ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

T.-J. STIELTJES

Recherches sur les fractions continues [suite et fin]

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 6e série, tome 4, nº 4 (1995), p. A5-A47

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1995_6_4_4_A5_0>

ANNALES

DE LA

FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE.

RECHERCHES

SUR

LES FRACTIONS CONTINUES

[SUITE ET FIN (1)],

PAR M. T.-J. STIELTJES,

Professeur à la Faculté des Sciences de Toulouse.

CHAPITRE IX.

ÉTUDE DE TROIS CAS PARTICULIERS. SUR LE PROBLÈME DES MOMENTS DANS LE CAS INDÉTERMINÉ.

66. Le résultat auquel nous sommes arrivé dans le n° 47 est parfaitement général et embrasse tous les cas possibles. Cependant, il peut arriver que la fonction $\Phi(u)$ prenne une forme particulière : c'est ce qui arrive déjà dans le cas où la fraction continue est oscillante. Nous allons étudier ici quelques nouveaux cas de ce genre.

Supposons $z = x$ réel positif; dans quels cas $P_{2n}(x)$ et $Q_{2n}(x)$ tendent-ils vers une limite finie pour $n = \infty$? Puisque

$$Q_{2n}(x) = \mathcal{B}_0 + \mathcal{B}_1 x + \ldots + \mathcal{B}_n x^n,$$

$$\mathcal{B}_0 = 1,$$

$$\mathcal{B}_1 = \sum_1^n (a_1 + a_3 + \ldots + a_{2k-1}) a_{2k},$$

---

(1) *Voir* tome VIII, p. J.1.

il *faut* certainement que $\mathfrak{M}_1$ reste fini : la série

$$\sigma = \sum_1^\infty (a_1 + a_3 + \ldots + a_{2k-1})\, a_{2k}$$

doit être *convergente*. Mais cette condition nécessaire est aussi suffisante, car, puisque les racines de $Q_{2n}(z) = 0$ sont réelles et négatives, on a

$$Q_{2n}(x) < \left(1 + \frac{\mathfrak{M}_1 x}{n}\right)^n < e^{\mathfrak{M}_1 x} < e^{\sigma x}.$$

La série σ étant convergente, il s'ensuit que la série

$$\sum_1^\infty a_{2k}$$

est aussi convergente. Quant à la série

$$\sum_1^\infty a_{2k-1}$$

elle peut être aussi bien convergente que divergente.

Mais, dans le premier cas, on retombe sur le cas déjà examiné, où aussi

$$P_{2n+1}(x), \quad Q_{2n+1}(x)$$

restent finis. Nous aurons un cas nouveau en supposant :

1° *La série*

$$\sum_1^\infty a_{2k-1}$$

est divergente ;

2° *La série*

$$\sum_1^\infty (a_1 + a_3 + \ldots + a_{2k-1})\, a_{2k}$$

est convergente.

Par des raisonnements absolument analogues à ceux développés dans le Chapitre IV, on arrivera aux conclusions suivantes.

Dans tout le plan on a

$$\lim P_{2n}(z) = \mathfrak{P}(z),$$
$$\lim Q_{2n}(z) = \mathfrak{Q}(z),$$

$\mathfrak{P}(z)$ et $\mathfrak{Q}(z)$ étant des fonctions holomorphes. Ces fonctions sont du genre zéro et n'ont que des zéros simples, qui sont réels négatifs. On a par exemple

$$\mathfrak{Q}(z) = \left(1 + \frac{z}{\alpha_1}\right)\left(1 + \frac{z}{\alpha_2}\right)\left(1 + \frac{z}{\alpha_3}\right)\cdots,$$

où α_k est limite de la $k^{\text{ième}}$ racine de

$$Q_{2n}(-z) = 0,$$

pour $n = \infty$.

La fraction continue converge vers

$$\frac{\mathfrak{P}(z)}{\mathfrak{Q}(z)} = \sum_1^\infty \frac{\gamma_k}{z + \alpha_k},$$

et la distribution (γ_k, α_k) est la solution du problème des moments qui est déterminé et n'en admet point d'autres. Puisque

$$\frac{Q_{2n+1}(z)}{a_1 + a_3 + \ldots + a_{2n+1}} = \frac{a_1 z\, Q_0(z) + a_3 z\, Q_2(z) + \ldots + a_{2n+1} z\, Q_{2n}(z)}{a_1 + a_3 + \ldots + a_{2n+1}},$$

et que $Q_{2n}(z)$ tend vers $\mathfrak{Q}(z)$ tandis que la série

$$\sum_1^\infty a_{2k-1}$$

est *divergente*, on voit facilement que

$$\lim_{n=\infty} \frac{Q_{2n+1}(z)}{a_1 + a_3 + \ldots + a_{2n+1}} = z\, \mathfrak{Q}(z),$$

de même

$$\lim_{n=\infty} \frac{P_{2n+1}(z)}{a_1 + a_3 + \ldots + a_{2n+1}} = z\, \mathfrak{P}(z).$$

Ainsi se vérifie donc la convergence de la fraction continue, puisqu'on a aussi

$$\lim_{n=\infty} \frac{P_{2n+1}(z)}{Q_{2n+1}(z)} = \frac{\mathfrak{P}(z)}{\mathfrak{Q}(z)}.$$

67. Voyons maintenant dans quel cas $P_{2n+1}(x)$ et $Q_{2n+1}(x)$ tendent

vers des limites finies. Puisque

$$P_{2n+1}(x) = \mathfrak{S}_0 + \mathfrak{S}_1 x + \ldots + \mathfrak{S}_n x^n,$$
$$\mathfrak{S}_0 = 1,$$
$$\mathfrak{S}_1 = \sum_1^n (a_2 + a_4 + \ldots + a_{2k}) a_{2k+1},$$

il faut certainement que la série

$$\sigma' = \sum_1^\infty (a_2 + a_4 + \ldots + a_{2k}) a_{2k+1}$$

soit convergente. Mais cette condition est aussi suffisante.

La convergence de σ' entraîne celle de

$$\sum_0^\infty a_{2k+1};$$

quant à la série

$$\sum_1^\infty a_{2k},$$

elle peut être convergente ou divergente; mais, dans le premier cas, on retombe sur un cas déjà étudié.

En supposant au contraire :

1° *La série*

$$\sum_1^\infty a_{2k}$$

est divergente;

2° *La série*

$$\sum_1^\infty (a_2 + a_4 + \ldots + a_{2k}) a_{2k+1}$$

est convergente.

On a un cas particulier nouveau, qui conduit aux résultats suivants.

Dans tout le plan on a

$$\lim P_{2n+1}(z) = \mathfrak{P}_1(z),$$
$$\lim Q_{2n+1}(z) = \mathfrak{Q}_1(z),$$

$\mathfrak{P}_1(z)$ et $\mathfrak{Q}_1(z)$ étant holomorphes dans tout le plan.

Ces fonctions sont du genre zéro et n'ont que des zéros simples qui sont réels négatifs. On a par exemple

$$\mathfrak{Q}_1(z) = Cz\left(1 + \frac{z}{\beta_1}\right)\left(1 + \frac{z}{\beta_2}\right)\left(1 + \frac{z}{\beta_3}\right)\cdots,$$

où β_k est la limite de la $k^{\text{ième}}$ racine de

$$Q_{2n+1}(-z) : z = 0,$$

pour $n = \infty$.

La fraction continue tend vers

$$\frac{\mathfrak{P}_1(z)}{\mathfrak{Q}_1(z)} = \frac{\delta_0}{z} + \frac{\delta_1}{z + \beta_1} + \frac{\delta_2}{z + \beta_2} + \ldots,$$

et la distribution (δ_k, β_k) $(\beta_0 = 0)$ est la solution du problème des moments.

On a ensuite

$$\lim \frac{P_{2n}(z)}{a_2 + a_4 + \ldots + a_{2n}} = \mathfrak{P}_1(z),$$

$$\lim \frac{Q_{2n}(z)}{a_2 + a_4 + \ldots + a_{2n}} = \mathfrak{Q}_1(z),$$

ce qui met en évidence la convergence de la fraction continue.

68. Je reprends les formules du n° 2, mais pour ordonner maintenant les polynomes P_n, Q_n suivant des puissances descendantes de la variable

$$\begin{aligned}
P_{2n}(z) &= z^{n-1}(1 + \alpha z^{-1} + \alpha' z^{-2} + \ldots) \times a_2 a_3 \ldots a_{2n},\\
Q_{2n}(z) &= z^{n}\quad(1 + \beta z^{-1} + \beta' z^{-2} + \ldots) \times a_1 a_2 \ldots a_{2n},\\
P_{2n+1}(z) &= z^{n}\quad(1 + \gamma z^{-1} + \gamma' z^{-2} + \ldots) \times a_2 a_3 \ldots a_{2n+1},\\
Q_{2n+1}(z) &= z^{n+1}(1 + \delta z^{-1} + \delta' z^{-2} + \ldots) \times a_1 a_2 \ldots a_{2n+1};
\end{aligned}$$

on aura, en introduisant les b_k,

$$\begin{aligned}
\alpha &= b_2 + b_3 + \ldots + b_{2n-1},\\
\beta &= b_1 + b_2 + \ldots + b_{2n-1},\\
\gamma &= b_2 + b_3 + \ldots + b_{2n},\\
\delta &= b_1 + b_2 + \ldots + b_{2n}.
\end{aligned}$$

Posons aussi $tz = 1$, puis

$$\begin{aligned}
U_{2n} &= 1 + \alpha t + \alpha' t^2 + \ldots + \alpha^{(n-2)} t^{n-1},\\
V_{2n} &= 1 + \beta t + \beta' t^2 + \ldots + \beta^{(n-1)} t^{n},\\
U_{2n+1} &= 1 + \gamma t + \gamma' t^2 + \ldots + \gamma^{(n-1)} t^{n},\\
V_{2n+1} &= 1 + \delta t + \delta' t^2 + \ldots + \delta^{(n-1)} t^{n};
\end{aligned}$$

on aura

$$\frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)} = b_0 t \frac{U_{2n}}{V_{2n}}, \qquad \frac{P_{2n+1}(z)}{Q_{2n+1}(z)} = b_0 t \frac{U_{2n+1}}{V_{2n+1}},$$

et il est clair que les $U_n : V_n$ sont les réduites de la fraction continue

$$\cfrac{1}{1 + \cfrac{b_1 t}{1 + \cfrac{b_2 t}{1 + \cfrac{b_3 t}{1 + \ldots}}}},$$

en sorte qu'on a

$$\begin{aligned}
U_{n+1} &= U_n + b_n t U_{n-1},\\
V_{n+1} &= V_n + b_n t V_{n-1}.
\end{aligned}$$

En supposant donc d'abord t positif, les U_n et V_n vont en augmentant. Pour qu'ils tendent vers des limites finies, il faut évidemment que les quantités $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ restent finies. Cette condition revient évidemment à celle-ci : la série

$$\sum_1^\infty b_k$$

doit être *convergente*. Ensuite on reconnaît facilement que cette condition nécessaire est aussi suffisante, et qu'elle conduit à cette conséquence : pour toute valeur réelle ou imaginaire de t, on a

$$\lim_{n=\infty} U_n = u(t),$$
$$\lim_{n=\infty} V_n = v(t),$$

$u(t)$ et $v(t)$ étant deux fonctions holomorphes.

On a donc

$$\lim \frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)} = \lim \frac{P_{2n+1}(z)}{Q_{2n+1}(z)} = \frac{1}{a_1 z} \frac{u\left(\frac{1}{z}\right)}{v\left(\frac{1}{z}\right)}.$$

La fraction continue est donc convergente, et en effet il est clair que la série

$$\sum_1^\infty a_k$$

doit être *divergente*, puisque nous supposons que la série

$$\sum_1^\infty \frac{1}{a_k a_{k+1}}$$

est *convergente*.

69. Posons $n = 2m$ ou $n = 2m+1$ selon que n est pair ou impair, on aura

$$V_n = (1 + x_1 t)(1 + x_2 t)\ldots(1 + x_m t),$$

où nous supposerons

$$x_1 > x_2 > x_3 > \ldots > x_m;$$

ce sont là les racines de

$$Q_{2n}(-z) = 0 \qquad \text{ou de} \qquad Q_{2n+1}(-z) : z = 0,$$

rangées par ordre *décroissant*. Lorsque n croît, une racine x_k de rang déterminé k *croît* aussi, et elle tend pour $n = \infty$ vers une limite déterminée. Et, en effet, elle ne saurait croître indéfiniment puisque la somme de toutes les racines reste finie.

Si nous posons

$$\lim_{n=\infty} x_k = r_k,$$

on aura

$$r_1 > r_2 > r_3 > r_4 > \ldots,$$

et deux r_k ne peuvent pas être égaux (*voir* le raisonnement du n° 20). La série

$$\sum_1^\infty r_k$$

est *convergente* et l'on a

$$v(t) = (1 + r_1 t)(1 + r_2 t)(1 + r_3 t)\ldots.$$

Considérons la décomposition en fractions simples

$$\frac{U_n}{V_n} = C_n + \frac{\mathfrak{M}_1}{1 + x_1 t} + \frac{\mathfrak{M}_2}{1 + x_2 t} + \ldots + \frac{\mathfrak{M}_m}{1 + x_m t},$$

où $C_n = 0$ lorsque n est pair, $C_{2m+1} > 0$

$$C_n + \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 + \ldots + \mathfrak{M}_n = 1,$$

$$\frac{U_n}{V_n} = 1 - \sum_1^n \frac{\mathfrak{M}_k x_k t}{1 + x_k t}.$$

Pour $n = \infty$, la constante positive $\mathfrak{M}_k$ tend vers une limite s_k et l'on démontre aisément, en passant à la limite pour $n = \infty$,

$$\frac{u(t)}{v(t)} = 1 - \sum_1^\infty \frac{r_k s_k t}{1 + r_k t},$$

ou encore

$$\frac{u(t)}{v(t)} = 1 - \sum_1^\infty s_k + \sum_1^\infty \frac{s_k}{1 + r_k t},$$

en sorte qu'il vient finalement

$$\lim \frac{P_n(z)}{Q_n(z)} = \frac{1 - \sum_1^\infty s_k}{a_1 z} + \frac{1}{a_1} \sum_1^\infty \frac{s_k}{z + r_k}.$$

On voit donc qu'il y a une masse égale à

$$\left(1 - \sum_1^\infty s_k\right) : a_1,$$

concentrée à l'origine; on a donc nécessairement

$$\left(1 - \sum_1^\infty s_k\right) : a_1 = 1 : \sum_1^\infty a_{2k-1}.$$

Cette masse sera nulle ou positive selon que la série

$$\sum_1^\infty a_{2k-1}$$

est divergente ou convergente. Il est à remarquer que ce second cas est en effet possible; il exige seulement que les a_{2k} croissent rapidement afin que la série

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{a_k a_{k+1}}$$

puisse être convergente.

Ensuite il y a les masses $\frac{s_k}{a_1}$ concentrées aux points r_k, qui pour $k = \infty$ se rapprochent indéfiniment de l'origine, la série

$$\sum_{1}^{\infty} r_k$$

étant convergente. On voit donc que la fonction

$$F(z) = \lim \frac{P_n(z)}{Q_n(z)}$$

a une infinité de pôles dans le voisinage de $z = 0$, et ce point $z = 0$ peut être un pôle ou non selon les cas.

70. L'une des premières fractions continues que l'on ait considérée en Analyse fournit un exemple du cas que nous venons d'étudier. C'est la fraction continue de Lambert

$$\frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} = \cfrac{z}{1 + \cfrac{z^2}{3 + \cfrac{z^2}{5 + \cfrac{z^2}{7 + \dots}}}},$$

$$\frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} = \sum_{1}^{\infty} \frac{8z}{4z^2 + (2k-1)^2\pi^2}.$$

Pour la ramener à notre type, nous écrirons

$$\frac{1}{\sqrt{z}} \frac{e^{\frac{1}{\sqrt{z}}} - e^{-\frac{1}{\sqrt{z}}}}{e^{\frac{1}{\sqrt{z}}} + e^{-\frac{1}{\sqrt{z}}}} = \sum_{1}^{\infty} \frac{s_k}{z + r_k} = \cfrac{z}{z + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{5z + \cfrac{1}{7 + \dots}}}},$$

$$r_k = 4 : (2k-1)^2\pi^2,$$

$$s_k = 8 : (2k-1)^2\pi^2.$$

On a ici

$$a_k = 2k - 1,$$

et la série $\sum\limits_1^\infty \frac{1}{a_k a_{k+1}}$ est bien convergente; en même temps la série

$$\sum_1^\infty a_{2k-1}$$

est divergente, il n'y a point de masse concentrée à l'origine. Ensuite on a

$$u(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}\left(e^{\sqrt{t}} - e^{-\sqrt{t}}\right),$$

$$v(t) = \frac{1}{2}\left(e^{\sqrt{t}} + e^{-\sqrt{t}}\right).$$

Des formules que nous donnerons plus loin (n° 76) permettent de réduire en fraction continue

$$\frac{\mu}{z} + \frac{1}{\sqrt{z}}\,\frac{e^{\frac{1}{\sqrt{z}}} - e^{-\frac{1}{\sqrt{z}}}}{e^{\frac{1}{\sqrt{z}}} + e^{-\frac{1}{\sqrt{z}}}},$$

μ étant une constante positive. On aurait ainsi un exemple du cas où l'origine est un pôle; il s'y trouve concentrée la masse μ.

71. Nous allons revenir maintenant au cas où la série

$$\sum_1^\infty a_k$$

est *convergente*, pour faire une étude plus complète du problème des moments qui est indéterminé.

Soit t un paramètre positif; je considère la fraction continue

$$\cfrac{1}{a_1 z + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 z + \cdots + \cfrac{1}{a_{2n+1} z + \cfrac{1}{t}}}}}$$

qui est évidemment égale à

$$\frac{P_{2n}(z)+tP_{2n+1}(z)}{Q_{2n}(z)+tQ_{2n+1}(z)}.$$

En développant suivant les puissances descendantes de z, on a évidemment

$$\frac{c_0}{z}-\frac{c_1}{z^2}+\ldots+\frac{c_{2n}}{z^{2n+1}}-\frac{\varepsilon}{z^{2n+2}}+\ldots,$$

ε étant le premier coefficient qui dépend de t. Posons

$$\mathcal{K}_n(z)=Q_{2n}(z)+tQ_{2n+1}(z)=[a_1 z, a_2, \ldots a_{2n+1} z, t],$$

les racines de

$$\mathcal{K}_n(z)=0$$

seront réelles, inégales et négatives; en effet, $\mathcal{K}_n(z)$ est simplement ce que devient $Q_{2n+2}(z)$ pour $a_{2n+2}=t$. Comparons maintenant les racines de

$$\mathcal{K}_n(z)=0 \qquad \text{à celles de} \qquad \mathcal{K}_{n+1}(z)=0.$$

On a

$$\mathcal{K}_{n+1}(z)=[a_1 z, a_2, \ldots, a_{2n+1} z, a_{2n+2}, a_{2n+3} z, t].$$

Or, il est facile de voir que si l'on pose

$$a_{2n+2}=0, \qquad a_{2n+3}=0,$$

le second membre se réduit à $\mathcal{K}_n(z)$. Les racines de

$$\mathcal{K}_{n+1}(z)=0$$

sont au nombre de $n+2$; si maintenant on fait décroître a_{2n+2}, a_{2n+3} de leurs valeurs actuelles jusqu'à zéro, ces racines ne peuvent que *décroître*, d'après la proposition du n° 6. Une de ces racines deviendra $-\infty$, les autres vont coïncider avec les racines de

$$\mathcal{K}_n(z)=0.$$

Ce résultat peut s'exprimer ainsi : si l'on range par ordre de grandeur croissante les racines positives de

$$\mathcal{K}_n(-z)=0, \qquad x_1<x_2<x_3, \ldots <x_{n+1},$$

une racine de rang déterminé x_k *décroît* lorsqu'on change n en $n+1$.

Pour $n=\infty$ on a

$$\lim \mathcal{X}_n(z) = q(z) + tq_1(z),$$

x_k tend vers une limite finie ξ_k et

$$q(z) + tq_1(z) = \left(1+\frac{z}{\xi_1}\right)\left(1+\frac{z}{\xi_2}\right)\left(1+\frac{z}{\xi_3}\right)\cdots$$

En effet, on peut répéter tous les raisonnements des n^{os} 19 et 21. Il est clair que les ξ_k vont en croissant, mais peut-il arriver que $\xi_k=\xi_{k+1}$? Le raisonnement du n° 20 ne peut pas s'appliquer ici; mais on peut procéder ainsi. Si l'on avait $\xi_k=\xi_{k+1}$, on aurait, pour une même valeur finie et réelle de z,

$$q(z) + tq_1(z) = 0,$$
$$q'(z) + tq'_1(z) = 0,$$

donc

$$q(z)q'_1(z) - q_1(z)q'(z) = 0.$$

L'expression

$$Q_{2n}(z)Q'_{2n+1}(z) - Q_{2n+1}(z)Q'_{2n}(z)$$

devrait donc s'annuler pour $n=\infty$, ce qui est manifestement impossible puisqu'elle est égale à

$$\sum_0^n a_{2k+1}Q_{2k}^2(z).$$

La transformation que nous venons d'indiquer résulte de l'identité bien connue

$$\frac{Q_{2n}(u)Q_{2n+1}(z) - Q_{2n}(z)Q_{2n+1}(u)}{z-u} = \sum_0^n a_{2k+1}Q_{2k}(z)Q_{2k}(u).$$

On a donc bien $\xi_k < \xi_{k+1}$.

Les nombres ξ_k sont des fonctions *décroissantes* du paramètre t; en effet ξ_k est la limite de x_k qui, elle, est une fonction décroissante de t. Nous avons

$$q(z) = \left(1+\frac{z}{\lambda_1}\right)\left(1+\frac{z}{\lambda_2}\right)\left(1+\frac{z}{\lambda_3}\right)\cdots,$$

$$q_1(z) = cz\left(1+\frac{z}{\theta_1}\right)\left(1+\frac{z}{\theta_2}\right)\left(1+\frac{z}{\theta_3}\right)\cdots,$$

où

$$c = \sum_1^\infty a_{2k-1}.$$

Pour $t = 0$, ξ_k devient égal à λ_k et l'on a ainsi

$$\xi_k \leqq \lambda_k.$$

Pour $t = \infty$, on doit évidemment avoir

$$\lim t\xi_1 = \frac{1}{c}, \qquad \xi_{k+1} = \theta_k,$$

donc

$$\xi_k \geqq \theta_{k-1},$$

et θ_k est compris entre λ_k et λ_{k+1}.

En définitive, si l'on considère les quantités croissantes

$$0, \lambda_1, \theta_1, \lambda_2, \theta_2, \lambda_3, \theta_3, \ldots,$$

on voit que les ξ_k sont compris dans les intervalles

(P) $$(0, \lambda_1), (\theta_1, \lambda_2), (\theta_2, \lambda_3), \ldots;$$

on n'en trouve aucun dans les intervalles

(Q) $$(\lambda_1, \theta_1), (\lambda_2, \theta_2), (\lambda_3, \theta_3), \ldots.$$

On trouvera facilement

$$\frac{p(z) + tp_1(z)}{q(z) + tq_1(z)} = \sum_1^\infty \frac{\eta_k}{z + \xi_k},$$

et la distribution des masses

$$(\eta_k, \xi_k), \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

est encore une solution du problème des moments, dépendante cette fois du paramètre t.

72. La considération de la fraction continue

$$\frac{P_{2n-1}(z)+tzP_{2n}(z)}{Q_{2n-1}(z)+tzQ_{2n}(z)}=\cfrac{1}{a_1 z+\cfrac{1}{a_2+\ddots+\cfrac{1}{a_{2n}+\cfrac{1}{tz}}}}$$

conduit à des résultats analogues, que nous nous contenterons d'énoncer

$$q_1(z)+tzq(z)=[c+t]z\left(1+\frac{z}{\xi'_1}\right)\left(1+\frac{z}{\xi'_2}\right)\left(1+\frac{z}{\xi'_3}\right)\cdots,$$

$$\frac{p_1(z)+tzp(z)}{q_1(z)+tzq(z)}=\frac{\eta'_0}{z}+\sum_1^\infty\frac{\eta'_k}{z+\xi'_k}.$$

On a ici $\xi'_0=0$ et

$$\lambda_k \leqq \xi'_k \leqq \theta_k.$$

Les ξ'_k sont encore des fonctions décroissantes de t; pour $t=0$, $\xi'_k=\theta_k$; pour $t=\infty$, $\xi'_k=\lambda_k$, les η'_k sont positifs, $\eta'_0=1:c+t$ s'annule pour $t=\infty$. La distribution des masses

$$(\eta'_k, \xi'_k): \qquad (k=0, 1, 2, 3, \ldots)$$

donne encore une solution du problème des moments; cette fois-ci, les ξ sont dans les intervalles

$$(\lambda_1, \theta_1), (\lambda_2, \theta_2), (\lambda_3, \theta_3).$$

On voit donc que le problème des moments *a toujours une solution dans laquelle il y a une concentration de masse finie en un point donné arbitrairement*. En effet, les résultats précédents font connaître toujours *une* solution tant que le point donné n'est pas à l'origine. Dans ce dernier cas, nous avons une infinité de solutions par les systèmes

$$(\nu_k, \theta_k) \qquad \text{et} \qquad (\eta'_k, \xi'_k);$$

le premier système donne la masse maxima qui peut être concentrée à l'origine

$$\nu_0=\frac{1}{c}>\eta'_0=\frac{1}{c+t}.$$

73. Nous allons montrer maintenant qu'un système tel que

$$(\eta_k, \xi_k)$$

est celui où la masse η_k concentrée au point ξ_k est un maximum. De même dans le système (η'_k, ξ'_k), la masse η'_k concentrée au point ξ'_k est un maximum pour $k = 1, 2, 3, \ldots$. Nous venons de remarquer que cela n'est plus vrai pour $k = 0$, le système (ν_k, θ_k) donnant alors la concentration maxima à l'origine.

Soit a un nombre positif quelconque; pour chercher une limite supérieure de la masse qui peut être concentrée dans ce point dans une solution quelconque du problème des moments, je vais considérer les intégrales

$$\int_0^\infty [1 + X_1(u-a) + X_2(u-a)^2 + \ldots + X_n(u-a)^n]^2 \, d\psi(u),$$

$$\int_0^\infty [1 + X_1(u-a) + X_2(u-a)^2 + \ldots + X_n(u-a)^n]^2 \frac{u}{a} \, d\psi(u).$$

Ces intégrales ne changent point de valeur si l'on remplace la fonction $\psi(u)$, qui caractérise une distribution de masse qui satisfait au problème des moments, par une autre fonction de même nature. On peut donc supposer que la fonction $\psi(u)$ caractérise la distribution qui, au point a, admet la plus grande concentration de masse possible. D'autre part, ces intégrales ont pour $u = a$ un élément égal à cette masse concentrée au point a. Les intégrales sont donc des *limites supérieures* du maximum cherché. Pour avoir les limites les plus proches possibles, nous allons calculer le minimum de ces intégrales considérées comme des fonctions de X_1, $X_2, \ldots, X_n$, et ensuite nous poserons $n = \infty$.

Posons, dans le cas de la première intégrale,

$$\mathfrak{L} = 1 + X_1(u-a) + \ldots + X_n(u-a)^n;$$

les conditions du minimum sont

$$\int_0^\infty \mathfrak{L}(u-a)^k \, d\psi(u) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

ou

$$\int_0^\infty \mathfrak{L}(u-a)\, u^k \, d\psi(u) = 0 \quad [(k = 0, 1, 2, \ldots, (n-1)].$$

On en conclut facilement

$$(u-a)\mathfrak{L} = \alpha Q_{2n+1}(-u) + \beta Q_{2n}(-u),$$

et, pour déterminer les constantes α et β,

$$0 = \alpha\, Q_{2n+1}(-a) + \beta\, Q_{2n}(-a),$$
$$-1 = \alpha\, Q'_{2n+1}(-a) + \beta\, Q'_{2n}(-a).$$

Soit, pour abréger,

$$\Delta = Q_{2n}(-a)\, Q'_{2n+1}(-a) - Q_{2n+1}(-a)\, Q'_{2n}(-a);$$

on aura

$$\mathfrak{L} = \frac{Q_{2n}(-u)\, Q_{2n+1}(-a) - Q_{2n+1}(-u)\, Q_{2n}(-a)}{(u-a)\,\Delta}$$

ou

$$\mathfrak{L} = \frac{1}{\Delta} \sum_0^n a_{2k+1}\, Q_{2k}(-u)\, Q_{2k}(-a).$$

La valeur du minimum est

$$\int_0^\infty \mathfrak{L}^2\, d\psi(u) = \int_0^\infty \mathfrak{L}\, d\psi(u) = \frac{1}{\Delta} \sum_0^n a_{2k+1}\, Q_{2k}(-a) \int_0^\infty Q_{2k}(-u)\, d\psi(u);$$

dans le second membre tous les termes s'annulent, excepté celui qui répond à $k = 0$; le minimum se trouve ainsi égal à

$$\frac{1}{\Delta} a_1 \int_0^\infty d\psi(u) = \frac{1}{\Delta},$$

et, puisque $\mathfrak{L} = 1$ pour $u = a$,

$$\Delta = \sum_0^n a_{2k+1}\, Q_{2k}^2(-a).$$

En faisant croître n indéfiniment, on obtient donc, comme une limite supérieure de la masse pouvant être concentrée au point a, l'expression

$$1 : [q(-a)\, q'_1(-a) - q_1(-a)\, q'(-a)].$$

Soit Δ_1 ce que devient Δ lorsqu'on remplace c_k par c_{k+1}; le minimum de la seconde intégrale sera

$$\frac{1}{a\,\Delta_1}.$$

Or, par ce changement de c_k en c_{k+1},

$$a_{2k+1} \quad \text{devient} \quad (a_1+a_2+\ldots+a_{2k+1})^2 a_{2k+2},$$
$$Q_{2k}(z) \quad \text{devient} \quad \frac{Q_{2k+1}(z)}{(a_1+a_3+\ldots+a_{2k+1})^2},$$

comme on le verra plus loin n° 77.

On a donc

$$\Delta_1 = \sum_0^n a_{2k+2}\left[\frac{Q_{2k+1}(-a)}{a}\right]^2,$$

et l'on voit facilement que

$$a\Delta_1 = \Delta + \frac{1}{a} Q_{2n+1}(-a)\,Q_{2n+2}(-a).$$

En faisant croître n indéfiniment, on en déduit cette limite supérieure de la masse pouvant être concentrée au point a

$$1 : \left[q(-a)q_1'(-a) - q_1(-a)q'(-a) + \frac{1}{a}q(-a)q_1(-a)\right].$$

Or, lorsque a est dans l'un des intervalles

$$(0, \lambda_1), \quad (\theta_1, \lambda_2), \quad (\theta_2, \lambda_3), \quad \ldots,$$

le produit $q(-a)q_1(-a)$ est négatif; on adoptera donc comme limite supérieure

$$1 : [q(-a)q_1'(-a) - q_1(-a)q'(-a)];$$

mais, si a est dans l'un des intervalles

$$(\lambda_1, \theta_1), \quad (\lambda_2, \theta_2), \quad (\lambda_3, \theta_3), \quad \ldots,$$

$q(-a)q_1(-a)$ est positif; la limite supérieure la moins élevée sera

$$1 : \left[q(-a)q_1'(-a) - q_1(-a)q'(-a) + \frac{1}{a}q(-a)q_1(-a)\right].$$

74. Il est très facile maintenant de voir que les systèmes

$$(\eta_k, \xi_k) \quad \text{et} \quad (\eta_k', \xi_k')$$

sont ceux qui possèdent les concentrations maxima aux points ξ_k, ξ_k'. En effet, si a est dans des intervalles

$$(0, \lambda_1), \quad (\theta_1, \lambda_2), \quad (\theta_2, \lambda_3), \quad \ldots,$$

on aura $a = \xi_k$ pour une valeur convenable de t. Cette valeur de t se déterminera par la condition

$$q(-a) + tq_1(-a) = 0;$$

elle est positive. La valeur correspondante de η_k est

$$\frac{p(-a) + tp_1(-a)}{q'(-a) + tq'_1(-a)},$$

et un calcul facile montre que cette valeur est précisément égale à

$$1 : [q(-a)q'_1(-a) - q_1(-a)q'(-a)],$$

qui est la limite supérieure obtenue plus haut. Si, en second lieu, a est dans un des intervalles

$$(\lambda_1, \theta_1), \quad (\lambda_2, \theta_2), \quad (\lambda_3, \theta_3), \quad \ldots,$$

on aura $a = \xi'_k$, en déterminant t par la condition

$$q_1(-a) - atq(-a) = 0,$$

et la valeur correspondante de η'_k est

$$\frac{p_1(-a) - atp(-a)}{q'_1(-a) - atq'(-a) + tq(-a)},$$

ce qui est égal à la limite supérieure

$$1 : \left[q(-a)q'_1(-a)q_1(-a)q'(-a) + \frac{1}{a}q(-a)q_1(-a)\right].$$

75. Considérons une distribution dans laquelle la masse μ concentrée au point a est maxima. Supprimons cette masse μ; je dis que le nouveau système qui reste après cette suppression est un système *déterminé*. En effet, s'il était *indéterminé*, on pourrait toujours trouver un système équivalent ayant en a une concentration de masse finie. En rétablissant μ, on aurait donc en a une concentration de masse supérieure à μ, ce qui est impossible. On voit aussi qu'il n'y a pas deux distributions différentes qui donnent le maximum de masse dans un point donné.

Nous avons vu que le système

$$(\nu_k, \theta_k),$$

correspondant à la limite $\frac{p_1(z)}{q_1(z)}$, est celui où la masse ν_0 concentrée à l'origine est maxima. On peut caractériser d'une façon analogue la distribution

$$(\mu_k, \lambda_k)$$

correspondant à la limite $\frac{p(z)}{q(z)}$, en disant que c'est la distribution pour laquelle l'intervalle $(0, \lambda_1)$, qui ne contient point de masse, est le plus grand possible. On peut dire aussi que c'est la distribution pour laquelle le moment d'ordre -1

$$\sum_1^\infty \frac{\mu_k}{\lambda_k}$$

est minimum. Cela se déduit aisément de certaines formules que nous donnerons plus loin (n^{os} 77, 78). Si l'on a plusieurs solutions du problème des moments, on peut en déduire une nouvelle en multipliant ces solutions par des facteurs positifs dont la somme est 1, et en les superposant ensuite. En partant des solutions

$$(\eta_k, \xi_k), \quad (\eta'_k, \xi'_k)$$

qui dépendent du paramètre t, on pourra obtenir ainsi des solutions dans lesquelles la masse est répandue d'une manière *continue* sur l'axe. Nous croyons inutile d'écrire les formules explicites qui renferment évidemment des intégrales.

CHAPITRE X.

SUR QUELQUES TRANSFORMATIONS DE LA FRACTION CONTINUE.

76. Supposons qu'à une distribution de masse donnant les moments

$$c_0, \quad c_1, \quad c_2, \quad \ldots, \quad c_k, \quad \ldots$$

on ajoute une masse μ concentrée à l'origine. Il est clair que c_0 se changera en $c_0 + \mu$; les autres moments ne changent pas. Pour voir ce que devient la fraction continue après cette modification, il suffit de se reporter aux formules des n^{os} 11 et 12. On voit alors que le déterminant A_n devient $A_n + \mu C_{n-1}$, les déterminants B_n, C_n ne changent pas. Il s'ensuit que

$$a_{2n} = \frac{A_n^2}{B_n B_{n-1}}$$

deviendra

$$\frac{(A_n + \mu C_{n-1})^2}{B_n B_{n-1}} = \frac{A_n^2}{B_n B_{n-1}} \left(1 + \mu \frac{C_{n-1}}{A_n}\right)^2;$$

or

$$\frac{C_{n-1}}{A_n} = a_1 + a_3 + \ldots + a_{2n-1};$$

donc a_{2n} se changera en

$$[1 + \mu(a_1 + a_3 + \ldots + a_{2n-1})]^2 a_{2n} = a'_{2n}.$$

Ensuite, on voit par un calcul analogue que a_{2n+1} devient

$$a_{2n+1} : [1 + \mu(a_1 + a_3 + \ldots + a_{2n-1})] \times [1 + \mu(a_1 + a_3 + \ldots + a_{2n+1})] = a'_{2n+1}.$$

Ces relations, on peut les écrire aussi

$$\frac{1}{a'_1 + a'_3 + \ldots + a'_{2k+1}} = \mu + \frac{1}{a_1 + a_3 + \ldots + a_{2k+1}},$$

$$(a'_1 + a'_3 + \ldots + a'_{2k-1})^2 a'_{2k} = (a_1 + a_3 + \ldots + a_{2k-1})^2 a_{2k}.$$

Sous cette forme, elles sont presque évidentes, puisque

$$(a_1 + a_3 + \ldots + a_{2k-1})^2 a_{2k} = \frac{C_{k-1}^2}{B_k B_{k-1}}.$$

Si le problème des moments est indéterminé dans le cas des données

$$c_0, \quad c_1, \quad c_2, \quad c_3, \quad \ldots,$$

il sera évidemment aussi indéterminé dans le cas des moments

$$c_0 + \mu, \quad c_1, \quad c_2, \quad c_3, \quad \ldots .$$

Mais, si l'on est d'abord dans le cas déterminé, pourra-t-il arriver qu'on soit dans le cas indéterminé après avoir ajouté la masse μ à l'origine? Nous avons déjà annoncé (n° 65) que cela ne peut arriver que dans un cas exceptionnel.

En effet, on suppose la série

$$\sum_1^\infty a_k$$

divergente et les séries

$$\sum_1^\infty a'_{2k-1}, \quad \sum_1^\infty a'_{2k}$$

convergentes l'une et l'autre. La première série est toujours convergente mais, pour que

$$\sum_1^\infty a'_{2n}$$

soit convergente, il faut et il suffit que

$$\sum_1^\infty (a_1 + a_3 + \ldots + a_{2k-1})^2 a_{2k}$$

soit convergente. Il s'ensuit que la série

$$\sum_1^\infty a_{2k}$$

est convergente aussi; donc

$$\sum_1^\infty a_{2k-1}$$

sera divergente, tandis que

$$\sum_1^\infty (a_1 + a_3 + \ldots + a_{2k-1}) a_{2k}$$

sera convergente évidemment. On est donc dans le cas particulier étudié au n° 66, et la solution du problème des moments est donnée par le système

$$(\gamma_k, \alpha_k) \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Mais, en ajoutant la masse μ à l'origine, on obtient un système indéterminé. Mais je dis que la solution formée par les masses μ et (γ_k, α_k) est la solution qui donne la plus grande concentration à l'origine et est, par conséquent, du type

$$(\nu_k, \theta_k) \qquad (\theta_0 = 0, \ \nu_0 = \mu).$$

En effet, il y aurait autrement une solution avec une masse $\mu + \mu'$ à l'origine, et, en ôtant la masse μ, on aurait un système équivalent au système (γ_k, α_k), mais qui ne serait pas identique avec ce système déterminé, ce qui est impossible.

77. Supposons maintenant que l'on remplace c_k par c_{k+1}. De chaque solution (m_i, x_i) du problème des moments $(c_0, c_1, c_2, \ldots)$ on déduira évidemment la solution $(m_i x_i, x_i)$ pour le cas des moments $(c_1, c_2, c_3, \ldots)$. Ainsi, si l'on est d'abord dans le cas indéterminé, on restera toujours dans ce cas indéterminé. Mais nous avons annoncé déjà (n° 65) que, lorsqu'on est d'abord dans le cas *déterminé*, il pourra arriver, *dans un cas exceptionnel*, que le second problème soit indéterminé.

C'est ce qu'on déduira sans difficulté des formules que nous allons donner.

Il est clair que, par le changement de c_k en c_{k+1}, A_n deviendra B_n, B_n deviendra C_n.

Donc, si a_k se change en a'_k, on aura

$$a'_{2n} = \frac{B_n^2}{C_n C_{n-1}} = a_{2n+1} : (a_1 + a_3 + \ldots + a_{2n-1})(a_1 + a_3 + \ldots + a_{2n+1}),$$

$$a'_{2n-1} = \frac{C_{n-1}^2}{B_n B_{n-1}} = a_{2n}(a_1 + a_3 + \ldots + a_{2n-1})^2.$$

Ensuite, on voit facilement que $Q_{2n}(z)$ devient

$$\frac{Q_{2n+1}(z)}{z Q'_{2n+1}(0)}.$$

Voici maintenant les formules pour la transformation inverse. En réduisant la série

$$\frac{m}{z} - \frac{c_0}{z^2} + \frac{c_1}{z^3} - \frac{c_2}{z^4} + \ldots$$

en fraction continue

$$\cfrac{1}{a'_1 z + \cfrac{1}{a'_2 + \cfrac{1}{a'_3 z + \ldots}}},$$

on aura

$$\begin{aligned}
a'_1 &= \frac{1}{m},\\
a'_{2n+1} &= a_{2n} : (m - a_2 - a_4 - \ldots - a_{2n-2})(m - a_2 - a_4 - \ldots - a_{2n}),\\
a'_{2n} &= a_{2n-1}(m - a_2 - a_4 - \ldots - a_{2n-2})^2.
\end{aligned}$$

78. En dernier lieu étudions l'effet d'une *translation* sur un système de masses. Cela revient à développer, suivant les puissances descendantes de z, l'expression

$$\frac{c_0}{z+\lambda} - \frac{c_1}{(z+\lambda)^2} + \frac{c_2}{(z+\lambda)^3} - \ldots.$$

En supposant qu'on obtienne

$$\frac{c'_0}{z} - \frac{c'_1}{z^2} + \frac{c'_2}{z^3} - \ldots,$$

on aura

$$c'_k = c_k + \frac{k}{1}\lambda c_{k-1} + \frac{k(k-1)}{1.2}\lambda^2 c_{k-2} + \ldots + \lambda^k c_0.$$

Un calcul facile montre qu'en remplaçant c_k par c'_k le déterminant A_n ne change point, le déterminant B_n devient $B_n Q_{2n}(\lambda)$, d'où l'on déduit

$$\begin{aligned}
a'_{2n+1} &= a_{2n+1} Q^2_{2n}(\lambda),\\
a'_{2n} &= a_{2n} : Q_{2n-2}(\lambda)\, Q_{2n}(\lambda).
\end{aligned}$$

Si $\lambda > 0$, un système indéterminé restera toujours indéterminé, mais un système déterminé peut se changer en système indéterminé dans un cas singulier, comme cela a été déjà énoncé au n° 65.

CHAPITRE XI.

EXEMPLES PARTICULIERS.

79. Je vais donner maintenant quelques exemples : dans tous les cas la fraction continue sera *convergente*.

Pour abréger, je supprime toujours les artifices qu'il faut employer pour obtenir la transformation de l'intégrale définie en fraction continue.

Soit λ un paramètre positif, je considère d'abord la fraction continue

$$F(z, \lambda) = \cfrac{1}{z + \cfrac{1}{1 + \cfrac{\lambda}{z + \cfrac{2}{1 + \cfrac{2\lambda}{z + \cfrac{3}{1 + \cfrac{3\lambda}{z + \dots}}}}}}}$$

On a ici

$$a_{2k+1} = \frac{1}{\lambda^k}, \qquad a_{2k} = \frac{\lambda^{k-1}}{k},$$

l'une des deux séries

$$\sum_0^\infty a_{2k+1}, \quad \sum_1^\infty a_{2k}$$

sera donc toujours divergente, et pour $\lambda = 1$ elles le sont toutes les deux; la fraction continue est toujours convergente. Mais il y a lieu de distinguer les cas $\lambda < 1$, $\lambda > 1$. Lorsque $\lambda < 1$, on a

$$F(z, \lambda) = \sum_1^\infty \frac{(1-\lambda)\lambda^{n-1}}{z + n(1-\lambda)}.$$

L'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{d\Phi(u)}{z+u}$$

se réduit ainsi à une série; il y a sur l'axe une infinité de points matériels

$$[(1-\lambda)\lambda^{n-1}, n(1-\lambda)].$$

Pour $\lambda > 1$, on a

$$F(z,\lambda) = \sum_1^\infty \frac{\lambda - 1}{\lambda^n[z + (n-1)(\lambda - 1)]}.$$

L'intégrale définie se décompose encore en série; la distribution de masse est

$$\left[\frac{\lambda - 1}{\lambda^n}, (n-1)(\lambda - 1)\right].$$

On voit que, lorsque λ diffère infiniment peu de l'unité, les masses sont infiniment petites et infiniment rapprochées. Pour $\lambda = 1$, on a une distribution *continue* de masse, car on retrouve alors la fraction continue de Laguerre

$$F(z, 1) = \int_0^\infty \frac{e^{-u}\,du}{z + u}.$$

La distribution de masse doit être regardée comme variant d'une façon continue avec λ.

On a encore cette expression analytique

$$F(z, \lambda) = \int_0^\infty \frac{(1-\lambda)\,e^{-zu}}{e^{(1-\lambda)u} - \lambda}\,du,$$

d'où l'on déduit en effet, lorsque $\lambda < 1$,

$$F(z,\lambda) = \int_0^\infty (1-\lambda)\,e^{-zu} \sum_1^\infty e^{-n(1-\lambda)u}\lambda^{n-1}\,du = \sum_1^\infty \frac{(1-\lambda)\lambda^{n-1}}{z + n(1-\lambda)},$$

et, lorsque $\lambda > 1$,

$$F(z, \lambda) = \int_0^\infty (\lambda - 1)\,e^{-zu} \sum_1^\infty \lambda^{-n} e^{-(n-1)(\lambda-1)u}\,du = \sum_1^\infty \frac{(\lambda-1)\lambda^{-n}}{z + (n-1)(\lambda - 1)}.$$

80. On peut rattacher à l'exemple précédent la réduction en fraction continue de la série

$$\varphi(w, \mu) = 1 + \frac{w}{1+\mu} + \frac{w^2}{1+2\mu} + \frac{w^3}{1+3\mu} + \ldots$$

considérée par M. Poincaré (*Les Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste,* t. II, p. 3).

Si, dans le cas $\lambda < 1$, on pose

$$\varpi = \lambda, \qquad \mu = \frac{1-\lambda}{z},$$

il vient

$$\varphi(\varpi, \mu) = 1 + \frac{\varpi}{\mu} F(z, \lambda).$$

Dans le cas $\lambda > 1$, on posera

$$\varpi = 1 : \lambda, \qquad \mu = \frac{\lambda - 1}{z} \qquad \text{et} \qquad \varphi(\varpi, \mu) = \frac{1}{\varpi\mu} F(z, \lambda).$$

On obtient ainsi les fractions continues

$$\varphi(\varpi, \mu) = 1 + \cfrac{\varpi}{1 - \varpi + \cfrac{\mu}{1 + \cfrac{\varpi\mu}{1 - \varpi + \cfrac{2\mu}{1 + \cfrac{2\varpi\mu}{1 - \varpi + \cfrac{3\mu}{1 + \dots}}}}}},$$

$$\varphi(\varpi, \mu) = \cfrac{1}{1 - \varpi + \cfrac{\varpi\mu}{1 + \cfrac{\mu}{1 - \varpi + \cfrac{2\varpi\mu}{1 + \cfrac{2\mu}{1 - \varpi + \cfrac{3\varpi\mu}{1 + \dots}}}}}}.$$

En supposant $0 < \varpi < 1$, elles sont convergentes pour toute valeur réelle ou imaginaire de μ, à l'exception des valeurs $\mu = -\frac{1}{n}$; on s'assure facilement qu'il y a encore convergence pour toute autre valeur négative de μ.

81. On peut généraliser l'exemple précédent en introduisant deux nouveaux paramètres. Ainsi soit

$$F(z, \lambda, a, b) = \int_0^\infty \left(\frac{1-\lambda}{e^{u(1-\lambda)} - \lambda^b}\right)^a e^{-zu}\, du,$$

on aura

$$F(z, 1, a, b) = \int_0^\infty \frac{e^{-zu}}{(u+b)^a}\, du = \frac{1}{\Gamma(a)} \int^\infty \frac{u^{a-1} e^{-bu}}{z+u}\, du:$$

pour $\lambda < 1$,

$$F(z, \lambda, a, b) = \sum_0^\infty \frac{a(a+1)\ldots(a+n-1)}{1.2.3\ldots n} \frac{(1-\lambda)^a \lambda^{bn}}{z+(n+a)(1-\lambda)};$$

pour $\lambda > 1$,

$$F(z, \lambda, a, b) = \sum_0^\infty \frac{a(a+1)\ldots(a+n-1)}{1.2.3\ldots n} \frac{(\lambda-1)^a \lambda^{-b(n+a)}}{z+n(\lambda-1)},$$

tandis que la fraction continue est

$$\cfrac{m^a}{z+\cfrac{am}{1+\cfrac{m\lambda^b}{z+\cfrac{(a+1)m}{1+\cfrac{2m\lambda^b}{z+\cfrac{(a+2)m}{1+\cfrac{3m\lambda^b}{z+\ldots}}}}}}},$$

où l'on a posé

$$m = \frac{1-\lambda}{1-\lambda^b}.$$

82. Je vais étudier maintenant, au point de vue de leur convergence, les fractions continues qu'on obtient pour les intégrales

$$F_1(z, k) = \int_0^\infty \mathrm{cn}\,(u, k)\, e^{-zu}\, du,$$

$$F_2(z, k) = \int_0^\infty \mathrm{dn}\,(u, k)\, e^{-zu}\, du,$$

$$F_3(z, k) = \int_0^\infty \mathrm{sn}\,(u, k)\, e^{-zu}\, du,$$

$$F_4(z, k) = z\int_0^\infty \mathrm{sn}^2(u, k)\, e^{-zu}\, du.$$

En substituant pour les fonctions elliptiques leurs développements suivant les puissances de u, on obtient les développements suivant les puissances descendantes de z. Ces développements sont de la forme

$$\frac{c_0}{z} - \frac{c_1}{z^3} + \frac{c_2}{z^5} - \frac{c_3}{z^7} + \ldots$$

dans le cas de $F_1(z, k)$ et $F_2(z, k)$; de la forme

$$\frac{c_0}{z^2} - \frac{c_1}{z^4} + \frac{c_2}{z^6} - \frac{c_3}{z^8} + \ldots$$

dans le cas de $F_3(z, k)$ et $F_4(z, k)$. Dans tous les cas les coefficients c_n sont des polynomes en k à coefficients positifs.

Voici maintenant les fractions continues qui sont de la forme

$$\cfrac{1}{a_1 z + \cfrac{1}{a_2 z + \cfrac{1}{a_3 z + \ldots}}}$$

ou de la forme

$$\cfrac{1}{a_1 z^2 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 z^2 + \ldots}}},$$

selon les deux formes du développement suivant les puissances descendantes de z. Dans le cas du second développement les valeurs des a_n sont très compliquées; mais, en se bornant à considérer les réduites d'ordre pair [*voir* la forme (I^d) de l'Introduction], on a une fraction continue de la forme

$$\cfrac{\lambda_0}{z^2 + \alpha_1 - \cfrac{\lambda_1}{z^2 + \alpha_2 - \cfrac{\lambda_2}{z_2 + \alpha_3 - \ldots}}}$$

avec des valeurs simples des λ_n, α_n.

Dans le cas de $F_1(z, k)$, on a

$$b_0 = 1, \qquad b_{2n-1} = (2n-1)^2, \qquad b_{2n} = (2nk)^2,$$

d'où

$$a_1 = 1, \qquad a_2 = 1,$$

$$a_{2n+1} = \left[\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots(2n)}\right]^2 \frac{1}{k^{2n}},$$

$$a_{2n} = \left[\frac{2.4\ldots(2n-2)}{3.5\ldots(2n-1)}\right]^2 k^{2n-2}.$$

Dans le cas de $F_2(z, k)$, on a

$$b_0 = 1, \qquad b_{2n-1} = (2n-1)^2 k^2, \qquad b_{2n} = (2n)^2,$$

d'où

$$a_1 = 1, \qquad a_2 = \frac{1}{k^2},$$

$$a_{2n+1} = \left[\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots(2n)}\right]^2 k^{2n},$$

$$a_{2n} = \left[\frac{2.4\ldots(2n-2)}{3.5\ldots(2n-1)}\right]^2 \frac{1}{k^{2n}}.$$

Dans le cas de $F_3(z, k)$, on a

$$\lambda_0 = 1, \qquad \lambda_n = (2n-1)(2n)^2(2n+1)k^2, \qquad \alpha_n = (2n-1)^2(1+k^2).$$

Dans le cas de $F_4(z, k)$, on a

$$\lambda_0 = 2, \qquad \lambda_n = 2n(2n+1)^2(2n+2)k^2, \qquad \alpha_n = (2n)^2(1+k^2).$$

La démonstration de ces formules, au point de vue purement formel, se trouve dans un Mémoire que j'ai publié dans le tome III de ces *Annales*. J'ai ajouté ici seulement la réduction en fraction continue de $F_4(z, k)$.

83. Les fractions continues pour $F_1(z, k)$, $F_2(z, k)$ sont *convergentes* pour toute valeur positive de k^2. Dès lors elles doivent se mettre sous la forme

$$\int_0^\infty \frac{z\,d\Phi(u)}{z^2+u};$$

mais nous allons voir que cette intégrale définie se réduit encore à une série. Substituons en effet, aux fonctions elliptiques, leurs développements en séries périodiques, on trouve sans peine

$$F_1(z, k) = \frac{2\pi}{k\mathrm{K}} \sum_0^\infty \frac{q^{n+\frac{1}{2}}}{1+q^{2n+1}} \frac{z}{z^2 + \left[\frac{(2n+1)\pi}{2\mathrm{K}}\right]^2},$$

$$F_2(z, k) = \frac{\pi}{2\mathrm{K}} \left[\frac{1}{z} + \sum_1^\infty \frac{4q^n}{1+q^{2n}} \frac{z}{z^2 + \left(\frac{n\pi}{\mathrm{K}}\right)^2}\right],$$

$$F_3(z, k) = \frac{\pi^2}{k\mathrm{K}^2} \sum_0^\infty \frac{(2n+1)q^{n+\frac{1}{2}}}{1-q^{2n+1}} \frac{1}{z^2 + \left[\frac{(2n+1)\pi}{2\mathrm{K}}\right]^2},$$

$$F_4(z, k) = \frac{2\pi^4}{k^2\mathrm{K}^4} \sum^\infty \frac{n^3 q^n}{1-q^{2n}} \frac{1}{z^2 + \left(\frac{n\pi}{\mathrm{K}}\right)^2}.$$

On reconnaît ainsi que les fractions continues pour $F_3(z, k)$ et $F_4(z, k)$ sont aussi du type que nous avons étudié. C'est ce que nous avons déjà vérifié d'une autre façon dans l'Introduction pour $F_3(z, k)$.

Mais les réduites des fractions continues pour $F_3(z, k)$, $F_4(z, k)$ tendent-elles vers les expressions de ces fonctions que nous venons de donner? Pour répondre affirmativement, il faudrait savoir qu'on est dans le cas déterminé du problème des moments.

84. Supposons $k < 1$, $q < 1$, l'expression de $F_4(z, k)$ montre qu'en posant

$$m_n = \frac{q^{n+\frac{1}{2}}}{1+q^{2n+1}}, \qquad x_n = \left[\frac{(2n+1)\pi}{2K}\right]^2,$$

le système des masses

$$(m_n, x_n) \qquad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

est un système déterminé. Ensuite le système

$$(m_n x_n, x_n)$$

sera aussi déterminé; car, pour qu'il en fût autrement, il faudrait que la série

$$\sum_1^\infty a'_{2n-1} = \sum_1^\infty a_{2n}(a_1 + a_3 + \ldots + a_{2n-1})^2$$

soit convergente (*voir* n° 77); or, on constate que la série

$$\sum_1^\infty a_{2n} a_{2n-1}^2$$

est déjà divergente.

On en conclut que, M étant une constante quelconque, le système des masses

$$m_n = \frac{(2n+1)^2 q^{n+\frac{1}{2}}}{1+q^{2n+1}} M, \qquad x_n = \left[\frac{(2n+1)\pi}{2K}\right]^2 \qquad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

est un système déterminé. Or, si l'on prend

$$M > \frac{1}{2n+1}\,\frac{1+q^{2n+1}}{1-q^{2n+1}} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

on reconnaît immédiatement que le système

$$m_n = \frac{(2n+1)q^{n+\frac{1}{2}}}{1-q^{2n+1}}, \qquad x_n = \left[\frac{(2n+1)\pi}{2K}\right]^2$$

sera aussi *déterminé*. Cela prouve que la fraction continue pour $F_3(z, k)$ est bien dans le cas déterminé; la limite est bien égale à $F_3(z, k)$.

Considérons la fraction continue pour $F_2(z, k)$. La série

$$\sum_1^\infty a_{2n-1} = \sigma$$

est *convergente* (il y a une concentration de masse à l'origine). Si l'on remplace c_k par c_{k+1}, on aura (n° 77)

$$a'_{2n} > \frac{a_{2n+1}}{\sigma^2},$$

$$a'_{2n-1} > a_1^2 a_{2n}.$$

En changeant de nouveau c_k en c_{k+1}, on aura

$$a''_{2n-1} = a'_{2n}(a'_1 + a'_3 + \ldots + a'_{2n-1})^2,$$

donc

$$a''_{2n-1} > a'_{2n}\, a'^2_{2n-1} > \frac{a_1^4}{\sigma^2}\, a_{2n+1}\, a_{2n}^2.$$

Or la série

$$\Sigma\, a_{2n+1}\, a_{2n}^2$$

est manifestement divergente; il en est de même de la série

$$\Sigma\, a''_{2n-1},$$

ce qui prouve que le système des masses

$$m_n = \frac{n^4 q^n}{1+q^{2n}} M, \qquad x_n = \left(\frac{n\pi}{K}\right)^2$$

est un système déterminé. En prenant

$$M > \frac{1}{n}\, \frac{1+q^{2n}}{1-q^{2n}},$$

on reconnaît que le système

$$m_n = \frac{n^3 q^n}{1-q^{2n}}, \qquad x_n = \left(\frac{n\pi}{K}\right)^2$$

est également déterminé, c'est-à-dire la fraction continue pour $F_4(z, k)$ tend bien vers $F_4(z, k)$.

Nous avons supposé $k < 1$, mais on voit facilement que

$$F_1\left(z, \frac{1}{k}\right) = k\ F_2(kz, k),$$

$$F_2\left(z, \frac{1}{k}\right) = k\ F_1(kz, k),$$

$$F_3\left(z, \frac{1}{k}\right) = k^2 F_3(kz, k),$$

$$F_4\left(z, \frac{1}{k}\right) = k^2 F_4(kz, k),$$

ce qui montre que cette restriction est inutile.

85. Les distributions de masses correspondant aux fonctions $F(z, k)$ présentent toutes cette particularité que, lorsque k tend vers l'unité, les masses deviennent infiniment petites, mais aussi infiniment rapprochées.

Pour $k = 1$ on obtient, comme limite, une distribution continue de masse sur l'axe. C'est le même phénomène que nous avons rencontré déjà (n° 79).

Il ne semble pas sans intérêt d'obtenir directement la distribution correspondant à $k = 1$, comme limite de celle qui correspond à $k = 1 - \varepsilon$, ε étant infiniment petit. Faisons le calcul pour $F_1(z, k)$. Posons

$$\delta = \frac{\pi^2}{\log\left(\frac{8}{\varepsilon}\right)},$$

δ sera infiniment petit, et l'on aura $q = e^{-\delta}$ avec une approximation suffisante. Ensuite

$$\frac{2\pi}{kK} = \frac{4\delta}{\pi},$$

et la masse $\Phi(u)$ comprise dans l'intervalle $(0, u)$ sera

$$\frac{4\delta}{\pi}\left(\frac{e^{-\frac{1}{2}\delta}}{1 + e^{-\delta}} + \frac{e^{-\frac{3}{2}\delta}}{1 + e^{-3\delta}} + \ldots + \frac{e^{-\frac{2n+1}{2}\delta}}{1 + e^{-(2n+1)\delta}}\right),$$

si l'on suppose que l'entier n est déterminé par la condition qu'on doit avoir sensiblement

$$u = \left[\frac{(2n+1)\pi}{2K}\right]^2,$$

en sorte que

$$(2n+1)\delta = \pi\sqrt{u}.$$

A la limite, ε et δ tendant vers zéro, on aura

$$\Phi(u) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi\sqrt{u}} \frac{e^{-\frac{1}{2}v}}{1+e^{-v}}\,dv,$$

$$d\Phi(u) = \frac{du}{\sqrt{u}\left(e^{\frac{1}{2}\pi\sqrt{u}} + e^{-\frac{1}{2}\pi\sqrt{u}}\right)},$$

$$F_1(z,1) = \int_0^\infty \frac{z\,d\Phi(u)}{z^2+u} = \int_0^\infty \frac{z\,du}{z^2+u^2}\left(\frac{2}{e^{\frac{1}{2}\pi u} + e^{-\frac{1}{2}\pi u}}\right).$$

Remarquons que, dans le cas $k=1$, les fractions continues pour $F_3(z,k)$, $F_4(z,k)$, qui sont de la forme (I^d), se ramènent facilement à la forme (I^a) ou (I), et l'on reconnaît alors qu'elles sont encore convergentes dans ce cas.

86. Je vais donner maintenant la fraction continue dans quelques cas où les moments c_n s'expriment très simplement par les polynomes de Bernoulli, définis par la relation

$$\frac{e^{\lambda z}-1}{e^z-1} - \frac{1}{2} = \varphi_0(\lambda) + \varphi_1(\lambda)z + \varphi_2(\lambda)\frac{z^2}{1.2} + \varphi_3(\lambda)\frac{z^3}{1.2.3} + \ldots,$$

en sorte que $\varphi_0(\lambda) = \lambda - \frac{1}{2}$. On supposera dans ce qui suit $0 < \lambda < 1$.

Considérons d'abord la série

$$-\frac{\varphi_1(\lambda)}{z^2} - \frac{\varphi_3(\lambda)}{z^4} - \frac{\varphi_5(\lambda)}{z^6} - \frac{\varphi_7(\lambda)}{z^8} - \ldots,$$

elle donne la fraction continue

$$\cfrac{b_0}{z^2 + \cfrac{b_1}{1 + \cfrac{b_2}{z^2 + \ldots}}},$$

où

$$b_0 = \frac{1}{2}\lambda(1-\lambda),$$

$$b_{2n-1} = \frac{n(n-\lambda)(n-1+\lambda)}{2(2n-1)},$$

$$b_{2n} = \frac{n(n+\lambda)(n+1-\lambda)}{2(2n+1)},$$

ou bien

$$a_{2n} = \frac{1}{n}, \qquad a_{2n+1} = \frac{2(2n+1)}{(n+\lambda)(n+1-\lambda)}.$$

Comme on le voit, la fraction continue est convergente, et elle représente, tant que la partie réelle de z est positive, l'intégrale

$$4\sin^2(\lambda\pi)\int_0^\infty \frac{u\,du}{z^2+u^2}\left(\frac{e^{\pi u}+e^{-\pi u}}{e^{\pi u}-e^{-\pi u}}\right)\frac{1}{e^{2\pi u}+e^{-2\pi u}-2\cos(2\lambda\pi)},$$

qui s'exprime aussi par

$$\tfrac{1}{2}[\psi(z+\lambda)+\psi(z+1-\lambda)-\psi(z)-\psi(z+1)],$$

$\psi(z)$ étant la dérivée de $\log\Gamma(z)$.

Une autre expression de cette fraction est celle-ci

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{\lambda u}{2}\right)\operatorname{sh}\left[\frac{(1-\lambda)u}{2}\right]}{\operatorname{sh}\left(\frac{u}{2}\right)} e^{-zu}\,du,$$

où $\operatorname{sh} u = \dfrac{e^u - e^{-u}}{2}$.

On trouvera la démonstration de ces formules dans le *Quarterly Journal of Mathematics*, vol. XXIV, p. 370; 1890.

Pour $\lambda = \frac{1}{2}$, on retrouvera facilement la fraction continue qui nous a servi au n° 61.

Considérons en second lieu la série

$$\frac{\varphi_0(\lambda)}{z}+\frac{\varphi_2(\lambda)}{z^3}+\frac{\varphi_4(\lambda)}{z^5}+\frac{\varphi_6(\lambda)}{z^7}+\ldots;$$

elle donne la fraction continue

$$\cfrac{b_0}{z+\cfrac{b_1}{z+\cfrac{b_2}{z+\ldots}}},$$

où

$$b_0 = \lambda - \tfrac{1}{2}, \qquad b_n = \frac{n^2(n-1+2\lambda)(n+1-2\lambda)}{4(2n-1)(2n+1)}.$$

Les valeurs des a_{2n}, a_{2n+1} sont un peu compliquées, mais on voit encore facilement que les séries

$$\Sigma\, a_{2n}, \quad \Sigma\, a_{2n+1}$$

sont divergentes l'une et l'autre.

Tant que la partie réelle de z est positive, les réduites tendent vers

$$\int_0^\infty \frac{-2z\,du}{z^2+u^2}\left[\frac{\sin(2\lambda\pi)}{e^{2\pi u}+e^{-2\pi u}-2\cos(2\lambda\pi)}\right].$$

Cette limite s'exprime aussi par

$$\tfrac{1}{2}\psi(z+\lambda)-\tfrac{1}{2}\psi(z+1-\lambda)$$

et par l'intégrale

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\operatorname{sh}(\lambda-\frac{1}{2})\,u}{\operatorname{sh}\frac{1}{2}u}\, e^{-zu}\,du.$$

87. On obtient des formules analogues si l'on considère une nouvelle suite de polynomes, définis par la relation

$$\frac{2e^{\lambda z}}{e^z+1}=\chi_0(\lambda)+\chi_1(\lambda)\,z+\ldots+\chi_n(\lambda)\,\frac{z^n}{1.2.3\ldots n}+\ldots.$$

La série

$$\frac{\chi_0(\lambda)}{z}+\frac{\chi_2(\lambda)}{z^3}+\frac{\chi_4(\lambda)}{z^5}+\ldots$$

donne la fraction continue

$$\cfrac{b_0}{z+\cfrac{b_1}{z+\cfrac{b_2}{z+\ldots}}},$$

où

$$b_0=1, \qquad b_{2n}=n^2, \qquad b_{2n+1}=(n+\lambda)(n+1-\lambda).$$

La fraction continue est convergente, et, puisque

$$b_{2n+1}=n(n+1)+\lambda(1-\lambda),$$

on voit que $(-1)^n\chi_{2n}(\lambda)$ est un polynome du degré n à coefficients entiers et positifs en $\lambda(1-\lambda)$. Ainsi, ce polynome est constamment positif et croissant de $\lambda=0$ à $\lambda=\frac{1}{2}$.

La limite de la fraction continue s'exprime ainsi

$$4\sin(\lambda\pi)\int_0^\infty \frac{z\,du}{z^2+u^2}\left[\frac{e^{\pi u}+e^{-\pi u}}{(e^{\pi u}+e^{-\pi u})^2-4\cos^2(\lambda\pi)}\right],$$

ou encore

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{ch}(\lambda-\frac{1}{2})\,u}{\operatorname{ch}\frac{1}{2}u}\,e^{-zu}\,du = \tfrac{1}{2}\left[\psi\left(\frac{z+1+\lambda}{2}\right)+\psi\left(\frac{z+2-\lambda}{2}\right)\right.$$
$$\left.-\psi\left(\frac{z+\lambda}{2}\right)-\psi\left(\frac{z+1-\lambda}{2}\right)\right].$$

Nous avons posé ici

$$\operatorname{ch}(u)=\cos(iu)=\frac{e^u+e^{-u}}{2}.$$

La série

$$\frac{\chi_1(\lambda)}{z^2}+\frac{\chi_3(\lambda)}{z^4}+\frac{\chi_5(\lambda)}{z^6}+\ldots$$

enfin donne la fraction continue

$$\cfrac{\lambda_0}{z^2+\alpha_1-\cfrac{\lambda_1}{z^2+\alpha_2-\cfrac{\lambda_2}{z^2+\alpha_3-\ldots}}},$$

où

$$\lambda_0=\lambda-\tfrac{1}{2},$$
$$\lambda_n=n^2\left(\frac{2n-1}{2}+\lambda\right)\left(\frac{2n+1}{2}-\lambda\right),$$
$$\alpha_n=\lambda-\lambda^2+\tfrac{1}{2}(2n-1)^2.$$

La limite de la fraction continue s'exprime par

$$-4\cos(\lambda\pi)\int_0^\infty \frac{u\,du}{z^2+u^2}\left[\frac{e^{\pi u}-e^{-\pi u}}{(e^{\pi u}+e^{-\pi u})^2-4\cos^2(\lambda\pi)}\right],$$

ou encore par

$$\int_0 \frac{\operatorname{sh}(\lambda-\frac{1}{2})\,u}{\operatorname{ch}\frac{1}{2}u}\,e^{-zu}\,du = \tfrac{1}{2}\left[\psi\left(\frac{z+\lambda}{2}\right)+\psi\left(\frac{z+2-\lambda}{2}\right)\right.$$
$$\left.-\psi\left(\frac{z+1-\lambda}{2}\right)-\psi\left(\frac{z+1+\lambda}{2}\right)\right],$$

on a

$$\chi_{2n-1}(\lambda) = \frac{1}{2n}\frac{d}{d\lambda}[\chi_{2n}(\lambda)];$$

par conséquent $(-1)^n\chi_{2n-1}(\lambda)$ est positif dans l'intervalle $(0, \frac{1}{2})$, négatif dans l'intervalle $(\frac{1}{2}, 1)$.

88. On connaît le rôle que les polynomes de Bernoulli jouent dans la théorie de la formule sommatoire d'Euler et de Maclaurin. Les polynomes $\chi_n(\lambda)$ jouent un rôle analogue dans la formule de Boole (*Treatise on differential equations*, Chap. VI, p. 13; 1859):

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) = {} & \frac{2(2^2-1)B_1}{1.2}[f'(x+h)+f'(x)]h \\ & - \frac{2(2^4-1)B_2}{1.2.3.4}[f'''(x+h)+f'''(x)]h^3 \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + (-1)^{n-1}\frac{2(2^{2n}-1)B_n}{1.2.3\ldots(2n)}[f^{(2n-1)}(x+h)+f^{(2n-1)}(x)]h^{2n-1} \\ & + \mathfrak{R}_n, \end{aligned}$$

$$\mathfrak{R}_n = \frac{h^{2n+1}}{1.2.3\ldots(2n)}\int_0^1 \chi_{2n}(u) f^{(2n+1)}(x+hu)\,du,$$

$$\mathfrak{R}_n = \frac{(-1)^n h^{2n+1}}{1.2.3\ldots(2n+2)} 4(2^{2n+2}-1)B_{n+1} f^{(2n+1)}(x+\xi h), \quad 0<\xi<1.$$

NOTE.

1. Nous avons vu (n^{os} 68-70) que, lorsque la série

$$b_1 + b_2 + b_3 + \ldots$$

est convergente, la fonction $F(z)$ est égale au quotient de deux fonctions entières de $t = 1 : z$.

Nous nous proposons actuellement de trouver tous les cas dans lesquels $F(z)$ est une fonction de t qui est méromorphe dans tout le plan.

Puisque

$$F(z) = \int_0^\infty \frac{d\Phi(u)}{z + u} = \int_0^\infty \frac{t\, d\Phi(u)}{1 + ut},$$

il est clair que, pour cela, il faut et il suffit que la distribution de masse représentée par $\Phi(u)$ se réduise à une concentration de masses

$$(m_i, \xi_i) \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots)$$

en des points

$$\xi_1 > \xi_2 > \xi_3 > \xi_4 > \ldots > \lim \xi_n = 0,$$

se rapprochant indéfiniment de l'origine, à laquelle peut s'ajouter encore une masse finie C placée à l'origine. Les m_i sont seulement assujettis à la condition que la série

$$\sum_1^\infty m_i$$

doit être convergente.

Nous avons remarqué (n^o 48) que, lorsqu'un intervalle (a, b) ne contient point de masse dans la distribution représentée par $\Phi(u)$, l'équation

$$Q_{2n}(-z) = 0$$

ne peut jamais avoir deux racines dans cet intervalle : le nombre des racines dans cet intervalle ne peut être que 0 ou 1. Il s'ensuit que, dans le cas actuel, le nombre des racines plus grandes qu'un nombre quelconque positif l reste toujours fini et ne peut pas surpasser le nombre fini des nombres

$$\xi_1, \quad \xi_2, \quad \xi_3, \quad \ldots$$

qui surpassent l.

2. Avant d'aller plus loin, faisons quelques remarques sur la manière dont se comportent les racines

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad \ldots, \quad x_n$$

de l'équation

$$Q_{2n}(-z) = 0,$$

et cela dans le cas général. Nous supposons ces racines rangées par ordre de grandeur décroissante : x_1 sera la plus grande racine, et x_1, x_2, ... croissent avec n.

Il peut arriver que x_1 croît au delà de toute limite, mais alors $x_2, x_3, \ldots, x_k$ croissent aussi au delà de toute limite nécessairement.

En effet, supposons d'abord

$$\lim x_1 = \infty, \qquad \lim x_2 = \lambda,$$

λ étant un nombre fini. Il est clair d'abord que la masse M_1 correspondant à la racine x_1 tendra vers zéro, car

$$M_1 x_1 < c_1.$$

D'autre part, x_2, x_3, ... restent toujours inférieurs à λ : on aurait donc

$$\varphi_n(\lambda) = \frac{1}{a_1} - M_1$$

et

$$\lim \varphi_n(\lambda) = \Phi(\lambda) = \frac{1}{a_1}.$$

La fonction $\Phi(u)$ serait donc constante dans tout l'intervalle (λ, ∞), mais alors aucune racine de

$$Q_{2n}(-z) = 0$$

ne peut être plus grande que λ. Cette contradiction montre qu'il n'est pas possible que x_1 seule croisse au delà de toute limite. Et, de la même façon, on verra qu'il est impossible qu'un nombre fini de racines croisse au delà de toute limite, en sorte qu'on aurait

$$\lim x_1 = \lim x_2 = \ldots = \lim x_k = \infty.$$
$$\lim x_{k+1} = \lambda.$$

Nous pouvons donc dire que le nombre des racines qui croissent au delà de toute limite ne peut être que 0 ou ∞.

Supposons maintenant

$$\lim x_1 = \lambda,$$

λ étant un nombre fini. Il peut arriver que x_1 soit la seule racine qui tende vers λ, en sorte que

$$\lim x_2 = \lambda' < \lambda.$$

Mais nous allons montrer que, lorsque

$$\lim x_2 = \lambda,$$

alors nécessairement x_3, x_4, x_5, ..., tendent aussi vers λ. Autrement, le nombre des racines qui tendent vers λ ne peut être que 1 ou ∞.

Supposons en effet

$$\lim x_1 = \lim x_2 = \ldots = \lim x_k = \lambda,$$
$$\lim x_{k+1} = \lambda' < \lambda.$$

On peut prendre d'abord n assez grand pour que les k plus grandes racines de

$$Q_{2n}(-z) = 0$$

soient toutes comprises entre λ' et λ. Ensuite on pourra prendre n' assez grand pour que les k plus grandes racines de

$$Q_{2n+2n'}(-z) = 0$$

soient comprises entre la plus grande racine de

$$Q_{2n}(-z) = 0$$

et λ. Mais il est clair qu'alors les k plus grandes racines de

$$Q_{2n}(-z) = 0$$

seraient toutes comprises dans l'intervalle de deux racines consécutives de

$$Q_{2n+2n'}(-z) = 0.$$

Or nous savons que cela est impossible, à moins qu'on n'ait $k = 1$.

Si x_1 est la seule racine qui tend vers λ, on aura

$$\lim x_2 = \lambda' < \lambda,$$

et l'on verra de la même façon que le nombre des racines qui tendent vers λ' ne peut être que 1 ou ∞. Dans le premier cas, on aura

$$\lim x_3 = \lambda'' < \lambda',$$

et l'on voit encore que le nombre des racines qui tendent vers λ'' ne peut être que 1 ou ∞, et ainsi de suite.

3. Revenons maintenant au cas du n° 1, c'est-à-dire supposons que la fonction $\Phi(u)$ affecte la forme particulière que nous avons indiquée. Nous allons montrer qu'on a alors nécessairement

$$\lim b_{2n-1} = \lim b_{2n} = 0.$$

Soit, en effet, ε un nombre positif aussi petit qu'on voudra. Parmi les nombres

$$\xi_1, \quad \xi_2, \quad \xi_3, \quad \ldots,$$

il y en a seulement un nombre fini k qui soient plus grands que ε. Parmi les racines de

$$Q_{2n}(-z) = 0,$$

$x_1, x_2, \ldots, x_k$ seules *peuvent* surpasser ε, mais x_{k+1} est certainement inférieur à $\xi_{k+1} < \varepsilon$. Ensuite ces racines $x_1, x_2, \ldots, x_k$ en nombre fini tendent certainement pour

$n = \infty$ vers des limites finies. Désignons maintenant par $x'_1, x'_2, \ldots, x'_{n+1}$ les racines de

$$Q_{2n+2}(-z) = 0,$$

on aura

$$x'_1 + x'_2 + \ldots + x'_{n+1} = b_1 + b_2 + \ldots + b_{2n+1},$$
$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n \quad = b_1 + b_2 + \ldots + b_{2n-1},$$

donc

$$\sum_1^k (x'_r - x_r) + \sum_{k+1}^n (x'_r - x_r) + x'_{n+1} = b_{2n} + b_{2n+1}.$$

Or, si l'on se rappelle que les racines x'_k sont séparées par les racines x_k, il est clair que

$$\sum_{k+1}^n (x'_r - x_r) + x'_{n+1} < \varepsilon,$$

car

$$\sum_{k+1}^n (x'_r - x_r) + \sum_{k+1}^n (x_r - x'_{r+1}) + x'_{n+1} = x'_{k+1} < \varepsilon,$$

et $x_r - x'_{r+1}$ est positif. D'autre part, la somme

$$\sum_1^k (x'_r - x_r)$$

peut être rendue aussi petite qu'on voudra, par exemple inférieure à ε, en prenant n suffisamment grand ; il vient donc

$$b_{2n} + b_{2n+1} < 2\varepsilon,$$

et les quantités b_n tendent vers zéro.

Ainsi, pour que la fonction $F(z)$ soit méromorphe en $t = \frac{1}{z}$, il faut certainement que b_n tende vers zéro.

4. Nous allons montrer maintenant que cette condition est aussi suffisante et que, toutes les fois qu'on a

$$\lim b_{2n-1} = \lim b_{2n} = 0,$$

$F(z)$ est bien méromorphe en z^{-1}.

Pour cela, nous allons faire voir d'abord que ces conditions entraînent cette conséquence :

Le nombre des racines de

$$Q_{2n}(-z) = 0,$$

qui surpasse un nombre positif quelconque l, ne croît pas au delà de toute limite, mais reste invariable dès que n surpasse une certaine limite.

Considérons la suite des fonctions

$$(\alpha) \qquad Q_0(z),\quad Q_2(z),\quad Q_4(z),\quad \ldots,\quad Q_{2n}(z),\quad \ldots,$$

il s'agit de faire voir que le nombre des racines d'une équation

$$Q_{2n}(z) = 0,$$

qui sont comprises entre $-l$ et $-\infty$, finit par être constant.

Or, ce nombre est égal au nombre des variations perdues, en posant, dans la suite,

$$Q_0(z),\quad Q_2(z),\quad \ldots,\quad Q_{2n}(z),$$

d'abord $z = -\infty$, ensuite $z = -l$. Mais, pour $z = -\infty$, on n'a que des variations; tout revient donc à montrer que, pour $z = -l$, la suite (α) n'a qu'un nombre fini de permanences, c'est-à-dire qu'on ne rencontre que des variations dès que n surpasse une certaine limite.

Pour cela, revenons à la relation entre trois fonctions consécutives; on peut l'écrire

$$b_{2n-1}\, Q_{2n}(z) = (z + b_{2n-2} + b_{2n-1})\, Q_{2n-2}(z) - b_{2n-2}\, Q_{2n-4}(z).$$

Posons

$$\lambda_n = -\frac{Q_{2n-2}(-l)}{Q_{2n}(-l)},$$

il viendra

$$\frac{1}{\lambda_n} + 1 = \frac{l - (1 + \lambda_{n-1})\, b_{2n-2}}{b_{2n-1}}.$$

D'après l'hypothèse, on a

$$\lim b_{2n-2} = \lim b_{2n-1} = 0;$$

donc, dès que n surpasse un certain nombre ν, on aura certainement

$$\frac{l - 2\, b_{2n-2}}{b_{2n-1}} > 2,$$

parce que le nombre positif l n'est pas nul. Nous supposerons maintenant $n > \nu$. On voit alors que si $\lambda_{n-1} \leqq 1$ certainement λ_n sera positif et compris entre 0 et 1, c'est-à-dire qu'on aura aussi $\lambda_n < 1$, et, par suite, tous les nombres

$$\lambda_n,\quad \lambda_{n+1},\quad \lambda_{n+2},\quad \ldots$$

seront *positifs*, plus petits que l'unité.

Mais supposons la valeur de λ_{n-1} quelconque et calculons la suite des quantités

$$\lambda_{n-1},\quad \lambda_n,\quad \lambda_{n+1},\quad \lambda_{n+2},\quad \ldots.$$

Nous distinguons divers cas qui épuisent tous les cas possibles.

L'un des nombres λ_k est infini, $\lambda_m = \infty$, alors $\lambda_{m+1} = 0 < 1$, et, par conséquent, *tous* les nombres

$$\lambda_{m+2},\quad \lambda_{m+3},\quad \lambda_{m+4},\quad \ldots$$

sont *positifs*, plus petits que l'unité.

Si aucun des nombres λ_k n'est infini, ils seront tous finis, et ils seront :

Ou bien tous > 1; alors il est évident qu'ils sont aussi tous positifs.

Ou bien on en trouvera un $\lambda_m \leqq 1$, et alors nous avons vu que

$$\lambda_{m+1}, \quad \lambda_{m+2}, \quad \lambda_{m+3}, \quad \ldots$$

sont tous *positifs*, plus petits que l'unité.

Ainsi, dans tous les cas, les nombres λ_k sont constamment *positifs* dès que k surpasse une certaine limite. Il est évident, d'après ce qui précède, que nous avons établi ainsi la proposition que le nombre des racines de

$$Q_{2n}(-z) = 0,$$

qui surpassent un nombre positif quelconque l, ne croît pas au delà de toute limite, mais reste invariable dès que n surpasse une certaine limite.

5. Il est facile maintenant d'achever la démonstration. La racine x_1 tendra vers une limite finie ξ_1, et c'est la seule racine qui tend vers cette limite, car le nombre des racines qui tendent vers ξ_1 est 1 ou ∞, mais il ne peut être ∞, parce que nous savons que le nombre des racines qui surpasse un nombre l est fini. Ensuite x_2 tendra vers une limite $\xi_2 < \xi_1$, et ce sera la seule limite qui tend vers ξ_2, et ainsi de suite. Généralement, on a

$$\lim x_k = \xi_k$$

et

$$\xi_k > \xi_{k+1}.$$

La masse M_1 correspondante à x_1 tendra vers une limite $m_1 \geqq 0$ en diminuant toujours, mais il est facile de voir qu'on ne peut pas avoir $m_1 = 0$.

En effet, on voit facilement que, dans ce cas, la fonction $\Phi(u)$ serait constante à partir de $u = \xi_2 < \xi_1$, mais alors aucune racine ne surpasserait ξ_2, et la racine qui tend vers ξ_1 n'existerait pas. De même, la masse M_2 correspondante à x_2 tendra vers une limite m_2 qui n'est pas nulle. En effet, nous savons que $M_1 + M_2$ diminue toujours; cette somme tend donc vers une limite, et il en est donc de même de M_2. On ne peut pas avoir $m_2 = 0$, car, alors, il est aisé de voir que la fonction $\Phi(u)$ serait constante dans tout l'intervalle (ξ_3, ξ_1), et cet intervalle ne pourrait pas renfermer les deux racines x_1 et x_2 qui tendent respectivement vers ξ_1 et ξ_2, et ainsi de suite.

Il est clair que $\varphi_n(u)$ tend toujours vers une limite finie pour $n = \infty$ et cette limite est dès lors $= \Phi(u)$. Et cette fonction $\Phi(u)$ affecte bien la forme particulière indiquée plus haut (n° 1), en sorte que $F\left(\frac{1}{t}\right)$ est une fonction méromorphe de t.

Ainsi, pour que $F\left(\frac{1}{z}\right)$ soit une fonction méromorphe dans tout le plan, il faut et il suffit qu'on ait

$$\lim b_{2n-1} = \lim b_{2n} = 0.$$