ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

GAËL MEIGNIEZ

Feuilletages de Lie résolubles

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 6e série, tome 4, nº 4 (1995), p. 801-817

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1995_6_4_4_801_0>

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse Vol. IV, n° 4, 1995

Feuilletages de Lie résolubles(*)

GAËL MEIGNIEZ(1)

RÉSUMÉ. — On construit, sur des variétés compactes, des feuilletages de Lie dont le groupe transverse est résoluble, mais dont le groupe d'holonomie n'est pas polycyclique.

ABSTRACT. — We build Lie foliations with solvable transverse group, but nonpolycyclic holonomy group, on compact manifolds.

1. Introduction

Soit G un groupe de Lie(2). Un feuilletage d'une variété différentielle compacte M est dit *de Lie* et *de groupe transverse* G, ou plus brièvement G*-feuilletage*, s'il est défini par des submersions d'ouverts de M sur des ouverts de G, les "cartes transverses", telles que chaque changement de carte est une translation à gauche du groupe G (voir [F]).

Par exemple, étant donnés une suite exacte courte de groupes de Lie $1 \to F \to H \to G \to 1$, et un réseau (sous-groupe discret de covolume fini) cocompact Γ_H dans H, les images dans H/Γ_H des classes modulo F sont les feuilles d'un G-feuilletage. On le qualifie d'homogène.

On peut multiplier les exemples par image inverse (étant donnés une application différentiable entre variétés compactes $f : M \to N$ et un G-feuilletage $\mathcal{F}$ sur N, si f est transverse à $\mathcal{F}$ alors l'image inverse de $\mathcal{F}$ par f est un nouveau G-feuilletage) ou par suspension (autre procédé

(*) Reçu le 9 février 1994

(1) Institut Girard Desargues, Université Claude Bernard, 43 bd du 11-Novembre-1918, F-69622 Villeurbanne Cedex (France); meigniez@josas.univ-lyon1.fr

(2) Dans cet article, ces mots signifient "groupe de Lie réel simplement connexe". Variétés et revêtements sont implicitement supposés connexes. On se place dans la classe de différentiabilité C^r, $1 \leq r \leq \infty$, que le lecteur préfère.

élémentaire) ([Hae1], [G2]). L'objet principal du présent article est de construire des feuilletages de Lie qui ne puissent pas être obtenus par ces procédés élémentaires.

Le groupe transverse de nos exemples sera résoluble. Soit donc désormais G un groupe de Lie *résoluble* quelconque.

Rappelons qu'à chaque G-feuilletage on associe son *groupe d'holonomie* Γ. C'est un sous-groupe de G, de type fini, uniforme (on entend par là que la fermeture de Γ est cocompacte dans G) mais non discret en général (sect. 2). Par exemple le groupe d'holonomie d'un G-feuilletage homogène est (avec les notations précédentes) l'image de Γ_H dans G.

Dans une première partie (sect. 3 et 4), nous tenterons de caractériser pratiquement les groupes d'holonomie des G-feuilletages homogènes, et des G-feuilletages classifiants.

Suivant [Hae1], on qualifie un feuilletage $\mathcal{F}$ de *classifiant* si le revêtement d'holonomie de chaque feuille est contractile. Si c'est un G-feuilletage, cela veut dire que les feuilles elles-mêmes sont contractiles, puisqu'elles sont sans holonomie. Ce qualificatif exprime la propriété universelle suivante (Haefliger) : *si $\mathcal{F}$ est classifiant, alors tout autre G-feuilletage ayant le même groupe d'holonomie (ou plus généralement, ayant pour groupe d'holonomie un sous-groupe de celui de $\mathcal{F}$) est une image inverse de $\mathcal{F}$.*

Voici les résultats de cette première partie.

PROPOSITION .— *Soit dans G un sous-groupe de type fini uniforme Γ.*

S'il est virtuellement groupe d'holonomie d'un G-feuilletage homogène ou classifiant, alors il est polycyclique.

S'il est polycyclique, alors il est virtuellement groupe d'holonomie d'un G-feuilletage classifiant.

S'il est polycyclique et dense, alors il est virtuellement groupe d'holonomie d'un G-feuilletage homogène.

Rappelons qu'on dit qu'un groupe vérifie *virtuellement* une certaine propriété si un de ses sous-groupes d'indice fini la vérifie. Un groupe est *polycyclique* s'il admet une suite de composition à quotients cycliques. Nous donnerons un critère pratique de polycyclicité : soit $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ une partie génératrice finie de Γ. Alors Γ *est polycyclique si et seulement si les racines des γ_i sont des unités algébriques.*

(Les racines d'un élément de G sont les valeurs propres de son adjoint. Une unité algébrique est un nombre complexe non nul qui est un entier algébrique sur $\mathbb{Z}$ ainsi que son inverse.)

Ainsi nous obtenons une caractérisation virtuelle très pratique des groupes d'holonomie des G-feuilletages classifiants. Pour les feuilletages homogènes nous obtenons seulement une condition nécessaire et une condition suffisante proches mais distinctes. Quant à ses méthodes, cette première partie est essentiellement une application des propriétés classiques des groupes de Lie résolubles, de leurs réseaux, et des groupes polycycliques, dues à Auslander, Bieri, Chevalley, Mostow, Raghunathan — ainsi que des résultats de [Me2].

Dans le cadre résoluble les procédés de suspension ne s'appliquent pas : tous les G-feuilletages connus jusqu'à présent étaient image inverse d'un G-feuilletage homogène. En particulier leur groupe d'holonomie était polycyclique. Par contre, le résultat principal de notre seconde partie énonce que, pour être groupe d'holonomie d'un G-feuilletage, il suffit de contenir un sous-groupe polycyclique uniforme.

THÉORÈME .— *Si un sous-groupe Γ de G est de type fini et contient un sous-groupe à la fois polycyclique et uniforme, alors Γ est groupe d'holonomie d'un G-feuilletage.*

On ne sait pas si la réciproque est vraie (voir la section 7 pour une discussion).

Pour comprendre les implications de cet énoncé, appliquons-le à un cas simple : dans $\mathrm{GA}_+(1,\mathbb{R})$, groupe affine de la droite réelle, soit, pour chaque couple (λ,μ) de réels strictement positifs et différents de 1, le sous-groupe $\Gamma_{\lambda,\mu}$ engendré par les homothéties $x \mapsto \lambda x$ et $x \mapsto \mu x + 1$. D'après notre théorème, si λ est une unité algébrique, alors ce groupe est groupe d'holonomie d'un $(\mathrm{GA}_+(1,\mathbb{R}))$-feuilletage $\mathcal{F}_{\lambda,\mu}$. En effet, $\Gamma_{\lambda,\mu}$ contient le sous-groupe engendré par $x \mapsto \lambda x$ et $x \mapsto x + (\lambda-1)(\mu-1)$ qui est polycyclique et uniforme. Mais si μ n'est pas une unité algébrique, ce feuilletage ne peut s'obtenir comme image inverse d'un $(\mathrm{GA}_+(1,\mathbb{R}))$-feuilletage homogène, ni classifiant. Le cas où μ est transcendant mérite attention :

1) $\Gamma_{\lambda,\mu}$ est de dimension cohomologique infinie (il contient un sous-groupe abélien libre de rang infini), donc son classifiant de Haefliger est nécessairement de dimension infinie; ceci détruit la "conjecture optimiste" de [G2] — du moins, pour les groupes de Lie *résolubles*;

2) $\Gamma_{\lambda,\mu}$ n'est pas de présentation finie (appliquer le critère de Bieri-Strebel [BS]) : ce groupe d'holonomie répond par la négative à toutes les questions de [G1];

3) le feuilletage $\mathcal{F}_{\lambda,\mu}$ est éminemment déformable : soient M la variété qui le porte, et $\rho : \pi_1(M) \longrightarrow \Gamma_{\lambda,\mu}$ sa représentation d'holonomie; on vérifie aisément que quel que soit $\tau > 0$, il existe un homomorphisme de groupes $\phi^\tau : \Gamma_{\lambda,\mu} \to \Gamma_{\lambda,\tau}$ envoyant $x \mapsto \lambda x$ sur lui-même et $x \mapsto \mu x+1$ sur $x \mapsto \tau x + 1$; on obtient ainsi une famille continue à un paramètre $\{\phi^\tau \circ \rho\}$ d'homomorphismes de $\pi_1(M)$ dans $GA_+(1,\mathbb{R})$; d'après le "lemme de déformation" bien connu pour ce type de feuilletages, il existe sur M une famille continue à un paramètre $\{\mathcal{F}_\tau\}_{\tau\in]\mu-\varepsilon,\mu+\varepsilon[}$ de $GA_+(1,\mathbb{R})$-feuilletages, telle que $\mathcal{F}^\mu = \mathcal{F}_{\lambda,\mu}$ et que chaque $\mathcal{F}^\tau$ a $\Gamma_{\lambda,\tau}$ comme groupe d'holonomie (nous adaptons ici un raisonnement de [G1]).

Quant aux méthodes, ces feuilletages sont obtenus à partir des feuilletages classifiants que fournit la première partie, en leur appliquant des opérations de coupure et de collage le long de sous-variétés transverses.

2. Développements d'un feuilletage

La démonstration de notre théorème principal repose sur l'exploitation d'un phénomène de conjugaison. Malheureusement les outils d'étude des feuilletages de Lie, dus à Ehresmann : revêtement d'holonomie, application développante, groupe d'holonomie, sont en général compris à conjugaison près. Il nous faut donc les redéfinir en accordant une attention particulière aux problèmes de conjugaison. C'est l'objet de ce paragraphe préliminaire.

Soit une variété M, compacte ou non : dans ce paragraphe et lui seul, les variétés feuilletées peuvent ne pas être compactes. Un *G-atlas* est un ensemble de submersions $f_i : U_i \to G$, les *cartes transverses*, tel que les U_i forment un recouvrement ouvert de M et que sur chaque intersection $U_i \cap U_j$ il existe $g_{ij} \in G$ tel que $f_i = g_{ij} f_i$. Un *G-feuilletage* est un G-atlas maximal.

On dit qu'une application différentiable $f : M \to N$, est *transverse* à un G-feuilletage $\mathcal{F}$ de N si en chaque point $f(x)$ l'espace tangent à N est somme de l'image de la différentielle de f en x et de l'espace tangent à $\mathcal{F}$ en $f(x)$, ces deux sous-espaces vectoriels pouvant avoir une intersection non nulle. Dans ce cas l'image inverse $f^*(\mathcal{F})$ est par définition le G-feuilletage de M qui admet pour atlas l'ensemble des $f_i \circ f$, $f_i \in \mathcal{F}$.

Une *trivialisation* du G-feuilletage $\mathcal{F}$ de M est un couple $(\overline{M}, D)$, où $p : \overline{M} \to M$ est un revêtement galoisien, et $D : \overline{M} \to G$ est une carte du G-feuilletage $p^*(\mathcal{F})$ définie sur $\overline{M}$ tout entier : l'*application développante*. Il est évident que feuilletage et revêtement étant fixés, s'il existe une application développante D alors les autres sont les $gD : x \mapsto D(x)$, où g parcourt G. En particulier pour chaque γ appartenant à $\mathrm{Gal}(\overline{M})$, groupe des automorphismes du revêtement, il existe $g \in G$ tel que $D \circ \gamma = gD$. On obtient ainsi un homomorphisme du groupe $\mathrm{Gal}(\overline{M})$ dans G : la *représentation d'holonomie* de la trivialisation. Son image Γ est le *groupe d'holonomie* de la trivialisation.

Si M est compacte, alors Γ est évidemment de type fini. De plus, l'application développante est alors une fibration de $\overline{M}$ sur G (Hermann-Reinhart [He], [Re]). Elle passe évidemment au quotient en une fibration de M sur $G/\overline{\Gamma}$, ce qui démontre que Γ est uniforme.

Si la représentation d'holonomie de $(\overline{M}, D)$ est ρ, alors celle de $(\overline{M}, gD)$ est $g\rho g^{-1}$.

Un *développement* est une trivialisation dont la représentation d'holonomie est injective. De façon équivalente, chaque fibre de D se projette difféomorphiquement sur une feuille de $\mathcal{F}$. On qualifie alors $\overline{M}$ de *revêtement d'holonomie* du feuilletage. Tout feuilletage de Lie admet un développement. En effet, l'espace des germes de cartes transverses est un G_δ-fibré principal; on prend pour revêtement l'une quelconque de ses composantes connexes et pour application développante celle qui au germe de f au point x fait correspondre $f(x)$.

Nous aurons par exemple besoin de l'énoncé suivant, qui précise (très légèrement!) la propriété universelle des feuilletages classifiants.

LEMME .— *Soient deux G-feuilletages : $\mathcal{M}$ sur la variété M et $\mathcal{N}$ sur N. Soient deux développements $(\overline{M}, D_M)$, $(\overline{N}, D_N)$. Si le groupe d'holonomie de $(\overline{M}, D_M)$ est contenu dans celui de $(\overline{N}, D_N)$ et si $\mathcal{N}$ est classifiant, alors il existe une application différentiable $f : M \to N$ et un relèvement $\overline{f} : \overline{M} \to \overline{N}$ tel que $D_M = D_N \circ f$.*

(En particulier f est transverse à $\mathcal{N}$ et $\mathcal{M} = f^*(\mathcal{N})$.)

En effet, soit $E = \{(x, y) \in \overline{M} \times \overline{N} \mid D_M(x) = D_N(y)\}$ le produit fibré des revêtements d'holonomie au-dessus de G. Le groupe $\mathrm{Gal}(\overline{M})$ opère sur $\overline{N}$ par la représentation d'holonomie de $(\overline{M}, D_M)$ suivie de l'inverse de celle de $(\overline{N}, D_N)$. Munissons E de l'action diagonale de ce groupe et regardons le quotient $E/\operatorname{Gal}(\overline{M})$ comme fibré de base M. Sa fibre n'est autre que la fibre de D_N : elle est contractile. Toute section différentiable de ce fibré fournit de façon évidente les applications demandées.

3. Critère de polycyclicité

Soit dans G un sous-groupe uniforme Γ, ayant une partie génératrice finie $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$.

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) Γ *est polycyclique ;*

ii) Γ *contient un sous-groupe* Π *polycyclique, normal dans* Γ *et uniforme dans* G *(cette propriété nous sera utile à la section 4) ;*

iii) les racines de γ_i *sont des unités algébriques.*

Il est clair que i) implique ii). Montrons que ii) implique iii).

Rappelons qu'on appelle *sous-groupe intégral* de G tout sous-groupe de Lie connexe. Il est alors également fermé (Chevalley [Ch]). Disons qu'une suite de composition.

$$1 = G_n \subset G_{n-1} \subset \cdots \subset G_0 = G$$

formée de sous-groupes intégraux et normaux dans G, et à quotients abéliens, est adaptée à un sous-groupe Π si $\Pi \cap G_i$ est uniforme dans G_i, pour chaque i. De façon équivalente, $\Pi \cap G_i / \Pi \cap G_{i+1}$ est uniforme dans $G_i \in G_{i+1}$, pour chaque i. Du fait que Π est uniforme, une telle suite existe : il suffit de prendre pour G_1 la composante neutre de la fermeture de $\Pi \mathrm{D}(G)$ (pour chaque groupe X, la notation $\mathrm{D}(X)$ désigne le sous-groupe dérivé $[X, X]$ engendré par les commutateurs), puis $G_2 = \mathrm{D}(G_1)$, et ensuite les termes de la suite centrale descendante de G_2, définie par la relation de récurrence $G_{i+1} = [G_2, G_i]$. Cette suite est adaptée à Π, en vertu par exemple de [Mo, §5, lemme 5] et [R, théorème 2.3, corol. 1] ou de [Me2].

Comme Π est polycyclique, $\Pi \cap G_i$ est de type fini. Après projection dans G_i/G_{i+1}, puis relèvement par l'application exponentielle de g_i/g_{i+1} (algèbres de Lie de G_i et G_{i+1}) sur G_i/G_{i+1}, on obtient dans g_i/g_{i+1} un sous-groupe additif de type fini, uniforme, et invariant par $\mathrm{Ad}(\Gamma)$. Donc les valeurs propres des éléments de $\mathrm{Ad}(\Gamma)$ correspondant à l'action sur g_i/g_{i+1}

sont des unités algébriques. Ceci étant vrai de chaque i, les racines des éléments de Γ sont des unités algébriques.

Montrons enfin que iii) implique i) : supposons que les racines de $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ sont des unités algébriques. Les racines s'organisent, en vertu du théorème de Lie pour les groupes résolubles, en des homomorphismes de groupes $\rho_1, \ldots, \rho_d$ de G dans $\mathbb{C}^*$ (où d est la dimension de G). Chaque racine ρ_i, restreinte à Γ, s'étend en un homomorphisme d'anneaux de $\mathbb{Z}[\Gamma]$, anneau du groupe Γ, dans $\mathbb{C}$. Son image $\mathbb{Z}\left[\rho_i(\gamma_1), \ldots, \rho_i(\gamma_n)\right]$ est de type fini comme groupe abélien. On en déduit que $\mathbb{Z}[\Gamma/N]$, où $N = \Gamma \cap \ker(\rho_1) \cap \cdots \cap \ker(\rho_d)$ désigne le sous-groupe de Γ formé des éléments d'adjoint unipotent, est de type fini comme groupe abélien. Par ailleurs N contient Γ' et on en déduit aisément que N/N' est un $\mathbb{Z}[\Gamma/N]$-module de type fini. Au total N/N' est un groupe de type fini. Comme N est nilpotent, ceci implique qu'il est lui-même de type fini. Voir par exemple [Hal]. Donc Γ, extension d'un groupe nilpotent de type fini par un groupe abélien de type fini, est polycyclique.

4. Groupe d'holonomie des feuilletages homogènes ou classifiants

Soient d'abord une suite exacte courte de groupes de Lie $1 \to F \to H \to G \to 1$ et un réseau cocompact Γ_H dans H. Que dire de l'image Γ de Γ_H dans G?

Désignons par R le radical résoluble de H par R_1 la composante connexe neutre de la fermeture de $\Gamma_H R$: c'est un groupe résoluble (Auslander; voir [R, théorème 8.24]). Il est évident que $H = FR_1$, que R_1 est normalisé par Γ_H et que $\Gamma_H \cap R_1$ est un réseau dans R_1. Dans un groupe de Lie résoluble, un réseau est toujours polycyclique et cocompact (Mostow; voir [Me], [Mo] ou [R]). On en déduit, en considérant les images dans G, que Γ contient un sous-groupe à la fois normal, polycyclique et uniforme dans G. Le critère de la section 3 fournit une première conclusion : Γ est *polycyclique*.

Nous pouvons tirer une autre conclusion. Pour chaque groupe de Lie X, notons $N(X)$ le radical nilpotent de X: c'est le sous-groupe intégral normal nilpotent maximal. L'intersection de Γ_H et $N(R_1)$ est un réseau de $N(R_1)$ (Mostow; voir [Me2], [Mo] ou [R]). On en conclut, en considérant les images dans G, que *G possède un sous-groupe intégral N compris entre $D(G)$ et $N(G)$ tel que $\Gamma \cap N$ est uniforme dans N.*

Ces deux conclusions s'étendent évidemment au cas où Γ n'est que virtuellement groupe d'holonomie d'un G-feuilletage homogène (la première, parce que tout groupe résoluble et virtuellement polycyclique est polycyclique).

Exemple.— Voici l'exemple le plus simple de sous-groupe polycyclique uniforme d'un groupe de Lie résoluble pour lequel il n'existe pas de groupe N comme ci-dessus, et qui donc ne peut pas être virtuellement groupe d'holonomie d'un G-feuilletage homogène.

Soit $G = \{(x, y, z, s, t)\}$ le produit semi-direct de $\mathbb{R}^3$ par $\mathbb{R}^2$, le second opérant sur le premier par :

$$(s,t) \cdot (x, y, z) = \big(e^s x \, , \, \cos(2\pi t)y - \sin(2\pi t)z \, , \, \sin(2\pi t)y + \cos(2\pi t)z\big) \, .$$

Choisissons trois unités algébriques réelles positives λ, μ et ν, dont les logarithmes sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$; et définissons Γ par les conditions :

$$x \in \mathbb{Z}[\lambda, \mu, \nu] \quad \text{et} \quad y, \ z \in \mathbb{Z} \, ,$$

et

$$s - \log(\lambda)y - \log(\mu)z \in \log(\nu)\mathbb{Z} \quad \text{et} \quad t \in \mathbb{Z} \, .$$

On vérifie immédiatement que c'est un sous-groupe polycyclique de G. On se convainc qu'il est uniforme en considérant par exemple la suite de composition $1 = G_0 \subset G_1 \subset G_2 \subset G_3 = G$, où G_1 est défini par $y = z = s = t = 0$ et G_2 par $t = 0$: il est immédiat que $\Gamma \cap G_1$ est dense dans G_1 et que $\Gamma \cap G_2 / \Gamma \cap G_1$ est un réseau dans G_2/G_1 ainsi que $\Gamma \cap G_3 / \Gamma \cap G_2$ dans G_3/G_2 : cette suite est adaptée à Γ. En particulier, Γ est uniforme dans G.

Mais $\mathrm{D}(G) = N(G)$ est défini par $s = t = 0$, et $\mathrm{D}(G) \cap \Gamma$ est réduite à $G_1 \cap \Gamma$, donc n'est pas uniforme dans $\mathrm{D}(G)$.

Soit maintenant Γ le groupe d'holonomie d'un G-feuilletage classifiant. Alors le revêtement d'holonomie est contractile puisqu'il fibre sur G qui est contractile (Chevalley [Ch]) avec fibre contractile. Donc Γ est à dualité de Poincaré. R. Bieri a caractérisé les groupes résolubles qui possèdent cette propriété : ce sont les groupes polycycliques et sans torsion [Bi]. En conclusion, Γ est polycyclique.

Comme précédemment cette conclusion s'étend au cas où Γ n'est que virtuellement groupe d'holonomie d'un G-feuilletage classifiant.

Réciproquement, donnons-nous maintenant dans G un sous-groupe Γ polycyclique et uniforme, et tentons de le réaliser comme groupe d'holonomie d'un G-feuilletage.

On commence par plonger un sous-groupe de Γ d'indice fini comme réseau dans un groupe de Lie résoluble (Raghunathan [R, théorème 4.28]). Il importe pour la suite de notre raisonnement de comprendre le détail de cette construction :

Évidemment $\mathrm{D}(\Gamma)$ est nilpotent et sans torsion. En conséquence (Auslander [A]) il existe, pour n assez grand, une représentation fidèle $\rho : \Gamma \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$ qui est unipotente sur $\mathrm{D}(\Gamma)$. Soit $\mathbf{H}$ la fermeture de Zariski de $\rho(\Gamma)$. Soit R la composante connexe neutre de $\mathbf{H} \cap \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ (ces groupes ne sont peut-être pas simplement connexes). Soit $\Gamma_R = \rho(\Gamma) \cap R$. C'est un sous-groupe de $\rho(\Gamma)$ d'indice fini. C'est un sous-groupe discret de R mais peut-être pas un réseau. Par ailleurs par le théorème de Lie pour les groupes nilpotents, le groupe dérivé $\mathrm{D}(\rho(\Gamma))$ est contenu dans un groupe $\mathbf{N} \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ algébrique, nilpotent et simplement connexe. Il existe dans $\mathbf{N}$ un plus petit sous-groupe (réel) intégral N contenant $\mathrm{D}(\rho(\Gamma))$. Il s'ensuit que $\mathrm{D}(\rho(\Gamma))$ est un réseau dans N (Malcev, voir [R, théorème 2.1]) et que $D(R) \subset N \subset N(R)$. Soit p la projection le R sur R/N. Il existe dans R/N un sous-groupe fermé simplement connexe L qui rencontre $\rho(\Gamma_R)$ en un sous-groupe d'indice fini dans $p(\Gamma_R)$ et uniforme dans L. Soient $H = p^{-1}(L)$ et $\Gamma_H = \Gamma_R \cap H$ et $\Gamma' = \rho^{-1}(\Gamma_H)$: le groupe de Lie (réel simplement connexe!) H est résoluble et contient le réseau cocompact Γ_H, et l'on a un isomorphisme de groupe $\phi = \rho^{-1} : \Gamma_H \to \Gamma'$ dont l'image est un sous-groupe de Γ d'indice fini.

Cet isomorphisme se prolonge-t-il en un homomorphisme continu de H sur G? Non en général, comme le montre l'exemple ci-dessus. Toutefois la réponse est positive dans certains cas.

Considérons, dans le groupe des homomorphismes de G dans $\mathbb{C}^*$, le sous-groupe engendré par les racines de G (groupe *radiciel*). Si chaque élément non trivial du groupe radiciel est également non trivial en restriction à Γ, alors on dit que Γ est *fidèle* à G.

Par exemple dans la construction que nous venons de faire Γ_H est fidèle à H. En effet, $\rho(\Gamma)$ est d'abord fidèle à $\mathbf{H}$ parce que Zariski-dense. En fait, Γ_H est également fidèle à $\mathbf{H}$ parce que d'indice fini dans $\rho(\Gamma)$. Ensuite Γ_H est fidèle à R parce que R étant Zariski-dense dans $\mathbf{H}$, les racines de R sont les restrictions à R de certaines racines de $\mathbf{H}$. Enfin Γ_H est fidèle à H parce que H étant normal dans R, les racines de H sont les restrictions à H de certaines racines de R.

Au contraire dans l'exemple donné plus haut, Γ n'est pas fidèle à G car il est contenu dans le noyau de l'homomorphisme $(x, y, z, s, t) \mapsto e^{2\pi i t}$, qui est une racine non triviale de G.

Dans [Me2] on démontre les théorèmes suivants.

Soient deux groupes de Lie résolubles G_1, G_2, un réseau $\Gamma_1 \subset G_1$, un sous-groupe $\Gamma_2 \subset G_2$ de covolume fini, et un homomorphisme de groupes $\phi : \Gamma_1 \to \Gamma_2$.

THÉORÈME 1.— *ϕ se prolonge en une fibration (localement triviale) Φ de G_1 sur G_2, équivariante au sens où $\Phi(\gamma g) = \phi(\gamma)\Phi(g)$ quels que soient $\gamma \in \Gamma_1$ et $g \in G_1$.*

THÉORÈME 2.— *On suppose de plus que Γ_1 est fidèle à G_1 et que Γ_2 est fidèle à G_2. Alors, ϕ se prolonge en un homomorphisme continu surjectif de G_1 sur G_2.*

Le premier théorème s'applique immédiatement à notre situation : la fibration $\Phi : H \to G$ qu'il fournit est évidemment l'application développante d'un G-feuilletage porté par la variété H/Γ_H. Les feuilles sont contractiles parce que G et H le sont. Le groupe d'holonomie est évidemment Γ'. En résumé Γ est virtuellement groupe d'holonomie d'un G-feuilletage classifiant.

Si de plus Γ est fidèle à G, alors évidemment Γ' l'est aussi, de sorte que le second théorème s'applique : Γ' est groupe d'holonomie d'un G-feuilletage homogène.

Voici quelques conditions simples qui suffisent évidemment à ce que Γ soit fidèle à G. Il est dense dans G. Plus généralement, $\Gamma N(G)$ est dense dans G. Le groupe G est $\mathbb{R}$-algébrique. Plus généralement, son groupe radiciel ne contient pas d'élément dont l'image soit le groupe des nombres complexes de module 1.

Une application.— Ces résultats permettent en particulier de préciser la classification des flots de Lie (feuilletages de Lie dont les feuilles sont de dimension 1) résolubles. Mettons de côté les G-flots à feuilles compactes, qui ne sont rien d'autre, à difféomorphisme près, que les fibrés en cercle sur les variétés homogènes de la forme G/Γ, où Γ est un réseau de G. Alors les feuilles sont contractiles. Comme le rang d'un groupe polycyclique sans torsion coïncide avec sa dimension cohomologique, on voit que les groupes l'holonomie des G-flots sont, à indice fini près, les groupes polycycliques de rang $\dim(G) + 1$ uniformes. Or le groupe l'holonomie d'un G-flot le caractérise à difféomorphisme près (Ghys [G2]). Au total, si l'on convient que deux G-flots sont *commensurables* s'ils ont un revêtement fini commun, et que deux sous-groupes de G sont *virtuellement conjugués* s'ils ont deux sous-groupes conjugués d'indice fini, alors *l'application qui à chaque G-flot associe son groupe l'holonomie établit une bijection entre les G-flots, à commensurabilité près, et les sous-groupes polycycliques de rang* $\dim(G)+1$, *à conjugaison virtuelle près.*

Il est probable qu'en fait tout sous-groupe de G polycyclique et uniforme est isomorphe à un réseau d'un groupe de Lie résoluble. Dans ce cas polycyclicité et uniformité caractériseraient exactement les groupes l'holonomie des G-feuilletages classifiants. Il semble plus difficile, et de moindre intérêt, de caractériser exactement les groupes d'holonomie des G-feuilletages homogènes.

5. Démonstration du théorème

Soit dans G un sous-groupe de type fini Γ, qui contient un sous-groupe polycyclique et uniforme Π. Choisissons une partie finie $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ génératrice de Γ et considérons le groupe Φ engendré par la réunion de Π avec ses conjugués $\gamma_1 \Pi \gamma_1^{-1}, \ldots, \gamma_n \Pi \gamma_n^{-1}$: ce groupe est également polycyclique, comme il résulte de notre critère de polycyclicité, et uniforme. Donc (sect. 4) Π (resp. Φ) contient un sous-groupe Π' (resp. Φ') d'indice fini qui est groupe l'holonomie d'un G-feuilletage classifiant $\mathcal{M}$ (resp. $\mathcal{N}$), sur la variété M (resp. N). Quitte à remplacer Π' par un sous-groupe d'indice fini, et M par un revêtement fini, on peut supposer que Π' et ses conjugués $\gamma_1 \Pi' \gamma_1^{-1}, \ldots, \gamma_n \Pi' \gamma_n^{-1}$ sont contenus dans Φ'.

Voici le plan de la démonstration : le groupe d'holonomie de $\mathcal{N}$ contient plusieurs copies de celui de $\mathcal{M}$, conjuguées par les γ_i. La propriété universelle des feuilletages classifiants nous fournira autant d'applications différentiables de M dans N, par lesquelles l'image inverse de $\mathcal{N}$ est $\mathcal{M}$. Nous remplacerons ces applications par des plongements aux propriétés analogues. Par des opérations de coupure et de collage le long de ces plongements nous obtiendrons un G-feuilletage qui aura Γ pour groupe d'holonomie.

Choisissons des développements $(\overline{M}, D_M)$ et $(\overline{N}, D_N)$ ayant respectivement pour groupe l'holonomie Π' et Φ'. Comme Π' est contenu dans Φ', appliquons le lemme de la section 2 à ces développements : il existe une application différentiable $f : M \to N$ admettant un relèvement $\overline{f}$ tel que $D_M = D_N \circ \overline{f}$. Pour simplifier ultérieurement les notations nous introduisons n applications $f^1, \ldots, f^n$ toutes égales à f. De même pour chaque $i = 1, \ldots, n$, comme $\gamma_i \Pi' \gamma_i^{-1}$ est contenu dans Φ', appliquons le lemme de la section 2 aux développements $(\overline{M}, \gamma_i D_M)$ et $(\overline{N}, D_N)$: il existe une application différentiable $g^i : M \to N$ admettant un relèvement $\overline{g}^i$ tel que $\gamma_i D_M = D_N \circ \overline{g}^i$. En particulier $\mathcal{M} = f^{i*}(\mathcal{N}) = g^{i*}(\mathcal{N})$ pour chaque i.

Soit une variété compacte quelconque X de grande dimension d. Soient $N_1 = N \times X$ et $\mathcal{N}_1$ l'image inverse de $\mathcal{N}$ dans N_1 par la projection canonique. Si d est assez grande alors chaque f^i (resp. g_1^i) est homotope, par une petite homotopie *tangente* à $\mathcal{N}_1$, à un plongement f_1^i (resp. g_1^i) de M dans N_1. Il est clair que ce plongement est transverse à $\mathcal{N}_1$ et que $f_1^{i*}(\mathcal{N}) = g_1^{i*}(\mathcal{N}) = \mathcal{M}$. On peut choisir les f_1^i, g_1^j deux à deux disjoints. Enfin, ils ont tous le même fibré normal ν. En effet comme N est asphérique et que les homomorphismes induits par les f^i, g^j en homotopie de dimension 1 sont conjugués deux à deux, les f^i, g^j sont deux à deux librement homotopes. Il en est donc de même des f_1^i, g_1^j qui sont donc liés deux à deux, si d est assez grande, par des homotopies d'immersions.

Extrayons de ν le fibré en boules (fermées) associé $p : M_1 \to M$. L'application f_1^i (resp. g_1^i) se relève en un plongement f_2^i (resp. g_2^i) de M_1 dans N_1, tel que

$$f_1^{i*}(\mathcal{N}_1) = g_1^{i*}(\mathcal{N}_1) = p^*(\mathcal{M}) .$$

En effet si l'on considère le fibré vectoriel $T\mathcal{N}_1 \to N_1$ tangent à $\mathcal{N}_1$, on remarque que ν est isomorphe à un sous-fibré de l'image inverse $f_1^{i*}(T\mathcal{N}_1)$ (resp. $g_1^{i*}(T\mathcal{N}_1)$). On peut choisir les f_2^i, g_2^j deux à deux disjoints.

Soit la variété à bord W obtenue en ôtant à N_1 les $2n$ images de l'intérieur de M_1 par les f_2^i, g_2^j. Soit l'image inverse $\mathcal{W}$ de $\mathcal{N}_1$ dans W. Le bord a $2n$ composantes connexes $U^i = f_2^i(\partial M_1)$, $V^i = g_2^i(\partial M_1)$. Il est transverse à $\mathcal{W}$. On dispose de n difféomorphismes tels que $h^i = g_2^i \circ \left(f_2^i\right)^{-1} : U^i \to V^i$ tels que $h_i^*(\mathcal{W}) = \mathcal{W}\lceil_{U^i}$.

Soit Z le quotient de W par la relation qui identifie chaque point $x \in U^i$ à $h^i(x) \in V^i$: c'est une variété compacte sans bord. Soit enfin, $\mathcal{Z}$ l'unique G-feuilletage de Z dont $\mathcal{W}$ est l'image inverse. Nous affirmons que son groupe d'holonomie est Γ.

Pour le vérifier, nous allons exhiber un développement *ad hoc* de ce feuilletage. Soit d'abord $(\overline{W}, D_W)$ le développement de $\mathcal{W}$ obtenu par image inverse de $(\overline{N}, D_N)$ (noter que $\overline{W}$ est bien connexe, pour d assez grande, parce que $\dim(N_1) - \dim(M_1) \geq 2$). En se rappelant les propriétés

$$D_M = D_N \circ \overline{f}^i \quad \text{et} \quad \gamma_i D_M = D_N \circ \overline{g}^i$$

qui définissaient f^i et g^i, on constate que h^i se relève en un plongement $\overline{h}^i : \overline{U}^i \longrightarrow \overline{V}^i$ tel que $\overline{U}^i$ (resp. $\overline{V}^i$) est une certaine composante connexe de l'image inverse de U^i (resp. V^i) dans $\overline{W}$ et que

$$D_W \circ \overline{h}^i = \gamma_i D_W \restriction_{\overline{U}^i} .$$

Soit ensuite $(\overline{Z}, D_Z)$ un développement quelconque de $\mathcal{Z}$. Alors, la projection canonique de W sur Z se relève en une application différentiable (en fait un plongement) $j : \overline{W} \longrightarrow \overline{Z}$. Quitte à multiplier D_Z par un élément G on peut supposer que

$$D_Z \circ j = D_W .$$

Soit $\iota : \mathrm{Gal}(\overline{W}) \longrightarrow \mathrm{Gal}(\overline{Z})$ le morphisme associé à j. Soit, pour chaque i, l'unique élément α_i de $\mathrm{Gal}(\overline{Z})$ tel que

$$\alpha_i \circ j \mid \overline{U}^i = j \circ \overline{h}^i .$$

Soit enfin $\zeta : \mathrm{Gal}(\overline{Z}) \longrightarrow G$ le morphisme d'holonomie de $(\overline{Z}, D_Z)$. On remarque que :

1) $\mathrm{Gal}(\overline{Z})$ est engendré par $\mathrm{Im}(\imath)$ et les α_i (en fait $\mathrm{Gal}(\overline{Z})$ est la *H.N.N.-extension* de $\mathrm{Gal}(\overline{W})$ par les α_i : théorème de Van Kampen);
2) la composée $\zeta \circ \imath$ est le morphisme d'holonomie de $(\overline{W}, \mathcal{W})$, dont l'image est contenue dans Γ;
3) après qu'on a choisi un point x quelconque dans $\overline{U}^i$, la chaîne d'égalités

$$\begin{aligned} \zeta(\alpha_i) D_W &= \zeta(\alpha_i) D_Z\big(j(x)\big) = D_Z\,\big(\alpha_i\big(j(x)\big)\big) \\ &= D_Z\,\Big(j\big(\overline{h}^i(x)\big)\Big) = D_W\big(\overline{h}^i(x)\big) \\ &= \gamma_i D_W(x) \end{aligned}$$

   montre que $\zeta(\alpha_i) = \gamma_i$.

Donc

$$\mathrm{Im}(\zeta) = \Gamma \, ;$$

le théorème est démontré. □

6. Généralisations

Les méthodes de la section 5 se généralisent directement aux (G,X)-feuilletages *transversalement homogènes*, voir [B1], où G est un groupe de Lie quelconque et X un espace homogène sous G. On obtient (les démonstrations sont laissées en exercice) :

soient Φ le groupe d'holonomie d'un (G,X)-feuilletage classifiant et $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ des éléments de G ; s'il existe un groupe d'holonomie de (G,X)-feuilletage, contenu dans Φ ainsi que ses conjugués par tous les γ_i, alors le groupe engendré par Φ et les γ_i est groupe d'holonomie d'un (G,X)-feuilletage.

Soit en particulier une décomposition quelconque $G = RS$ où $R \cap S = 1$ et R est un sous-groupe intégral normal résoluble et S un sous-groupe connexe fermé, par exemple la décomposition de Lévi.

6.1.— Regardons R comme un espace homogène sous G.

Soit dans G un sous-groupe Γ de type fini. Si $\Gamma \cap R$ contient un sous-groupe à la fois polycyclique et uniforme dans R, alors Γ est groupe d'holonomie d'un (G,R)-feuilletage transversalement homogène.

Par exemple, prenons pour G le groupe affine de $\mathbb{R}^n$ et $R = \mathbb{R}^n$ et $S = \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$: tout sous-groupe de G de type fini qui contient n translations linéairement indépendantes est groupe d'holonomie d'un feuilletage transversalement affine.

6.2.— Si S est compact, on obtient dans le cadre des feuilletages de Lie :

soit dans G un sous-groupe Γ de type fini ; si $\Gamma \cap R$ contient un sous-groupe à la fois polycyclique et uniforme dans R, alors Γ est groupe d'holonomie d'un G-feuilletage de Lie.

Par exemple, prenons pour G le groupe des déplacements de $\mathbb{R}^n$ et $R = \mathbb{R}^n$ et $S = \mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$: tout sous-groupe de type fini de G qui contient n translations linéairement indépendantes est groupe d'holonomie d'un G-feuilletage de Lie.

7. Questions

A) Nos exemples de feuilletages de Lie dont le groupe transverse est résoluble mais dont le groupe l'holonomie n'est pas polycyclique sont par construction de grande dimension.

Au contraire, il existe des résultats très restrictifs en petite dimension :

- (Caron-Carrière [Ca]) imposons que les feuilles soient de dimension 1 (et denses), c'est-à-dire considérons les flots de Lie minimaux. Alors il n'y a, à conjugaison différentiable près, que les flots linéaires des tores $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$, considérés comme $\mathbb{R}^{n-1}$-feuilletages;
- (Matsumoto-Tsuchiya [MT]) il n'y a comme $GA_+(1,\mathbb{R})$-feuilletages des variétés de dimension 4, à conjugaison différentiable près, que ceux qui sont homogènes.

On peut, avec nos méthodes, obtenir $\Gamma_{\lambda,\mu}$ (nous reprenons ici les notations de la section 1), quand λ est une unité algébrique de degré 2, et quel que soit μ, comme groupe d'holonomie d'un $GA_+(1,\mathbb{R})$-feuilletage d'une variété de dimension 6 (exercice).

Que dire des $GA_+(1,\mathbb{R})$-feuilletages en dimension 5?

B) Nos exemples renouvellent la question de [Hae1] : "*Pour chaque groupe de Lie G, quels sont les sous-groupes de G qui sont groupe d'holonomie d'un G-feuilletage?*" Nous avons défini un feuilletage de Lie comme porté par une variété compacte, et ceci impose au groupe d'holonomie des propriétés évidentes : type fini et uniformité, mais aussi d'autres plus subtiles : la *génération compacte* et une condition de dimension cohomologique ([Hae2], [G1], [Me1]). Malheureusement dans le cadre résoluble la conjonction de ces conditions nécessaires reste plus faible que la condition suffisante qu'exprime notre théorème principal! Voici une famille de groupes dans laquelle nous croyons concentrée toute la difficulté de la question de Haefliger pour les groupes de Lie résolubles.

Pour chaque $\lambda \in \,]0\,,1/2[$, le groupe $\Gamma_{\lambda,1-\lambda} \subset GA_+(1,\mathbb{R})$ remplit ces conditions nécessaires. Mais il ne remplit notre condition suffisante que quand le groupe multiplicatif engendré par λ et $1-\lambda$ contient une unité algébrique autre que 1, c'est-à-dire quand λ ou $1-\lambda$ est une unité algébrique. Deux cas en quelque sorte opposés résistent encore et toujours : λ transcendant et λ rationnel.

On peut également considérer la question moins précise : "*Pour chaque groupe de Lie G, quels sont les sous-groupes intégraux de G qui sont groupe structurel d'un G-feuilletage ?*" Le groupe structurel est la composante connexe neutre de la fermeture du groupe d'holonomie. Cette question a été étudiée, dans le cadre des flots de Lie en dimension 4, par Gallego, Herrera, Llabrès, Reventós ([GR], [HLR], [H]).

C) De même, nos exemples renouvellent le programme de *classification faible* des feuilletages de Lie proposé par Ghys dans [G2] : pour chaque groupe de Lie résoluble G, on ne peut plus guère espérer qu'exhiber une famille de G-feuilletages telle que tout G-feuilletage soit une image inverse de l'un d'eux.

Exercice.— Éliminons la définition d'un feuilletage de Lie la condition que la variété doit être compacte. Montrer qu'alors, quels que soient G, groupe de Lie, et Γ, sous-groupe dénombrable, Γ est le groupe d'holonomie d'un G-feuilletage de Lie. De plus, remplir le programme de classification faible en exhibant une suite de $\{\mathcal{F}_i\}$ de G-feuilletages de groupe d'holonomie Γ, telle que les feuilles de $\mathcal{F}_i$ soient i-connexes. En particulier, le classifiant de Haefliger de Γ est limite inductive de cette suite.

D) Certains groupes de Lie résolubles n'admettent pas de sous-groupe polycyclique uniforme. Par exemple (on s'en convaincra en appliquant le critère de la section 3) le produit semi-direct G_k de $\mathbb{R}^2$ par $\mathbb{R}$, celui-ci opérant sur celui-là par $t\cdot(x,y) = (e^{tx}, e^{kty})$, où k est un réel qui ne peut pas s'écrire comme quotient de logarithmes de deux unités algébriques positives. (Un tel réel existe car cette propriété est générique!)

Notre théorème ne s'applique donc pas à ce groupe (c'est le groupe G_7^k de [GR], [H] et [HLR]). Existe-t-il un G_k-feuilletage de Lie?

Références

[A] Auslander (L.) .— *On a problem of Philip Hall*, Ann. of Math. **86** (1967), pp. 112-116.

[Bi] Bieri (R.) .— *Gruppen mit Poincaré-Dualität*, Comment. Math. Helv. **47** (1972), pp. 373-396.

[Bl] Blumenthal (R.) .— *Transversely Homogenous Foliations*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, **29**, n° 4 (1979), pp. 143-158.

[BS] Bieri (R.) et Strebel (R.) .— *Valuations and Finitely Presented Metabelian Groups*, Proc. London Math. Soc. Vol. 3, **41** (1980), pp. 439-464.

[Ca] CARRIÈRE (Y.) .— *Flots riemanniens et feuilletages géodésibles de codimension un*, Thèse 3ème cycle, Lille (1981).

[Ch] CHEVALLEY (C.) .— *On the Topological Structure of Solvable Groups*, Ann. of Math. **42**, n° 3 (1941), pp. 668-675.

[F] FÉDIDA (E.) .— *Feuilletages de Lie, feuilletages du plan*, Thèse, Strasbourg, L.N.M. **352** (1973), pp. 183-195.

[G1] GHYS (E.) .— *Groupes d'holonomie des feuilletages de Lie*, Indag. Math. **47**, n° 2 (1985).

[G2] GHYS (E.) .— *Riemannian Foliations : Examples and Problems*, in P. Molino : Riemannian Foliations, Prog. in Math., Birkhaüser (1988).

[GR] GALLEGO(E.) et REVENTÓS (A.) .— *Lie Flows of Codimension 3*, Trans. A.M.S., **326**, n° 2 (1991), pp. 529-541.

[H] HERRERA GÓMEZ (B.) .— *Sobre la estructura transversa de las foliaciones de Lie*, Thèse, Universitat Autònoma de Barcelona, 1994.

[Hae1] HAEFLIGER (A.) .— *Groupoïde d'holonomie et classifiants*, in Structures transverses des feuilletages. Toulouse 1982, Astérique **116** (1984), pp. 70-97.

[Hae2] HAEFLIGER (A.) .— *Pseudogroups of Local Isometries*, in Proceed, V-th Coll. in Diff. Geom., ed. L. A. Cordero, Research Notes in Math. **131**, Pitman (1985), pp. 174-197.

[Hal] HALL JR. (M.) .— *The Theory of Groups*, McMillan (1959).

[He] HERMANN (R.) .— *A sufficient condition that a mapping of Riemannian manifolds be a fiber bundle*, Proc. A.M.S. **11** (1960), pp. 236-242.

[HLR] HERRERA (B.), LLABRÉS (M.) et REVENTÓS (A.) .— *Transverse Structure of Lie Foliations*, Preprint.

[Me1] MEIGNIEZ (G.) .— *Sous-groupes de génération compacte des groupes de Lie résolubles*, Prépublications Math. Univ. Paris-7, **33** (1992).

[Me2] MEIGNIEZ (G.) .— *Sur la rigidité des réseaux des groupes de Lie résolubles*, En préparation.

[Mo] MOSTOW (G. D.) .— *Factor Spaces of Solvable Groups*, Ann. of Math. **60**, n° 1 (1954).

[MT] MATSUMOTO (S.) et TSUCHIYA (N.) .— *Lie Affine Foliations on 4-Manifolds.* Preprint.

[R] RAGHUNATHAN (M. S.) .— *Discrete Subgroups of Lie groups*, Springer Verlag (1972).

[Re] REINHART (B. L.) .— *Foliated Manifolds with Bundle-like Metrics*, Ann. of Math. **69** (1959), pp. 119-132.