ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

MICHÈLE PELLETIER

Éclatements quasi homogènes

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 6^e série, tome 4, n° 4 (1995), p. 879-937

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1995_6_4_4_879_0>

© Université Paul Sabatier, 1995, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (http://picard.ups-tlse.fr/~annales/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse Vol. IV, n° 4, 1995

Éclatements quasi homogènes(*)

MICHÈLE PELLETIER(1)

RÉSUMÉ. — Utilisant des propriétés de quasi-homogénéité, nous définissons un algorithme de désingularisation de germes C^∞ du plan à singularité algébriquement isolée. On associe au germe un polygone de Newton qui permet de choisir le type de quasi-homogénéité à chaque pas de l'algorithme et donne un majorant du nombre d'éclatements à effectuer. Le nombre d'opérations, éclatements ou changements de coordonnées, est majoré par une fonction simple de la codimension du germe.

ABSTRACT. — We consider C^∞ germs of the plane whose singularities are algebraically isolated. We define here an algorithm of desingularization using quasi-homogeneity. To each germ we associate a Newton polygona which allows us to choose quasi-homogeneity type at each step of the algorithm. The number of blowing-ups can be bounded above using the Newton polygona. The number of elementary operations, blowing-ups or change of coordinates, can be bounded by a function of the codimension of the germ.

0. Introduction

Soit X un germe singulier de classe $\mathcal{C}^\infty$. Nous noterons P et Q ses composantes dans des coordonnées (x, y).

Si au moins une des valeurs propres, $(\partial P/\partial x)(0,0)$ ou $(\partial Q/\partial y)(0,0)$ n'est pas nulle, la singularité est élémentaire et on sait déterminer le portrait de phases du germe. Dans le cas contraire, la singularité est non élémentaire et on désingularise le germe.

Le premier théorème de désingularisation est dû à Seidenberg [S].

(*) Reçu le 6 octobre 1993

(1) Université de Bourgogne, Laboratoire de topologie, U.R.A. 755 du C.N.R.S., Faculté Mirande, B.P. 138, F-21004 Dijon (France)

Van den Essen [VE] a montré que, si $X = P(\partial/\partial x)+Q(\partial/\partial y)$, où P et Q sont des séries formelles d'ordre au moins 2 sur un corps algébriquement clos de caractéristique nulle, après un nombre fini d'éclatements homogèmes, on est ramené à un germe d'ordre au plus 1.

L'étude de la désingularisation par des éclatements homogènes d'un germe holomorphe sur $\mathbb{C}^2$ est faite dans [MM], avec des résultats sur les valeurs propres du germe désingularisé.

Ces deux articles utilisent la notion de multiplicité d'intersection de courbes analytiques.

Éclatements réels et complexes

L'éclatement homogène est de la forme :

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\xrightarrow[E]{} \mathbb{R}^2 \\ (r,\theta) &\longmapsto (r\cos\theta\,,\, r\sin\theta)\,. \end{aligned}$$

Le diviseur exceptionnel est le cercle $(r = 0)$.

Soit $\widetilde{\widetilde{X}}$ le champ tel que $X = E^*(\widetilde{\widetilde{X}})$. Soit ν l'ordre du jet de X. $\widetilde{\widetilde{X}}$ contient r^ν en facteur. Si X est dicritique, $\widetilde{\widetilde{X}}$ contient $r^{\nu+1}$ en facteur.

Le germe $(1/r^\nu)\widetilde{\widetilde{X}}$ admet alors des arcs de singularités élémentaires, et éventuellement des singularités non élémentaires $(0,\theta_1)$ (fig. 0 a)).

Le germe $(1/r^{\nu+1})\widetilde{\widetilde{X}}$ admet les mêmes singularités non élémentaires, et est transverse à des arcs du diviseur exceptionnel (fig. 0 b)).

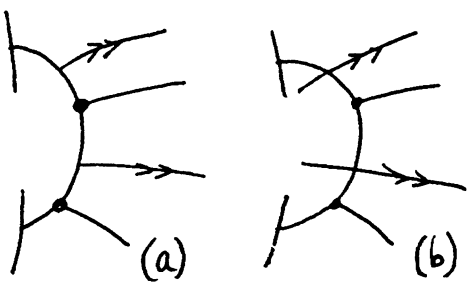


Fig 0

Dans le cas dicritique, on peut convenir que l'éclaté du germe X est $(1/r^{\nu})\widetilde{\widetilde{X}}$ ou $(1/r^{\nu+1})\widetilde{\widetilde{X}}$. *Nous parlerons d'éclatement réel dans le premier cas, et d'éclatement complexe dans le deuxième.* Dans les articles précédemment cités, on utilise les éclatements complexes dans un cadre général.

Dans [D], la désingularisation de germes $\mathcal{C}^{\infty}$ par des éclatements réels utilise la notion d'équivalence topologique. Rappelons que si un germe X est à singularité algébriquement isolée, il vérifie une inégalité de Lojasiewicz

$$\exists\, \ell \in \mathbb{N}\,,\ \exists\, c > 0\,,\ \exists\, \delta > 0 \text{ t.q. } \|x\| < \delta \Rightarrow \big\|X(x)\big\| \geq c\big\|x\big\|^{\ell}\,.$$

Quasi-homogénéité

Brunella [B] introduit la quasi-homogénéité pour désingulariser un germe $\mathcal{C}^{\infty}$ à singularité algébriquement isolée à deux variables réelles : on lui associe un polygone de Newton. Par des éclatements quasi homogènes, on construit une variété dans laquelle le germe n'a que des singularités élémentaires, sous certaines conditions de non-dégénérescence.

Nous définissons ici un algorithme de désingularisation par des éclatements réels et quasi homogènes : choisissons un type de quasi-homogénéité (α, β), où α et β sont des entiers strictement positifs premiers entre eux. Soit $(X, 0)$ germe singulier en l'origine des coordonnées : à chaque monôme du jet de X, on associe un point du plan des exposants de coordonnées (r, s), et un degré de quasi-homogénéité dans le type de quasi-homogénéité (α, β) : si δ est ce degré, $\delta = \alpha r + \beta s$.

Il se peut qu'il y ait un seul monôme de quasi-degré minimum. Sinon l'enveloppe convexe des points associés aux monômes de quasi-degré minimum est un segment. La réunion de ces segments pour tous les types de quasi-homogénéité est le polygone de Newton associé à X dans les coordonnées (x, y).

Nous utiliserons le polygone de Newton pour choisir le type de quasi-homogénéité. L'éclatement de type (α, β) est de la forme :

$$(r, \theta) \overset{\mathcal{E}_{\alpha,\beta}}{\longmapsto} (r^{\alpha} \cos\theta\,,\ r^{\beta} \sin\theta)\,.$$

Le quasi-degré minimum dans le type (α, β) sera noté d. Le diviseur exceptionnel est le cercle $(r = 0)$. Puisque nous choisissons les éclatements réels, nous définirons l'éclaté de X, noté $\widetilde{X}$ comme égal à $(1/r^{\nu})\widetilde{\widetilde{X}}$, avec toujours $X = \mathcal{E}^{*}_{\alpha,\beta}(\widetilde{\widetilde{X}})$.

Nous dirons qu'un germe est désingularisé après un nombre fini d'éclatements si on obtient un champ dont les singularités éventuelles sont élémentaires, ou sont des arcs de singularités normalement hyperboliques.

Nous rappelons que, si P et Q sont les composantes de X, on définit la codimension de X comme étant celle de l'idéal engendré par P et Q dans l'idéal maximal engendré par x et y :

$$\operatorname{codim} X = \dim \left(\frac{(x,y)}{(P,Q)} \right) .$$

Cette codimension sera notée ρ.

Plan du travail

Dans une première section, nous définissons les éclatements quasi homogènes polaire et directionnel, en établissant leur équivalence. Nous définissons la notion de côté utile du polygone de Newton. Ces côtés sont numérotés de 1 à n. Le type de quasi-homogénéité de l'éclatement sera toujours celui du premier côté utile. Ceci nous permet de n'utiliser que des éclatements dans la direction $(0x)$. Dans cette section, nous étudions les singularités de l'éclaté.

Dans la deuxième section, nous définissons l'algorithme : les opérations élémentaires sont des éclatements quasi homogènes; on utilise aussi des translations et des changements de coordonnées, dits *changements de coordonnées admissibles.*

Un changement de coordonnées admissible élémentaire est une application de la forme :

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x,y) \longmapsto (x\ ,\ y + \lambda x^{\beta}) .$$

C'est un difféomorphisme d'ordre 0 dans le type de quasi-homogénéité $(1,\beta)$ [AGV].

Nous définissons la *multiplicité* d'une singularité autre que l'origine d'un éclaté d'un germe, et la *multiplicité totale* associée au germe. Nous montrons que cette multiplicité décroît strictement en un sens que nous préciserons.

Dans la troisième section, nous donnons des résultats sur le nombre maximal d'opérations élémentaires à effectuer pour désingulariser X : dans les théorèmes 1 et 2, ce nombre est estimé en fonction du polygone de Newton.

THÉORÈME 1. — *Soit γ un côté de type de quasi-homogénéité (α, β). Sa hauteur est le nombre, noté h_γ, défini par :*

$$h_\gamma = \frac{S - s}{\alpha},$$

où s et S désignent les ordonnées minimale et maximale respectivement des points de γ.

Soit H la somme des hauteurs des côtés utiles du polygone de Newton.

THÉORÈME 2. — *Soit N un majorant du nombre d'éclatements nécessaires pour désingulariser X :*

$$N \leq 2H\,.$$

THÉORÈME 3. — *Le nombre d'éclatements nécessaires pour désingulariser un germe de codimension ρ est majoré par $4 + 2\sqrt{\rho}$.*

L'algorithme comprend aussi des changements de coordonnées, composés d'un nombre fini de changements de coordonnées élémentaires. Nous définissons la notion de *forme normale admissible*, ce qui nous permet de montrer le théorème suivant.

THÉORÈME 4. — *Soit K un majorant du nombre de changements de coordonnées admissibles élémentaires effectués au cours de l'algorithme :*

$$K \leq \frac{\rho}{3}.$$

Questions ouvertes

Dans [DR], on conjecture qu'une famille analytique $\{X_\lambda\}$ de germes analytiques de S^2 est de cyclicité finie. Pour démontrer ce résultat, on propose d'utiliser des éclatements à poids, c'est-à-dire quasi homogènes. Il reste à étudier si un nombre fini de tels éclatements désingularise une telle famille.

1. Éclatements quasi homogènes

1.1 Quasi-homogénéité

1.1.1 Plan des exposants

DÉFINITIONS . — *Soit X un germe $\mathcal{C}^\infty$ singulier en un point qu'on prendra comme origine des coordonnées. Nous noterons P et Q ses composantes.*

À chaque monôme du jet de X dans les coordonnées (x, y), on associe le point à coordonnées entières (r, s) si le monôme s'écrit :

$$ax^{r+1}y^s\frac{\partial}{\partial x},\ a \neq 0 \quad ou \quad bx^r y^{s+1}\frac{\partial}{\partial y},\ b \neq 0,$$

$r \geq -1$, $s \geq -1$. Les points (r, s) seront dits associés au germe X dans les coordonnées (x, y).

Bien que cette application ne soit pas une bijection, on parlera de monômes associés au point (r, s).

Si $r = -1$, le monôme éventuel associé au point $(-1, s)$ est de la forme

$$ay^s\frac{\partial}{\partial x}, \quad s \geq 0,\ a \neq 0.$$

De même, si $s = -1$, le monôme éventuel associé à $(r, -1)$ est de la forme

$$bx^r\frac{\partial}{\partial y}, \quad b \neq 0,\ r \geq 0.$$

L'origine est associée au monôme $ax\,\partial/\partial x$ ou $by\,\partial/\partial y$; elle n'est donc associée à X que si l'origine des coordonnées est singularité élémentaire de X, propriété indépendante des coordonnées.

Dorénavant, nous supposerons que l'origine est singularité non élémentaire.

PROPRIÉTÉ . — *À tout germe à singularité algébriquement isolée est associé au moins un point du plan des exposants d'abscisse 0 ou -1, et au moins un point du plan des exposants d'ordonnée 0 ou -1.*

Preuve. — Le point (r, s), s'il est effectivement associé au germe, est associé à un monôme en $x^{r+1}y^s(\partial/\partial x)$ ou $x^r y^{s+1}(\partial/\partial y)$. Ce monôme contient xy en facteur si $r \geq 1$ et $s \geq 1$. Or un germe à singularité algébriquement isolée ne peut avoir un jet identiquement nul si on le restreint à $(x = 0)$. Dans tout système de coordonnées, le jet de X contient un terme en $y^{s+1}(\partial/\partial y)$, ou $y^s(\partial/\partial x)$: il lui est associé le point $(0, s)$ dans le premier cas, $(-1, s)$ dans le second. Ceci montre la première propriété. La deuxième se montre de la même façon.

1.1.2 Degré de quasi-homogénéité

DÉFINITION 1. — *On appellera type de quasi-homogénéité un couple (α, β) d'entiers strictement positifs, premiers entre eux.*

Soit alors :

$$f_t : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x, y) \longmapsto (t^\alpha x\,,\, t^\beta y)\,,$$

f_t est un difféomorphisme algébrique, si $t \in \mathbb{R}^*$:

$$f_t^* \left(t^{\alpha r+\beta s} x^{r+1} y^s \frac{\partial}{\partial x} \right) = x^{r+1} y^s \frac{\partial}{\partial x}$$

et

$$f_t^* \left(t^{\alpha r+\beta s} x^r y^{s+1} \frac{\partial}{\partial y} \right) = x^r y^{s+1} \frac{\partial}{\partial y}\,.$$

DÉFINITION 2. — *$\alpha r + \beta s$ sera dit degré de quasi-homogénéité des monômes :*

$$a x^{r+1} y^s \frac{\partial}{\partial x} \quad \textit{et} \quad b x^r y^{s+1} \frac{\partial}{\partial y}$$

On parlera aussi de quasi-degré de type (α, β).

Un germe est quasi homogène si tous ses monômes ont même quasi-degré pour un certain type (α, β).

PROPRIÉTÉ . — *Les points du plan des exposants associés aux monômes de quasi-degré fixé dans un type de quasi-homogénéité fixé sont sur un segment.*

Le quasi-degré est positif ou nul.

Preuve. — Soit δ un quasi-degré fixé dans le type de quasi-homogénéité (α, β). Les points (r, s) associés aux monômes de quasi-degré δ vérifient :

$$\alpha r + \beta s = \delta .$$

Ils sont donc sur une droite du plan des exposants.

Comme α, β, r et s sont supérieurs à -1, ces points sont sur un segment.

Ni le point $(-1, 0)$, ni le point $(0, -1)$ ne sont associés aux monômes de X, puisque X est singulier. Ceci entraîne que δ est positif ou nul.

COROLLAIRE . — *L'enveloppe convexe des points du plan des exposants associés aux monômes de quasi-degré δ est un segment, éventuellement réduit à un point.*

DÉFINITION 3. — *La réunion de tous les segments enveloppes convexes des points associés aux monômes de quasi-degré minimaux, pour tous les types de quasi-homogénéité (α, β) est le polygone de Newton associé à X dans les coordonnées (x, y).*

Remarque. — Avec cette définition, aucun segment du polygone de Newton n'est parallèle à un des axes $(0r)$ ou $(0s)$.

Exemple. — Soit

$$X = (y^5 + xy^6)\frac{\partial}{\partial x} + (y^4 + x^3y^2 + x^8 + x^4y^2)\frac{\partial}{\partial y} .$$

Les points associés sont $(-1, 5)$, $(0, 6)$, $(0, 3)$, $(3, 1)$, $(8, -1)$, $(4, 1)$. Son polygone de Newton comporte trois côtés.

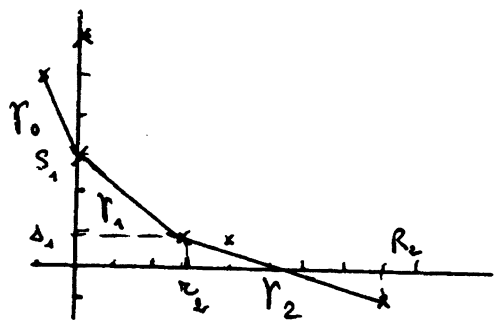


Fig. 1 Polygone de Newton à deux côtés utiles.

1.1.3 Notations

Notation. — Un quasi-degré de type (α, β) sera noté δ. Le quasi-degré minimal d'un type de quasi-homogénéité donné sera noté d.

Le polygone de Newton associé à X sera noté $\mathcal{P}$. Il peut comporter plusieurs côtés, notés γ_i, $i \geq 0$, numérotés de gauche à droite.

Si un côté est entièrement situé dans le demi-plan $r \leq 0$, il sera noté γ_0. Le côté γ_1 a donc toujours une extrémité d'abscisse strictement positive.

De même, si un côté est entièrement situé dans le demi-plan $s \leq 0$, il sera noté γ_{n+1}. Le côté γ_n a donc toujours une extrémité d'ordonnée strictement positive.

DÉFINITION . — *Les côtés $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ seront appelés côtés utiles de $\mathcal{P}$.*

Notations. — Les sommets de $\mathcal{P}$ seront indicés par leur ordonnée. Les ordonnées des points de γ_i sont comprises entre un minimum s_i et un maximum S_i. Donc $s_{i-1} = S_i$. De même, les abscisses sont comprises entre r_i et R_i.

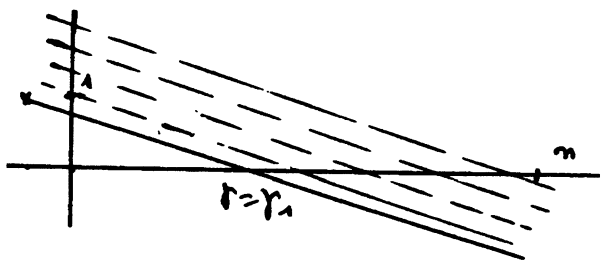


Fig. 2 Polygone de Newton associé à

$$y\frac{\partial}{\partial x} + \lambda_n x^n \frac{\partial}{\partial y}$$

et filtration dans le type $(2, n+1)$.

PROPRIÉTÉ . — *Si la singularité du germe est non élémentaire, $\mathcal{P}$ a au moins un côté utile.*

Preuve. — On a vu que la singularité est non élémentaire si et seulement si $0 \notin \mathcal{P}$.

L'exemple de la figure 1 a deux côtés utiles. L'exemple de la figure 2 a un côté utile.

Notations.— Le type de quasi-homogénéité d'un côté γ_i sera noté (α_i, β_i). Si γ_i est fixé, on peut filtrer les monômes par leur quasi-degré de type (α_i, β_i) (fig. 2). Pour plus de détails, voir [AGV]. Le jet formé de tous les monômes associés aux points de γ_i sera noté

$$X_{\gamma_i} = P_{\gamma_i}\frac{\partial}{\partial x} + Q_{\gamma_i}\frac{\partial}{\partial y}\,.$$

Il contient donc tous les monômes de quasi-degré minimal de ce type d_i.

Si (α_i, β_i) est fixé, le jet constitué des monômes de quasi-degré δ est

$$X_\delta = P_\delta\frac{\partial}{\partial x} + Q_\delta\frac{\partial}{\partial y}\,,$$

et X_{d_i} est alors égal à X_{γ_i}.

Si $\alpha_i = \beta_i = 1$, on retrouve la filtration usuelle. On remarquera que le degré du monôme au sens usuel diffère du degré d'homogénéité d'une unité. Si ν est l'ordre du jet,

$$X_{\nu-1} = P_{\nu-1}\frac{\partial}{\partial x} + Q_{\nu-1}\frac{\partial}{\partial y}$$

est le jet de degré minimal de X.

Le côté γ_1 sera aussi noté γ. Son type de quasi-homogénéité sera alors noté (α, β).

1.2 Éclatements quasi polaires

On utilise la quasi-homogénéité pour généraliser l'éclatement polaire usuel.

1.2.1 Définition

Un type (α, β) de quasi-homogénéité étant choisi, on définit :

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{\alpha,\beta} : \mathbb{R}\times S^1 &\longrightarrow \mathbb{R}^2\\ (r,\theta) &\longmapsto (r^\alpha\cos\theta\,,\, r^\beta\sin\theta)\,.\end{aligned}$$

C'est un difféomorphisme analytique, de $[\,0\,,+\infty[\,\times S^1$ sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. Cela revient à paramétriser le plan privé de l'origine par des courbes d'équation $x^\beta\sin^\alpha\theta = y^\alpha\cos^\beta\theta$, θ fixé. On établit alors la formule d'éclatement directionnel.

PROPOSITION 1. — *(α, β) est donné par un côté de P, il existe un champ $\widetilde{\widetilde{X}}$ tel que $X = \mathcal{E}^*_{\alpha,\beta}\widetilde{\widetilde{X}}$. Après division par r^d, on obtient le champ noté $\widetilde{X}$:*

$$\widetilde{X} = \sum_{\delta \geq d} \left(r^{\delta+1-d} R_\delta(\theta) \frac{\partial}{\partial r} + r^{\delta-d} T_\delta(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} \right),$$

où

$$R_\delta(\theta) = \cos\theta P_\delta(\cos\theta\,,\,\sin\theta) + \sin\theta Q_\delta(\cos\theta\,,\,\sin\theta)$$

$$T_\delta(\theta) = -\beta \sin\theta P_\delta(\cos\theta\,,\,\sin\theta) + \alpha \sin\theta Q_\delta(\cos\theta\,,\,\sin\theta)\,.$$

Preuve

a) Par le produit intérieur, on détermine la forme ω duale de X :

$$\omega = X \rfloor (\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y) = -Q\,\mathrm{d}x + P\,\mathrm{d}y\,.$$

b) On applique le changement de coordonnées à ω :

$$\det \mathcal{E}_{\alpha,\beta} = (\alpha \cos^2\theta + \beta \sin^2\theta) r^{\alpha+\beta-1}\,.$$

Par suite :

$$\mathcal{E}_{\alpha,\beta}{}^*\omega = \Big(-r^\alpha \alpha \cos\theta \big(Q \circ \mathcal{E}_{\alpha,\beta}\big) + \beta r^{\beta-1} \sin\theta \big(P \circ \mathcal{E}_{\alpha,\beta}\big)\Big)\,\mathrm{d}r + \\ + \Big(r^\alpha \sin\theta \big(Q \circ \mathcal{E}_{\alpha,\beta}\big) + r^\beta \cos\theta \big(P \circ \mathcal{E}_{\alpha,\beta}\big)\Big)\,\mathrm{d}\theta\,.$$

Or

$$P = \sum_{\delta \geq d} P_\delta \quad \text{et} \quad Q = \sum_{\delta \geq d} Q_\delta\,.$$

Par définition du quasi-degré,

$$\begin{cases} P_\delta(r^\alpha \cos\theta\,,\, r^\beta \sin\theta) = r^{\delta+\alpha} P_\delta(\cos\theta\,,\,\sin\theta) \\ Q_\delta(r^\alpha \cos\theta\,,\, r^\beta \sin\theta) = r^{\delta+\beta} Q_\delta(\cos\theta\,,\,\sin\theta)\,, \end{cases}$$

ce qui entraîne :

$$\mathcal{E}_{\alpha,\beta}{}^*\omega = \\ = \sum_{\delta \geq d} r^{\alpha+\beta+\delta-1} \big(\beta \sin\theta P_\delta(\cos\theta\,,\,\sin\theta) - \alpha \cos\theta Q_\delta(\cos\theta\,,\,\sin\theta)\big)\,\mathrm{d}r + \\ + \sum_{\delta \geq d} r^{\alpha+\beta+\delta} \big(\cos\theta P_\delta(\cos\theta\,,\,\sin\theta) + \sin\theta Q_\delta(\cos\theta\,,\,\sin\theta)\big)\,\mathrm{d}\theta$$

et on peut diviser cette forme par $r^{\alpha+\beta-1}$.

c) On utilise à nouveau la dualité :

$$\mathcal{E}_{\alpha,\beta}{}^{*}\omega = \tilde{\tilde{X}}\rfloor(\det \mathcal{E}_{\alpha,\beta})(\,\mathrm{d}r \wedge \mathrm{d}\theta)$$

a un sens d'après ce qui précède. On peut diviser $\tilde{\tilde{X}}$ par r^d, et on obtient le champ $\tilde{X}$.

Remarque. — On peut appliquer ceci à n'importe quel type de quasi-homogénéité, dès que le quasi-degré de tous les monômes du germe est positif. Nous l'utiliserons seulement pour le type donné par γ_1.

DÉFINITION . — *$\tilde{X}$ est l'éclaté de X.*

T_δ et R_δ sont les composantes quasi tangentielles et quasi radiales respectivement de X, de type (α, β), de quasi-degré δ. T_γ et R_γ sont celles de quasi-degré minimal, c'est-à-dire d.

1.2.2 Singularités de $\overline{X}$

PROPOSITION . — *Les singularités de $\tilde{X}$ sont des points $(0, \theta)$ du diviseur exceptionnel. En $(0, \theta_0)$, la valeur propre radiale est $R_d(\theta_0)$, la valeur propre tangentielle est $\partial T/\partial\theta\,(\theta_0)$.*

Preuve. — Ceci résulte de la forme de $\tilde{X}$.

COROLLAIRE . — *$(0, \theta_0)$ n'est une singularité non élémentaire de $\tilde{X}$ que si θ_0 est racine de $R_\gamma(\cos\theta\,, \sin\theta)$ et racine multiple de $T_\gamma(\cos\theta\,, \sin\theta)$.*

Preuve. — La valeur propre tangentielle en ce point est $\partial T/\partial\theta\,(\theta_0)$, et la valeur propre radiale est $R(\theta_0)$.

1.2.3 Application à la désingularisation

Ce résultat généralise un résultat de [B]. C'est une condition suffisante pour qu'un éclatement désingularise le germe X.

PROPOSITION . — *Si le polygone de Newton de X n'a qu'un côté, γ et si T_γ a des racines simples, on désingularise X en un éclatement de type de quasi-homogénéité donné par γ.*

Preuve. — Ceci découle du corollaire de la proposition 1.2.2.

Exemple. — Cas du germe nilpotent. Soit

$$X = y\frac{\partial}{\partial x} + \lambda_n x^n \frac{\partial}{\partial y} + \cdots, \qquad \lambda_n \neq 0,$$

où les termes non écrits sont de quasi-degré de type $(2, n+1)$ strictement supérieur à $d = n+1$ (voir fig. 2).

$$T_\gamma = -(n+1)\sin^2\theta + 2\lambda_n \cos^{n+1}\theta,$$
$$R_\gamma = \cos\theta \sin\theta(1 + \lambda_n \cos^{n-1}\theta,$$

T_γ et R_γ n'ont pas de racine commune : les singularités éventuelles sont élémentaires.

Remarques

1) Il suffit que X_γ soit à singularité algébriquement isolée (voir [B]).

2) Considérons un polygone de Newton P à un côté γ, de type de quasi-homogénéité (α, β). Soit $\mathcal{X}_\gamma$ l'ensemble des germes dont P est le polygone de Newton associé.

Dans $\mathcal{X}_\gamma$, la propriété " X_γ est à singularité algébriquement isolée " est une propriété générique.

Dans $\mathcal{X}_{\gamma,1}$, ensemble des éléments de $\mathcal{X}_\gamma$ pour lesquels X_γ n'est pas à singularité algébriquement isolée, la propriété " T_γ n'a que des racines simples " est générique.

Exemple de germe désingularisé en un éclatement bien que X_γ ne soit pas à singularité algébriquement isolée (fig. 3):

$$X = (x^3 + y^3)\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y^5\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

γ est de type $(1,1)$:

$$T_\gamma = (\cos^3\theta + \sin^3\theta)(-\cos\theta\sin\theta),$$

elle n'a que des racines simples :

$$R = (\cos^3\theta + \sin^2\theta) + r\sin^6\theta.$$

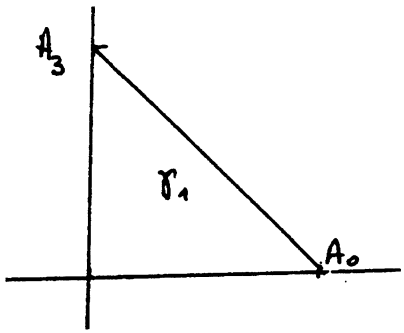


Fig. 3

3) Si le polygone de Newton a plus d'un côté utile, $\widetilde{X}$ a toujours au moins une singularité non élémentaire, et un éclatement ne suffit pas. En effet, suivant le type de quasi-homogénéité choisi, ou $(0,0)$, ou $(0,\pi/2)$ est une singularité non élémentaire de $\widetilde{X}$.

Exemple de germe qui ne peut pas être désingularisé en un éclatement (fig. 4):

$$X = x^2y^2(x-y)^2\frac{\partial}{\partial x} + x^{10}\frac{\partial}{\partial y} + y^{10}\frac{\partial}{\partial x}\,.$$

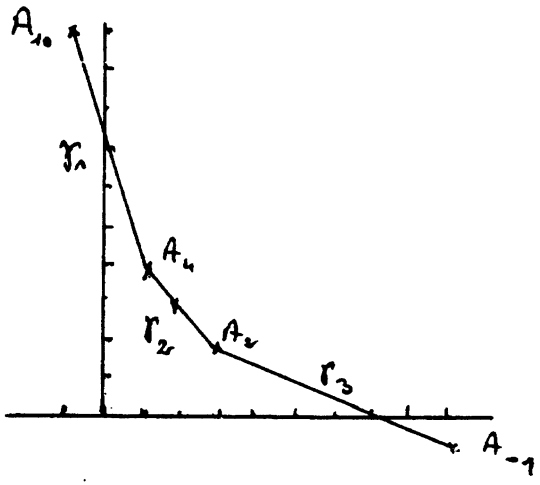


Fig. 4

Si on éclate suivant le type $(3,2)$, $(0,0)$ est singularité non élémentaire :

$$X_{\gamma_1} = y^4\left(y^6\frac{\partial}{\partial x} + x^2\frac{\partial}{\partial x}\right).$$

Si on choisit le type $(1,1)$,

$$X_{\gamma_2} = x^2y^2(x-y)^2\frac{\partial}{\partial x},$$

$(0,0)$, $(0,\pi/4)$ et $(0,\pi/2)$ sont des singularités non élémentaires.

Si on choisit le type $(3,7)$,

$$X_{\gamma_3} = x^4\left(y^2\frac{\partial}{\partial x} + x^6\frac{\partial}{\partial y}\right),$$

$(0,\pi/2)$ est non élémentaire.

Pour tous les autres éclatements, $(0,0)$ et $(0,\pi/2)$ sont non élémentaires. *Il faut donc pouvoir itérer les éclatements.*

1.3 Éclatement directionnel quasi homogène

Dans cette section, nous donnons la formule d'éclatement directionnel, dans la direction $(0x)$. Nous établissons l'équivalence entre les deux éclatements, quasi polaire et directionnel (prop. 1.3.4). Les propositions 1.3.5 et 1.3.6 donnent des propriétés de l'éclaté.

Il s'agit d'utiliser les cartes $x = 1$, $x = -1$, $y = 1$, $y = -1$, de $\mathbb{P}\mathbb{R}_1$. Mais nous verrons que seules les cartes $x = 1$ et $x = -1$ seront utiles (prop. 1.3.1).

1.3.1 Singularité $(0,\pi/2)$ de $\widetilde{X}$

PROPOSITION .— *Le point $(0,\pi/2)$ est une singularité de X_{γ_1} si et seulement si ce côté ne contient que des points d'abscisse positive. Elle est alors élémentaire.*

Preuve. — De

$$T_\gamma = -\beta\sin\theta P_\gamma(\cos\theta\,,\,\sin\theta) + \alpha\cos\theta Q_\gamma(\cos\theta\,,\,\sin\theta),$$

il découle que $(0,\pi/2)$ n'est une singularité que si $\cos\theta$ est en facteur dans $P_\gamma(\cos\theta\,,\,\sin\theta)$, c'est-à-dire si P_γ contient x en facteur; ceci entraîne que, dans le plan des exposants, γ est tout entier situé dans le demi-plan $r \geq 0$.

Supposons que ce soit le cas. Les monômes associés à A_S (S est l'ordonnée maximale des points de γ) sont

$$axy^S \frac{\partial}{\partial x} \quad \text{ou} \quad by^{S+1} \frac{\partial}{\partial y}.$$

De plus, $a^2 + b^2 \neq 0$ car A_S figure effectivement sur le polygone $\mathcal{P}$ de X, c'est-à-dire que :

$$\begin{cases} P_\gamma = axy^S + \cdots \\ Q_\gamma = by^{S+1} + \cdots \end{cases}$$

où les termes non écrits contiennent x^2 en facteur dans P_γ, x dans Q_γ. Par suite $T_\gamma = (-\beta a + \alpha b)\cos\theta \sin^{S+1}\theta + \cdots$, les autres termes contenant x^2 en facteur :

- si $\alpha b - \beta a \neq 0$, $\cos\theta = 0$ est racine simple de $T_\gamma = 0$;
- si $\alpha b - \beta a = 0$, $R_\gamma = b\sin^{S+2}\theta + \cdots$, les autres termes contenant $\cos\theta$ en facteur. Or $b \neq 0$, donc la valeur propre radiale est non nulle.

Dans les deux cas, la singularité est non élémentaire.

1.3.2 Application d'éclatement directionnel

DÉFINITION . — *Soit :*

$$E_{\alpha,\beta} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x, y) \longmapsto (x^\alpha , yx^\beta),$$

$E^{\alpha,\beta}$ est un difféomorphisme algébrique de $]0, +\infty[\times \mathbb{R}$, *sur* $]0, +\infty[\times \mathbb{R}$. *$E^{\alpha,\beta}$ est dite application d'éclatement quasi homogène de type (α, β) dans la direction $(0x)$.*

Dans la carte $(x = -1)$, l'application d'éclatement est

$$F_{\alpha,\beta} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x, y) \longmapsto (-x^\alpha , yx^\beta).$$

Remarque. — La composée de deux éclatements directionnels en est encore un. En effet,

$$E_{\alpha,\beta} \circ E_{\gamma,\delta} = E_{\alpha\gamma,\delta+\gamma\beta}.$$

1.3.3 Formule d'éclatement directionnel

PROPOSITION . — *Choisissons le type de quasi-homogénéité de* $\gamma_1 = \gamma$. *Il existe un champ* $\widetilde{\overline{X}} \mid E^*_{\alpha,\beta}(\widetilde{\overline{X}}) = X$; *après division par* x^d, *on obtient :*

$$\overline{X} = \sum_{\delta \geq d} x^{\delta+1-d} P_\delta(1,y) \frac{\partial}{\partial x} + \sum_{\delta \geq d} x^{\delta-d} \big(\alpha Q_\delta(1,y) - \beta y P_\delta(1,y)\big) \frac{\partial}{\partial y}.$$

La preuve est semblable à celle qui prouve l'existence et la forme de $\widetilde{X}$. Le déterminant de $E_{\alpha,\beta}$ est $\alpha x^{\alpha+\beta-1}$.

DÉFINITION . — $\overline{X}$ *est l'éclaté de* X *dans la direction* $(0x)$.

$$\sum_{\delta \geq d} x^{\delta-d} \big(\alpha Q_\delta(1,y) - \beta y P_\delta(1,y)\big) \frac{\partial}{\partial y} = T(x,y)$$

est appelée composante quasi tangentielle de X, *comme dans le cas de l'éclatement quasi polaire.*

Le polynôme $\alpha Q_\gamma(1,y) - \beta y P_\gamma(1,y)$ *sera noté* $T_\gamma(y)$.

Remarques

a) Le jet de X est filtré par les degrés de quasi-homogénéité de type (α, β).

b) En utilisant $F_{\alpha,\beta}$, on obtient le champ, noté $\overline{X}^g$:

$$\overline{X}^g = -\sum_{\delta \geq d} x^{\delta+1-d} P_\delta(-1,y) \frac{\partial}{\partial x} + \sum_{\delta \geq d} x^{\delta-d} \big(\alpha Q_\delta(-1,y) - \beta y P_\delta(-1,y)\big) \frac{\partial}{\partial y}.$$

1.3.4 Lien entre les deux éclatements

Soient

$$\mathcal{E}_{\alpha,\beta} : (\mathbb{R}^+ \times S^1) \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{et} \quad E_{\alpha,\beta} : (\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

de même type de quasi-homogénéité. Le diviseur exceptionnel de $\mathcal{E}_{\alpha,\beta}$ est S^1, paramétrisé par θ, et celui de $E_{\alpha,\beta}$ est D, paramétrisé par y.

PROPOSITION . — *Il existe un plongement analytique*

$$\begin{aligned} f : D &\longrightarrow S^1 \\ y &\longmapsto f(y) \end{aligned}$$

et une application positive analytique

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : D &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ y &\longmapsto \mathcal{F}(y)\,, \end{aligned}$$

telle que F définie par

$$\begin{aligned} F : (\mathbb{R}^+ \times D) &\longrightarrow (\mathbb{R}^+ \times S^1) \\ (x, y) &\longmapsto \big(\mathcal{F}(y)x\,,\, f(y)\big) \end{aligned}$$

vérifie $E = \mathcal{E} \circ F$.

Preuve. — Elle est similaire à celle de [DR].

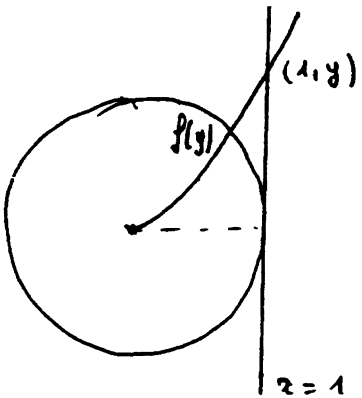


Fig. 5

$\mathcal{E}$ est un difféomorphisme analytique de $\mathbb{R}^{+*} \times S^1$ dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et admet donc un inverse analytique. En particulier, la restriction de cet inverse à D est notée $(\mathcal{F}, f)$. Un point $(1, y)$ de D est donc de la forme $\big(\mathcal{F}^\alpha(y) \cos f(y)\,,\, \mathcal{F}^\beta(y) \sin f(y)\big)$.

$E_{\alpha,\beta}$ étant également un difféomorphisme, tout point M du plan s'écrit (x^α, yx^β), et

$$\begin{cases} x^\alpha = x^\alpha \cdot 1 = \big(x\mathcal{F}\big)^\alpha \cos f(y) \\ yx^\beta = \big(x\mathcal{F}\big)^\beta \sin f(y)\,. \end{cases}$$

D'où $M = \mathcal{E} \circ F(x, y)$ avec F définie par $F(x, y) = \big(x\mathcal{F}(y)\,,\, f(y)\big)$, et $\mathcal{F}$ est analytique. Par définition, $\mathcal{F}$ est positive, ce qui achève la preuve.

1.3.5 Singularités de l'éclaté

Elles sont situées sur le diviseur exceptionnel.

PROPOSITION

a) Dans le cas non dicritique (T_γ non-identiquement nul), les singularités sont données par

$$\begin{cases} x = 0 \\ T_\gamma(y) = 0\,. \end{cases}$$

b) Dans le cas dicritique $T_\gamma = 0$, et on obtient des arcs de singularités.

c) Dans les deux cas, la singularité $(0, y_0)$ n'est non élémentaire que si y_0 annule $P_\gamma(1,y)$ et $Q_\gamma(1,y)$.

Preuve. — Si X est non dicritique :

$$\overline{X} = xP_\gamma(1,y)\frac{\partial}{\partial x} + \big(\alpha Q_\gamma(1,y) - \beta y P_\gamma(1,y)\big)\frac{\partial}{\partial y} + \cdots,$$

où x est en facteur dans les termes non écrits. Ceci prouve la propriété a).

La propriété b) découle de ce que, si X est dicritique,

$$\overline{X} = xP_\gamma(1,y) + \cdots,$$

où les termes non écrits contiennent x en facteur et $x = 0$ annule $\overline{X}$.

Dans les deux cas, $P_\gamma(1,y_0)$ est la valeur propre radiale, et $(0,y_0)$ n'est non élémentaire que si y_0 annule $P_\gamma(1,y)$. Si X n'est pas dicritique, y_0 annule

$$T_\gamma(y) = -\beta y P_\gamma(1,y) + \alpha Q_\gamma(1,y)$$

donc aussi $Q_\gamma(1,y)$.

Si X est dicritique,

$$\begin{cases} P_\gamma(1,y_0) = 0 \\ T_\gamma \equiv 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad P_\gamma(1,y_0) = Q_\gamma(1,y_0) = 0\,.$$

Ceci prouve la dernière propriété.

Remarque. — En une singularité $(0,y_0)$, la valeur propre tangentielle, dans le cas non dicritique, est $(\partial/\partial\theta)(T_\gamma)$. Elle n'est nulle en la singularité $(0,y_0)$ que si y_0 est racine multiple de T_γ.

1.3.6 Polygone de Newton de $(\overline{X},(0,0))$-glissement

PROPOSITION . — *Le point $(0,0)$ est une singularité de $\overline{X}$ si et seulement si l'ordonnée minimale de γ_1, s_1 est positive ou nulle.*

C'est une singularité non élémentaire si et seulement si $s_1 \geq 1$.

Dans le cas où $(0,0)$ est une singularité de $\overline{X}$, le polygone de Newton associé au germe $(X,0)$ est obtenu de la façon suivante à partir de celui de X :

- *les ordonnées des points sont conservées ;*
- *le côté γ_1 est envoyé sur un segment de $0s$;*
- *les côtés γ_i, $2 \leq i \leq n$ du polygone $\mathcal{P}$ deviennent ceux de $\mathcal{P}'$, associé à $(\overline{X},0)$, qui comporte donc $n-1$ côtés utiles.*

Preuve. — Comme dans la proposition 1.3.1, on montre que $(0,0)$ est une singularité de $\overline{X}$ si et seulement si $s_1 \geq 0$, et que si $s_1 = 0$ elle est élémentaire.

Si $s_1 \geq 1$, $Q_\gamma = Q_{\gamma_1}$ contient y^2 en facteur, et $P_\gamma = P_{\gamma_1}$ contient y en facteur. Donc T_γ contient y^2 en facteur. La valeur propre tangentielle en $(0,0)$ est nulle, ainsi que la valeur propre radiale : la singularité est non élémentaire.

Pour étudier le polygone de Newton associé au germe $(\overline{X}, (0,0))$, choisissons un point (r,s) associé à des monômes de X :

$$x^{r+1}y^s\frac{\partial}{\partial x} \quad \text{ou} \quad x^r y^{s+1}\frac{\partial}{\partial y}.$$

D'après les formules d'éclatement, $x^{r+1}y^s(\partial/\partial x)$ devient dans $\overline{X}$,

$$x^{\delta+1-d}y^s\frac{\partial}{\partial x} - \beta x^{\delta-d}y^{s+1}\frac{\partial}{\partial y},$$

et $x^r y^{s+1}(\partial/\partial y)$ devient :

$$\alpha x^{\delta-d}y^{s+1}\frac{\partial}{\partial y}.$$

Le point (r,s) est donc transformé en $(\delta-d,s)$, point de même ordonnée. On remarque qu'on a filtré les points du plan des exposants par leur degré de quasi-homogénéité dans le type de quasi-homogénéité (α,β).

Le côté γ est donc envoyé sur un segment de $(0s)$, car tous ses points sont associés aux monômes de quasi-degré minimal. Ce côté étant transverse aux autres côtés $\gamma_2, \ldots, \gamma_n, \gamma_{n+1}$, on obtient de cette façon un nouveau polygone. Le type de quasi-homogénéité du côté issu de γ_i est proportionnel à :

$$\left(\alpha_i, \begin{vmatrix} \alpha_1 \alpha_i \\ \beta_1 \beta_i \end{vmatrix}\right).$$

DÉFINITION .— *Nous appellerons glissement cette transformation qui à $\mathcal{P}$ fait correspondre le polygone $\mathcal{P}'$ associé au germe $(\overline{X}, 0)$. Nous dirons que $\mathcal{P}'$ est le glissé de $\mathcal{P}$ (fig. 6).*

Remarque.— $\mathcal{P}'$ n'a pas de point d'abscisse -1.

Les côtés de $\mathcal{P}$ sont : γ de type $(4,3)$, γ_2 de type $(2,3)$ et γ_3 de type $(1,2)$. Ceux de $\mathcal{P}'$ sont $\gamma' = \gamma'_1$ de type $(1,3)$ et γ'_2 de type $(1,5)$.

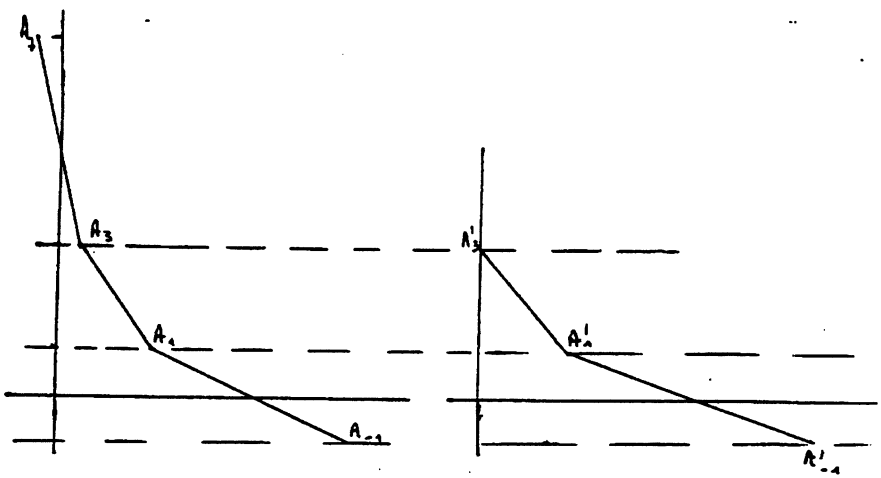


Fig. 6

2. Algorithme de désingularisation

2.1 Description de l'algorithme. Exemple

Nous allons décrire un algorithme utilisant les éclatements quasi homogènes, pour désingulariser un germe. Cet algorithme généralise celui de [D].

DÉFINITION .— *Une opération élémentaire est un éclatement quasi homogène dans la direction* $(0x)$.

En effet, la proposition 1.3.1 montre que les éclatements dans la direction $(0y)$ ne sont pas nécessaires pour désingulariser X.

On choisira toujours le type de quasi-homogénéité du premier côté utile γ *du polygone de Newton associé à* X. Nous rappelons que ce côté a une extrémité d'abscisse strictement positive.

La $k^{\text{ième}}$ opération élémentaire de l'algorithme transforme une collection de germes $\mathcal{C}_{k-1}$ en une collection $\mathcal{C}_k$ de la manière suivante : $\mathcal{C}_0 = \{X\}$. On choisit $X_i \in \mathcal{C}_{k-1}$, on lui applique une opération élémentaire. Si $\overline{X}_i$ n'a pas de singularité,

$$\mathcal{C}_k = \mathcal{C}_{k-1} \setminus \{X\}\,.$$

Si $\overline{X}_i$ a des singularités non élémentaires $(0, y_i)$, $1 \leq i \leq p$,

$$\mathcal{C}_k = (\mathcal{C}_{k-1} \setminus \{X\}) \cup \{Y_1, \ldots, Y_p\}\,,$$

où les germes Y_i, $1 \leq i \leq p$, sont les translatés de $\overline{X}_i$ en une de ses singularités non élémentaires.

Bien que l'éclatement soit directionnel, on représentera globalement les singularités des éléments de $\mathcal{C}$ (ex. fig. 12).

Si $\mathcal{C}_k = \emptyset$, X est désingularisé en k éclatements.

Remarques. — On effectue des éclatements, des translations et éventuellement des changements de coordonnées, qui seront étudiés plus loin (sect. 2.3).

Tous les germes sont éclatés quel que soit l'ordre dans lequel on les choisit. Nous verrons plus loin que ce choix n'est pas complètement arbitraire (§ 2.2.2).

2.1.1 Symétries

On peut utiliser des symétries, comme dans le cas des éclatements homogènes, pour réduire le nombre d'opérations élémentaires. D'après la définition d'un type de quasi-homogénéité (α, β), les nombres α et β ne sont pas pairs tous les deux. On peut utiliser un des diagrammes commutatifs suivants :

- si α est pair et β est impair,

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{E_{\alpha,\beta}} & \mathbb{R}^2 \\ (-x,y) & \longmapsto & (x^\alpha, -yx^\beta) \\ {\scriptstyle S_2}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle S_1} \\ (x,y) & \longmapsto & (x^\alpha, yx^\beta) \\ \mathbb{R}^2 & \xrightarrow[E_{\alpha,\beta}]{} & \mathbb{R}^2 \end{array}$$

- si α est impair et β est impair,

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{E_{\alpha,\beta}} & \mathbb{R}^2 \\ (-x,y) & \longmapsto & (-x^\alpha, -yx^\beta) \\ {\scriptstyle S_2}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle s} \\ (x,y) & \longmapsto & (x^\alpha, yx^\beta) \\ \mathbb{R}^2 & \xrightarrow[E_{\alpha,\beta}]{} & \mathbb{R}^2 \end{array}$$

- si α est impair et β est pair,

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{E_{\alpha,\beta}} & \mathbb{R}^2 \\ (-x,y) & \longmapsto & (-x^\alpha, yx^\beta) \\ {\scriptstyle S_2}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle S_2} \\ (x,y) & \longmapsto & (x^\alpha, yx^\beta) \\ \mathbb{R}^2 & \xrightarrow[E_{\alpha,\beta}]{} & \mathbb{R}^2 \end{array}$$

où s désigne la symétrie de centre l'origine, S_1 la symétrie d'axe $(0x)$ et S_2 la symétrie d'axe $(0y)$.

2.1.2 Exemple

$$X = y^4(y^4 - x)(y^4 - 2x)\left(4x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right) +$$

$$+ x^2(-4y^3x^2 + 2x^4y^2)\left(4x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right) + x^5(y - x^2)^3\frac{\partial}{\partial y}.$$

Ce germe est à singularité algébriquement isolée.

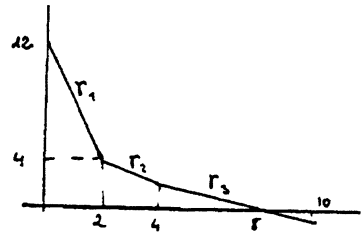


Fig. 7

Le côté γ_1 est du type $(4,1)$, X_{γ_1} est dicritique; soit $\overline{X}^1$ l'éclaté de X par $E_{4,1}$.

$\overline{X}^1$ a quatre singularités non élémentaires $(0,0)$, $(0,1)$, $(0,\sqrt{2})$ et leurs symétriques $(0,-1)$ et $(0,-\sqrt{2})$; $\mathcal{C}_1$ contient cinq germes.

$$\overline{X}^1 = y^4(y^4-1)(y^4-2)4x\frac{\partial}{\partial x}+x^7(-4y^3+2y^2x^7)4x\frac{\partial}{\partial x}+4x^{10}(y-x^7)^3\frac{\partial}{\partial y}.$$

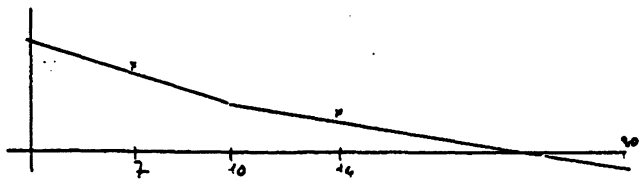


Fig. 8

Son éclaté par $E_{1,5}$, $\overline{X}^2$ a pour seule singularité non élémentaire $(0,0)$; $\mathcal{C}_2$ contient cinq germes.

$$\begin{aligned}\overline{X}^2 = {} & 2y^4\left(x\frac{\partial}{\partial x}-5y\frac{\partial}{\partial y}\right)+\\ & +y^3\frac{\partial}{\partial y}+x^2(-4y^3+2x^2y^2)\left(x\frac{\partial}{\partial x}-5y\frac{\partial}{\partial y}\right)+\\ & +x^2(-3y^2+3yx^2-x^4)\frac{\partial}{\partial y}+x^{20}(-3y^8+y^{12}x^{20})\left(x\frac{\partial}{\partial x}-5y\frac{\partial}{\partial y}\right)\end{aligned}$$

a pour polygone de Newton celui de la figure 9a).

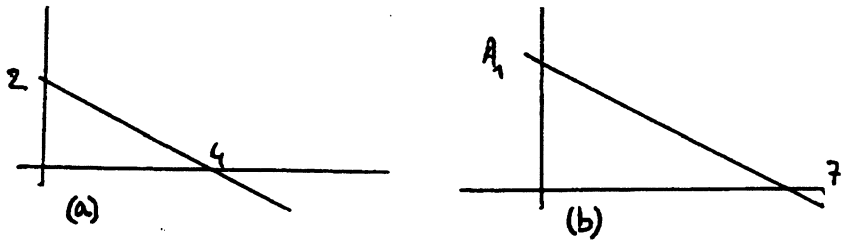


Fig. 9

Son éclaté par $E_{1,2}$ est $\overline{X}^3$:

$$\frac{1}{4}\overline{X}^3 = (y-1)^3\frac{\partial}{\partial y} + 2x^4(y-1)^2\left(x\frac{\partial}{\partial x} - 7y\frac{\partial}{\partial y}\right) + \\ + x^{32}(-3y^8 + 3x^{28}y^{12})\left(x\frac{\partial}{\partial x} - 7y\frac{\partial}{\partial y}\right),$$

dont $(0,1)$ est la seule singularité non élémentaire : $\mathcal{C}_3$ contient cinq germes.

Effectuons maintenant les translations de $\overline{X}^1$ et $\overline{X}^3$ en leurs singularités non élémentaires.

En $(0,1)$, $\overline{X}^1$ a pour polygone de Newton celui de la figure 9b).

Son éclaté par $E_{1,5}$ est désingularisé, et $\mathcal{C}_4$ contient trois germes car, par symétrie, on a aussi désingularisé le translaté en $(0,-1)$ de $\overline{X}^1$.

En $(0,\sqrt{2})$, l'éclaté du germe $\overline{X}^1$ par $E_{1,5}$ est désingularisé : $\mathcal{C}_5$ contient un germe.

Ce germe est le translaté de $\overline{X}^3$ en $(0,1)$. Son polygone de Newton a deux côtés.

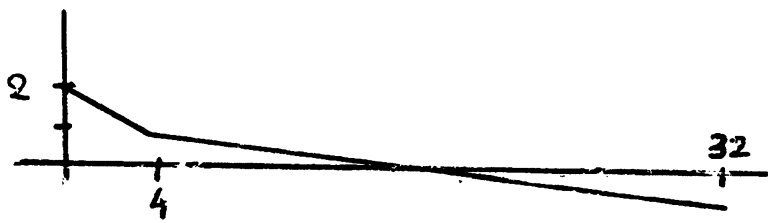


Fig. 10

$\mathcal{C}_6$ contient un germe, $\mathcal{C}_7$ est vide : X est désingularisé en sept éclatements.

2.2 Nombre minimal d'opérations

Dans cette section, nous montrons que, pour désingulariser un germe, il faut au moins n opérations élémentaires, où n est le nombre de côtés utiles du polygone de Newton de X.

2.2.1. — Le résultat suivant justifie la notion d'éclatements successifs.

PROPOSITION . — *Soit n le nombre de côtés utiles de $\mathcal{P}$. Il faut au moins n éclatements pour désingulariser X.*

Ce résultat se trouve dans [B] sous une forme différente (propriété de non-dégénérescence) ainsi que la généricité de la propriété : X est désingularisé en autant d'éclatements quasi homogènes que son polygone de Newton a de côtés utiles.

Preuve. — Par récurrence sur n.

Si $n = 1$, $\mathcal{P}$ a un côté utile $\gamma = \gamma_1$. On procède à un éclatement quasi homogène au moins, car la singularité est non élémentaire.

Supposons la propriété vraie lorsque le polygone de Newton a n côtés utiles. Soit X un germe dont le polygone de Newton a $n+1$ côtés utiles. Éclatons X : comme $\gamma = \gamma_1$ est le premier côté, et $n+1 \geq 2$, son ordonnée minimale s_1 est au moins 1. Donc $(0,0)$ est singularité non élémentaire de $\overline{X}$ (prop. 1.3.6). Le polygone de Newton de $(\overline{X},(0,0))$ est le glissé de celui de X : il a n côtés utiles et, par hypothèse de récurrence, il faut au moins n éclatements pour le désingulariser. Ceci prouve la proposition.

2.2.2 Éclatements successifs

DÉFINITION ET NOTATIONS . — *Lorsque nous éclaterons un germe X, dont le polygone de Newton admet n côtés utiles, $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$, nous choisirons de procéder de la manière suivante :*

X est éclaté par E_{γ_1}.

Son éclaté est singulier en $(0,0)$ si $n \geq 2$ (§ 1.3.3), et nous l'éclatons suivant le glissé de γ_2.

Si $n \geq 3$, ce deuxième éclaté est singulier en $(0,0)$, et nous l'éclatons suivant son premier côté, issu de γ_3 par deux glissements.

Et ainsi de suite, nous effectuons n éclatements, sans translation.

Ces éclatements seront dits éclatements successifs.

Nous noterons $\overline{X}^i$, $1 \leq i \leq n$, *le* $i^{\text{ème}}$ *éclaté de* X. *Il admet* $(0,0)$ *pour singularité non élémentaire.*

2.2.3 Exemple où n éclatements désingularisent le germe

Soit :

$$X_n = \left(\sum_{k=0}^{n-1} x^{k+k^2} y^{n-k+1}\right) \frac{\partial}{\partial y} + (2n-2) y x^{n^2+n-1} \frac{\partial}{\partial y} + x^{n^2+2n} \frac{\partial}{\partial x} + \\ + o\left(\|(x,y)\|^{n^2+n}\right), \quad n \geq 2$$

Polygone de Newton. — Les sommets sont $A_{n-k}\big|_{n-k}^{k^2+k}$, $0 \leq k \leq n-1$, et $A_0\big|_0^{n^2+n+1}$, de monômes associés :

$$x^{k^2+k} y^{n-k+1} \frac{\partial}{\partial y}, \quad 0 \leq k \leq n-1,$$

et

$$(2n-2) y x^{n^2+n-1} \frac{\partial}{\partial y} \quad \text{et} \quad x^{n^2+n} \frac{\partial}{\partial x}$$

pour A_0. γ_1 est le côté $A_n A_{n-1}$, $\alpha_1 = 1$, $\beta_1 = 2$.

Le quasi-degré de type de quasi-homogénéité $(1,2)$ de

$$x^{k(k+1)} y^{n+1-k} \frac{\partial}{\partial y}$$

est $\delta_k = k(k-1) + 2n$ si $0 \leq k \leq n-1$. Celui des deux derniers termes est $n^2 + n - 1$,

$$X_{n,\gamma_1} = (y^{n+1} + x^2 y^n) \frac{\partial}{\partial y} \quad \text{et} \quad \overline{X_{n,\gamma_1}} = y^n (y+1) \frac{\partial}{\partial y},$$

composante quasi tangentielle. La singularité $(0,-1)$ est élémentaire, semi-hyperbolique. La première composante de $\overline{X_n}$ (composante radiale) est $x^{n^2-n}(\partial/\partial x)$. D'où la figure suivante avec n impair (fig. 11a)), n pair (fig. 11b)).

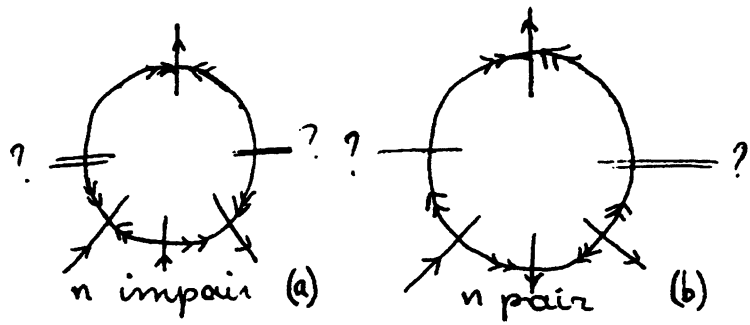


Fig. 11

Si $n \geq 3$, $(0,0)$ est non élémentaire.

La figure 12 montre l'étude de X_2.

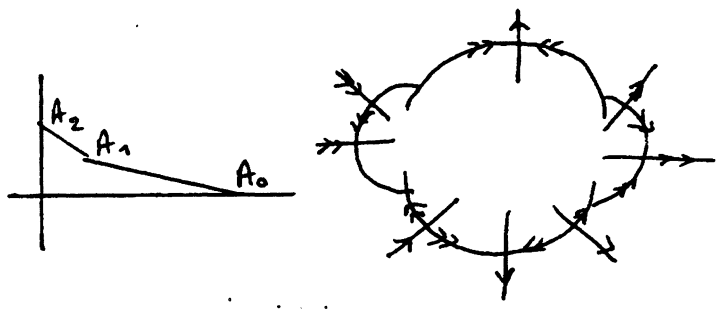


Fig. 12

On utilise un éclatement de type de quasi-homogénéité $(1,2)$:

$$\overline{X_2} = (y^3 + y^2)\frac{\partial}{\partial y} + x^2\frac{\partial}{\partial x}\,.$$

En utilisant $E_{1,2}$, pour éclater X_3, on obtient la figure 13.

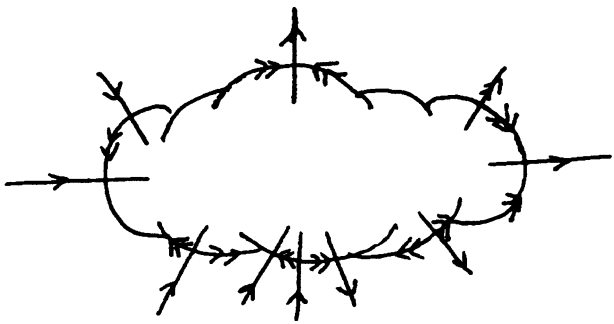


Fig. 13

Et ainsi de suite car

$$\overline{X_n} = X_{n-1} + y^{n+1}\frac{\partial}{\partial y}.$$

2.3 Étude du jet associé au polygone de Newton

L'exemple déjà rencontré au paragraphe 1.2.3 :

$$X = x^2y^2(x-y)^2\frac{\partial}{\partial x} + x^{10}\frac{\partial}{\partial y} + y^{10}\frac{\partial}{\partial x}$$

montre que ce nombre minimal d'éclatements n'est pas toujours suffisant.

Nous allons voir que les germes éléments de $\mathcal{C}$, $k \geq n+1$, sont donnés par des racines communes de polynômes d'une variable, dont on peut majorer le degré à l'aide du polygone de Newton initial.

Nous associerons à un germe singulier une quantité dite multiplicité totale, qui dépend aussi des coordonnées choisies.

2.3.1 Notion de hauteur

DÉFINITION . — *Soit un côté utile γ_i. On appelle hauteur de γ_i le nombre entier $(S_i - s_i)/\alpha_i$.*

On appelle hauteur du polygone de Newton la somme des hauteurs de ses côtés utiles.

Pour plus de détails, voir [Bo].

Notations. — La hauteur de γ_i est notée h_{γ_i}. La hauteur du polygone de Newton est notée H.

Remarque. — La hauteur n'est pas conservée par éclatement; ce n'est pas un invariant du germe.

Exemples. — $(\alpha_1, \beta_1) = (2,1)$; $(\alpha_2, \beta_2) = (2,3)$.

Le glissé de γ_2 est de type de quasi-homogénéité $(1,2)$ et la hauteur a doublé.

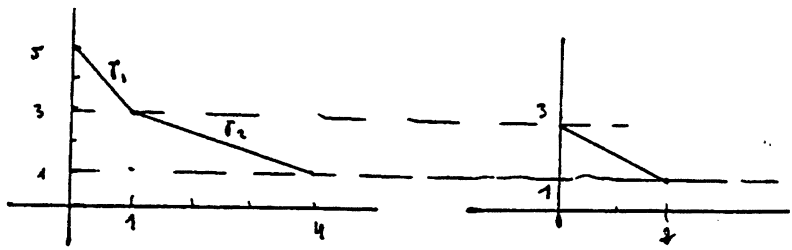


Fig. 14

2.3.2 Lien entre les singularités des éclatés successifs et le polygone de Newton initial

LEMME 1

a) Pour tout côté γ_i, il existe un polynôme $\widetilde{P}_{\gamma_i}$ homogène (respectivement $\widetilde{Q}_{\gamma_i}$), tel que :

$$P_{\gamma_i}(x,y) = x^{r_i+1} y^{s_i} \widetilde{P}_{\gamma_i}(x^{\beta_i}, y^{\alpha_i})$$
$$(\textit{resp. } Q_{\gamma_i}(x,y) = x^{r_i} y^{s_i+1} \widetilde{Q}_{\gamma_i}(x^{\beta_i}, y^{\alpha_i})).$$

b) Il existe des polynômes à une variable $\widehat{P}_{\gamma_i}$ et $\widehat{Q}_{\gamma_i}$ de degré au plus h_{γ_i}, tels que :

$$\widetilde{P}_{\gamma_i}(1,y) = \widehat{P}_{\gamma_i}(y) \quad \textit{et} \quad \widetilde{Q}_{\gamma_i}(1,y) = \widehat{Q}_{\gamma_i}(y).$$

c) Si on effectue un éclatement de type de quasi-homogénéité (α, β) :

$$\overline{X}_{\gamma_i} = x^{r'_i+1} y^{s_i} \widetilde{P}_{\gamma_i}(x^{\beta'_i}, y^{\alpha'_i}) \frac{\partial}{\partial x} + x^{r'_i} y^{s_i} \widetilde{T}_{\gamma_i}(x^{\beta'_i}, y^{\alpha'_i}) \frac{\partial}{\partial y},$$

où (α'_i, β'_i) *désigne le type de quasi-homogénéité du glissé* γ'_i *de* γ_i, r'_i *l'abscisse minimale des points de* γ'_i, s'_i *l'ordonnée minimale de ces points, et*

$$\widetilde{T}_{\gamma_i} = \alpha \widetilde{Q}_{\gamma_i} - \beta \widetilde{P}_{\gamma_i},$$

$$\widehat{T}_{\gamma_i} = \alpha \widehat{Q}_{\gamma_i} - \beta \widehat{P}_{\gamma_i}.$$

Preuve. — On utilise la quasi-homogénéité de P_{γ_i} et Q_{γ_i}. Les monômes associés aux points de γ_i sont :

$$a_{r,s} x^{r+1} y^s \frac{\partial}{\partial x} \quad \text{et} \quad b_{r,s} x^r y^{s+1} \frac{\partial}{\partial y},$$

où $r = r_i + k'\beta_i$, $s = s_i + k\alpha_i$, k et k' entre 0 et h_{γ_i}, $k + k' = h_{\gamma_i}$. D'où le a).

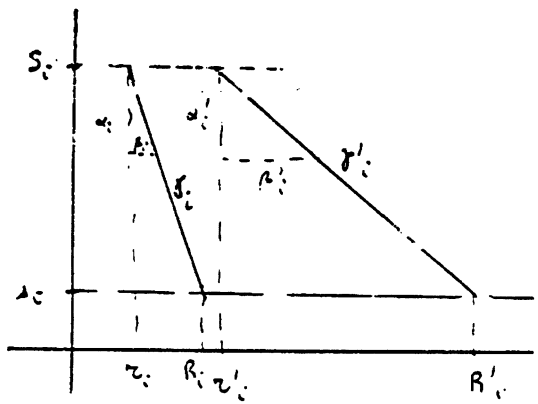


Fig. 15

Par éclatement de type de quasi-homogénéité (α, β), γ_i est transformé en γ'_i de type de quasi-homogénéité proportionnel à (α_i, β'_i), avec $\beta'_i = \alpha\beta_i - \beta\alpha_i$. De plus, le glissement conserve les ordonnées des points du plan des exposants.

Le calcul de $\widetilde{T}_{\gamma_i}$ et de $\widehat{T}_{\gamma_i}$ découle des formules d'éclatement. Ceci achève la preuve.

COROLLAIRE 1. — *Rappelons que $\overline{X}^i$ est le $i^{\text{ième}}$ éclaté successif de X.*

$(0, y_0)$ est une singularité non élémentaire de $\overline{X}^i$, $\lambda = y_0^\alpha$ $(\lambda \neq 0)$ est racine commune à $\widehat{P}_{\gamma_i}$ et $\widehat{Q}_{\gamma_i}$.

Appelons $P_{\gamma_i,k}$ et $Q_{\gamma_i,k}$ les composantes de $\overline{X}^k_{\gamma_i}$ $(0 \leq k \leq i)$. $(y - \lambda x)^\mu$ est facteur commun de $\widetilde{P}_{\gamma_i,k}$ et $\widetilde{Q}_{\gamma_i,k}$ si et seulement si $(y - \lambda)^\mu$ est facteur commun de $\widehat{P}_{\gamma_i}$ et $\widehat{Q}_{\gamma_i}$.

Ceci implique que les singularités non élémentaires éventuelles autres que l'origine d'un des éclatés successifs de X peuvent être détectées à l'aide du polygone de Newton initial.

Preuve. — Les singularités non élémentaires éventuelles autres que $(0, 0)$ de $\overline{X}^i_{\gamma_i}$ sont les racines communes à $\widehat{P}_{\gamma_i,i}$ et $\widehat{Q}_{\gamma_i,i}$ d'après le lemme 1. Or la dernière assertion de ce lemme montre que les idéaux $(\widehat{P}_{\gamma_i}, \widehat{Q}_{\gamma_i})$ et $(\widehat{P}_{\gamma_i,i}, \widehat{Q}_{\gamma_i,i})$ sont égaux. Donc, ils ont même décomposition primaire. D'où le résultat.

DÉFINITION . — *On appelle multiplicité de la singularité $(0, y_0)$, $y_0 \neq 0$, de $\overline{X}^i$ le plus grand entier μ tel que $y_0^{\alpha_i}$ est racine d'ordre μ de $\widehat{P}_{\gamma_i}$ et $\widehat{Q}_{\gamma_i}$.*

Cela revient à :

$$(y^{\alpha_i} - y_0^{\alpha_i} x^{\beta_i})^\mu \quad \text{divise } P_{\gamma_i} \text{ et } Q_{\gamma_i} \ ,$$

mais $(y^{\alpha_i} - y_0^{\alpha_i} x^{\beta_i})^{\mu+1}$ ne divise pas soit P_{γ_i}, soit Q_{γ_i}.

COROLLAIRE 2. — *Si $P_{\gamma_i}(1, y)$ et $Q_{\gamma_i}(1, y)$ n'ont pas d'autre racine commune que $y = 0$, pour $1 \leq i \leq n$, n éclatements suffisent à désingulariser le germe.*

Preuve. — La propriété est vraie pour $n = 1$ (voir § 1.2, éclatement quasi polaire). Supposons que cette propriété soit vraie si $\mathcal{P}$ a n côtés utiles, et que le polygone de Newton associé à X a $n + 1$ côtés utiles. Si $P_{\gamma_i}(1, y)$ et $Q_{\gamma_i}(1, y)$ n'ont pas d'autre racine commune que $y = 0$, c'est en particulier vrai pour $i = 1$; alors $(0, 0)$ est la seule singularité non élémentaire de $\overline{X}$.

Le polygone de Newton du germe $(\overline{X}, (0, 0))$ est le glissé de $\mathcal{P}$: il a n côtés utiles. Du lemme 1 découle que ce germe $(\overline{X}, (0, 0))$ satisfait à l'hypothèse de récurrence : il est désingularisé en n éclatements. Donc X est désingularisé en $n + 1$ éclatements, ce qui prouve le corollaire.

2.3.3 Jets génériques

LEMME 2. — *Une singularité de multiplicité au moins* 2 *est une singularité non élémentaire de* $\overline{X}^i$. *Une singularité de multiplicité* 0 *est élémentaire.*

La somme des multiplicités des singularités autres que l'origine de $\overline{X}^i_{\gamma_i}$ *est au plus* h_{γ_i}.

On ne peut rien dire d'une singularité de multiplicité 1.

Preuve. — Si $\mu \geq 2$,

$$(y^{\alpha_i} - y_0^{\alpha_i} x^{\beta_i})^2 \quad \text{divise} \quad Q_{\gamma_i,i} \text{ et } P_{\gamma_i,i}\,,$$

la singularité est non élémentaire, car les deux valeurs propres, $P_{\gamma_i,i}(1, y_0)$ et $(\partial Q_{\gamma_i}/\partial y)(1, y_0)$ sont nulles.

Si $\mu = 1$, il se peut que $y_0^{\alpha_i}$ soit racine simple de $\widehat{P}_{\gamma_i}$ et $\widehat{P}_{\gamma_i,i}$, auquel cas la singularité est élémentaire.

Si $\mu = 0$, par définition de la multiplicité, ou la composante radiale $P_{\gamma_i,i}$ ou la composante tangentielle $Q_{\gamma_i,i}$ de $\overline{X}^i$ est non nulle en $(0, y_0)$ et la singularité est élémentaire.

La majoration des multiplicités résulte de ce que $(0, y_0)$ est une singularité si $y_0^{\alpha_i}$ est racine des polynômes $\widehat{P}_{\gamma_i,i}$ et $\widehat{Q}_{\gamma_i,i}$, dont le degré est au plus h_{γ_i}.

DÉFINITION 1. — *On appelle multiplicité totale associée au jet de* X *le nombre* M *somme des multiplicités des singularités autres que l'origine des* $\overline{X}^i_{\gamma_i}$, $1 \leq i \leq n$.

PROPOSITION A. — *La somme des multiplicités des singularités* $(0, y_0)$, $y_0 \neq 0$, *de* $\overline{X}^i$ *est au plus* h_{γ_i} *et*

$$M \leq H\,.$$

Preuve. — La première propriété découle de la définition de la multiplicité d'une singularité et de ce que le degré de $\widehat{P}_{\gamma_i}$ et $\widehat{Q}_{\gamma_i}$ est h_{γ_i}.

La multiplicité totale est majorée par la somme des degrés des polynômes $\widehat{P}_{\gamma_i,i}$ et $\widehat{Q}_{\gamma_i,i}$, eux-mêmes majorés par les hauteurs h_{γ_i}, dont la somme est H.

Nous retrouvons un résultat de [B].

PROPOSITION B. — *$M = 0$ est une propriété générique pour les germes à polygone de Newton donné.*

Si $M = 0$, X est désingularisé en n éclatements, autant que de côtés utiles de son polygone de Newton associé.

D'où la définition suivante.

DÉFINITION 2. — *Un jet est générique si la multiplicité totale qui lui est associée est nulle.*

Remarque. — A priori, la multiplicité n'est pas un invariant du germe. On dira néanmoins que le germe est générique si, dans les coordonnées (x, y), $M = 0$. Et on parlera de multiplicité totale du germe singulier X dans les coordonnées (x, y), on entendra par là : la multiplicité totale du jet de X dans ces coordonnées.

2.3.4 Effet de changements de coordonnées sur la multiplicité totale. Changements de coordonnées admissibles.

La propriété $M = 0$ est la propriété de non-dégénérescence de [B]. Comme dans cet article, on peut se demander s'il est possible d'évaluer le nombre d'éclatements suffisant à désingulariser un germe en se ramenant au cas générique par changement de coordonnées. L'étude suivante montre que la réponse est en général non, bien qu'elle soit positive dans certains cas particuliers.

Exemple 1. — Un changement de coordonnées ramène à un jet générique.

Soit :

$$X = y(y-x)^3 \frac{\partial}{\partial y} + x^5 \frac{\partial}{\partial x}\,.$$

Son polygone de Newton comporte un côté de hauteur 3 (fig. 16a). On voit que $\widehat{Q}_\gamma = y(y-1)^3$ et $\widehat{P}_\gamma = 0$.

Ici $M = 3$, $P_\gamma = 0$ et $Q_\gamma = y(y-x)^3$; P_γ et Q_γ ont deux facteurs communs, y et $y - x$. Nous allons, par un changement linéaire de coordonnées, nous ramener au cas où ces facteurs sont x et y. Soit $L : (x, y) \longmapsto (x+y, y)$:

$$X = L^* Y\,,$$

où (fig. 16b) :

$$Y = yx^3 \left(\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \right) + (x+y)^5 \frac{\partial}{\partial y}\,.$$

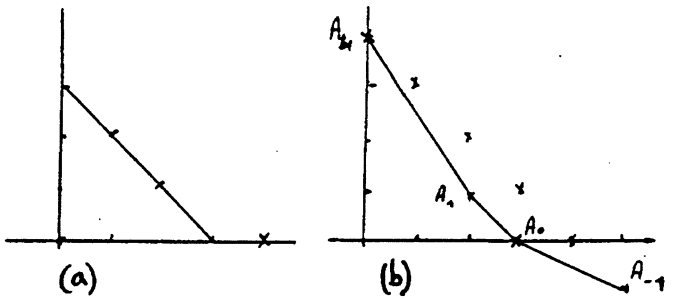


Fig. 16

Son polygone de Newton a deux côtés utiles : γ_i de type de quasi-homogénéité $(3,2)$ et γ_2 de type de quasi-homogénéité $(1,1)$;

$$P_{\gamma_1} = -yx^3 \qquad Q_{\gamma_1} = y^5 \qquad \widehat{P}_{\gamma_1} = -1$$
$$P_{\gamma_2} = -yx^3 \qquad Q_{\gamma_2} = yx^3 \qquad \widehat{Q}_{\gamma_2} = 1 \qquad \widehat{Q}_{\gamma_1} = y^3 .$$

Le jet est donc générique, et le germe est désingularisé en deux éclatements dans ces coordonnées.

Exemple 2. — Aucun changement de coordonnées ne permet de se ramener à un jet générique. Soit (fig. 17) :

$$X = x^2y^2(x-y)^2\frac{\partial}{\partial x} - x^{10}\frac{\partial}{\partial y} - y^{10}\frac{\partial}{\partial x} .$$

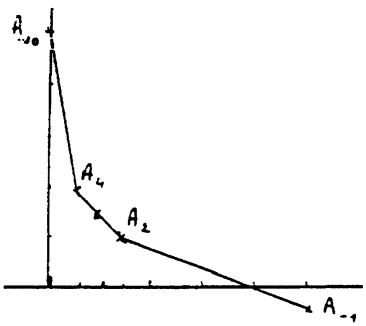


Fig. 17

Ici trois éclatements ne suffisent pas : $\mathcal{P}$ comporte trois côtés utiles.

Le type de quasi-homogénéité de γ_1 est $(3,1)$:

$$P_{\gamma_1} = y^4(x^2 - y^6)\,, \quad Q_{\gamma_1} = 0\,.$$

Celui de γ_2 est $(1,1)$:

$$P_{\gamma_2} = x^2y^2(y-x)^2\,, \quad Q_{\gamma_2} = 0\,.$$

γ_3 est de type de quasi-homogénéité $(3,7)$:

$$P_{\gamma_3} = x^4y^2\,, \quad Q_{\gamma_3} = x^{10}\,.$$

P_{γ_2} et Q_{γ_2} ont trois facteurs communs, tous doubles : dans tout système de coordonnées les composantes de ce germe ont au moins un facteur commun double, différent de x et de y : $M \geq 2$.

Normalisation de X_ν. — Nous rappelons que si $\nu+1$ est l'ordre du germe,

$$P_\nu \frac{\partial}{\partial x} + Q_\nu \frac{\partial}{\partial y}$$

en est le jet de degré d'homogénéité $\nu - 1$.

Nous allons utiliser des changements linéaires de coordonnées :

- si X_ν est à singularité algébriquement isolée, il est déterminant (prop. 2.2.1);
- si ce n'est pas le cas, et si P_ν et Q_ν ont deux facteurs communs homogènes, on peut se ramener au cas où ce sont x et y; il se peut que l'on rende alors le jet générique (§2.3.4, ex. 1);
- si P_ν et Q_ν ont au moins trois facteurs communs, on pourra se ramener au cas où x et y sont les facteurs d'ordre le plus élévé de P_ν et Q_ν; s'il y en a plusieurs, on pourra choisir ceux qui sont d'ordre le plus élévé dans la composante tangentielle.

Les changements de coordonnées ultérieurs seront tangents à l'identité.

Changements de coordonnées admissibles. — Nous allons généraliser la normalisation de X_ν et normaliser X_γ. Si on fait subir un changement de coordonnées à un germe Y élément de $\mathcal{C}_k$, $1 \leq k$, Y est un éclaté : il faut donc conserver globalement le diviseur exceptionnel. Nous utiliserons des changements de coordonnées de la forme :

$$(x,y) \longmapsto (x\,,\, y + \cdots)\,,$$

où les termes non écrits sont de degré au moins 2.

Il se peut que l'on veuille conserver le quasi-degré de type de quasi-homogénéité (α', β') : on utilisera des difféomorphismes d'ordre 0 dans ce type de quasi-homogénéité, ce qui n'est possible que si $\alpha' = 1$ [AGV].

Nous utiliserons alors des changements de coordonnées de la forme :

$$(x, y) \longmapsto (x\ ,\ y + \lambda x^{\beta})\,.$$

Exemple. — Soit (fig. 18a)) :

$$X = (y - x^3)^2 x \frac{\partial}{\partial x} + x^{10} \frac{\partial}{\partial y}\,.$$

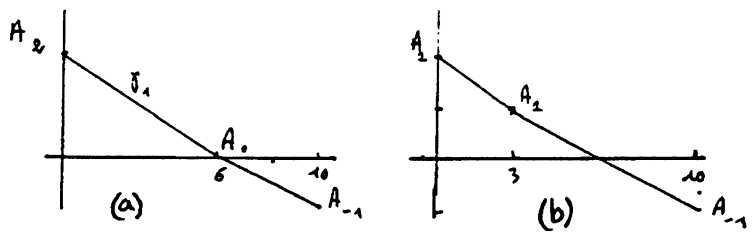


Fig. 18

Soit :

$$\psi : (x, y) \longmapsto (x\ ,\ y + x^3)$$

$X = \psi^* X_1$, avec :

$$X_1 = y^2 x \left(\frac{\partial}{\partial x} - 3x^2 \frac{\partial}{\partial y} \right) + x^{10} \frac{\partial}{\partial y}\,,$$

et ce jet est générique : on désingularise X_1 en 2 éclatements (fig. 18b).

DÉFINITIONS . — *Nous appellerons changement de coordonnées admissible tout changement de coordonnées défini par :*

$$(x, y) \longmapsto \left(x\ ,\ y + \sum_{k \geq 1} \lambda_k x^k \right)\,.$$

(La série formelle $\sum_{k \geq 1} \lambda_k x^k$ n'est pas nécessairement convergente.)

Nous appellerons changement de coordonnées admissible élémentaire une application définie par :

$$(x, y) \longmapsto (x\ ,\ y + \lambda x^{\beta})\,.$$

Nous verrons (lemme 7) que dans l'algorithme, nous n'utiliserons que des composés d'un nombre fini de changements de coordonnées admissibles élémentaires. Nous appellerons changement de coordonnées admissible au sens large tout changement de coordonnées défini par :

$$(x, y) \longmapsto (x\ ,\ y + \lambda x + \cdots)\,,$$

où les termes non écrits sont de degré au moins 2.

PROPRIÉTÉ . — *Les changements de coordonnées admissibles forment un sous-groupe de Lie des germes de difféomorphismes fixant l'origine. De même, les changements de coordonnées admissibles au sens large.*

Preuve. — Ces changements de coordonnées forment des sous-groupes fermés du groupe de Lie des germes de difféomorphismes fixant l'origine.

2.4 Étude des germes obtenus après éclatement et translation

2.4.1 Notations

Après éclatement d'un germe X, on obtient un ou plusieurs germes singuliers éventuels. Nous noterons Y un de ces germes, translaté de $\overline{X}$ en une de ses singularités non élémentaires $(0, y_0)$, $y_0 \neq 0$, de multiplicité μ.

Nous noterons P' le polygone de Newton associé à Y, de sommets A'_i.

Ses côtés utiles seront notés γ'_i, $1 \leq i \leq n'$, ils sont de type de quasi-homogénéité (α'_i, β'_i).

Les composantes de Y seront notées U et V, $U_{\gamma'_i}$ et $V_{\gamma'_i}$ étant les composantes de Y de quasi-degré de type (α'_i, β'_i) minimal.

2.4.2 Ordonnée maximale du polygone de Newton associé à Y

LEMME 3. — *Le polygone de Newton $\mathcal{P}'$ associé à Y a pour sommet sur $(0s)$ ou $A'_{\mu-1}$ ou A'_μ.*

Dans le premier cas, à $A'_{\mu-1}$ est associé un monôme non nul de V.

Dans le deuxième cas, à A'_μ est associé un monôme non nul de la première composante U de Y.

Preuve. — Éclatons X suivant γ. Les points du plan des exposants situés sur $(0s)$ sont associés à

$$\overline{X}_\gamma = xP_\gamma(1,y)\frac{\partial}{\partial x} + T_\gamma(1,y)\frac{\partial}{\partial y}\,,$$

avec $T_\gamma(1,y) = (\alpha Q_\gamma - \beta y P_\gamma)(1,y)$. D'après le lemme 2.3.2 :

$$xP_\gamma(1,y) = xy^s\widehat{P}_\gamma(y^\alpha)$$

$$T_\gamma(1,y) = y^{s+1}(\alpha\widehat{Q}_\gamma - \beta\widehat{P}_\gamma)(y^\alpha)\,.$$

On suppose que $(0,y_0)$ est singularité de multiplicité μ de $\overline{X}$, c'est-à-dire que y_0^α est racine de multiplicité μ de $\widehat{P}_\gamma$ et $\widehat{Q}_\gamma$, ou $(y-y_0^\alpha)^\mu$ est en facteur dans $\widehat{P}_\gamma$ et dans $\widehat{Q}_\gamma$. Or, la translation conserve l'abscisse des points du plan des exposants. Le point de $\mathcal{P}'$ d'abscisse 0 est donc associé à un terme du translaté de $\overline{X}_{\gamma_1}$.

Deux cas se présentent.

- y_0^α est racine de multiplicité μ exactement de $\widehat{T}_\gamma$. Alors, $(y^\alpha - y_0^\alpha)^\mu$ est en facteur dans T_γ, mais pas $(y^\alpha - y_0^\alpha)^{\mu+1}$. C'est-à-dire que V contient un terme $by^\mu(\partial/\partial y)$, $b \neq 0$, auquel est associé $A'_{\mu-1}$.
- y_0^α est racine de multiplicité $\mu+1$ au moins de $\widehat{T}_\gamma$. Donc $(y^\alpha - y_0^\alpha)^\mu$ est en facteur dans P_γ, et pas $(y^\alpha - y_0^\alpha)^{\mu+1}$, sinon la multiplicité de cette singularité serait au moins $\mu+1$. Alors après translation, on obtient le monôme axy^μ de U, $a \neq 0$, auquel est associé A'_μ. Ce point A'_μ est sur $\mathcal{P}'$ et peut aussi être associé à un monôme de V.

2.5 Décroissance stricte de la multiplicité totale

Dans cette section Y désigne le germe translaté d'un éclaté de X en une de ses singularités de multiplicité μ. Nous allons montrer que cette multiplicité totale n'est pas plus de μ (lemmes 4 et 5). Puis nous montrerons que les singularités non élémentaires des éclatés successifs de Y ont, dans certaines coordonnées, une multiplicité au plus égale à $\mu - 1$ (lemmes 6-11).

2.5.1 La multiplicité décroît

LEMME 4. — *Soit M' la multiplicité totale de Y :*

$$M' \leq \mu + 1 .$$

De plus $M' = \mu + 1$ n'est possible que si $A'_\mu \in \mathcal{P}'$, et si tous les côtés γ'_i de $\mathcal{P}'$ sont de type de quasi-homogénéité $(1, \beta'_i)$.

Preuve. — On sait que $\mathcal{P}'$ a pour sommet sur $(0s)$ $A'_{\mu-1}$ ou A'_μ (lemme 3). On sait aussi que $M' = \sum_1^{n'} \mu'_i$, où μ'_i est la somme des multiplicités des racines communes à $\widehat{U}_{\gamma'_i}$ et $\widehat{V}_{\gamma'_i}$ polynômes de degré au plus h_{γ_i}, hauteur de γ'_i. Donc

$$M' \leq \sum h_{\gamma'_i}, \quad 1 \leq i \leq n' .$$

Or

$$h_{\gamma'_i} = \frac{S'_i - s'_i}{\alpha'_i} ,$$

où S'_i et s'_i désignent les ordonnées extrêmes des points de γ'_i.

Si $A'_{\mu-1} \in \mathcal{P}'$, $h_{\gamma'_i} \leq S'_i - s'_i$ et par suite $M' \leq \mu - 1 - (-1) \leq \mu$.

Si $A_\mu \in P'$, $M' \leq \mu + 1$ différence des ordonnées extrêmes des points de $\mathcal{P}'$, $M' = \mu + 1$ n'est possible que si $h'_{\gamma'_i} = S'_i - s'_i$; ceci entraîne que pour tout $i : 1 \leq i \leq n'$, donc que $\forall\ i$, $\alpha'_i = 1$.

LEMME 5

$$M' \leq \mu .$$

Preuve. — Puisque M' est majorée par $\mu + 1$, supposons $M' = \mu + 1$. D'après le lemme 1, et la définition de la multiplicité d'une singularité différente de l'origine, cela signifie que $\widehat{U}_{\gamma'_i}$ et $\widehat{V}_{\gamma'_i}$ ont exactement $h_{\gamma'_i}$ racines communes donc : ou l'un des deux est nul, ou ils sont proportionnels.

Or, on a vu (lemme 4) que $M' = \mu + 1 \Rightarrow A'_\mu \in \mathcal{P}'$ et qu'il est associé à un monôme de U : $U_{\gamma'_1}$ n'est pas identiquement nul. D'autre part, la multiplicité d'une singularité n'est définie que si cette singularité est différente de zéro : $U_{\gamma'_1}$ a $h_{\gamma'_1}$ racines non nulles. Le produit de ces racines est le terme constant de $U_{\gamma'}$ et le terme en $x_1^{R'}$ de $\widetilde{U}_{\gamma'}$ (lemme 1) ; ce terme est non nul.

Il est associé au point d'ordonnée minimale de γ'_1 qui est aussi le point d'ordonnée maximale de γ'_2. On peut itérer ce raisonnement : le point d'ordonnée minimale de γ'_i est associé à un monôme non nul de U, $\forall\, i$, $1 \leq i \leq n'$. Donc le point d'ordonnée minimale de γ'_n, ne peut être d'ordonnée -1 ; la hauteur est majorée par μ et M' aussi.

2.5.2 Polygones de Newton de germes ayant la propriété (Q)

DÉFINITION . — *Nous dirons qu'un germe Y admet la propriété (Q) si un de ses éclatés successifs $\overline{Y}^i_{\gamma_i}$ admet une singularité de multiplicité μ.*

LEMME 6. — *Si Y a la propriété (Q), le polygone de Newton $\mathcal{P}'$ associé à Y est un des polygones de Newton suivants, après éventuellement un éclatement supplémentaire (fig. 19).*

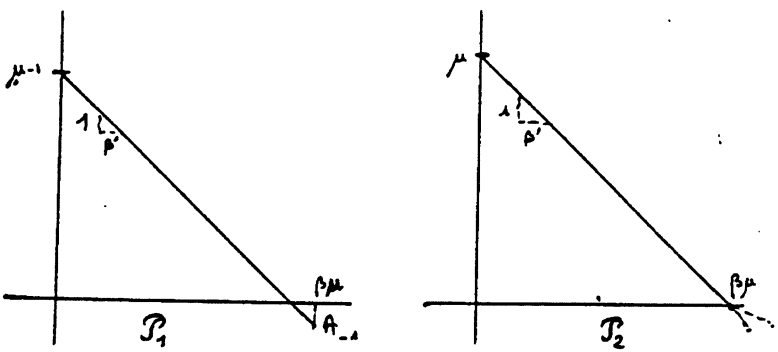


Fig. 19

Preuve

Premier cas. $A'_{\mu-1}$ est sommet de $\mathcal{P}'$, et la hauteur est au plus μ. Or si $\overline{Y}^i$ admet une singularité de multiplicité μ, $h_{\gamma'_i} \geq \mu$, $\mathcal{P}'$ comporte donc un seul côté utile γ de hauteur μ. De plus, comme $h_\gamma = (S - s)/\alpha$, $\alpha = 1$, $\mathcal{P}'$ est $\mathcal{P}_1$.

Deuxième cas. A'_μ est sommet de $\mathcal{P}'$ (lemme 3). La hauteur totale est alors au plus $\mu + 1$:

- ou $\mathcal{P}'$ comporte un côté utile de hauteur $\mu + 1$, et $\mathcal{P}' = \mathcal{P}_2$;
- ou un côté utile de hauteur μ : ou $\mathcal{P}'$ est $\mathcal{P}_2$, ou $\mathcal{P}'$ est comme dans la figure 20 ; $\mathcal{P}'$ comporte un éclatement ramène par glissement à $\mathcal{P}' = \mathcal{P}_1$.

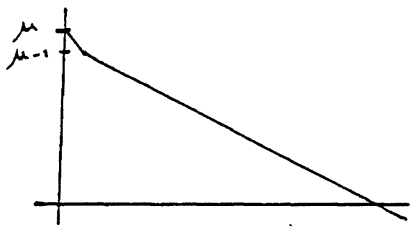


Fig. 20

Nous allons montrer qu'on peut trouver des coordonnées dans lesquelles Y n'a pas cette propriété (Q) par un nombre fini de changements de coordonnées admissibles élémentaires.

Notations. — Les notations $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ désigneront toujours des polygones de Newton tels que ceux de la figure 19.

2.5.3. — Dans ce paragraphe, nous montrons que si X est à singularité algébriquement isolée aucun des éléments Y de $\mathcal{C}$, $1 \leq k$, n'est ∞-plat le long d'une courbe C^∞ transverse à $(0y)$.

Dans le paragraphe 2.5.4, nous utilisons cette propriété pour traiter le cas où $P' = \mathcal{P}_1$.

Dans le paragraphe 2.5.5, nous traitons le cas $\mathcal{P}' = \mathcal{P}_2$.

LEMME 7. — *Soit X un germe C^∞ à singularité algébriquement isolée en $(0,0)$. Supposons qu'un élément X_i de $\mathcal{C}_k$, $1 \leq k$, admet une singularité $(0, y_0)$; X_i ne peut pas être ∞-plat le long d'une courbe (C) régulière transverse à $0y$.*

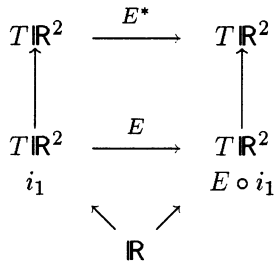
Preuve. — Elle est adaptée de [D].

Nous pouvons supposer que $y_0 = 0$, et que (C) a pour équation $y = 0$. Soit :

$$i_1 : (\mathbb{R}, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, (0,0))$$
$$x \longmapsto (x, 0)\,.$$

Soit E telle que $E^*(X_i) = X$; E est une composée d'éclatements quasi homogènes.

De la commutativité du diagramme :



On déduit que si $(X_i \circ i_1\,,\,0)$ est ∞-plat, le germe $(X \circ E \circ i_1\,,\,0)$ l'est aussi. Nous allons montrer que ce dernier germe vérifie une inégalité de Lojasiewicz, d'où la contradiction.

Or E est une composée d'applications de la forme :

$$(x, y) \longmapsto (x^\alpha, yx^\beta)\,,$$

que nous noterons $E_1, \ldots, E_n$.

Donc, si f paramétrise une courbe :

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \big(f_1(t)\,,\, f_2(t)\big) \end{aligned}$$

$E_i \circ f$ s'écrit $t \longmapsto \big(f_1^\alpha(t)\,,\, f_2(t) f_1^\beta(t)\big)$ et $E_i \circ f$ est ∞-plat en 0 si et seulement si la courbe paramétrisée par f est ∞-tangente au diviseur exceptionnel $(0y)$.

Ceci n'est pas vérifié pour (C) par hypothèse.

Si ce n'est pas vérifié pour $E_k \circ \cdots \circ E_1 \circ i_1$, d'après ce qui précède, ce n'est pas vérifié pour $E_{k+1} \circ \cdots \circ E_1 \circ i_1$.

Donc $E \circ i_1$ vérifie une inégalité de Lojasiewicz, et $X \circ E \circ i_1$ aussi.

Remarques

1) Nous avons fait le raisonnement avec l'éclatement directionnel, on peut aussi utiliser l'éclatement quasi polaire : il suffit de remplacer f_1 par $\mathcal{F} f_1$, ou $\mathcal{F}$ est analytique (prop. 1.3.4).

2) La démonstration de ce lemme ne suppose pas que X est à singularité algébriquement isolée, mais seulement qu'il vérifie une inégalité de Lojasiewicz.

2.5.4 Décroissance stricte de μ dans le cas $\mathcal{P}' = \mathcal{P}_1$.

LEMME 8.— *Si $\mathcal{P}' = \mathcal{P}_1$, et si $\overline{Y}$ admet une singularité $(0, y_0)$, $y_0 \neq 0$, de multiplicité μ, si ψ_1 est défini par :*

$$\psi_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x, y) \longmapsto (x\ ,\ y + y_0 x^{\beta'})\ .$$

i) ψ_1 est un changement de coordonnées admissible.

ii) Soit $Y_1 = (\psi_1^*)^{-1}(Y)$, le polygone de Newton associé à Y_1 a même sommet $A'_{\mu-1}$ que $\mathcal{P}_1$, associé aux mêmes monômes.

iii) Les termes du jet de Y_1 associés à $A'_{\mu-1}$ sont de quasi-degré de type $(1, \beta')$ égal à $\beta'(\mu - 1)$. Tous les autres termes du jet sont de quasi-degré strictement supérieur à $\beta'(\mu - 1)$.

Preuve.— ψ_1 est un changement de coordonnées admissible d'après la définition (§ 2.3.4). Il conserve les quasi-degrés de type $(1, \beta')$.

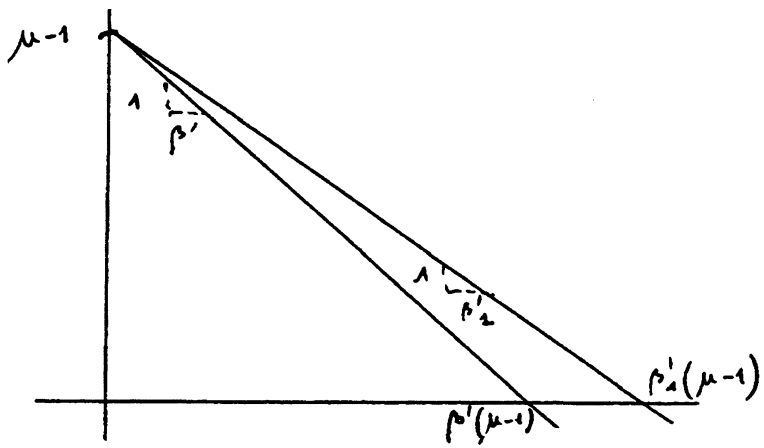


Fig. 21

Étudions Y ; $A_{\mu-1}$ est associé à

$$axy^{\mu-1}\frac{\partial}{\partial x} + by^{\mu}\frac{\partial}{\partial y}\ ,$$

a et b non tous les deux nuls.

Par hypothèse, $(0, y_0)$ est singularité de multiplicité μ de $\overline{Y}$; $(y - y_0)^\mu$ divise $\widehat{U}_\gamma$ et $\widehat{V}_\gamma$. Or $\widehat{U}_\gamma$ est de degré au plus $\mu - 1$, puisque le point d'ordonnée -1 est associé seulement à V. Donc U_γ est identiquement nul et $\widehat{V}_\gamma$ est de la forme $b(y - y_0)^\mu$, $b \neq 0$. Il en résulte que :

$$Y = b(y - y_0 x^{\beta'})^\mu \frac{\partial}{\partial y} + \cdots ,$$

où les termes non écrits sont de quasi-degré de type $(1, \beta')$ au moins $1 + \beta'(\mu - 1)$.

$$Y_1 = (\psi^*)^{-1}(Y) = by^\mu \frac{\partial}{\partial y} + \cdots , \qquad b \neq 0 ,$$

les termes non écrits sont de quasi-degré au moins égal à $1 + \beta'(\mu - 1)$.

LEMME 9. — *Toujours dans ce cas, on peut construire un difféomorphisme ψ algébrique, changement de coordonnées admissible, tel que les singularités éventuelles des éclatés successifs de $Y' = (\psi^*)^{-1}(Y)$ sont de multiplicité au plus $\mu - 1$.*

Preuve. — Remarquons tout d'abord que Y est $\beta'(\mu - 1)$-plat le long de $(0x)$, car c'est le degré minimal de son premier monôme sans y.

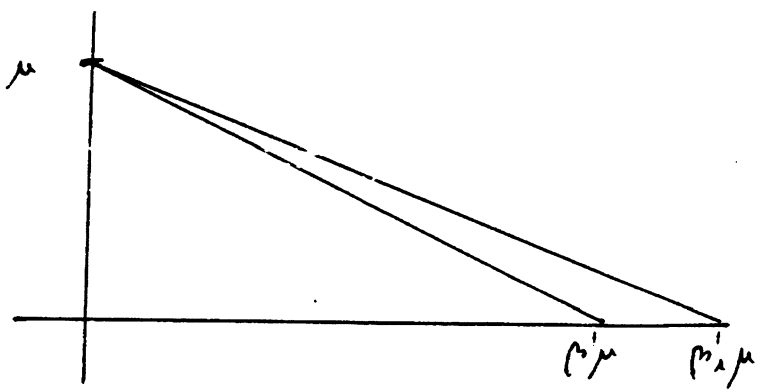


Fig. 22

Si Y n'a que des singularités de multiplicité au plus $\mu - 1$, $\psi = \mathrm{Id}$.

Si Y a une singularité de multiplicité μ, nous supposons ici que $\mathcal{P}' = \mathcal{P}_1$, et on peut appliquer le lemme 8 :

- ou Y_1 convient et $\psi = \psi_1$;
- ou $\overline{Y}_1$ a une singularité de multiplicité μ et d'après le lemme 8, son polygone de Newton est encore $\mathcal{P}_1$, mais avec un côté de type de quasi-homogénéité $(1, \beta_1')$, $\beta_1' > \beta'$, puisque tous les termes autres que $by^\mu(\partial/\partial y)$ sont de quasi-degré au moins $1 + \beta'(\mu - 1)$.

On peut donc itérer ces changements de coordonnées admissibles tant que cette situation persiste. Le difféomorphisme est le composé des ψ_i. On construit ainsi une courbe d'équation :

$$y - y_0 x^{\beta'} - y_1 x^{\beta_1'} - \cdots - y_{k-1} x^{\beta_{k-1}'} = 0\,,$$

le long de laquelle Y_k est $\beta_k'(\mu - 1)$-plat. La suite (β_k') est strictement croissante. Et la courbe est transverse à $0y$. Or X est à singularité algébriquement isolée; on applique le lemme 7. Il en résulte que cette situation ne persiste pas indéfiniment, ce qui prouve le résultat.

2.5.5 Décroissance stricte de μ dans le cas $\mathcal{P}' = \mathcal{P}_2$

LEMME 10. — *Si $\mathcal{P}' = \mathcal{P}_2$, et si $(0, y_0)$ est une singularité de multiplicité μ de $\overline{Y}$, on peut construire un difféomorphisme algébrique ψ, changement de coordonnées admissible défini comme dans le lemme 8, tel que :*

i) si $Y_1 = (\psi^*)^{-1}(Y)$, le polygone de Newton associé à Y_1 a même sommet A_μ' que $\mathcal{P}'$, associé aux mêmes monômes ;

ii) ces monômes associé à A_μ' sont de quasi-degré de type de quasi-homogénéité $(1, \beta')$ égal à $\beta'\mu$; tous les autres termes sont de quasi-degré strictement supérieur à $\beta'\mu$.

Preuve. — D'après le lemme 6, $\mathcal{P}'$ contient un côté γ' de hauteur au moins μ. Appelons toujours $U_{\gamma'}$ et $V_{\gamma'}$ les composantes de Y de quasi-degré de type de quasi-homogénéité $(1, \beta')$ minimal. $(0, y_0)$ est par hypothèse singularité de $\overline{Y}$ de multiplicité μ, ce qui entraîne que :

$$\widehat{U}_{\gamma'} = a(y - y_0)^\mu\,, \quad a \neq 0\,,$$

et

$$\widehat{V}_{\gamma'} = b(y - y_0)^{\mu}(cy + 1)\,,$$

où c et d peuvent être nuls.

Utilisons le même difféomorphisme ψ que dans le lemme 8 :

$$(x, y) \longmapsto \left(x\,,\, y + y_0 x^{\beta'}\right),$$

changement de coordonnées admissible élémentaire.

$$\left(\psi^*\right)^{-1}(Y) = Y_1 = ay^{\mu} x \frac{\partial}{\partial x} + by^{\mu+1} \frac{\partial}{\partial y} + b' x^{\beta'} \frac{\partial}{\partial y}\,,$$

avec $b' = -a\beta' y_0 + bcy_0 + b$. Ceci montre i).

ii) résulte comme dans le lemme 8 de ce que ψ est un difféomorphisme d'ordre zéro dans le type $(1, \beta')$.

LEMME 11. — *Toujours sous ces hypothèses, on peut construire un changement de coordonnées algébrique Ψ tel que $(\Psi^*)Y = Z$, où toutes les singularités éventuelles des éclatés successifs de Z ont une multiplicité au plus égale à $\mu - 1$.*

Preuve. — On constate que Y est $\mu\beta' - 1$-plat le long de $(0x)$. Pour le reste la preuve est identique à celle du lemme 9 (fig. 22).

On a montré la proposition suivante.

PROPOSITION . — *Soit $(0, y_0)$ une singularité de multiplicité μ d'un éclaté de X, $y_0 \neq 0$. Soit Y le germe singulier obtenu par translation en $(0, y_0)$.*

On peut toujours, au besoin en effectuant des changements de coordonnées admissibles élémentaires en nombre fini, se ramener au cas où toutes les singularités non élémentaires éventuelles des éclatés successifs de Y ont une multiplicité au plus égale à $\mu - 1$.

3. Théorème de désingularisation

3.1 Théorème de désingularisation. Estimation du nombre d'éclatements

Nous retrouvons le résultat de finitude de [D].

En effet, à un germe X est associée une multiplicité totale M.

Un pas de l'algorithme remplace un germe X, auquel est associée la multiplicité totale m, $m \geq 1$, par un nombre fini de germes, à chacun desquels est associée une multiplicité totale au plus égale à $m-1$, la somme de ces multiplicités ne dépassant pas m.

Après un nombre fini de pas, on obtient un nombre fini de germes dont le jet est générique, au besoin en effectuant des changements de coordonnées. Ces germes sont désingularisés en un nombre fini d'éclatements.

Dans ce paragraphe, nous allons majorer le nombre d'éclatements nécessaires pour désingulariser X.

Nous noterons N un majorant du nombre d'opérations élémentaires.

DÉFINITION .— *Soit S l'ordonnée du point du polygone de Newton $\mathcal{P}$ situé sur $(0y)$; nous appellerons cette ordonnée l'ordonnée dominante du germe X dans les coordonnées (x, y).*

En effet, les preuves des lemmes 8 et 10 montrent que cette ordonnée S est invariante par changement de coordonnées admissible.

3.1.1 Cas où l'ordonnée dominante vaut 1

LEMME 12.— *Considérons les germes de $\mathcal{C}_k$, $k \geq n$, où n est le nombre de côtés utiles du polygone de Newton, $\mathcal{P}$, du germe initial.*

Si un tel germe Y est tel que son ordonnée dominante vaut 1, *il est désingularisé en* 1 *éclatement, au besoin en effectuant des changements de coordonnées admissibles.*

Preuve.— Puisque $k \geq n$, on a effectué les n premiers éclatements successifs, et ce germe est obtenu après translation. Supposons que Y est obtenu après translation en $(0, y_0)$, singularité d'un éclaté d'un élément de $\mathcal{C}_{k-1}$, $y_0 \neq 0$:

- ou il est générique, et désingularisé en un éclatement d'après la proposition B du paragraphe 2.3.3;
- ou non :
  si $(0, y_0)$ est de multiplicité 1, le polygone de Newton de ce germe est $\mathcal{P}_2$ (lemme 6); on applique les lemmes 10 et 11;
  si $(0, y_0)$ est de multiplicité 2, le polygone de Newton de ce germe est $\mathcal{P}_1$, et on applique les lemmes 8 et 9.

On se ramène ainsi au cas où le jet est générique, ce qui achève la preuve.

DÉFINITION . — *Appelons N un majorant du nombre d'opérations élémentaires.*

Nous allons évaluer N en fonction du polygone du Newton associé à X (sect. 3, théorèmes 1 et 2). Puis en fonction de la codimension de X, ρ (sect. 3, théorème 3).

3.1.2 Cas des germes obtenus après au moins un éclatement

LEMME 13. — *Soit Y un élément de $\mathcal{C}_k$, $n \leq k$, de polygone de Newton associé $\mathcal{P}'$. Si S est l'ordonnée dominante de $\mathcal{P}'$, Y est désingularisé en au plus $2S - 1$ éclatements.*

Preuve. — Par récurrence sur S. On sait que $\mathcal{P}'$ n'a pas de point d'abscisse -1.

$S \geq 1$, parce que Y est un germe dont la singularité $(0, 0)$ est non élémentaire. Si $S = 1$, le lemme 12 prouve le résultat.

Supposons que si $S \leq S_0$, le résultat est vrai. Si $S_0 + 1$ est l'ordonnée dominante de $\mathcal{P}'$, appliquons un éclatement à Y.

$\mathcal{C}_{k+1}$ contient, outre des germes de $\mathcal{C}_k$, des germes que nous noterons $Z_1, \ldots, Z_p$, $1 \leq p$. Désingulariser Y revient à désingulariser $Z_1, \ldots, Z_p$, c'est-à-dire à considérer $\mathcal{C}'_0 = \{Y\}$, $\mathcal{C}'_1 = \{Z_1, \ldots, Z_p\}$ si $p \geq 1$. Les polygones de Newton associés aux Z_i ont des ordonnées dominantes $S_1, \ldots, S_p$.

Si $\mathcal{P}'$ a un seul côté utile γ', $\mathcal{C}'_1$ ne contient que des germes obtenus après translation en des singularités non élémentaires.

Soient $(0, y_i)$, $y_i \neq 0$, ces singularités de multiplicité μ_i. D'après la proposition du paragraphe 2.5.5 :

$$\mu_i \leq S_0 .$$

Or $S_i \leq \mu_i$ d'après le lemme 3.

Par hypothèse de récurrence, Z_i est désingularisé en $2S_i - 1 \leq 2\mu_i - 1$ éclatements au plus.

Comme $\sum \mu_i \leq h_{\gamma'} \leq S_0 + 1$ (lemme 2), Y est désingularisé en au plus :

$$1 + \sum_1^p (2\mu_i - 1) \leq 1 + 2(S_0 + 1) - p \text{ éclatements}.$$

Si $p \geq 2$, $1 - p \leq -1$ et le résultat est montré.

Si $p = 1$, Z_1 est désingularisé en au plus $2S_0 - 1$ éclatements, et Y en $1 + 2S_0 - 1 < 2(S_0 + 1) - 1$ éclatements et le résultat est montré.

Si $\mathcal{P}'$ a au moins deux côtés utiles, $s' \geq 1$ et $(0,0)$ est singularité non élémentaire de $\overline{Y}$, d'après la proposition 1.3.6 (fig. 23).

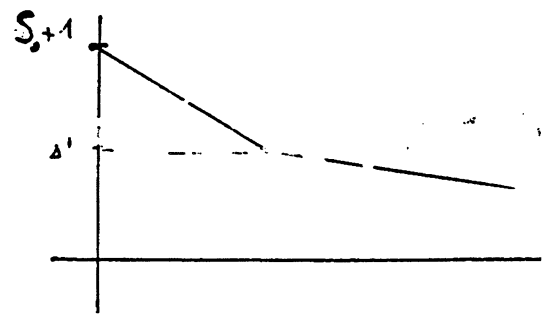


Fig. 23

Soit $Z_p = (\overline{Y}, (0,0))$; avec les mêmes notations, $S_p = s' \leq S_0$.

Si $p = 1$, le résultat est prouvé ; désingulariser Y revient à désingulariser Z_1.

Si $p \geq 2$, Z_i, $1 \leq i \leq p-1$, est obtenu en translatant $\overline{Y}$ en $(0, y_i)$, $y_i \neq 0$ de multiplicité μ_i, où

$$\sum_1^{p-1} \mu_i \leq h_{\gamma'} \leq S_0 + 1 - s',$$

et chaque $\mu_i \leq S_0$ (prop. § 2.5.5).

Donc Y est désingularisé en au plus $1 + \sum(2\mu_i - 1) + 2s' - 1$, majoré par $2(S_0 + 1 - s') + 2s' - (p-1) \leq 2(S_0 + 1) - 1$ éclatements et le lemme est montré.

Remarque. — L'inégalité n'est une égalité que si $p = 2$, $S_1 + S_2 = S_0 + 1$.

3.1.3 Majoration de N à l'aide du polygone de Newton

Nous donnons deux résultats, le premier plus précis, le deuxième évalué immédiatement à l'aide du polygone de Newton initial.

THÉORÈME 1. — *Soit X un germe singulier, à singularité algébriquement isolée. Soit $\mathcal{P}$ son polygone de Newton dans des coordonnées (x, y), comportant n côtés utiles.*

Soit M la multiplicité totale du jet associé à $\mathcal{P}$. Désignons par m le nombre des éléments de $\mathcal{C}_n$:

$$N \leq n + 2M - m\,.$$

Preuve. — Effectuons les n premiers éclatements successifs :

$$\mathcal{C}_n = \{X_1, \ldots, X_n\}\,,$$

les X_i, $1 \leq i \leq m$, étant obtenus par translation en $(0, y_i)$ de $\overline{X}^k$, $y_i \neq 0$, pour un certain k, $1 \leq k \leq n$.

Soit S_1 l'ordonnée dominante du polygone de Newton associé à X_1. D'après le lemme 13, X_i est désingularisé en au plus $2S_i - 1$ éclatements. Or $S_i \leq \mu_i$ (lemme 3). D'où :

$$N \leq n + \sum_1^m (2\mu_i - 1) \leq n + 2M - m \quad \text{car } \sum \mu_i \leq M\,.$$

THÉORÈME 2

$$N \leq 2H\,.$$

Preuve. — Ce théorème est une conséquence du précédent. On sait que $M \leq H$, hauteur totale (prop. 2.3.3). De plus, $n \leq H$: un côté est au moins de hauteur 1.

Soit n_0 le nombre de côtés du polygone de Newton dont les jets associés sont génériques, ou n'ont après éclatement que des singularités élémentaires.

Soit H_0 la somme des hauteurs de ces côtés. Soit n_1 le nombre des autres côtés, H_1 la somme de leurs hauteurs :

$$\begin{cases} n = n_0 + n_1 \\ H = H_0 + H_1 . \end{cases}$$

Comme la hauteur d'un côté est au moins 1, $n_0 \leq H_0$. Par définition de n_1, $n_1 \leq m$. $M \leq H_1$ (lemme 1). Donc

$$\begin{aligned} N &\leq n - m + 2M \\ &\leq n_0 + (n_1 - m) + 2M . \end{aligned}$$

Or

$$M \leq H_1 \leq H - H_0 \quad \text{et} \quad n_0 - 2H_0 \leq n_0 - H_0 \leq 0 ,$$

d'où :

$$\begin{aligned} N &\leq n_0 + 2(H - H_0) \\ &\leq 2H \end{aligned}$$

Dans l'exemple de 2.1.2, $n = 3$, $M = 5$ et $m = 3$; $H = 6$. Ce germe est désingularisé en $7 \leq 10 \leq 12$ éclatements.

Dans le cas générique, $N = n \leq H$.

Exemple où $N = 3H/2 + 1$ (fig. 24).

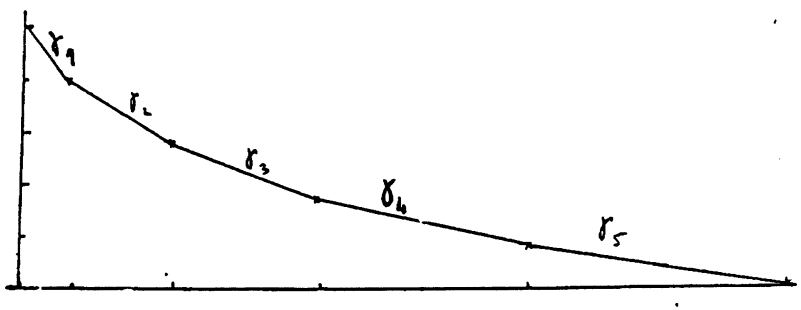


Fig. 24

$\mathcal{P}$ comporte n côtés utiles γ_i, de hauteur 1, de type de quasi-homogénéité $(1, i)$, $1 \leq i \leq n$, $n = 2p + 1$.

Pour $1 \leq i \leq n$, prenons $X_{\gamma_{2i+1}}$ dicritique :

$$X = \sum_{i=1}^{p} X_{\gamma_{2i+1}} + Y ,$$

où Y est choisi de façon que X soit à singularité algébriquement isolée.

Choisissons :

$$\widetilde{P}_{\gamma_{2i+1}} = y - x = \widetilde{Q}_{\gamma_{2i+1}} .$$

On effectue d'abord les n premiers éclatements successifs : $\mathcal{C}_n$ contient p germes, singularités $(0,1)$ de $\overline{X}^{2i+1}$, car $X_{\gamma_{2i+1}}$ est dicritique.

Comme $S_k = 1$, $1 \leq k \leq p$, X est désingularisé en : $n + p = 3H/2 + 1$ éclatements.

3.1.4 Majoration de N à l'aide de la codimension ρ de X

THÉORÈME 3. — *Il existe une fonction de ρ qui majore N :*

$$N \leq 4 + 2\sqrt{\rho} .$$

Preuve. — Soit ν l'ordre du jet. Les jets d'ordre 1 à $\nu - 1$ sont nuls :

$$\rho \geq 2(2 + \cdots + \nu) \geq \nu^2 + \nu - 2 .$$

Dans le polygone de Newton figure au moins un point associé à un monôme de ce jet.

Ses coordonnées (r, s) vérifient $r + s = \nu - 1$. Or les coordonnées des points du polygone de Newton sont entières : ou leur abscisse est inférieure à r, ou leur ordonnée est inférieure à s. Le polygone de Newton comporte au plus $(r + 1) + 1 + (s + 1) = \nu + 2$ points :

$$H \leq \nu + 1 .$$

D'où $\rho \geq H^2 - H - 2$. Donc

$$H \leq \frac{1 + \sqrt{9 + 4\rho}}{2}$$

et

$$N \leq 2H \leq 1 + \sqrt{9 + 4\rho} \leq 4 + 2\sqrt{\rho} .$$

3.2 Nombre de changements de coordonnées

3.2.1 Exemple de germe dont la désingularisation utilise des changements de coordonnées admissibles

$$X = \frac{1}{2}(y + x^2)\left(y - \sum_0^n x^{k+2}\right)^2 y\frac{\partial}{\partial y} + x^{T'}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + 2y\frac{\partial}{\partial y}\right) ,$$

T' suffisamment grand sera précisé ultérieurement. Le côté γ est de type de quasi-homogénéité $(1,2)$, de hauteur 3.

$$\overline{X} = \frac{1}{2}(y+1)\left(y - \sum_0^n x^k\right)^2 y\frac{\partial}{\partial y} + x^{T'-5}\frac{\partial}{\partial x}.$$

$(0,1)$ est une singularité non élémentaire; $\overline{X}$ se translate en :

$$Y = (y - x - x^2 - \cdots - x^n)^2 \frac{\partial}{\partial y} + x^T \frac{\partial}{\partial x} + \frac{y}{2}(3+y)(y - x - \cdots - x^n)^2 \frac{\partial}{\partial y},$$

en posant $T = T' - 5$.

Éclatons Y par $E_{1,1}$:

$$\overline{Y} = (y - 1 - x - \cdots - x^{n-1})^2 \frac{\partial}{\partial y} + \cdots$$

qui se translate en

$$Y_2 = (y - x - \cdots - x^{n-1})^2 \frac{\partial}{\partial y} + \cdots$$

et on voit qu'il faut au moins n éclatements.

Changements de coordonneées.— $\widehat{P} = 0$ et $\widehat{Q} = (y-1)^2$. Utilisons $\psi_1 : (x,y) \mapsto (x\,,\, y+x)$:

$$Y = (y - x - \cdots - x^n)^2 \frac{\partial}{\partial y} + \\ + \frac{y-x}{2}(3 + y - x)(y - x - \cdots - x^n)^2 \frac{\partial}{\partial y} + x^T \frac{\partial}{\partial x} - x^T \frac{\partial}{\partial y}.$$

Son polygone de Newton comporte un côté, de type de quasi-homogénéité $(1,2)$; il est de hauteur 2 si $T \geq 5$.

À nouveau $\widehat{P} = 0$ et $\widehat{Q} = (y-1)^2$, il faut recommencer. On applique donc $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ avec $\psi_k : (x,y) \mapsto (x\,,\, y + x^k)$, $1 \leq k \leq n$. Soit $\Psi = \psi_n \circ \cdots \circ \psi_n : Y = \Psi^* Z$, où :

$$Z = y^2 \frac{\partial}{\partial y} + \frac{(y + x + \cdots + x^n)}{2}(3 + y + x + \cdots + x^n) y^2 \frac{\partial}{\partial y} + x^T \frac{\partial}{\partial x} + \\ - (x^T + 2x^{T+1} + \cdots + n x^{T+n-1}) \frac{\partial}{\partial y}.$$

Son polygone de Newton a un côté utile de type de quasi-homogénéité proportionnel à $(2,T)$ si $T \geq 2n+1$, soit si $T' \geq 2n+6$.

3.2.2 Formes normales admissibles au sens large

Nous avons vu que les changements de coordonnées admissibles au sens large forment un groupe de Lie, que nous allons faire agir sur les germes de champs de vecteurs.

Soit X singulier en $(0,0)$, $\mathcal{P}$ son polygone de Newton d'ordonnée dominante S. Nous allons pour cela utiliser la méthode de [T]. Rapppelons tout d'abord le théorème de Takens.

Soit X un germe singulier de champ de vecteur de $\mathbb{R}^n$. Soit X_1 le germe linéaire qui a le même 1-jet que X. On note H^h l'espace vectoriel des germes dont les coefficients sont des polynômes homogènes de degré h (les éléments de H^h sont de degré d'homogénéité $h-1$). L'application :

$$\begin{aligned} [X_1, \cdot]_h : H^h &\longrightarrow H^h \\ Y &\longmapsto [X_1, Y] \end{aligned}$$

est une application linéaire.

On définit une décomposition :

$$H^h = B^h + G^h ,$$

où $B^h = \mathrm{Im}[X_1, \cdot]_h$ et G^h est un supplémentaire de B^h.

THÉORÈME .— *Soient X, X_1, B^h et G^h comme ci-dessus. Alors, pour $\ell \leq k$, il existe un germe de difféomorphisme $C^\infty \phi$ de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même, fixant l'origine, tel que $\phi^* X = X'$ est de la forme :*

$$X' = X_1 + g_2 + \cdots + g_\ell + R_\ell ,$$

où $g_i \in G^i$, $i = 2, \ldots, \ell$ et R_ℓ est d'ordre ℓ.

LEMME 14.— *Soit X singulier en $(0,0)$. Appelons S l'ordonnée dominante de son polygone de Newton $\mathcal{P}$.*

a) Si A_S est associé au monôme $y^{S+1}(\partial/\partial y)$, un nombre fini de changements de coordonnées admissibles au sens large met le jet de X sous la forme :

$$y^{S+1}\frac{\partial}{\partial y} + \sum_{\substack{r>0 \\ \text{ou} \\ r=0 \text{ et } s\geq S+1}} a_{r,s} x^{r+1} y^s \frac{\partial}{\partial x} + \sum_{\substack{r\geq 1,\ s\leq S-2 \\ \text{ou} \\ r\geq 0,\ s=2S}} x^r y^{s+1} \frac{\partial}{\partial y} .$$

b) Si A_S est associé à

$$xy^S \frac{\partial}{\partial x} + by^{S+1} \frac{\partial}{\partial y},$$

un nombre fini de changements de coordonnées admissibles au sens large met le jet de X sous la forme :

$$xy^S \frac{\partial}{\partial x} + by^{S+1} \frac{\partial}{\partial y} + \sum_{\substack{r\geq 1\,,\ s\leq S-2 \\ \text{ou} \\ r=0\,,\ s\geq S+1}} a_{r,s} x^{r+1} y^s \frac{\partial}{\partial x} + \sum_{\substack{r\geq 1 \\ \text{ou} \\ r=0\,,\ s\geq S+1}} b_{r,s} x^r y^{s+1} \frac{\partial}{\partial y}.$$

Preuve. — Un changement de coordonnées admissible au sens large est défini par :

$$(x, y) \longmapsto \big(x\,,\ y + \lambda x + \phi(x, y)\big),$$

où ϕ est d'ordre au moins 2. Le champ dont ce difféomorphisme est l'action infinitésimale est (voir [M]) :

$$Y = \big(\lambda x + \phi(x, y)\big) \frac{\partial}{\partial y}.$$

Dans le premier cas, calculons :

$$\left[y^{S+1} \frac{\partial}{\partial y}\,,\ x^r y^{s+1} \frac{\partial}{\partial y} \right] = (s - S) x^r y^{s+S+1} \frac{\partial}{\partial y},$$

$(r, s) = (1, -1)$ (ou $r + s \geq 1$) et $s \geq -1$. Ce résultat est non nul si et seulement si $s - S \neq 0$. Les monômes $x^r y^{s+1}(\partial/\partial y)$, $(r, s) = (1\,,\ S - 1)$ ou $(r + s \geq S + 1\,,\ s \geq S - 1\,,\ s \neq 2S)$ appartiennent donc à l'idéal cherché.

Si $r = 1$, la seule condition est $s \geq S$. Si $r \geq 2$, $s \geq S - 1$. Si $r = 0$, $s \geq S + 1$: par hypothèse, $(0, s)$ ne peut être associé au germe que si $s \geq S$. Ceci prouve le a).

Dans le deuxième cas :

$$\left[xy^S \frac{\partial}{\partial x} + by^{S+1} \frac{\partial}{\partial y}\,,\ x^r y^{s+1} \frac{\partial}{\partial y} \right] = = -S x^{r+1} y^{s+S} \frac{\partial}{\partial x} + \big(r + b(s - S)\big) x^r y^{s+S+1} \frac{\partial}{\partial y},$$

où $(r + s \geq 1\,,\ s \geq -1\,,\ r \geq 0)$ ou $(r, s) = (1, -1)$.

Si $r+b(s-S)=0$, on obtient le seul monôme en $\partial/\partial x$, associé à $(r\,,\ s+S)$. Le point associé est toujours $(r\,,\ s+S)$.

Comme supplémentaire de l'idéal, nous choisirons l'espace vectoriel engendré par les monômes $x^r y^{s+1}(\partial/\partial y)$, $r \geq 1$, ou $(r=0\,,\ s \geq S+1)$, et les monômes $x^{r+1} y^s(\partial/\partial x)$, $r \geq 1$, $s \leq S-2$. Ceci prouve le b).

DÉFINITION .— *Ces formes normales seront dites formes normales admissibles au sens large.*

3.2.3 Formes normales admissibles

Les formes normales admissibles au sens large sont celles de jets éventuellement déterminants. Nous ne cherchons ici à normaliser qu'un jet permettant de déterminer en combien d'opérations on peut désingulariser X. D'après la section 2, il suffit de normaliser les quasi-jets de quasi-degré au plus βS dans le type de quasi-homogénéité $(1,\beta)$. Et pour cela, il suffit d'utiliser les changements de coordonnées admissibles.

PROPOSITION .— *Soit S l'ordonnée dominante du polygone de Newton associé au germe singulier $Y \in \mathcal{C}^k$, $k \geq 1$.*

Si A_S est associé à $y^{S+1}(\partial/\partial y)$, le quasi-jet de quasi-degré βS dans le type de quasi-homogénéité $(1,\beta)$ peut, par un changement de coordonnées polynomial de la forme $(x,y) \mapsto \big(x\,,\ y+P(x)\big)$, être mis sous la forme :

$$y^{S+1}\frac{\partial}{\partial y} + \sum_{\substack{s\leq S-1\\ r\geq 1}} a_{r,s}\frac{\partial}{\partial x} + \sum_{\substack{s\leq S-2\\ r\geq 1}} b_{r,s}x^r y^{s+1}\frac{\partial}{\partial y}\,, \quad r+\beta s \leq \beta S\,.$$

Si A_S est associé à $xy^S(\partial/\partial x)+by^S(\partial/\partial y)$, un changement de coordonnées polynomial de la même forme que plus haut met ce même quasi-jet sous la forme :

$$xy^S\frac{\partial}{\partial x} + by^{S+1}\frac{\partial}{\partial y} + \sum_{\substack{s\leq S-2\\ r\geq 1}} a_{r,s}x^{r+1}y^s\frac{\partial}{\partial x} + \sum_{r\geq 1} b_{r,s}x^r y^{s+1}\frac{\partial}{\partial y}\,,$$

$r+\beta s \leq \beta S$.

Preuve.— Un changement de coordonnées admissible élémentaire est l'action infinitésimale du germe (voir [M]) :

$$Y = x^\beta\frac{\partial}{\partial y}\,.$$

Si A_S est associé au seul monôme $y^{S+1}(\partial/\partial y)$,

$$\left[y^{S+1}\frac{\partial}{\partial y}\,,\,x^{\beta}\frac{\partial}{\partial y}\right] = -(S+1)y^{S}x^{\beta}\frac{\partial}{\partial y}\,,$$

non nul car $S \geq 1$.

Si A_S est associé à $xy^S(\partial/\partial x) + by^{S+1}(\partial/\partial y)$:

$$\left[xy^{S}\frac{\partial}{\partial x} + by^{S+1}\frac{\partial}{\partial y}\,,\,x^{\beta}\frac{\partial}{\partial y}\right] = \big(\beta - b(S+1)\big)x^{\beta}y^{S}\frac{\partial}{\partial y} - Sx^{\beta+1}y^{S-1}\frac{\partial}{\partial x}\,.$$

On choisit de normaliser P, ce qui donne la forme normale annoncée.

3.2.4. — Nous pouvons maintenant majorer le nombre de changements de coordonnées admissibles.

THÉORÈME 4. — *Le nombre de changements de coordonnées admissibles effectués au cours de la désingularisation de X est au plus $\rho/3$, ρ désignant la codimension du germe.*

Preuve. — Dans le cas où A_S est associé au seul monôme $y^{S+1}(\partial/\partial y)$, d'après les lemmes 8 et 9, on n'effectue un changement de coordonnées admissible $(x,y) \mapsto (x\,,\,y+\lambda x^{\beta})$ que si le quasi-jet de type de quasi-homogénéité $(1,\beta)$ peut être mis sous la forme normale $y^{S+1}(\partial/\partial y)$. Ceci implique que les monômes $a_{r,s}y^s(\partial/\partial x)$ de cette forme normale sont nuls, $0 \leq s \leq S-1$, $r+\beta s \leq \beta S$, $r \geq 1$; ainsi que les monômes $b_{r,s}x^r y^{s+1}(\partial/\partial y)$, $-1 \leq s \leq S-2$, $r+\beta s \leq \beta S$, $r \geq 1$.

Si on effectue K changements de coordonnées admissibles, comme dans les lemmes 8 à 11, nécessairement, les quasi-jets $(1,\beta)$, $\beta \leq K$ peuvent être mis sous la forme normale $y^{S+1}(\partial/\partial y)$. D'où

$$\begin{aligned}\rho &\geq K + 2K + \cdots + SK + \big(2K + \cdots + (S+1)K\big)\\ &\geq K(S+1)^2\,.\end{aligned}$$

Dans le deuxième cas, on procède de la même façon. Les conditions sur la première composante impliquent que :

$$\rho \geq 2K + \cdots + KS\,.$$

Celles sur la deuxième composante impliquent que

$$\rho \geq K + \cdots + KS + K(S+1)\,.$$

Ces conditions sont simultanément vérifiées. D'où

$$\begin{aligned}\rho &\geq K\left(\frac{S(S+1)}{2} - 1 + \frac{(S+1)(S+2)}{2}\right)\\ &\geq \frac{K}{2}(S^2 + S + S^2 + 3S)\\ &\geq \frac{K}{2}S(2S+3)\,.\end{aligned}$$

Comme $S \geq 1$,

$$(S+1)^2 \geq 4 \quad \text{et} \quad \frac{S(2S+3)}{2} \geq 3\,.$$

Donc $\rho \geq 3K$.

Remerciements

Mes remerciements vont à M. Roussarie, qui m'a guidée tout au long de ce travail, et à l'administration du Lycée du Clos-Maire qui en a facilité la réalisation.

Bibliographie

[AGV] Arnold (V. I.), Goussein-Zade (S. M.) et Varchenko (A. N.) .— *Singularities of differentiables maps* (Tome 1), MIR Moscou (1986).

[B] Brunella (M.) .— *Topological equivalence of a plane vector field with its principal part defined through Newton polyedra*, Preprint (1987).

[Br] Bruno (A. D.) .— *Local methods in nonlinear differential equations*, Springer Verlag (1989).

[DR] Denkowska (Z.) et Roussarie (R.) .— *A method of desingularisation for analytic two-dimensional vector-field families*, Bol. Soc. Mat. **22**, n° 1, pp. 93-126.

[D] Dumortier (F.) .— *Singularities of vector fields on the plane*, J. of Diff. Equations **23**, n° 1 (1977), pp. 53-106.

[M] Martinet (J.) .— *Singularités des fonctions et applications différentiables*, Monografias de Matematica da PUC/RJ **1**.

[MM] Mattei (J.-F.) et Moussu (R.) .— *Holonomie et intégrales premières*, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 4ème Série, **13** (1980), pp. 469-523.

[T] Takens (F.) .— *Singularities of vector fields*, Publ. Math. IHES **43** (1974), pp. 47-100,

[VE] Van den Essen (A.) .— *Reduction of singularities of the differential equation* $A\,dy = B\,dx$, L. Notes in Math. **712** (1979), pp. 44-60.