ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

A. CHAOUECH

Une remarque sur un résultat de Y. Pan

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 6e série, tome 5, nº 1 (1996), p. 53-56

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1996_6_5_1_53_0>

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse Vol. V, n° 1, 1996

Une remarque sur un résultat de Y. Pan[(*)]

A. Chaouech[(1)]

Résumé. — Nous simplifions la démonstration d'un résultat de Y. Pan concernant les applications holomorphes propres d'un domaine de Reinhardt pseudo-convexe et de type fini sur lui même.

Abstract. — We simplify the proof of a result due to Y. Pan about proper holomorphic self-maps of pseudo-convex and finite type Reinhardt domains.

AMS Classification : 32H35

Mots-clés : Applications holomorphes propres, type fini.

On sait que toute application holomorphe propre d'un domaine borné de $\mathbb{C}^n$ $(n > 1)$ sur lui même est en fait un automorphisme dès que la frontière du domaine est régulière et "suffisamment" pseudo-convexe. En effet, ceci fut démontré pour la boule unité par H. Alexander [1], pour les domaines strictement pseudo-convexes à bords $\mathcal{C}^2$ par S. Pinchuk [6], puis pour les domaines faiblement pseudo-convexes à bords réel analytiques par E. Bedford et S. Bell [2].

Dans un article récent, Y. Pan a étendu ceci aux domaines de Reinhardt pseudo-convexes dont la frontière est de type fini [4]. Plus précisément, il a établi le théorème suivant.

Théorème . — *Soit $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, $n > 1$, un domaine de Reinhardt borné pseudo-convexe à bord lisse. Si l'ordre d'annulation du déterminant de Levi de Ω est fini en tout point de $\mathrm{b}\,\Omega$ (ce qui est le cas si $\mathrm{b}\,\Omega$ est de type fini), alors toute application holomorphe propre $f : \Omega \to \Omega$ est un automorphisme.*

(*) Reçu le 24 mars 1994

(1) Université des Sciences et Technologies de Lille, U.R.A. D 751 C.N.R.S. "GAT', U.F.R. de Mathématiques, F-59655 Villeneuve d'Ascq Cedex (France)

L'objet de cette note est de simplifier la démonstration Y. Pan en évitant d'étudier le comportement "générique" du lieu de branchement de l'application holomorphe propre f près de $\mathrm{b}\,\Omega$. Commençons par préciser quelques notations et rappeler quelques faits bien connus.

Soit $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, $n > 1$, un domaine de Reinhardt borné, pseudo-convexe à bord lisse. Définissons $(\mathrm{b}\,\Omega)^*$ par :

$$(\mathrm{b}\,\Omega)^* = \{\eta \in \mathrm{b}\,\Omega \mid \eta_1 \cdots \eta_n \neq 0\},$$

et posons pour tout $\eta \in (\mathrm{b}\,\Omega)^*$:

$$T_n = \{(e^{i\theta_1}\eta_1, e^{i\theta_2}n_2, \ldots, e^{i\theta_n}\eta_n) \mid \theta_j \in \mathbb{R}\}.$$

Soit $f : \Omega \to \Omega$ holomorphe propre, on note f' l'application linéaire tangente à f. On identifiera f' à la matrice $[\partial f_i/\partial z_j]$.

$V_f =: \{z \in \Omega \mid \det f'(z) = 0\}$ désignera le lieu de branchement de f et f^k désignera la $k^{\text{ième}}$ itérée de f.

On notera encore f le prolongement $\mathcal{C}^\infty$ de f à $\mathrm{b}\,\Omega$ (cf. [3]).

Pour toute fonction r, de classe $\mathcal{C}^\infty$ et définissante pour Ω, on pose :

$$\Lambda_r = -\det \begin{bmatrix} 0 & r_{\bar{z}_j} \\ r_{z_i} & r_{z_i\bar{z}_j} \end{bmatrix}.$$

Un argument classique [5] montre que $r \circ f$ est également définissante pour Ω. On vérifie alors que

$$\Lambda_{r\circ f}(z) = \left|\det f'(z)\right|^2 \Lambda_r\big(f(z)\big).$$

Pour tout $p \in \mathrm{b}\,\Omega$, on désigne par $\tau(p)$ le plus petit entier naturel m pour lequel existe un opérateur T, tangentiel au bord d'ordre m, tel que $T\Lambda_r(p) \neq 0$. Ainsi τ satisfait les propriétés suivantes :

1) τ est indépendant de la fonction définissante choisie;

2) τ est semi-continue supérieurement (s.c.s.);

3) τ est invariant par biholomorphisme;

4) $\forall\, p \in \mathrm{b}\,\Omega : \tau(p) \geq \tau\big(f(p)\big)$ et $\tau(p) = \tau\big(f(p)\big)$ si et seulement si $p \notin \overline{V_f}$.

Le théorème résultera des deux lemmes suivants.

LEMME 1.— *Soit $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, $n > 1$, un domaine borné pseudo-convexe à bord lisse tel que τ soit fini sur $\mathrm{b}\,\Omega$. Soit $f : \Omega \to \Omega$ une application holomorphe propre se prolongeant différentiablement à $\mathrm{b}\,\Omega$. Si $V_{f^k} = V_{f^{k+1}}$ pour un certain entier k. Alors $V_f = \emptyset$.*

LEMME 2.— *Soit $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, $n > 1$, un domaine de Reinhardt borné, pseudo-convexe à bord lisse et tel que τ soit fini sur $\mathrm{b}\,\Omega$. Alors $V_f \subset \{z_1 \cdots z_n = 0\}$ pour toute application holomorphe propre $f : \Omega \to \Omega$.*

Preuve du théorème.— La suite (V_{f^k}) est croissante. Puisque d'après le lemme 2, $V_{f^k} \subset \{z_1 \cdots z_n = 0\}$ pour tout k, cette suite est stationnaire. Le lemme 1 montre qu'alors V_f est vide. Cela signifie que f est un revêtement fini. Si le domaine Ω est complet, il est simplement connexe et donc f est injective. Un résultat de Pinchuk [6] stipule que cette conclusion reste vraie lorsque $\mathrm{b}\,\Omega$ est lisse même si Ω n'est pas simplement convexe. □

Preuve du lemme 1.— On peut sans perte de généralité supposer que $k = 1$, on a alors :

$$V_f = V_{f^2} = V_f \cup f^{-1}(V_f)$$

et donc $f^{-1}(V_f) \subset V_f$. Supposons V_f non vide et posons

$$K_s = \overline{f^{-s}(V_f)} \cap \mathrm{b}\,\Omega$$

où $f^{-s}(V_f) = (f^s)^{-1}(V_f)$. $(K_s)_{s \geq 0}$ est une suite décroissante de compacts contenus dans $\mathrm{b}\,\Omega$. Ces compacts sont non vides car sinon l'on aurait $f^{-s}(V_f) \Subset \Omega$ puis f^s étant surjective, $V_f \subset f^s(f^{-s}(V_f)) \Subset \Omega$, ce qui n'est pas. Ainsi $\bigcap_{s>0} K_s \neq \emptyset$. Considérons $\widetilde{K}_s =: f^{-s}(\overline{V_f}) \cap \mathrm{b}\,\Omega$, puisque $K_s \subset \widetilde{K}_s$, on peut trouver $a \in \bigcap_{s \geq 0} \widetilde{K}_s$. En d'autres termes : $\exists\, a \in \mathrm{b}\,\Omega$, tel que $\forall\, s \geq 0$, $f^s(a) \in \overline{V_f} \cap \mathrm{b}\,\Omega$. La suite $\tau[f^s(a)]$ est alors strictement décroissante ce qui est absurde. □

Preuve du lemme.— 2 D'après [3], f et donc $\det f'$, se prolongent différentiablement à $\overline{\Omega}$. Le principe du maximum appliqué à la restriction de la fonction $(z_1 \cdots z_n)$ à V_f montre qu'il suffit d'établir que

$$\overline{V_f} \cap \mathrm{b}\,\Omega \subset \{z_1 z_2 \cdots z_n = 0\}.$$

Si $\eta \in (\mathrm{b}\,\Omega)^* \cap \overline{V_f}$, alors $\tau(\eta) > \tau(f(\eta))$. Par ailleurs, $\det f'$ n'étant pas identiquement nul dans Ω, le théorème d'unicité de Pinchuk garantit l'existence d'une suite $(\eta_k)_{k\geq 1}$ sur T_η telle que $\det f'(\eta_k) \neq 0$ et $\lim \eta_k = \eta$. Ainsi, $\tau(\eta) = \tau(\eta_k) = \tau(f(\eta_k))$ pour tout $k \geq 1$ et, τ étant s.c.s., $\tau(f(\eta)) \geq \tau(\eta)$. Ceci est absurde donc $\overline{V_f} \cap (\mathrm{b}\,\Omega)^* = \emptyset$. □

Remarque.— L'argument élémentaire suivant permet d'éviter de recourir au théorème d'unicité. On se ramène au cas d'une fonction identiquement nulle sur T_η en remplaçant la fonction ϕ de départ par un produit fini de certaines de ses "translatées" :

$$\widetilde{\phi}(z) = \prod_{k=1}^{N} f(e^{i\theta_{1k}} z_1, \ldots, e^{i\theta_{n_k}} z_n).$$

Le bord du domaine Ω étant régulier, il existe un voisinage V de η et un réel $u_0 > 0$ tels que, après une permutation des variables,

$$(V \cap T_\eta) + (u, 0, \ldots, 0) \subset \Omega \quad \text{pour tout } u \in \,]0\,, u_0]\ (\text{ou } [-u_0\,, 0[\,).$$

Pour tout $\widetilde{\eta} \in V \cap T_\eta$, la fonction $z \mapsto \widetilde{\Phi}(z\,, \widetilde{\eta}_2, \ldots, \widetilde{\eta}_n)$ est identiquement nulle sur la couronne $\{|\widetilde{\eta}_1| \leq |z| \leq |\widetilde{\eta}_1| + u_0\}$ (ou $\{|\widetilde{\eta}_1| - u_0 < |z| < |\widetilde{\eta}_1|\}$) puisque nulle sur le cercle $\{|z| = |\widetilde{\eta}_1|\}$. Il s'ensuit que $\widetilde{\phi}$ est nulle sur la variété totalement réelle maximale $\{(V \cap T_\eta) + (u_0, 0, \ldots, 0)\}$ et cela suffit pour conclure.

Références

[1] ALEXANDER (H.) .— *Proper holomorphic mappings in* $\mathbb{C}^n$, Indiana Univ. Math. J. **26** (1977), pp. 134-146.

[2] BEDFORD (E.) et BELL (S.) .— *Proper self-maps of weakly pseudoconvex domains*, Math. Ann. **261** (1982).

[3] BELL (S.) .— *Boundary behavior of proper holomorphic maps between non pseudoconvex domains*, Am. Math. J. **106** (1984), pp. 639-643.

[4] PAN (Y.) .— *Proper holomorphic self-mappings of Reinhardt domains*, Math. Z. **208** (1991), pp. 289-295.

[5] FORNAESS (J.) .— *Biholomorphic maps between weakly pseudoconvex domains*, Pac. Math. J. **74** (1978), pp. 63-65.

[6] PINCHUK (S.) .— *On proper maps of strictly pseudoconvex domains*, Sib. Math. J. **15** (1974), pp. 909-917.