^r, il peut ne pas être lui-même C^r. Toutefois, on a le lemme qui suit.

LEMME 2.— *Si Φ préserve un champ de droites de classe C^0 transverse à $\mathcal{F}$, alors celui-ci est uniquement intégrable. Si l'une de ses courbes intégrales est C^r, alors son feuilletage est C^r (en particulier, il est toujours au moins C^1).*

Preuve.— Notons d'abord que si l'on donne en un point $m \in M$ un petit arc $T(t)$ de classe C^k transverse aux orbites ($1 \leq k \leq r$), on peut paramétrer un petit voisinage de m en classe C^k par $(g,t) \in G \times \mathbb{R}$ (g proche de 1, t proche de 0) en associant à (g,t) le point $gT(t)$. Prenons pour $T(t)$ un petit arc intégral du champ de directions : dans le paramétrage obtenu, ce champ sera partout tangent aux horizontales $g =$ constante, qui en sont donc des courbes intégrales de classe C^k; nous affirmons que ce sont les seules : en effet, toute courbe intégrale a un paramétrage de la forme $g = \phi(t)$, et son vecteur vitesse au point $\phi(t)$ est

$$d\phi\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial t}\,.$$

Ce vecteur étant horizontal, $d\phi(\partial/\partial t)$ est constamment nul donc $\phi(t)$ est une constante. Ceci prouve le lemme localement, et par connexité, on obtient le résultat global annoncé. □

Grâce au lemme 2, notre problème est désormais le suivant : *construire un champ de droites d continu, invariant par Φ, transverse à $\mathcal{F}$ et possédant une courbe intégrale de classe C^r.* Le feuilletage $\mathcal{F}^\perp$ dont la proposition 1 fait état s'obtiendra, alors en intégrant d. Soit maintenant E l'espace des champs de vecteurs tangents aux orbites, ceux-ci étant vus comme des applications continues de M dans $\mathcal{G}$. Nous munissons $\mathcal{G}$ d'un produit scalaire euclidien et E de la norme Sup correspondante

$$\|Z\|_E = \operatorname*{Sup}_{m\in M} \|Z(m)\|_{\mathcal{G}} \,.$$

Ceci fait de E un espace de Banach. L'action de G sur E est décrite par la formule

$$\big(g_*(Z)\big)(m) = \mathrm{Ad}(g)\big(Z(g^{-1}m)\big)\,.$$

Soit Z un champ continu tel que $\omega(Z) = 1$. Nous aurons l'équation (1) sur Z avec un terme correcteur venant de ce que Z n'est pas forcément invariant en direction :

$$g_*Z = \Delta(g)^{-1}Z + Z_g\,, \quad Z_g \in E\,. \tag{3}$$

Nous allons chercher une section Y de d sous la forme $Z + T$ où T appartient à E. Ceci revient à résoudre simultanément en T toutes les équations $\Delta(g)^{-1}T - g_*T = Z_g$. Nous utiliserons pour cela les propriétés "hyperboliques" de $\Phi(\gamma)$.

LEMME 3.— *Lorsque la norme de $\mathcal{G}$ est convenablement choisie, on a $\|\gamma_*\| \cdot \|\gamma_*^{-1}\| < \Delta(\gamma)$. En particulier :*

(i) l'opérateur $V = \Delta(\gamma)^{-1}\gamma_*^{-1}$ a une norme < 1 sur E ;

(ii) pour tout $Z_0 \in E$ de classe C^1, définissons par récurrence le champ $Z_{n+1} = V(Z_n)$ de classe C^1 ; soit $X \in \mathcal{G}$; alors la dérivée de Lie $L_X(Z_n)$ tend vers 0 à vitesse exponentielle quand n tend vers $+\infty$;

(iii) pour $\mu < \Delta(\gamma)$ assez grand (fixé pour la suite), l'opérateur $U = \mu\gamma_*$ est dilatant sur E.

Preuve.— Un résultat classique d'algèbre linéaire est que pour toute matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une norme sur $\mathbb{R}^n$ pour laquelle $\rho(A) \leq \|A\| \leq \rho(A) + \varepsilon$ où $\rho(A)$ désigne le rayon spectral de A et $\|A\|$ sa norme sup. (ceci vient de ce qu'en jouant sur le choix d'une base de

$\mathbb{C}^n$ où A est mise sous forme de Jordan :

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & A_{k-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & A_k \end{pmatrix}, \quad A_i = \lambda_i \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon_i & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \varepsilon_i & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & 0 & 1 & \varepsilon_i \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

on peut rendre chaque $\varepsilon_i > 0$ aussi petit que l'on veut). Si A est inversible, on peut également supposer $\rho(A^{-1}) \leq |A^{-1}| \leq \rho(A^{-1}) + \varepsilon$, car A et A^{-1} sont sous forme de Jordan dans les mêmes bases (les termes λ_i et ε_i sont à remplacer respectivement par λ_i^{-1} et $\lambda_i^{-2}\varepsilon_i$ dans (4) pour obtenir la forme de Jordan de A^{-1}). Appliquons ceci à l'endomorphisme $\mathrm{Ad}(\gamma)$ de $\mathcal{G}$: pour une norme convenable, on aura à la fois

$$\rho(\mathrm{Ad}(\gamma)) = \sup(|\alpha_i|) \leq |\mathrm{Ad}(\gamma)| \leq \sup(|\alpha_i|) + \varepsilon$$

et

$$\rho(\mathrm{Ad}(\gamma)) = \sup(|\alpha_i^{-1}|) \leq \left|\mathrm{Ad}(\gamma)^{-1}\right| \leq \sup(|\alpha_i^{-1}|) + \varepsilon$$

d'où, si ε est assez petit,

$$\|\mathrm{Ad}(\gamma)\| \cdot \left\|\mathrm{Ad}(\gamma)^{-1}\right\| < \Delta(\gamma).$$

Notons maintenant que par construction, $\|V\| = \Delta(\gamma)^{-1}\left\|\mathrm{Ad}(\gamma)^{-1}\right\|$. On a donc la première assertion, ainsi que l'inégalité $\|\mathrm{Ad}(\gamma)\| \cdot \|V\| < 1$ qui va nous servir à prouver la deuxième assertion. Rappelons que $L_X(Z)$ est la dérivée de Lie de Z dans la direction de X ; on a

$$\begin{aligned} L_X(Z_{n+1}) = L_X\left(\Delta(\gamma)^{-1}\gamma_*^{-1}Z_n\right) &= \Delta(\gamma)^{-1}L_X(\gamma_*^{-1}Z_n) \\ &= \Delta(\gamma)^{-1}\gamma_*^{-1}(L_{\gamma_* X}Z_n) = V(L_{\gamma_* X}Z_n). \end{aligned}$$

Si K_n désigne le sup de $\|L_X Z_n\|$ quand X décrit la boule unité de $\mathcal{G}$, on aura par linéarité

$$\|L_{\gamma_* X}Z_n\| \leq \|\mathrm{Ad}(\gamma)\|K_n$$

et en vertu de la formule précédente

$$K_{n+1} \leq \left(\|V\| \cdot \|\mathrm{Ad}(\gamma)\|\right)K_n.$$

Par conséquent, K_n tend vers 0 aussi vite que $\left(\|V\| \cdot \|\mathrm{Ad}(\gamma)\|\right)^n$. Enfin, pour μ proche de $\Delta(\gamma)$, l'opérateur $U = \mu/\Delta(\gamma)\, V^{-1}$ est proche de V^{-1} ; comme V est contractant, U est donc dilatant. □

Une conséquence directe de (i) et (ii) est le corollaire suivant.

COROLLAIRE 4.— *Avec les notations précédentes, la série $\sum Z_n$ converge uniformément vers un champ T possédant une dérivée de Lie $L_X T = \sum L_X Z_n$.*

Nous pouvons maintenant construire Y. Soient $Z_0 = \Delta(\gamma^{-1})Z_{\gamma^{-1}}$, $Z_{n+1} = V(Z_n)$. Selon le corollaire 4, le champ $Y = Z + \sum Z_n$ est bien défini ainsi que toutes ses dérivées de Lie $L_X(Y)$ $(X \in \mathcal{G})$. On a par construction

$$\begin{aligned}\gamma_*^{-1} Y &= \gamma_*^{-1} Z + \gamma_*^{-1}(Z_0 + Z_1 + Z_2 + \cdots)\\ &= \Delta(\gamma) Z + Z_{\gamma^{-1}} + \Delta(\gamma)\big(\Delta(\gamma^{-1})\gamma_*^{-1}(Z_0 + Z_1 + Z_2 + \cdots)\big)\\ &= \Delta(\gamma)\big(Z + Z_0 + V(Z_0) + V(Z_1) + V(Z_2) + \cdots\big) = \Delta(\gamma) Y\,.\end{aligned}$$

Nous avons donc un Y qui vérifie l'équation (1) relative à γ^{-1}. Nous allons montrer qu'il vérifie cette équation pour tout g. Pour tout $X \in \mathcal{G}$, notons $T(X)$ la projection de $L_X(Y)$ sur E parallèlement à Y. Il faut donc prouver que $T(X)$ est toujours nul. Soit X_0 de norme 1 dans $\mathcal{G}$ tel que $\|T(X_0)\| > 0$ soit maximal : on a donc pour tout X de $\mathcal{G}$

$$\|T(X)\| \leq \|X\| \cdot \|T(X_0)\|\,.$$

Mais comme $\gamma_* L_X(Y) = L_{\gamma_* X}(\gamma_* Y) = \Delta(\gamma) L_{\gamma_* X} Y$, on en déduit

$$\begin{aligned}\|\gamma_* T(X_0)\| &= \Delta(\gamma)^{-1} \|T(\gamma_* X_0)\|\\ &\leq \Delta(\gamma)^{-1} \|T(X_0)\| \cdot \|\gamma_* X_0\|\end{aligned}$$

et puisque $\|\gamma_*^{-1}\| > \Delta(\gamma)^{-1}\|\gamma_*\|$, on en tire $\|T(X_0)\| = 0$. Donc, $T(X)$ est nul pour tout X.

Nous savons maintenant que Y est invariant en direction par Φ, et le lemme 2 nous permet donc de conclure que Y est uniquement intégrable, puis que le feuilletage qu'il définit est de classe C^1, et enfin que Φ est conjuguée de classe C^1 à une action modèle. Pour obtenir la conjugaison C^r annoncée il nous reste à vérifier que Y possède au moins une courbe intégrale de classe C^r (lemme 2). Nous allons utiliser le résultat suivant.

THÉORÈME D'HADAMARD–PERRON. — *Soit f un difféomorphisme local de $\mathbb{R}^n$ en 0 laissant fixe le point 0 et de classe C^r, $r \geq 2$. Soit $T_0\mathbb{R}^n = T^u \oplus T^s \oplus T^c$ la décomposition de $T_0\mathbb{R}^n$ en trois sous-espaces de dimension d^u, d^s et d^c correspondant aux valeurs propres de $\mathrm{d}f_0$ de module > 1, < 1 et $= 1$. Alors localement en 0, il existe des sous-variétés V^u, V^s et V^c de dimension d^u, d^s et d^c, tangentes aux sous-espaces T^u, T^s et T^c et invariantes par f. De plus, les germes de V^u et V^s sont uniques, de classe C^r et se composent des points m proches de 0 tels que $f^n(m)$ tende exponentiellement vers 0 pour $n \to -\infty$ (resp. $n \to +\infty$).*

Il existe d'autres versions de ce théorème; on en trouve plusieurs dans [AI] et [HPS]. Les variétés V^u, V^s et V^c s'appellent respectivement *variété instable, variété stable* et *variété centrale* du point fixe 0 pour le difféomorphisme f. Pour appliquer le théorème d'Hadamard–Perron, nous aurons besoin d'un point fixe.

LEMME 5.— *Quitte à changer de γ, on peut supposer qu'il existe un point m de M tel que $\Phi(\gamma)(m) = m$.*

Preuve.— Pour $g \in G$, notons $S(g)$ le plus grand des modules de valeur propre de $\mathrm{Ad}(g)$. Selon le théorème du rayon spectral, on a $S(gh) \leq S(g)S(h)$ pour tous g, $h \in G$; par ailleurs, l'hypothèse du théorème A peut s'écrire sous la forme $\Delta(\gamma) > S(\gamma)S(\gamma^{-1})$. Par continuité, il existe un voisinage ouvert U de 1 dans G tel que, pour tout $h \in U$, on ait $\Delta(h\gamma) > S(h\gamma)S\big((h\gamma)^{-1}\big)$; alors on a aussi pour tout $n \geq 2$

$$\begin{aligned}
\Delta(h\gamma^n) &= \Delta(h\gamma)\Delta(\gamma^{n-1}) \\
&> \Big(S(h\gamma)S\big((h\gamma)^{-1}\big)\Big)\left(S(\gamma^{n-1})S(\gamma^{1-n})\right) \\
&= \left(S(h\gamma)S(\gamma^{n-1})\right)\left(S(\gamma^{1-n})S(\gamma^{-1}h^{-1})\right) \\
&\geq S(h\gamma^n)S\big((h\gamma^n)^{-1}\big)
\end{aligned}$$

ce qui prouve que $h\gamma^n$ vérifie également les hypothèses du théorème A. Appliquons maintenant le théorème de récurrence de Poincaré : puisque Φ préserve le volume, presque tout point de M est récurrent ou périodique pour $\Phi(\gamma)$. S'il existe un point de période n, on peut remplacer γ par γ^n et le lemme est vérifié; s'il n'existe aucun point périodique, soit m un point récurrent : pour $n > 1$ assez grand, $\gamma^n m$ sera arbitrairement proche de m, et il existera donc un $h \in U$ et un petit arc mm' de courbe intégrale de

Z tel que $\gamma^n m = h^{-1}m'$. En remplaçant γ par $h\gamma^n$ (qui, comme il a été dit plus haut, vérifie les hypothèses du théorème A), on s'est ainsi ramené au cas où γ fixe globalement une Z-orbite. En paramétrant celle-ci par le temps de parcours de Z à partir de m et en tenant compte du fait que $\gamma_* Z = \Delta(\gamma)^{-1}Z$, on voit que γ est une homothétie de cette Z-orbite donc fixe un point de celle-ci. □

Construisons maintenant la variété stable V du point m pour le difféomorphisme $\Phi(\gamma)$. Un point m_1 est sur V si la distance de $\gamma^n m_1$ à m tend vers 0 exponentiellement vite pour $n \to +\infty$ et pour une métrique auxiliaire quelconque. Comme γ_* contracte Y, ce champ est tangent à V en chaque point de cette variété. Considérons maintenant TM comme une variété et l'opérateur $U = \mu\, \mathrm{d}\Phi(\gamma)$ comme un difféomorphisme de celle-ci : nous pouvons construire dans TM la variété stable W du point m (ou plus exactement, du vecteur nul pointé en m). Elle est de classe C^{r-1} selon le théorème d'Hadamard–Perron.

Les points de TM sont les vecteurs pointés $(m, \vec{v})$ de M, et l'action de U se fait selon la formule

$$U(m,\, \lambda_1 X_1 + \cdots + \lambda_n X_n + \lambda Y) = \Big(\gamma m,\, \mu\, \mathrm{Ad}(\gamma)(\lambda_1 X_1 + \cdots + \lambda_n X_n) + \\ + \mu \Delta(\gamma)^{-1} Y\Big) \;;$$

comme W se compose des vecteurs pointés qui tendent vers $(m, 0)$ sous les itérés positifs de U, on tire de la formule précédente et du lemme 3 que W est le fibré en droites engendré par Y sur V. Nous savons donc que ce fibré est de classe C^{r-1} en tant que sous-variété de TM. Il a bien sûr la même classe en tant que sous-variété de TV, et comme c'est un sous-fibré en droites de TV, on peut le voir comme un champ de directions de classe C^{r-1} sur cette variété. Ce champ de directions s'intègre sur V en un feuilletage de classe C^{r-1} dont les feuilles sont de classe C^r. Comme ces feuilles sont certaines courbes intégrales de Y, on obtient le résultat voulu : Y a au moins une courbe intégrale de classe C^r et la preuve du théorème A est achevée.

2. Preuve du théorème B

Dans cette partie, nous considérons un groupe non unimodulaire G, sans plus faire d'hypothèse sur sa représentation adjointe. Nous construisons le groupe H du diagramme (2), et nous supposons qu'il possède un réseau Γ. Nous considérons ensuite l'action modèle Φ de G sur H/Γ, le feuilletage sous-jacent $\mathcal{F}$, le feuilletage transverse $\mathcal{F}^\perp$ (engendré dans le diagramme (2) par le noyau de la flèche du bas, c'est à dire le sous-groupe des translations du facteur GA) et un autre feuilletage $\mathcal{F}'$ suffisamment voisin de $\mathcal{F}$ en topologie C^1 (nous donnerons des estimations précises de cette proximité le moment venu). Il nous faut montrer qu'il existe une action Φ' de G qui paramètre $\mathcal{F}'$ et que celle-ci se prolonge en une action transitive de H. L'action Φ' est facile à construire.

PROPOSITION 6.— *Il existe une action localement libre Φ' de G sur M, de classe C^r et C^1-proche de Φ, dont les orbites sont les feuilles de $\mathcal{F}'$ et qui préserve $\mathcal{F}^\perp$.*

Preuve.— Comme $\mathcal{F}'$ est proche de $\mathcal{F}$, on peut le supposer transverse à $\mathcal{F}^\perp$. Pour $x \in M$ et g assez proche de 1 dans G, nous notons $\Phi'(g,x)$ l'unique élément d'un petit voisinage de x qui appartient à la fois à la $\mathcal{F}'$-plaque de x et à la $\mathcal{F}^\perp$-plaque de $\Phi(g,x)$. Il est immédiat que Φ' est une action locale C^r qui préserve $\mathcal{F}^\perp$. Comme M est fermée, cette action est globale. La proximité C^1 des deux actions vient de la proximité des deux feuilletages. □

Techniquement, nous venons juste de lire sur le feuilletage $\mathcal{F}'$ la structure de feuilletage de Lie de groupe G dont est muni $\mathcal{F}^\perp$. Nous allons maintenant vérifier que $\mathcal{F}'$ est transversalement affine. Prenons un point base m_0 sur M et notons Γ le groupe fondamental de M.

PROPOSITION 7.— *La variété bifeuilletée $(M,\mathcal{F},\mathcal{F}^\perp)$ peut être vue comme l'espace $G\times\mathbb{R}$ muni de ses deux feuilletages produits et quotienté par une action de Γ de la forme $\gamma(g,t) = \big(g\gamma^{-1}, \tau(\gamma)(t)\big)$ où τ est un morphisme de Γ dans* GA. *De même, la variété bifeuilletée $(M,\mathcal{F}',\mathcal{F}^\perp)$ peut être vue comme l'espace $G \times \mathbb{R}$ muni de ses deux feuilletages produits et quotienté par une action de Γ de la forme $\gamma(g,t) = \big(g\gamma^{-1}, \tau'(\gamma)(t)\big)$ où τ' est un morphisme de Γ dans* $\mathrm{Diff}^r(\mathbb{R})$.

Preuve.— Rappelons que $\mathcal{F}^\perp$ peut être vu comme le portrait de phases d'un flot ϕ^t qui prolonge Φ en une action de H. Les applications R et R' de $G \times \mathbb{R}$ dans M, respectivement données par $R(g,t) = \Phi(g)\big(\phi^t(m_0)\big)$ et $R'(g,t) = \Phi'(g)\big(\phi^t(m_0)\big)$ sont des revêtements de M par $G \times \mathbb{R}$ qui ont les propriétés voulues, comme on le vérifie facilement (notons que R n'est pas autre chose que le revêtement canonique de $M = H/\Gamma$ par H). □

Dans la proposition précédente, Γ s'identifie à un sous-groupe de G, constitué des éléments γ qui fixent globalement la feuille de $\mathcal{F}^\perp$ passant par m_0. Le théorème de Fedida [Go, p. 156], nous permet d'apporter certaines précisions.

- Premièrement, les adhérences des orbites de $\mathcal{F}^\perp$ forment une fibration $\mathfrak{F}$ (nous noterons $\mathfrak{F}_0$ la fibre de m_0). Celle-ci est invariante par Φ et Φ', car ces actions préservent $\mathcal{F}^\perp$. La composante neutre K du stabilisateur de $\mathfrak{F}_0$ dans G est un sous-groupe distingué. (Le stabilisateur en question est l'adhérence de Γ.) Enfin, selon [CC], le fait que $\mathcal{F}^\perp$ soit de dimension 1 entraîne que K est abélien.
- En second lieu, $\mathcal{F}^\perp$ est transversalement de Lie de groupe K en restriction à $\mathfrak{F}_0$. Par conséquent, le groupe $\Lambda = K \cap \Gamma$ s'identifie à $\pi_1(\mathfrak{F}_0) = \mathbb{Z}^k$ $(2 \leq k = \dim(\mathfrak{F}_0) \leq n)$. Notons que $\tau(\Lambda)$ est de type fini et se compose de translations, ce qui découle facilement du fait qu'en restriction à $\mathfrak{F}_0$, Φ est la trace d'une action homogène de codimension 1 d'un groupe abélien sur le tore.
- Enfin, le sous-groupe Γ de G n'est pas contenu dans $\mathrm{Ker}(\Delta)$, car le quotient de G par l'adhérence de Γ est compact (c'est la base de la fibration $\mathfrak{F}$); par conséquent, il existe dans Γ un γ tel que $\Delta(\gamma) \neq 1$. Dans GA, $\tau(\gamma)$ est une homothétie dont le rapport est $\Delta(\gamma)^{-1}$ (en effet, $\Phi(\gamma)$ multiplie par $\Delta(\gamma)^{-1}$ le vecteur Y défini dans la première partie de cet article).

Après ces remarques, nous pouvons montrer la proposition suivante.

PROPOSITION 8.— *Il existe un homéomorphisme h de $\mathbb{R}$ tel que le morphisme $\sigma : \gamma \to h \circ \tau'(\gamma) \circ h^{-1}$ de Γ dans le groupe des homéomorphismes de $\mathbb{R}$ soit à valeurs dans* GA.

Preuve.— L'élément clef de la preuve sera la construction d'un groupe à un paramètre transitif et sans point fixe dans l'adhérence de Γ.

Choisissons des éléments T et H de Γ dont les images par τ sont respectivement une translation et une homothétie de rapport $\kappa \in \,]0,1[$. Pour fixer les idées, quitte à faire un changement affine de la variable t, nous supposons que ces images ont respectivement la forme $t \to t+1$ et

$t \to \kappa t$. Alors, elles engendrent dans GA le sous-groupe des transformations $t \to \kappa^n t + \lambda$, $n \in \mathbb{Z}$ et $\lambda \in \mathbb{Z}[\kappa, \kappa^{-1}]$. L'ensemble des translations de $\tau(\Gamma)$ est de type fini : comme il contient $\mathbb{Z}[\kappa]$, on en tire que κ est irrationnel et algébrique, ce qui nous servira bientôt.

Choisissons une base $X_1, \ldots, X_n, Z$ de l'algèbre de Lie de $\mathcal{H}$ et voyons-la comme une base de champs tangents à M (les champs fondamentaux de l'action modèle). Alors, les différentielles $\mathrm{d}\Phi(g)(m)$ et $\mathrm{d}\Phi'(g)(m)$ s'identifient aux matrices $(n+1) \times (n+1)$ de leurs coefficients dans cette base. Dire que Φ et Φ' sont C^1-proches, c'est choisir un voisinage U relativement compact de 1 dans G, un réel $\varepsilon > 0$ et demander que

$$\left\|\mathrm{d}\Phi(g)(m) - \mathrm{d}\Phi'(g)(m)\right\| < \varepsilon \tag{5}$$

pour tous $m \in M$ et $g \in U$. Choisissons U pour qu'il contienne T et H, et exprimons (5) en nous restreignant à la Z-orbite de m : on voit que les éléments $\tau'(T)$ et $\tau'(H)$ de $\mathrm{Diff}^r(\mathbb{R})$ ont la forme

$$\tau'(T)(t) = t + 1 + \varepsilon_1(t) \quad \text{et} \quad \tau'(H)(t) = \kappa t + \varepsilon_2(t) \tag{6}$$

où ε_1, ε_2 sont des fonctions petites en norme C^1 uniformément sur tout $\mathbb{R}$ (et pas seulement sur tout compact). Donnons une majoration explicite de leur norme : pour ε_2 proche de 0, $\tau'(H)$ a un point fixe unique; quitte à faire un changement affine de la variable t, on supposera que ce point fixe est 0. Nous demandons que :

- $t + \dfrac{1}{2} < \tau'(T)(t) < t + \dfrac{3}{2}$,
- il existe $k \in\,]0, 1[$, $\ell \in\,]0, 1[$ tels que $\ell^2/k < 1$ et $kt < \tau'(H)(t) < \ell t$ (notons que cette condition entraîne $\ell^{-1}t < \tau'(H^{-1})(t) < k^{-1}t$).

Soit r un réel quelconque; nous construisons maintenant une suite $\gamma_n \in \Lambda$ telle que $\tau'(\gamma_n)(0)$ converge vers r et que $\tau'(\gamma_n)$ converge dans $\mathrm{Hom}(\mathbb{R})$. En composant avec une puissance de $\tau'(T)$, on peut se ramener à $r > 0$. En combinant les deux hypothèses sur $\tau'(T)$ et $\tau'(H)$, on obtient pour tout n entier un encadrement

$$t + \frac{1}{2}\, k^n \leq \tau'(H^n T H^{-n})(t) \leq t + \frac{3}{2}\, \ell^n .$$

Posons $\gamma_0 = 1$. Par récurrence, une fois défini γ_{n-1}, on pose $\gamma_n = \gamma_{n-1}\left(H^n T H^{-n}\right)^{p_n}$ où p_n est le plus petit entier positif tel que $\tau(\gamma_n)(0) \leq r$. Par construction, la distance entre $\tau(\gamma_n)(0)$ et r n'excède pas

$$\mathrm{Sup}\left(\tau'(H^n T H^{-n})(t) - t\right) \leq \frac{3}{2}\, \ell^n .$$

Comme $0 < \ell < 1$, la suite $\tau(\gamma_n)(0)$ converge donc vers r. De même, p_n n'excède pas

$$\frac{\mathrm{d}\big(\tau(\gamma_{n-1})(0),\, r\big)}{\mathrm{Inf}\Big(\tau'\big(H^nTH^{-n}(t)\big) - t\Big)} \leq 3\frac{\ell^{n-1}}{k^n}.$$

Par conséquent, on a la majoration

$$\mathrm{Sup}\big|\tau'(\gamma_{n+1})(t) - \tau'(\gamma_n)(t)\big| \leq \frac{3}{k}\left(\frac{\ell^{2n}}{k^n} - \ell^n\right).$$

Comme $0 < \ell^2/k < 1$, la série de terme général $\tau'(\gamma_{n+1}) - \tau'(\gamma_n)$ converge normalement dans $\mathrm{Hom}(\mathbb{R})$ vers un homéomorphisme qui envoie 0 sur r.

Nous pouvons maintenant conclure la preuve. L'adhérence de $\tau(\Lambda)$ est un groupe abélien (car Λ en est un) et comme on l'a vu, ce groupe agit transitivement sur $\mathbb{R}$. Il est classique qu'un tel groupe soit conjugué au groupe des translations usuelles (voir par exemple l'introduction de [Pl]). Il existe donc un homéomorphisme h tel que la représentation σ définie dans l'énoncé envoie Λ sur un sous-groupe dense des translations de $\mathbb{R}$. Comme Λ est normal dans Γ, tout élément de $\sigma(\Gamma)$ agit par conjugaisons internes dans $\mathrm{Hom}(\mathbb{R})$ en normalisant les translations, donc est affine. □

PROPOSITION 9.— *h est en fait de classe C^r.*

Comme nous l'avons vu, Λ est de type fini. Le sous-groupe engendré par $\sigma(T)$, $\sigma(HTH^{-1})$, $\sigma(H^2TH^{-2})$,… dans GA est donc de type fini, et on en déduit que $\sigma(H)$ est une homothétie dont le rapport est algébrique et irrationnel. Par conséquent, l'image de σ contient des translations dont les longueurs ont des rapports algébriques irrationnels, à savoir $\sigma(T)$ et $\sigma(HTH^{-1})$. Selon une forme optimisée du théorème de Herman ([He], [Si, p. 108]) h est donc C^{r-1}; comme $\sigma(\Gamma)$ contient aussi des éléments hyperboliques et comme $r - 1 \geq 2$, h est C^r par [St].

COROLLAIRE 10.— *Φ' est C^r-conjuguée à une action homogène.*

Preuve.— Soit ϕ^s le groupe à un paramètre défini sur $G \times \mathbb{R}$ par $\phi^s{\cdot}(g,t) = \big(g, t+\Delta(g)s\big)$: alors, le groupe de classe C^r, $h^{-1}\phi^s h$, est invariant par l'action de Γ donnant le revêtement R', et passe donc au quotient sur M. On vérifie sans peine qu'il prolonge Φ' en une action transitive de H. □

Remarque.— Certains feuilletages sujets au théorème B ne sont pas structurellement stables : nous laissons au lecteur le soin de vérifier ce qui suit. Soient $\alpha, -\alpha$ les logarithmes des deux racines de la matrice d'Anosov

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Soit H le groupe de Lie dont l'algèbre est engendrée par les champs $X_1, \ldots, X_4, T$ avec

$$[X_{1+\varepsilon}, T] = \alpha X_{1+\varepsilon}, \quad [X_{3+\varepsilon}, T] = -\alpha X_{3+\varepsilon}, \qquad \varepsilon = 0, 1$$

les autres crochets étant nuls. On sait que A se plonge dans un groupe à un paramètre de matrices, et l'on peut voir H comme le groupe des pseudo-dilatations $(y_1, \ldots, y_4, t)$:

$$(x_1, \ldots, x_4) \longrightarrow \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_4 \end{pmatrix},$$

$x_1, \ldots, x_4$, $y_1, \ldots, y_4$, $t \in \mathbb{R}$. Le groupe H contient un réseau, constitué des points $(y_1, \ldots, y_4, t) \in \mathbb{Z}^5$, et si G est le sous-groupe engendré par X_1, X_2, $kX_3 + \ell X_4$ et T, le feuilletage engendré par G sur H/Γ satisfait les hypothèses du théorème B. Or, selon que k/ℓ est rationnel ou non, les feuilles génériques de $\mathcal{F}$ tantôt seront simplement connexes, tantôt auront $\mathbb{Z}^2$ pour groupe fondamental. D'autre part, certains feuilletages sujets au théorème B, structurellement stables ou non, ne sont pas anosoviens : pour le voir, prenons une matrice exponentielle A de $\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$ dont les valeurs propres sont les nombres algébriques conjugués d'un *nombre de Salem unitaire* qui n'est pas un *nombre de Pisot* : cette dernière condition signifie que A possède une valeur propre réelle de module > 1, que toutes ses autres valeurs propres sont dans le disque unité et qu'au moins une d'entre elles est au bord de ce disque. Considérons le groupe H des pseudo-dilatations $x \to A^t x + y$ de $\mathbb{R}^n$: comme A possède une valeur propre réelle, H contient un sous-groupe G de codimension 1 obtenu en restreignant le paramètre y à un sous-espace A-invariant de dimension 1; comme cette valeur propre n'est pas 1 ou -1, G est non unimodulaire; enfin, comme A laisse invariant le réseau standard de $\mathbb{R}^n$, H possède un réseau constitué des éléments $(y, t) \in \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}$. On a donc toutes les conditions du théorème B, et cependant le feuilletage $\mathcal{F}$ n'est pas anosovien.

Remerciements

Ce travail est en partie tiré de ma thèse, réalisée sous la direction d'A. El Kacimi. Durant sa rédaction, A. Verjovski et Y. Hantout m'ont prêté une attention précieuse; E. Ghys m'a suggéré plusieurs améliorations importantes. Je les remercie sincèrement.

Bibliographie

[AI] ARNOLD (D.) et IL'YASHENKO (YU.) .— *Dynamical Systems* I, E.M.S., Springer, 1985.

[BB] BELLIART (M.) et BIREMBAUX (O.) .— *Actions localement libres de groupes résolubles*, Ann. Inst. Fourier **44** (1994), pp. 1519-1537.

[Be] BELLIART (M.) .— *Actions de groupes de Lie sur les variétés compactes*, Thèse de doctorat, Valenciennes (1995).

[CC] CARON (P.) et CARRIÈRE (Y.) .— *Flots transversalement de Lie* $\mathbb{R}^n$, C.R.A.S. Paris **291** (1980), pp. 477-478.

[EN] EL KACIMI (A.) et NICOLAU (M.) .— *A class of C^∞-stable foliations*, Ergod. Th. et Dynam. Sys. **13** (1993), pp. 697-704.

[Fe] FEDIDA (E.) .— *Sur les feuilletages de Lie*, C.R.A.S. Paris **272** (1971), pp. 999-1001.

[Gh] GHYS (E.) .— *Actions localement libres du groupe affine*, Invent. Math. **82** (1985), pp. 479-526.

[GHM] GHYS (E.), HECTOR (G.) et MORIYAMA (Y.) .— *On codimension* 1 *nilfoliations and a theorem of Malcev*, Topology **28** (1989), pp. 197-210.

[GS] GHYS (E.) et SERGIESCU (V.) .— *Stabilité et conjugaison différentiable pour certains feuilletages*, Topology **19** (1980), pp. 179-197.

[Go] GODBILLON (C.) .— *Feuilletages*, Birkhäuser, P. M. **98** (1991).

[He] HERMAN (M.) .— *Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations*, Pub. Math. I.H.E.S. **49** (1979), pp. 5-233.

[HPS] HIRSCH (M.), PUGH (C.) et SHUB (M.) .— *Invariant Manifolds*, Springer, Lecture notes in math. **583** (1977).

[Ma] MAÑÉ (R.) .— *Ergodic theory and differentiable dynamics*, Springer, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, **8** (1983).

[Pe] PEIXOTO (M.) .— *Structural stability on two-dimensional manifolds*, Topology **1** (1962), pp. 101-120.

[Pl] PLANTE (J. F.) .— *Fixed points of Lie group actions on surfaces*, Ergod. Th. et Dynam. Sys. **6** (1986), pp. 149-161.

[Si] SINAÏ (YA. G.) .— *Topics in ergodic theory*, Princeton Math. Series **44** (1994).

[St] STERNBERG (S.) .— *Contractions and a theorem of Poincaré*, Amer. J. Math. (1957), pp. 809-824.