

MARCEL DOSSA

**Solutions globales de systèmes non linéaires
sur des variétés hyperboliques**

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 6^e série, tome 4, n° 3
(1995), p. 519-559

http://www.numdam.org/item?id=AFST_1995_6_4_3_519_0

© Université Paul Sabatier, 1995, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Solutions globales de systèmes non linéaires sur des variétés hyperboliques^(*)

MARCEL DOSSA⁽¹⁾

RÉSUMÉ. — On propose une méthode de résolution globale dans des espaces de fonctions localement de carré sommable, d'une classe de systèmes quasi linéaires, quasi diagonaux, définis sur des variétés hyperboliques (V^{n+1}, g) de dimension $n + 1$, avec opérateur principal $\square_g$.

Cette méthode est appliquée aux exemples suivants : équation non linéaire $\square_g u + au + bu^p = 0$ ($a \geq 0, b \geq 0$); applications harmoniques de source (V^2, g) ; systèmes de Higgs. Ce faisant on généralise certains résultats de [4], [5] et [11].

ABSTRACT. — We propose a method for the global resolution of quasi-linear, quasi-diagonal systems defined on $(n + 1)$ -dimensional hyperbolic manifolds (V^{n+1}, g) and with principal operator $\square_g$, on spaces of locally square integrable functions.

The method is applied to: the non-linear equation $\square_g u + au + bu^p = 0$, $a \geq 0, b \geq 0$; harmonic maps with a source (V^2, g) ; Higgs systems. We thereby generalize certain results of [4], [5], [11].

0. Introduction

Soit (V^{n+1}, g) une variété globalement hyperbolique de dimension $n + 1$ telle que $V^{n+1} = S \times \mathbb{R}$, les hypersurfaces $S \times \{t\}$ étant spatiales et le vecteur X tangent aux courbes $\{x\} \times \mathbb{R}$ étant temporel. On considère sur (V^{n+1}, g) des systèmes quasi-linéaires, quasi-diagonaux de la forme suivante :

$$\square_g u^I + f^I(u^L, \nabla u^L, x) = 0, \quad I, L = 1, \dots, N, \quad (1)$$

(*) Reçu le 29 septembre 1993

(1) Université de Yaoundé I, Faculté des Sciences, B.P. 812, Yaoundé, Cameroun

où $\square_g$ désigne l'opérateur des ondes associé à la métrique g . Pour de tels systèmes vérifiant de plus les conditions suivantes :

- 1) le tenseur d'impulsion-énergie $(T_{\alpha\beta})$ associé à (1) vérifie la condition de l'énergie dominante :

$$T_{\alpha\beta}Y^\alpha Z^\beta \geq 0,$$

pour tout couple (Y, Z) de vecteurs non spatiaux, orientés vers le futur,

- 2) sans restriction sur la grandeur des normes des données initiales, le problème de Cauchy global est résoluble dans les espaces de Sobolev $H^s(S)$, $E^s(V^{n+1})$ par majorations a priori déduites de l'intégration de $\nabla^\beta(T_{\alpha\beta}X^\alpha)$ sur les bandes $S \times [0, t]$,

on propose ici une méthode générale permettant d'étendre l'existence globale à un cadre plus vaste de fonctions localement de carré sommable.

Cette méthode est appliquée de façon détaillée aux exemples suivants.

Le premier exemple traité est l'équation de Klein-Gordon non linéaire $\square_g u + au + bu^p = 0$ où a et b sont des fonctions positives, p un entier impair tel que $1 < p < +\infty$ si $n = 1$ ou 2 , $p = 3$ si $n = 3$. Sous de simples hypothèses de locale sommabilité sur les coefficients a , b et les données initiales, le problème de Cauchy ordinaire global est résolu; ce qui généralise les résultats de [4], où ce problème avait été résolu dans un cadre d'espaces de Sobolev de fonctions de carré sommable.

On démontre ensuite l'existence globale, toujours dans un cadre d'espaces de fonctions localement de carré sommable, d'applications harmoniques de source (V^2, g) ; ce qui généralise un résultat de [5].

Un exemple d'intérêt physique (cordes cosmiques) est le système ($n = 3$) :

$$(\delta_I^K \nabla^\alpha + A_I^{\alpha K})(\partial_\alpha u^I + A_{\alpha J}^I u^J) + mu^K - \left(\mu - \sum_{I=1}^N |u^I|^2 \right) u^K = 0, \quad (2)$$

où les A^α sont des matrices antisymétriques réelles, fonctions du point $x \in V^{n+1}$, m et μ sont des nombres, les u^I sont N fonctions réelles astreintes à tendre à l'infini vers un vecteur de longueur $\mu^{1/2}$ (donc $u^I \in L^2$ si $\mu \neq 0$). Dans le cas où (V^4, g) est l'espace temps de Minkowski, l'existence globale pour (2) couplé avec les équations de Yang-Mills, de potentiel de Yang-Mills A_α , est connue en jauge temporelle $X^\alpha A_\alpha = 0$, dans H^s pour $\mu = 0$ ([11], [6]); mais aussi dans H_{loc}^s pour le cas physiquement intéressant $\mu > 0$ (cf. [16]).

Il semble intéressant de généraliser ces résultats à une variété globalement hyperbolique quelconque (V^4, g) . Pour A_α donné, l'existence globale dans H_{loc}^s est obtenue ici pour le système de Higgs (2) défini sur (V^4, g) .

1. Définitions, hypothèses et notations

Soit n un entier naturel ≥ 1 .

Soit (V^{n+1}, g) une variété pseudoriemannienne de dimension $n+1$ et de classe C^∞ , munie donc d'une métrique lorentzienne g de classe C^∞ , c'est-à-dire d'un champ C^∞ de tenseurs 2 fois covariants, symétriques, de signature hyperbolique $(+ - \dots -)$.

Dans tout cet article la variété (V^{n+1}, g) sera *régulièrement hyperbolique* au sens de la définition suivante.

DÉFINITION . — (V^{n+1}, g) est une variété *régulièrement hyperbolique* si (V^{n+1}, g) est une variété globalement hyperbolique telle que :

- i) $V^{n+1} = S \times \mathbb{R}$, où S est une variété C^∞ sans bord de dimension n ;
 $\forall T > 0$ et $\forall |t| \leq T$, les métriques $-\bar{g}_t$, induites par $-g$ sur $S \times \{t\}$, sont proprement riemanniennes et uniformément équivalentes à la métrique $-\bar{g}_0$ sur $V_T^{n+1} = S \times [-T, T]$, c'est-à-dire qu'il existe des constantes $k_1(T)$ et $k_2(T) > 0$ telles que $\forall (x, t) \in V_T^{n+1}$, $\forall Y \in T_x(S)$, on a :

$$k_1(T)\bar{g}_0(x)(Y, Y) \leq \bar{g}_t(x)(Y, Y) \leq k_2(T)\bar{g}_0(x)(Y, Y) ; \quad (1.1)$$

la métrique $-\bar{g}_0$ est complète et de rayon d'injectivité $\delta > 0$;

- ii) $\forall T > 0$, les courbes $t \rightarrow (x, t)$, x fixé, de vecteur tangent X , sont uniformément temporelles sur $V_T^{n+1} = S \times [-T, T]$, c'est-à-dire qu'il existe un réel $\alpha(T) > 0$, tel que :

$$\inf_{V_T^{n+1}} g(X, X) \geq \alpha(T) > 0 ; \quad (1.2)$$

- iii) $\forall T > 0$, les hypersurfaces $S \times \{t\}$, $t = \text{constante}$, $|t| \leq T$, sont uniformément spatiales par rapport à X sur V_T^{n+1} , c'est-à-dire qu'il existe un réel $\beta(T) > 0$ tel que :

$$\sup_{V_T^{n+1}} g(X, \tilde{n}) \leq \beta(T), \quad (1.3)$$

où $\tilde{n}$ est la normale unitaire à $S \times \{t\}$ ($g(\tilde{n}, \tilde{n}) = 1$) orientée vers les t positifs.

Remarque. — Nous ne faisons pas ici de restriction supplémentaire sur la courbure de g et les champs de vecteurs X et $\tilde{n}$, ni sur leurs dérivées covariantes (dans [4], [5], ces quantités étaient supposées uniformément bornées en norme sur les V_T^{n+1}).

De (1.2) et (1.3), on tire (cf. [3]) :

$$\sup_{V_T^{n+1}} g(X, X) \leq \beta^2(T) \quad \text{et} \quad \inf_{V_T^{n+1}} g(X, \tilde{n}) \geq \alpha^{1/2}(T). \quad (1.4)$$

La métrique g permet d'obtenir une correspondance canonique entre tenseurs contravariants, covariants ou mixtes : l'abaissement et la montée des indices se font à l'aide de la métrique g .

On pose $U = g(X, X)$, $N = g(X, \tilde{n})$.

Dans une carte adaptée au feuilletage $S \times \mathbb{R}$, on a :

$$g_{00} = U, \quad g^{00} = \frac{1}{N^2}, \quad (1.5)$$

$$\tilde{n} = (n_\alpha) = (N, 0, \dots, 0), \quad \tilde{n} = (n^\alpha) = \left(\frac{1}{N}, g^{01}N, \dots, g^{0n}N \right).$$

Sur V^{n+1} , on utilisera la métrique proprement riemannienne γ définie dans une carte quelconque par

$$\gamma^{\lambda\mu} = (X^\mu n^\lambda + X^\lambda n^\mu) - Ng^{\lambda\mu};$$

ce qui, dans une carte adaptée au feuilletage $S \times \mathbb{R}$, s'écrit :

$$\gamma^{00} = Ng^{00}, \quad \gamma^{0i} = 0, \quad \gamma^{ij} = -Ng^{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Le produit scalaire de tenseurs sur V^{n+1} est défini au moyen de γ :

$$\langle T, L \rangle = \gamma^{\alpha_1 \beta_1} \dots \gamma^{\alpha_q \beta_q} \gamma_{\delta_1 \varepsilon_1} \dots \gamma_{\delta_p \varepsilon_p} T_{\alpha_1 \dots \alpha_q}^{\delta_1 \dots \delta_p} L_{\beta_1 \dots \beta_q}^{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_p},$$

$$|T| = \langle T, T \rangle^{1/2}.$$

Les dérivées covariantes ∇^k sont prises dans la métrique g et les dérivées $\overline{\nabla}^k$ dans la métrique $\bar{g}_t$. L'élément de volume de $-\bar{g}_t$ est noté $d\mu_t$; $\forall T > 0$,

il est uniformément équivalent sur V_T^{n+1} à $d\mu_0$. Soit d la distance géodésique définie sur S par la métrique proprement riemannienne complète $-\bar{g}_0$; $\forall x_0 \in S$, soit d_{x_0} l'application partielle de S dans $\mathbb{R}^+$ définie par : $d_{x_0}(x) = d(x_0, x)$, $\forall x \in S$. Si $d_{x_0}(x) < \delta$, on a :

$$|\bar{\nabla}_x d_{x_0}(x)|_{-\bar{g}_0} = 1, \quad (1.6)$$

$\bar{\nabla}_x$ étant la dérivation covariante dans la métrique $\bar{g}_0$. $\forall x_0 \in S$, soit S_{x_0} la composante connexe de x_0 dans S .

$\forall (x_0, t_0) \in S \times \mathbb{R}$, $\forall \gamma \in \mathbb{R}_*^+$, $\forall (R, R') \in (\mathbb{R}_*^+)^2$ tels que $R' < R$, on note :

$$B_{R,R',\gamma}^+(x_0, t_0) = \{(x, t) \in S_{x_0} \times \mathbb{R} \mid 0 \leq t - t_0 \leq R' \text{ et} \\ 0 \leq \gamma(t - t_0) + d_{x_0}(x) \leq \gamma R\};$$

$$B_{R,R',\gamma}^-(x_0, t_0) = \{(x, t) \in S_{x_0} \times \mathbb{R} \mid (x, -t) \in B_{R,R',\gamma}^+(x_0, -t_0)\};$$

$$B_{R,R',\gamma}(x_0, t_0) = B_{R,R',\gamma}^+(x_0, t_0) \cup B_{R,R',\gamma}^-(x_0, t_0).$$

D'après le théorème de Hopf-Rinow [7, p. 360] les $B_{R,R',\gamma}(x_0, t_0)$ sont des compacts de V^{n+1} .

Soit B un compact de V^{n+1} d'intérieur non vide. On note :

$$p(B) = \{t \in \mathbb{R} \mid \exists x \in S \text{ tel que } (x, t) \in B\},$$

$$t_B^+ = \sup p(B), \quad t_B^- = \inf p(B),$$

$$B_t = B \cap (S \times \{t\}), \quad \forall t \in [t_B^-, t_B^+].$$

On désigne par $C^\infty(B)$ l'espace des restrictions à B des fonctions C^∞ sur V^{n+1} .

On désigne par $E^s(B)$ le complété de $C^\infty(B)$ pour la norme :

$$\|u\|_{E^s(B)} = \sup_{t_B^- \leq t \leq t_B^+} \left\{ \int_{B_t} \sum_{k=0}^s |\nabla^k u|^2 d\mu_t \right\}^{1/2},$$

avec la convention $\int_{B_t} f d\mu = 0$ si $B_t = \emptyset$.

$\forall T > 0$, on désigne par $E_{\text{loc}}^s(V_T^{n+1})$ l'espace des (classes de) fonctions u mesurables telles que :

$$u|_B \in E^s(B)$$

pour tout compact B de V_T^{n+1} , d'intérieur non vide.

On note :

$$K_{x_0, R} = \{x \in S_{x_0} \mid d_{x_0}(x) \leq R\}, \quad K_{x_0, R}^t = K_{x_0, R} \times \{t\}.$$

Soit K un compact de $S \times \{t\}$, d'intérieur non vide.

On note :

- $C^\infty(K)$ l'espace des restrictions à K des fonctions C^∞ sur $S \times \{t\}$;
- $H^s(K)$ le complété de $C^\infty(K)$ pour la norme :

$$\|u\|_{H^s(K)} = \left\{ \int_K \sum_{k=0}^s |\nabla^k u|^2 d\mu_t \right\}^{1/2}.$$

- $H_{\text{loc}}^s(S \times \{t\})$ l'espace des (classes de) fonctions u mesurables sur $S \times \{t\}$ telles que :

$$u|_K \in H^s(K).$$

Pour tout compact I d'intérieur non vide de $\mathbb{R}$ et tout compact K d'intérieur non vide de S , on note $C^0(I, L^q(K))$ l'espace des fonctions continues u de I dans $L^q(K)$. Cet espace sera muni de la norme suivante :

$$\|u\|_{q, I, K} = \sup_{t \in I} \|u(t, \cdot)\|_{L^q(K)}.$$

On notera :

$$\|u\|_{q, I, K} = \|u\|_{q, x_0, R_1 R_2}^{t_0}$$

si $I = [t_0 - R_1, t_0 + R_1]$ et $K = K_{x_0, R_2}$ avec $(x_0, t_0, R_1, R_2) \in S \times \mathbb{R} \times (\mathbb{R}_+^*)^2$.

On note $C^0(\mathbb{R}, L_{\text{loc}}^q(S))$ l'espace des fonctions continues u de $\mathbb{R}$ dans $L_{\text{loc}}^q(S)$.

Convention pour alléger les notations

On dira que $\{B, K\}$ sont les domaines associés aux paramètres géométriques $(x_0, t_0, \gamma, R, R') \in S \times \mathbb{R} \times (\mathbb{R}_+^*)^3$ si :

$$B = B_{R, R', \gamma}(x_0, t_0) \quad \text{et} \quad K = K_{x_0, \gamma R}.$$

LEMME 1. — *Inégalités de Sobolev pour les variétés riemanniennes compactes à bord [1] :*

- i) À tout domaine $B_{R,R',\gamma}(x_0, t_0)$ on peut associer une constante $c > 0$, telle que $\forall u \in C^\infty(B_{R,R',\gamma}(x_0, t_0))$ on ait :

$$\left\{ \int_{B_t} |\nabla^\ell u|^q d\mu_t \right\}^{1/q} \leq c \left\{ \int_{B_t} \sum_{k=0}^{m+\ell} |\nabla^k u|^p d\mu_t \right\}^{1/p}, \quad (*)$$

si $mp < n$ et $p \leq q \leq np/(n - mp)$,

ou si $mp = n$ et $p \leq q < +\infty$,

ou si $mp > n$ et $p \leq q \leq +\infty$;

- ii) l'inégalité de Sobolev (*) demeure vraie lorsqu'on remplace les dérivées covariantes ∇^ℓ , ∇^k respectivement par les dérivées covariantes $\bar{\nabla}^\ell$, $\bar{\nabla}^k$.

2. Propriétés du tenseur d'impulsion-énergie associé à l'opérateur différentiel $\square_g + m$ ($m \geq 0$)

2.1 Premières propriétés

DÉFINITION . — Soit V un champ de tenseurs sur V^{n+1} de type quelconque. On appelle tenseur d'impulsion-énergie de V et on note $T[V]$ le champ de tenseurs contravariants d'ordre 2 sur V^{n+1} de composantes :

$$T^{\alpha\beta} = \left(g^{\alpha\delta} g^{\beta\gamma} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} g^{\delta\gamma} \right) \langle \nabla_\delta V, \nabla_\gamma V \rangle + \frac{m}{2} g^{\alpha\beta} \langle V, V \rangle. \quad (2.1)$$

PROPRIÉTÉ DE g (cf. [8]) . — La métrique lorentzienne g admet la représentation suivante :

$$g^{\alpha\beta} = \frac{1}{U} X^\alpha X^\beta - h^{\alpha\beta}, \quad (2.2)$$

$h^{\alpha\beta} W_\alpha W_\beta$ étant une forme quadratique positive qui vérifie donc :

$$h^{\alpha\beta} \langle \nabla_\alpha V, \nabla_\beta V \rangle \geq 0. \quad (2.3)$$

PROPRIÉTÉS DE $T[V]$ (cf. [8], [9])

i) Soit x_a un covecteur temporel ou caractéristique par rapport à g , orienté vers le futur, c'est-à-dire tel que :

$$x_a = \xi(X_a + Y_a)$$

avec $Y_a X^a = 0$ et $\xi > 0$. Alors :

$$\begin{aligned} T^{\alpha\beta} X_\alpha x_\beta &= \xi \frac{U}{2} h^{\alpha\beta} \left\langle \frac{x_\alpha}{\xi U} \nabla_X V - \nabla_\alpha V, \frac{x_\beta}{\xi U} \nabla_X V - \nabla_\beta V \right\rangle + \\ &+ \xi \frac{Um}{2} \langle V, V \rangle + \frac{1}{2\xi U} g^{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta |\nabla_X V|^2, \end{aligned} \quad (2.4)$$

d'où :

$$T^{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta \geq 0. \quad (2.5)$$

ii) Soit (n_α) la normale unitaire aux $S \times \{t\}$, orientée vers les t positifs. Alors :

$$T^{\alpha\beta} X_\alpha n_\beta = \frac{1}{2} \gamma^{\alpha\beta} \langle \nabla_\alpha V, \nabla_\beta V \rangle + \frac{mN}{2} \langle V, V \rangle. \quad (2.6)$$

Preuve. — Voir [8, pp. 51-53] et [9] pour la preuve de i).

ii) découle immédiatement des définitions des $(\gamma^{\alpha\beta})$ et $(T^{\alpha\beta})$.

2.2 Une propriété géométrique des domaines $B_{R,R',\gamma}(x_0, t_0)$

L'établissement des inégalités énergétiques dans les espaces $E^s(B_{R,R',\gamma}(x_0, t_0))$ pour les systèmes quasi-diagonaux linéaires :

$$\square_g u^I + a_J^I \partial_\alpha u^J + b_J^I u^J = f^I \quad \text{dans } B_{R,R',\gamma}(x_0, t_0)$$

reposera essentiellement sur les propriétés (2.5) et (2.6) du tenseur d'impulsion-énergie $(T^{\alpha\beta})$ ainsi que sur la propriété géométrique fondamentale suivante des domaines $B_{R,R',\gamma}(x_0, t_0)$

PROPOSITION 1. — Soit (V^{n+1}, g) une variété régulièrement hyperbolique.

À tout réel $T > 0$, on peut associer un réel $\gamma_0(T) > 0$ ne dépendant que des constantes $\alpha(T)$, $\beta(T)$, $k_1(T)$, $k_2(T)$, tel que :

$$\forall (x_0, t_0) \in S \times \mathbb{R}, \quad \forall (R, R', \gamma) \in (\mathbb{R}_+^*)^3$$

vérifiant : $\gamma \geq \gamma_0(T)$, $\gamma R < \delta$, $R' < R$, $|t_0| + R < T$, alors la frontière latérale $L = \partial B_{R,R',\gamma}^+(x_0, t_0) - (B_{t_0} \cup B_{t_0+R'})$ de $B_{R,R',\gamma}^+(x_0, t_0)$ est une hypersurface lisse de V_T^{n+1} , dont la normale sortante (p_α) est temporelle, orientée vers le futur par rapport à g . On en déduit, compte tenu de (2.5) :

$$T^{\alpha\beta} X_\alpha p_\beta \geq 0 \quad \text{sur } L \quad (2.7).$$

Preuve de la proposition 1. — L'équation de la surface latérale L s'écrit :

$$\gamma(t - t_0) + d_{x_0}(x) = \gamma R, \quad 0 \leq t - t_0 \leq R' \quad (1)$$

L'application d_{x_0} étant C^∞ en tout $x \neq x_0$ de la boule géodésique $K_{x_0,\delta}$, L est une sous-variété lisse de V^{n+1} . En un point (x, t) de L et dans une carte adaptée au feuilletage $S \times R$, la normale à L , extérieure au domaine $B_{R,R',\gamma}^+(x_0, t_0)$ s'écrit :

$$p \equiv (p_\mu) = (\gamma, \partial_1 d_{x_0}(x), \dots, \partial_n d_{x_0}(x)). \quad (2)$$

On va d'abord montrer qu'il existe un réel $\gamma_1(T) > 0$ ne dépendant que des constantes $\alpha(T)$, $\beta(T)$, $k_1(T)$, $k_2(T)$ (caractérisant la variété régulièrement hyperbolique V^{n+1}) tel que $\forall \gamma > \gamma_1(T)$, $\forall (x, t) \in L$, on a $g(x, t)(\tilde{n}, p) > 0$, $\tilde{n}$ étant la normale unitaire aux $S \times \{t\}$ orientée vers les t positifs. En effet, on a :

$$\begin{aligned} g(x, t)(\tilde{n}, p) &= \gamma g^{00}(x, t) n_0(x, t) + g^{0i}(x, t) n_0(x, t) \partial_i d_{x_0}(x) \\ &= \frac{\gamma}{N(x, t)} + N(x, t) g^{0i}(x, t) \partial_i d_{x_0}(x). \end{aligned} \quad (3)$$

L'application de l'inégalité de Schwarz dans la métrique proprement riemannienne $(-g^{ij})$ donne :

$$\begin{aligned} |g^{0i}(x, t) \partial_i d_{x_0}(x)| &\leq (-g^{ij}(x, t) \partial_i d_{x_0}(x) \partial_j d_{x_0}(x))^{1/2} \times \\ &\quad \times (-\tilde{g}_{ij}(x, t) g^{0i}(x, t) g^{0j}(x, t))^{1/2}, \end{aligned} \quad (4)$$

où $(\tilde{g}_{ij})$ la matrice inverse de (g^{ij}) est égale à :

$$\tilde{g}_{ij} = g_{ij} - \frac{g_{0i} g_{0j}}{g_{00}}. \quad (5)$$

De (5) on déduit, compte tenu de (1.2) :

$$-\bar{g}_{ij}g^{0i}g^{0j} = \frac{1 - g_{00}g^{00}}{g_{00}} \leq \frac{1}{g_{00}} \leq \frac{1}{\alpha(T)}. \quad (6)$$

Soit maintenant $(\bar{g}^{ij})$ l'inverse de la matrice (g_{ij}) . On a :

$$\bar{g}^{ij} = g^{ij} - \frac{g^{0i}g^{0j}}{g^{00}}. \quad (7)$$

On en déduit, compte tenu de (1.1) et (1.6) :

$$\begin{aligned} -g^{ij}(x, t)\partial_i d_{x_0}(x)\partial_j d_{x_0}(x) &= \\ &= -\bar{g}^{ij}(x, t)\partial_i d_{x_0}(x)\partial_j d_{x_0}(x) - \frac{(g^{0i}(x, t)\partial_i d_{x_0}(x))^2}{g^{00}(x, t)} \\ &\leq -\bar{g}_t^{ij}(x)\partial_i d_{x_0}(x)\partial_j d_{x_0}(x) \\ &\leq -k_1(T)\bar{g}_0^{ij}(x)\partial_i d_{x_0}(x)\partial_j d_{x_0}(x) = k_1(T), \end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$-g^{ij}(x, t)\partial_i d_{x_0}(x)\partial_j d_{x_0}(x) \leq k_1(T). \quad (8)$$

De (3), (4), (6) et (8), on déduit, compte tenu de (1.2), (1.3), (1.4), (1.5) :

$$g(x, t)(\tilde{n}, p) \geq \frac{\gamma(T)}{\beta(T)} - \frac{\beta(T)}{\alpha^{1/2}(T)} k_1^{1/2}(T).$$

Il suffit donc de prendre $\gamma_1(T) = \beta(T)k_1^{1/2}(T)/\alpha^{1/2}(T)$ pour avoir $g(x, t)(\tilde{n}, p) > 0, \forall \gamma > \gamma_1$.

Des calculs précédents, on tire immédiatement :

$$\begin{aligned} g(x, t)(p, p) &\equiv g^{\alpha\beta}p_\alpha p_\beta = \gamma^2 g^{00} + 2\gamma g^{0i}\partial_i d_{x_0} + g^{ij}\partial_i d_{x_0}\partial_j d_{x_0} \\ &\geq \frac{\gamma^2}{\beta^2(T)} - \frac{2\gamma k_1^{1/2}(T)}{\alpha^{1/2}(T)} - k_1(T). \end{aligned}$$

Soient $\gamma_2(T), \gamma_3(T)$ ($\gamma_2 > \gamma_3$) les deux racines distinctes de l'équation d'inconnue γ :

$$\frac{\gamma^2}{\beta^2(T)} - \frac{2\gamma k_1^{1/2}(T)}{\alpha^{1/2}(T)} - k_1(T) = 0.$$

On choisit alors $\gamma_0(T) = \max(\gamma_1(T), \gamma_2(T)) + 1$. On a $\forall \gamma > \gamma_0(T)$:

$$g(\tilde{n}, p) > 0 \quad \text{et} \quad g(p, p) > 0 \quad \text{sur } L ;$$

d'où la proposition 1.

3. Résultats d'existence pour les systèmes quasi diagonaux linéaires du second ordre de partie principale $\square_g$

Dans cette section, on résout respectivement dans les espaces

$$E^s(B_{R,R',\gamma}(x_0, t_0)) \quad \text{et} \quad E_{\text{loc}}^s(V^{n+1})$$

le problème de Cauchy local, puis le problème de Cauchy global, relatifs aux systèmes quasi diagonaux linéaires de la forme :

$$\square_g u^I + b_J^{I\alpha} \partial_\alpha u^J + a_J^I u^J = f^I, \quad I, J = 1, \dots, N. \quad (3.1)$$

Le système (3.1) de N équations à N fonctions scalaires inconnues u^I peut se noter sommairement ;

$$\square_g u + b \cdot \nabla u + au = f, \quad (3.1)'$$

avec $u = (u^I)$, $b = (b_J^I)$, $a = (a_J^I)$, $f = (f^I)$.

On notera aussi :

- $u = (u^I) \in C^\infty(B)$ pour $\forall I$, $u^I \in C^\infty(B)$;
- $u = (u^I) \in E^s(B)$ pour $\forall I$, $u^I \in E^s(B)$;
- $\|u\|_{E^s(B)} = \sum_I \|u^I\|_{E^s(B)}$;
- $b = (b_J^I) \in C^\infty(B)$ pour $\forall I, J$, b_J^I est un champ de vecteurs de classe C^∞ sur B etc.

LEMME 2. — Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $s_1 = [n/2]$ la partie entière de $n/2$. Soit q un réel > 2 si $n \in \{1, 2\}$, $q \geq n$ si $n \geq 3$. Soient q', q'' des réels $\geq n$. Soit T un réel > 0 . Soient $(x_0, t_0) \in S \times \mathbb{R}$, $(R, R', \gamma) \in (\mathbb{R}_+^*)^3$ tels que :

- $\gamma \geq \gamma_0(T)$ ($\gamma_0(T)$ étant le réel > 0 déterminé à la proposition 1),
- $\gamma R < \delta$ (δ étant le rayon d'injectivité de $(S, -\bar{g}_0)$),
- $R' < R$ et $|t_0| + R < T$.

Soient $\{B, K\}$ les domaines associés aux paramètres géométriques $(x_0, t_0, \gamma, R, R')$. Alors toute solution $u = (u^I) \in C^\infty(B)$ du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \nabla^\lambda \nabla_\lambda u^I + b_J^I \partial_\alpha u^J + a_J^I u^J = f^I & \text{dans } B \\ u^I = \phi^I \text{ et } \partial_t u^I = \psi^I & \text{sur } K, \end{cases} \quad (3.2)$$

où

$$\begin{aligned} a &= (a_J^I), \quad b = (b_J^I), \quad f = (f^I) \in C^\infty(B) \\ \phi &= (\phi^I), \quad \psi = (\psi^I) \in C^\infty(K), \end{aligned}$$

vérifie les inégalités énergétiques suivantes :

$$\|u\|_{E^1(B)} \leq c_1 \left[\|\phi\|_{H^1(K)} + \|\psi\|_{L^2(K)} + R' \|f\|_{E^0(B)} \right] \quad (3.3)$$

et si $s \geq 2$:

$$\|u\|_{E^s(B)} \leq c_2 \left[\|\phi\|_{H^s(K)} + \|\psi\|_{H^{s-1}(K)} + \sqrt{R'} \|f\|_{E^{s-1}(B)} \right], \quad (3.4)$$

c_1 étant une fonction croissante de T , dépendant de (V^{n+1}, g) et des constantes M_1 et M_2 définies ci-dessous; c_2 étant une fonction croissante de T , dépendant de (V^{n+1}, g) et des constantes M_3, M_4 avec :

$$M_1 = \|a\|_{q, x_0, R', \gamma}^{t_0}$$

$$M_2 = \|b\|_{C^0(B)}$$

$$M_3 = \begin{cases} M_1 + \sum_{k=1}^{s-1} \|\nabla^k a\|_{q', x_0, R', \gamma R}^{t_0} & \text{si } 2 \leq s \leq s_1 \\ M_1 + \sum_{k=1}^{s_1-1} \|\nabla^k a\|_{q', x_0, R', \gamma R}^{t_0} + \|\nabla^{s_1} a\|_{E^{s-s_1-1}(B)} & \text{si } s > s_1 \end{cases}$$

$$M_4 = \begin{cases} M_2 + \sum_{k=1}^{s-1} \|\nabla^k b\|_{q'', x_0, R', \gamma R}^{t_0} & \text{si } 2 \leq s \leq s_1 + 1 \\ M_2 + \sum_{k=1}^{s_1} \|\nabla^k b\|_{q'', x_0, R', \gamma R}^{t_0} + \|\nabla^{s_1+1} b\|_{E^{s-s_1-2}(B)} & \text{si } s > s_1 + 1 \end{cases}$$

Remarques

Une exploitation plus stricte des inégalités de Sobolev du lemme 1 permet d'avoir les mêmes résultats en remplaçant les réels M_3 et M_4 respectivement par les réels M'_3 et M'_4 définis par :

$$M'_3 = \begin{cases} M_1 + \sum_{k=1}^{s-1} \|\nabla^k a\|_{q_{k,n},x_0,R',\gamma R}^{t_0} & \text{si } 2 \leq s \leq s_1 \\ M_1 + \sum_{k=1}^{s_1-1} \|\nabla^k a\|_{q_{k,n},x_0,R',\gamma R}^{t_0} + \|\nabla^{s_1} a\|_{E^{s-s_1-1}(B)} & \text{si } s > s_1 \end{cases}$$

$$M'_4 = \begin{cases} M_2 + \sum_{k=1}^{s-1} \|\nabla^k b\|_{q'_{k,n},x_0,R',\gamma R}^{t_0} & \text{si } 2 \leq s \leq s_1 + 1 \\ M_2 + \sum_{k=1}^{s_1-1} \|\nabla^k b\|_{q'_{k,n},x_0,R',\gamma R}^{t_0} + \|\nabla^{s_1+1} b\|_{E^{s-s_1-2}(B)} & \text{si } s > s_1 + 1 \end{cases}$$

les $(q_{k,n})_{1 \leq k \leq s_1-1}$ et $(q'_{k,n})_{1 \leq k \leq s_1}$ étant deux suites de réels astreints aux conditions suivantes :

$$\begin{cases} q_{k,n} \geq \frac{n}{k+1} & \text{si } 1 \leq k \leq s_1 - 1 \\ q'_{k,n} \geq \frac{n}{k} & \text{si } 1 \leq k \leq s_1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} q_{s_1-1,n} > \frac{n}{s_1} & \text{si } n \text{ est pair} \\ q'_{s_1,n} > \frac{n}{s_1} & \text{si } n \text{ pair.} \end{cases}$$

Preuve de l'inégalité énergétique (3.3)

Soit m un réel > 0 . Considérons le tenseur d'impulsion-énergie $(T^{\lambda\mu})$ défini par :

$$T^{\lambda\mu} = \sum_I \left(\nabla^\lambda u^I \nabla^\mu u^I - \frac{1}{2} g^{\lambda\mu} \nabla_\rho u^I \nabla^\rho u^I + \frac{m}{2} g^{\lambda\mu} (u^I)^2 \right). \quad (1)$$

L'application sur $M_t = B_{R,R',\gamma}^+(x_0, t_0) \cap (S \times [t_0, t])$ du théorème de Stokes-Gauss à l'identité :

$$\nabla_\lambda (T^{\lambda\mu} X_\mu) = \sum_I (\nabla^\lambda \nabla_\lambda u^I + m u^I) X^\mu \nabla_\mu u^I + \frac{1}{2} T^{\lambda\mu} (\nabla_\lambda X_\mu + \nabla_\mu X_\lambda) \quad (2)$$

donne, compte tenu de (3.2) :

$$\begin{aligned} \int_{\partial M_t} T^{\lambda\mu} X_\mu p_\lambda d\sigma = \\ = \int_{t_0}^t \int_{B_\tau} \left\{ \sum_I ((m\delta_J^I - a_J^I)u^J - b_J^{I\alpha} \partial_\alpha u^J + f^I) X^\mu \nabla_\mu u^I + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} T^{\lambda\mu} (\nabla_\lambda X_\mu + \nabla_\mu X_\lambda) \right\} N d\mu_\tau d\tau, \end{aligned} \quad (3)$$

où

$$\partial M_t = B_t \cup L_t \cup K \quad \text{avec} \quad B_t = B_{R,R',\gamma}^+(x_0, t_0) \cap (S \times \{t\}), \quad (4)$$

$L_t = L \cap (S \times [t_0, t])$, L étant la frontière latérale de $B_{R,R',\gamma}^+(x_0, t_0)$.

Sur L_t , le covecteur (p_λ) étant temporel par rapport à g , orienté vers le futur (proposition 1) car $\gamma \geq \gamma_0(T)$, on a en vertu de la formule (2.7) de la proposition 1 :

$$T^{\lambda\mu} X_\mu p_\lambda > 0. \quad (5)$$

Le covecteur (p_λ) étant égal, sur B_t à (n_λ) et sur K à $(-n_\lambda)$, on a d'après la formule (2.6) :

$$T^{\lambda\mu} X_\mu p_\lambda = \begin{cases} \sum_I \left(\frac{1}{2} \gamma^{\lambda\mu} \nabla_\lambda u^I \nabla_\mu u^I + \frac{1}{2} mN(u^I)^2 \right) & \text{sur } B_t \\ - \sum_I \left(\frac{1}{2} \gamma^{\lambda\mu} \nabla_\lambda u^I \nabla_\mu u^I + \frac{1}{2} mN(u^I)^2 \right) & \text{sur } K. \end{cases} \quad (6)$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{B_t} \sum_I (\gamma^{\lambda\mu} \nabla_\lambda u^I \nabla_\mu u^I + mN(u^I)^2) d\mu_t + \\ + \int_{L_t} T^{\lambda\mu} X_\mu p_\lambda d\sigma - \frac{1}{2} \int_K \sum_I (\gamma^{\lambda\mu} \nabla_\lambda u^I \nabla_\mu u^I + mN(u^I)^2) d\mu_{t_0} = \\ = \int_{t_0}^t \int_{B_\tau} \left\{ \sum_I ((m\delta_J^I - a_J^I)u^J - b_J^{I\alpha} \partial_\alpha u^J + f^I) X^\mu \nabla_\mu u^I + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} T^{\lambda\mu} (\nabla_\lambda X_\mu + \nabla_\mu X_\lambda) \right\} N d\mu_\tau d\tau \\ \equiv R_t. \end{aligned}$$

D'où, compte tenu de (5),

$$\begin{aligned} \int_{B_t} \sum_I \left(\gamma^{\lambda\mu} \nabla_\lambda u^I \nabla_\mu u^I + mN(u^I)^2 \right) d\mu_t &\leq \\ &\leq R_t + \int_K \sum_I \left(\gamma^{\lambda\mu} \nabla_\lambda u^I \nabla_\mu u^I + mN(u^I)^2 \right) d\mu_{t_0}. \end{aligned} \quad (7)$$

On termine alors les calculs comme dans [4], en utilisant les inégalités de Sobolev du lemme 1, le lemme de Gronwall et en se rappelant que $B_{R,R',\gamma}(x_0, t_0)$ est un compact de V^{n+1} .

Preuve de l'inégalité énergétique (3.4). — $\forall p \in \{0, 1, \dots, s-1\}$ posons :

$$u^{I(p)} = \nabla^p u^I = \nabla \underbrace{\dots}_{(p \text{ fois})} \nabla u^I \quad (1)$$

$$\begin{aligned} T_{(p)}^{\lambda\mu} = \sum_I \left\{ \langle \nabla^\lambda u^{I(p)}, \nabla^\mu u^{I(p)} \rangle - \frac{1}{2} g^{\lambda\mu} \langle \nabla_\rho u^{I(p)}, \nabla^\rho u^{I(p)} \rangle + \right. \\ \left. + \frac{m}{2} g^{\lambda\mu} \langle u^{I(p)}, u^{I(p)} \rangle \right\}. \end{aligned} \quad (2)$$

On a :

$$\nabla_\lambda T_{(p)}^{\lambda\mu} = F_{(p)}^\mu, \quad (3)$$

avec

$$\begin{aligned} F_{(p)}^\mu = \sum_I \left\{ \langle \nabla^p f^I, \nabla^\mu u^{I(p)} \rangle + \right. \\ + \sum_{k=0}^{p-1} \langle \nabla^k (m\delta_J^I - a_J^I) \nabla^{(m-k)} u^J - \nabla^k b_J^I \nabla^{(m-k)+1} u^J, \nabla^\mu u^{I(p)} \rangle + \\ + \sum_{k=0}^{p-1} \langle \nabla^k \text{Riem}(g) \cdot \nabla^{p-k} u^I, \nabla^\mu u^{I(p)} \rangle + \\ \left. + \sum_{1 \leq i \leq p} (C_1^{iI} + C_2^{iI} + C_3^{iI}) \right\}, \end{aligned} \quad (4)$$

où on a posé :

$$\begin{aligned} C_1^I &= \nabla_\lambda \gamma^{\alpha_i \beta_i} \prod_{j \neq i} \gamma^{\alpha_j \beta_j} \nabla_{\alpha_1 \dots \alpha_p}^\lambda u^I \nabla_{\beta_1 \dots \beta_p}^\mu u^I \\ C_2^I &= -\frac{1}{2} g^{\lambda \mu} \nabla_\lambda \gamma^{\alpha_i \beta_i} \prod_{j \neq i} \gamma^{\alpha_j \beta_j} \nabla_{\rho \alpha_1 \dots \alpha_p} u^I \nabla_{\beta_1 \dots \beta_p}^\rho u^I \\ C_3^I &= \frac{m}{2} g^{\lambda \mu} \nabla_\lambda \gamma^{\alpha_i \beta_i} \prod_{j \neq i} \gamma^{\alpha_j \beta_j} \nabla_{\alpha_1 \dots \alpha_p} u^I \nabla_{\beta_1 \dots \beta_p} u^I. \end{aligned}$$

L'intégration sur $M_t = B_{R,R',\gamma}^+(x_0, t_0) \cap (S \times [t_0, t])$ de la formule de divergence covariante :

$$\nabla_\lambda (T_{(p)}^{\lambda \mu} X_\mu) = \frac{1}{2} T_{(p)}^{\lambda \mu} (\nabla_\lambda X_\mu + \nabla_\mu X_\lambda) + F_{(p)}^\mu X_\mu \quad (5)$$

donne, en vertu du théorème de Stokes-Gauss :

$$\begin{aligned} & \sum_{p=0}^{s-1} \int_{B_t} T_{(p)}^{\lambda \mu} X_\mu n_\lambda \, d\mu_t + \sum_{p=0}^{s-1} \int_{L_t} T_{(p)}^{\lambda \mu} X_\mu p_\lambda \, d\sigma = \\ &= \sum_{p=0}^{s-1} \int_K T_{(p)}^{\lambda \mu} X_\mu n_\lambda \, d\mu_{t_0} + \\ &+ \sum_{p=0}^{s-1} \int_{t_0}^t d\tau \int_{B_\tau} N \left(F_{(p)}^\mu X_\mu + \frac{1}{2} T_{(p)}^{\lambda \mu} (L_X g)_{\lambda \mu} \right) d\mu_\tau, \end{aligned}$$

($L_X g$ étant la dérivée de Lie de g dans la direction de X). Or, on a :

• sur B_t ,

$$T_{(p)}^{\lambda \mu} X_\mu n_\lambda = \sum_I \frac{1}{2} \left(|\nabla^{p+1} u^I|^2 + mN |\nabla^p u^I|^2 \right)$$

• sur K ,

$$T_{(p)}^{\lambda \mu} X_\mu n_\lambda = - \sum_I \frac{1}{2} \left(|\nabla^{p+1} u^I|^2 + mN |\nabla^p u^I|^2 \right)$$

• sur L_t (proposition 1),

$$T_{(p)}^{\lambda \mu} X_\mu n_\lambda > 0.$$

D'où :

$$\begin{aligned}
 & \sum_{p=0}^{s-1} \int_{B_t} \sum_I \left(|\nabla^{p+1} u^I|^2 + mN |\nabla^p u^I|^2 \right) d\mu_t \leq \\
 & \leq \sum_{p=0}^{s-1} \int_K \sum_I \left(|\nabla^{p+1} u^I|^2 + mN |\nabla^p u^I|^2 \right) d\mu_{t_0} + \\
 & + \sum_{p=0}^{s-1} \int_{t_0}^t d\tau \int_{B_\tau} N \left(2F_{(p)}^\mu X_\mu + T_{(p)}^{\lambda\mu} (L_X g)_{\lambda\mu} \right) d\mu_\tau.
 \end{aligned} \tag{6}$$

Par des calculs identiques à ceux de [4], on déduit de (6) l'inégalité énergétique (3.4), en utilisant, outre les inégalités de Sobolev du lemme 1 et le lemme de Gronwall, le fait que, B étant compact et la métrique g étant C^∞ sur V^{n+1} , le tenseur de courbure Riem, les tenseurs g , γ , X et leurs dérivées covariantes sont uniformément bornés sur B .

Du lemme 2, on déduit par un raisonnement identique à celui de [4] le résultat d'existence suivant.

LEMME 3

i) Les hypothèses géométriques sur $\{B, K\}$ et les notations étant celles du lemme 2, sous les conditions de régularité :

$$\begin{aligned}
 & f \in E^0(B), \quad \phi \in H^1(K), \quad \psi \in L^2(K) \\
 & b \in C^0(B), \quad a \in C^0([t_0 - R, t_0 + R], L^q(K))
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

avec $q > 2$ si $n \in \{1, 2\}$, avec $q \geq n$ si $n \geq 3$, le problème de Cauchy (3.2) possède une solution $u = (u^I) \in E^1(B)$ et vérifiant l'inégalité énergétique :

$$\|u\|_{E^1(B)} \leq C_1(R, M_1, M_2) \left[\|\phi\|_{H^1(K)} + \|\psi\|_{L^2(K)} + R' \|f\|_{E^0(B)} \right].$$

ii) Si de plus $\forall I, J$, b possède, au sens des distributions, une dérivée covariante qui est un champ de tenseurs tel que :

$$\operatorname{div}(b_J^I) \equiv \nabla_\lambda b_J^{I\lambda} \in C^0([t_0 - R, t_0 + R], L^q(K))$$

avec $q > 2$ si $n \in \{1, 2\}$, avec $q \geq n$ si $n \geq 3$, alors cette solution est unique.

iii) Si de plus, s étant un entier ≥ 2 , on a :

$$f \in E^{s-1}(B), \quad \phi \in H^s(K), \quad \psi \in H^{s-1}(K) \quad (3.7)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{si } 2 \leq s \leq s_1, \\ \nabla^k a \in C^0([t_0 - R, t_0 + R], L^{q'}(K)) \quad \forall k \in \{1, \dots, s-1\} \\ \text{si } s > s_1, \\ \nabla^k a \in C^0([t_0 - R, t_0 + R], L^{q'}(K)) \quad \forall k \in \{1, \dots, s_1-1\} \\ \text{et de plus } \nabla^{s_1} a \in E^{s-s_1-1}(B) \end{array} \right. \quad (3.7')$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{si } 2 \leq s \leq s_1 + 1, \\ \nabla^k b \in C^0([t_0 - R, t_0 + R], L^{q''}(K)) \quad \forall k \in \{1, \dots, s-1\} \\ \text{si } s > s_1 + 1, \\ \nabla^k b \in C^0([t_0 - R, t_0 + R], L^{q''}(K)) \quad \forall k \in \{1, \dots, s_1\} \\ \text{et de plus } \nabla^{s_1+1} b \in E^{s-s_1-2}(B), \end{array} \right. \quad (3.7'')$$

alors la solution $u \in E^s(B)$ et vérifie l'inégalité énergétique :

$$\|u\|_{E^s(B)} \leq C \left[\|\phi\|_{H^s(K)} + \|\psi\|_{H^{s-1}(K)} + \sqrt{R'} \|f\|_{E^{s-1}(B)} \right],$$

où C est une fonction croissante de T , dépendant de (V^{n+1}, g) et des constantes M_3 et M_4 .

Preuve. — Le seul point qui mérite d'être traité est l'unicité de solution dans le cas $s = 1$. À cet effet, posons : $P = \square_g + b\nabla + a$, tP = l'adjoint de P . On a :

$${}^tP = \square_g - \nabla_\lambda(b^\lambda \cdot) + a = \square_g - b\nabla + a - \operatorname{div} b. \quad (1)$$

Pour démontrer l'unicité de solution, il suffit de montrer que l'équation adjointe ${}^tPV = W$, où W est à support contenu dans $\overset{\circ}{B}$ possède au moins une solution dans E^1 , ce qui, compte tenu de (1), découle de la partie i) du lemme 3.

Remarques

1) L'unicité de solution est conservée si on lève la condition :

$$\operatorname{div} b \in C^0([t_0 - R, t_0 + R], L^q(K))$$

Pour le démontrer, il faudrait faire intervenir comme dans [12], les espaces de Sobolev de puissance fractionnaire (plus précisément entière négative) sur V^{n+1} et K .

2) Conformément à la remarque qui a suivi le lemme 2, la partie iii) du lemme 3 est encore vraie sous les hypothèses moins restrictives obtenues en remplaçant (3.7') et (3.7'') respectivement par (3.7''') et (3.7''') avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{si } 2 \leq s \leq s_1, \\ \nabla^k a \in C^0([t_0 - R, t_0 + R], L^{q_{k,n}}(K)) \quad \forall k \in \{1, \dots, s-1\} \\ \text{si } s > s_1, \\ \nabla^k a \in C^0([t_0 - R, t_0 + R], L^{q_{k,n}}(K)) \quad \forall k \in \{1, \dots, s_1-1\} \\ \text{et de plus } \nabla^{s_1} a \in E^{s-s_1-1}(B) \end{array} \right. \quad (3.7''')$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{si } 2 \leq s \leq s_1 + 1, \\ \nabla^k b \in C^0([t_0 - R, t_0 + R], L^{q'_{k,n}}(K)) \quad \forall k \in \{1, \dots, s-1\} \\ \text{si } s > s_1 + 1, \\ \nabla^k b \in C^0([t_0 - R, t_0 + R], L^{q'_{k,n}}(K)) \quad \forall k \in \{1, \dots, s_1\} \\ \text{et de plus } \nabla^{s_1+1} b \in E^{s-s_1-2}(B). \end{array} \right. \quad (3.7''')$$

Les constantes M_3 et M_4 sont alors respectivement remplacées par les constantes M'_3 et M'_4 (les constantes $q_{k,n}$, $q'_{k,n}$, M'_3 et M'_4 sont les mêmes que celles utilisées dans la remarque au lemme 2).

PROPOSITION 2

i) Sous les conditions :

$$\left\{ \begin{array}{l} f \in E^0_{\text{loc}}(V^{n+1}), \quad \phi \in H^1_{\text{loc}}(S), \quad \psi \in L^2_{\text{loc}}(S) \\ b = (b^I_J) \in C^0(V^{n+1}) \text{ et } \forall I, J, b^I_J \text{ possède, au sens des distributions} \\ \text{une dérivée covariante qui est un champ de tenseurs sur } V^{n+1} \\ \text{tel que } \operatorname{div}(b^I_J) \equiv \nabla_\lambda b^{I\lambda}_J \in C^0(\mathbb{R}, L^q_{\text{loc}}(S)) \\ a \in C^0(\mathbb{R}, L^q_{\text{loc}}(S)) \text{ avec } q > 2 \text{ si } n \in \{1, 2\} \text{ et } q \geq n \text{ si } n \geq 3 \end{array} \right. \quad (3.9)$$

le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \square_g u^I + b_J^{I\alpha} \partial_\alpha u^J + a_J^I u^J = f^I & \text{dans } V^{n+1} \\ u = \phi \text{ et } \partial_t u = \psi & \text{sur } S \times \{0\}. \end{cases} \quad (3.10)$$

possède une solution globale unique $u = (u^I) \in E_{\text{loc}}^1(V^{n+1})$

ii) Si de plus, s étant un entier ≥ 2 , on suppose :

$$f \in E_{\text{loc}}^{s-1}(V^{n+1}), \quad \phi \in H_{\text{loc}}^s(S), \quad \psi \in H_{\text{loc}}^{s-1}(S) \quad (3.11)$$

$$\begin{cases} \text{si } 2 \leq s \leq s_1, \\ \nabla^k a \in C^0(\mathbb{R}, L_{\text{loc}}^{q'}(S)) \quad \forall k \in \{1, \dots, s-1\} \text{ avec } q' \geq n \\ \text{si } s > s_1, \\ \nabla^k a \in C^0(\mathbb{R}, L_{\text{loc}}^{q'}(S)) \quad \forall k \in \{1, \dots, s_1-1\} \\ \text{et de plus } \nabla^{s_1} a \in E_{\text{loc}}^{s-s_1-1}(V^{n+1}), \end{cases} \quad (3.11')$$

$$\begin{cases} \text{si } 2 \leq s \leq s_1 + 1, \\ \nabla^k b \in C^0(\mathbb{R}, L_{\text{loc}}^{q''}(S)) \quad \forall k \in \{1, \dots, s-1\} \text{ avec } q'' \geq n \\ \text{si } s > s_1 + 1, \\ \nabla^k b \in C^0(\mathbb{R}, L_{\text{loc}}^{q''}(S)) \quad \forall k \in \{1, \dots, s_1\} \\ \text{et de plus } \nabla^{s_1+1} b \in E_{\text{loc}}^{s-s_1-2}(V^{n+1}), \end{cases} \quad (3.11'')$$

alors la solution globale $u \in E_{\text{loc}}^s(V^{n+1})$.

iii) Si les coefficients des équations et les données initiales sont C^∞ , alors la solution $u \in C^\infty(V^{n+1})$.

Idée de la preuve. — La solution globale u se construit, compte tenu de l'unicité de solution pour le problème de Cauchy hyperbolique, par recollement des solutions partielles associées aux problèmes de Cauchy (3.2) (voir la preuve du théorème 1 de la section 5 pour un exemple de recollement "global" de solutions partielles).

Remarque. — La remarque 2), faite à propos du lemme 3, peut être reconduite ici à propos de la proposition 2.

4. Solutions des systèmes quasi diagonaux non linéaires

$$\square_g u^I + f^I(u^L, \nabla^L u, x) = 0$$

4.1 Solutions locales

Du lemme 3, on déduit immédiatement par un argument classique basé sur le théorème du point fixe.

LEMME 4

- i) Les hypothèses géométriques sur les domaines $\{B, K\}$ étant celles du lemme 2, soient s un entier naturel $> n/2 + 1$ et s_1 le plus petit entier $> n/2 + 1$. Soit le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \square_g u^I + f^I(u^L, \nabla^L u, x) = 0 & \text{dans } B \\ u^I = \phi^I \text{ et } \partial_t u^I = \psi^I & \text{sur } K \end{cases} \quad (4.1)$$

où

$$\begin{aligned} f = (f^I) \text{ est de classe } C^{s-1} \\ \phi = (\phi^I) \in H^s(K), \quad \text{et} \quad \psi = (\psi^I) \in H^{s-1}(K) \end{aligned} \quad (4.2)$$

Alors, il existe $R_0 \in]0, R']$ ne dépendant que des normes $H^{s_1} \times H^{s_1-1}$ de (ϕ, ψ) tel que le problème de Cauchy (4.1) admet, dans le domaine $B_{R, R_0, \gamma}(x_0, t_0)$, une solution unique

$$u = (u^I) \in E^{s, \text{bigl}}(B_{R, R_0, \gamma}(x_0, t_0)).$$

- ii) Dans le cas où $f(u, \nabla u, x)$ est linéaire par rapport à ∇u , la condition $s > n/2 + 1$ est remplacée par $s > n/2$, s_1 étant alors le plus petit entier $> n/2$.
- iii) Si $\phi, \psi \in C^\infty(K)$ et f est C^∞ , alors le problème de Cauchy (4.1) possède une solution unique

$$u \in C^\infty(B_{R, R_0, \gamma}(x_0, t_0)).$$

R_0 ne dépendant que des normes $H^{s_1} \times H^{s_1-1}$ de (ϕ, ψ) .

- iv) Toute solution $u \in E^s(B)$ du problème de Cauchy (4.1), (4.2) est limite de solutions $C^\infty(B)$ de systèmes approchés où f est C^∞ .

Lorsqu'on se restreint à l'équation $\square_g u + au + bu^p = 0$ ($n \in \{1, 2, 3\}$ et $1 < p < +\infty$ si $n = 1, 2$ et $p = 3$ si $n = 3$), on peut, compte tenu des inégalités de Sobolev, améliorer le lemme 4 sous la forme suivante.

LEMME 5

i) Soit $n \in \{1, 2, 3\}$. Sous des conditions géométriques sur $\{B, K\}$ identiques à celles du lemme 2, soit le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \square_g u + au + bu^p = 0 & \text{dans } B \\ u = \phi \text{ et } \partial_t u = \psi & \text{sur } K, \end{cases} \quad (4.3)$$

où

p est un entier naturel impair tel que $1 < p < +\infty$ si $n = 1$ ou 2 , $p = 3$ si $n = 3$.

Si $s = 1$, $a \in C^0([t_0 - R, t_0 + R], L^q(K))$ avec :

$$\begin{cases} q > 2 \text{ si } n = 1 \text{ ou } 2, & q \geq 3 \text{ si } n = 3, \\ b \in C^0(B); \\ \phi \in H^1(K), \psi \in L^2(K). \end{cases}$$

Si $s \geq 2$, on suppose de plus :

$$a, b \in E^{s-1}(B); \quad \phi \in H^s(K); \quad \psi \in H^{s-1}(K)$$

Alors, il existe $R_0 \in]0, R']$, ne dépendant que des normes $H^1 \times L^2$ de (ϕ, ψ) si $s = 1$, des normes $H^2 \times H^1$ de (ϕ, ψ) si $s \geq 2$, tel que le problème de Cauchy (4.3) admet, dans le domaine $B_{R, R_0, \gamma}(x_0, t_0)$, une solution unique $u \in E^s(B_{R, R_0, \gamma}(x_0, t_0))$.

ii) les résultats iii), iv) du lemme 4 sont aussi valables ici.

4.2 Conditions suffisantes pour un résultat d'existence globale pour le système $\square_g u^I + f^I(u^L, \nabla u^L, x) = 0$

Supposons d'abord qu'on puisse associer au système

$$\square_g u^I + f^I(u^L, \nabla u^L, x) = 0$$

un tenseur d'impulsion-énergie $(T_{\alpha\beta})$ satisfaisant aux conditions suivantes :

$$i) \quad \nabla_{\alpha}(T^{\alpha\beta}X_{\beta}) = \sum_I (\square_g u^I + f^I(u^L, \nabla u^L, x)) X^{\beta} \nabla_{\beta} u^I + R(u, \nabla u, x);$$

ii) $(T_{\alpha\beta})$ vérifie la condition de l'énergie dominante $T_{\alpha\beta}Y^{\alpha}Z^{\beta} \geq 0$ pour tout couple (Y, Z) de vecteurs non spatiaux orientés vers le futur.

Alors l'intégration de $\nabla_{\alpha}(T^{\alpha\beta}X_{\beta})$ sur $B_{R,R_0,\gamma}^+(x_0, t_0)$ donne, compte tenu de i) :

$$\begin{aligned} \int_{B_t} T^{\alpha\beta} X_{\beta} n_{\alpha} d\mu_t - \int_K T^{\alpha\beta} X_{\beta} n_{\alpha} d\mu_{t_0} + \int_L T^{\alpha\beta} X_{\beta} p_{\alpha} d\sigma = \\ = \int_{t_0}^t \int_{B_{\tau}} R \cdot N d\mu_{\tau} d\tau \end{aligned} \quad (1)$$

où L est la surface latérale de B .

On en déduit, compte tenu de ii) et les domaines $\{B, K\}$ vérifiant les hypothèses géométriques du lemme 2 :

$$\int_{B_t} T^{\alpha\beta} X_{\beta} n_{\alpha} d\mu_t - \int_K T^{\alpha\beta} X_{\beta} n_{\alpha} d\mu_{t_0} \leq \int_{t_0}^t \int_{B_{\tau}} R \cdot N d\mu_{\tau} d\tau. \quad (2)$$

De même l'intégration de $\nabla_{\alpha}(T^{\alpha\beta}X_{\beta})$ sur la bande $S \times [0, t]$ donne (lorsque u est C^{∞} à support compact dans l'espace) :

$$\int_{S \times \{t\}} T^{\alpha\beta} X_{\beta} n_{\alpha} d\mu_t - \int_{S \times \{0\}} T^{\alpha\beta} X_{\beta} n_{\alpha} d\mu_0 = \int_0^t \int_{S \times \{\tau\}} R \cdot N d\mu_{\tau} d\tau. \quad (3)$$

Supposons maintenant qu'on dispose de calculs (constitués essentiellement d'applications du lemme de Gronwall et des inégalités de Sobolev sur $S \times \{t\}$) permettant, sans restriction sur la grandeur des normes des données initiales, de déduire de (3) des majorations a priori pour les solutions de $\square_g u^I + f^I(u^L, \nabla u^L, x) = 0$ dans $S \times [0, T]$. Alors les mêmes calculs effectués sur les B_t permettront de déduire de l'inégalité (2) des majorations a priori pour les solutions de $\square_g u^I + (f^I(u^L, \nabla u^L, x) = 0$ dans B . On en déduira un résultat d'existence globale dans B , puis par recollement "global" des solutions partielles associées aux domaines B un résultat d'existence globale dans V^{n+1} .

Dans la suite, on se propose de donner des exemples auxquels cette méthode s'applique.

5. Solutions globales de l'équation non linéaire

$$\square_g u + au + bu^p = 0 \quad (a, b \geq 0, p \text{ entier impair})$$

LEMME 6. — Soit $n \in \{1, 2, 3\}$. Soit m un réel ≥ 0 . Soit p un entier impair tel que $1 < p < +\infty$ si $n = 1$ ou 2 , $p = 3$ si $n = 3$. Soit T un réel > 0 . Soient $(x_0, t_0) \in S \times \mathbb{R}$, $(R, R', \gamma) \in (\mathbb{R}_*^+)^3$ tels que $\gamma \geq \gamma_0(T)$, $\gamma_0(T)$ étant le réel > 0 déterminé à la proposition 1, $\gamma R < \delta$, $R' < R$, $|t_0| + R < T$. Soient $\{B, K\}$ les domaines associés aux paramètres géométriques $(x_0, t_0, \gamma, R, R')$.

Alors toute solution $u \in E^1(B)$ du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \square_g u + au + bu^p = 0 & \text{dans } B \\ u = \phi \text{ et } \partial_t u = \psi & \text{sur } K, \end{cases} \quad (5.1)$$

où :

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi \in H^1(K); \quad \psi \in L^2(K) \\ a \geq m, \quad a \in C^0([t_0 - R, t_0 + R]; L^q(K)) \\ \text{pour } q \geq 2 \text{ si } n = 1, q > 2 \text{ si } n = 2, q \geq 6 \text{ si } n = 3 \\ \text{et soit, dans le cas } m > 0, \\ A) L_X a \in C^0([t_0 - R, t_0 + R]; L^{q'}(K)) \\ \text{pour } q' \geq 1 \text{ si } n = 1, q' > 1 \text{ si } n = 2, q' \geq \frac{3}{2} \text{ si } n = 3; \\ \text{soit } B) L_X a \leq c(t)a \quad \forall t \in [t_0 - R, t_0 + R] \\ b \in C^0(B) \text{ et } L_X b \leq c(t)b \quad \forall t \in [t_0 - R, t_0 + R], b \geq 0. \end{array} \right. \quad (5.2)$$

vérifie $\forall t \in [t_0 - R, t_0 + R]$ l'inégalité :

$$\begin{aligned} \int_{B_t} \left(|\nabla u|^2 + au^2 + \frac{2}{p+1} bu^{p+1} \right) d\mu_t &\leq \\ &\leq c(T) \int_K \left(|\nabla u|^2 + au^2 + \frac{2}{p+1} bu^{p+1} \right) d\mu_{t_0}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Preuve. — Sans nuire à la généralité de la démonstration (lemme 6ii)), on peut supposer $a, b, u \in C^\infty(B)$. On pose :

$$S^{\lambda\mu} = \nabla^\lambda u \nabla^\mu u - \frac{1}{2} g^{\lambda\mu} \nabla_\rho u \nabla^\rho u + \frac{1}{2} g^{\lambda\mu} au^2 + \frac{1}{p+1} bu^{p+1} g^{\lambda\mu}. \quad (1)$$

Pour tout $t \in [t_0, t_0 + R]$, l'application sur $M_t = B \cap (S \times [t_0, t])$ du théorème de Stokes-Gauss à la formule de divergence covariante :

$$\nabla_\lambda (S^{\lambda\mu} X_\mu) = (\square_g u + au + bu^p) X^\lambda \nabla_\lambda u + \frac{1}{2} L_X a u^2 + \frac{1}{2} S^{\lambda\mu} (L_X g)_{\lambda\mu} \quad (2)$$

donne, compte tenu de (5.1) :

$$\begin{aligned} \int_{\partial M_t} S^{\lambda\mu} X_\mu p_\lambda d\sigma = \int_{t_0}^t d\tau \int_{B_\tau} N d\mu_\tau \left\{ \frac{1}{2} L_X a u^2 + \frac{1}{p+1} L_X b u^{p+1} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} S^{\lambda\mu} (L_X g)_{\lambda\mu} \right\} \equiv R_t, \end{aligned} \quad (3)$$

où

$$\begin{aligned} \partial M_t = B_t \cup L_t \cup K \quad \text{avec} \quad B_t = B \cap (S \times \{t\}) \\ L_t = L \cap (S \times [t_0, t]), \end{aligned} \quad (4)$$

où L est la frontière latérale de B .

Sur L_t , le covecteur (p_λ) étant, d'après la proposition 1, temporel par rapport à g , orienté vers le futur, on a en vertu de la formule (2.7) de la proposition 1 :

$$T^{\lambda\mu} X_\mu p_\lambda > 0, \quad \tilde{N} = g(X, p) > 0$$

avec

$$T_{\lambda\mu} = \nabla^\lambda u \nabla^\mu u - \frac{1}{2} g^{\lambda\mu} \nabla_\rho u \nabla^\rho u + g^{\lambda\mu} \frac{m u^2}{2}.$$

D'où :

$$S^{\lambda\mu} X_\mu p_\lambda = T^{\lambda\mu} X_\mu p_\lambda + \frac{\tilde{N}}{2} (a - m) u^2 + \tilde{N} \frac{b}{p+1} u^{p+1} > 0 \quad \text{sur } L_t. \quad (5)$$

Sur B_t et K , le covecteur (p_λ) étant égal respectivement à (n_λ) , $(-n_\lambda)$, on a d'après la formule (2.6) :

$$S^{\lambda\mu} X_\mu p_\lambda = \begin{cases} |\nabla u|^2 + a u^2 \frac{N}{2} + b u^{p+1} \frac{N}{p+1} & \text{sur } B_t \\ - \left(|\nabla u|^2 + a u^2 \frac{N}{2} + b u^{p+1} \frac{N}{p+1} \right) & \text{sur } K. \end{cases}$$

De plus, vu (5.2), on a :

$$R_t \leq c(T) \int_{t_0}^t \int_{B_\tau} \left(|\nabla u|^2 + \frac{a u^2}{2} + \frac{b}{p+1} u^{p+1} \right) N d\mu_\tau d\tau. \quad (7)$$

Des formules (3), (4), (5), (6) et (7), on déduit immédiatement, à l'aide du lemme de Gronwall, l'inégalité (5.3).

Dans le cas $m > 0$ du lemme 6, on déduit, par un raisonnement et des calculs identiques à ceux de [4], des estimations a priori de la forme :

$$\|u\|_{E^s(B)} \leq C_{T,R} \left(R', \|(\phi, \psi)\|_{H^s \times H^{s-1}(K)} \right) \quad (1)$$

si u, a, b, ϕ, ψ vérifient les hypothèses convenables.

Dans le cas $m = 0$, du lemme 6 on déduit des estimations a priori de la forme :

$$\|\nabla u\|_{E^{s-1}(B)} \leq C_{T,R} \left(R', \|(\phi, \psi)\|_{H^s \times H^{s-1}(K)} \right) \quad (2)$$

Mais comme $u(x, t) = \phi(x) + \int_{t_0}^t (\partial u / \partial \tau)(x, \tau) d\tau$ et que B est borné, il existe une constante $c(T)$ telle que :

$$\|u\|_{E^0(B)} \leq C_T \left(\|\phi\|_{L^2(K)} + \|\nabla u\|_{E^0(B)} \right) \quad (3)$$

(2) et (3) donnent alors encore (1).

De (1), on déduit le résultat suivant à l'aide d'un raisonnement standard.

LEMME 7

i) Sous les hypothèses du lemme 6, le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \square_g u + au + bu^p = 0 & \text{dans } B \\ u = \phi \text{ et } \partial_t u = \psi & \text{sur } K \end{cases} \quad (5.4)$$

possède une solution unique u_B définie sur B tout entier et appartenant à $E^1(B)$.

ii) Si pour $s \geq 2$, $\phi \in H^s(K)$, $\psi \in H^{s-1}(K)$, $a, b \in E^{s-1}(B)$ et si de plus pour $s = 2$, $b \in C^0(B)$ et $\nabla b \in C^0([t_0 - R, t_0 + R]; L^q(K))$ avec $q \geq q_n$, $q_1 = q_2 > 2$ et $q_3 = 6$, alors la solution unique $u_B \in E^s(B)$.

On déduit du lemme 7, par recollement "global" des solutions partielles u_B , le théorème d'existence globale suivant.

THÉORÈME 1. — Soit (V^{n+1}, g) une variété régulièrement hyperbolique. Soit $n \in \{1, 2, 3\}$. Soit p un entier impair tel que $1 < p < +\infty$ si $n = 1$ ou 2 , $p = 3$ si $n = 3$.

i) Si :

$$1) \phi \in H_{\text{loc}}^1(S), \psi \in L_{\text{loc}}^2(S);$$

2) a et b sont des fonctions données sur V^{n+1} telles que :

$$\bullet a \geq 0, b \geq 0,$$

$$\bullet a \in C^0(\mathbb{R}, L_{\text{loc}}^q(S)) \text{ pour } q \geq q_n \text{ avec } q_1 = q_2 > 2, q_3 = 6,$$

et soit A) $L_X a \in C^0(\mathbb{R}, L_{\text{loc}}^{q'}(S))$ pour $q' \geq \bar{q}_n$ avec $\bar{q}_1 = \bar{q}_2 > 1$, $\bar{q}_3 = 3/2$ et a est bornée inférieurement sur tout compact par un réel > 0 ; soit B) $L_X a \leq c(t)a$,

$$\bullet b \in C^0(V^{n+1}) \text{ et } L_X b \leq c(t)b,$$

alors le problème Cauchy :

$$\begin{cases} \square_g u + au + bu^p = 0 & \text{dans } V^{n+1} \\ u = \phi \text{ et } \partial_t u = \psi & \text{sur } S \times \{0\}. \end{cases} \quad (5.5)$$

admet une solution globale unique $u \in E_{\text{loc}}^1(V^{n+1})$.

ii) Si de plus, pour $s \geq 2$, $\phi \in H_{\text{loc}}^s(S)$, $\psi \in H_{\text{loc}}^{s-1}(S)$, $a, b \in E_{\text{loc}}^{s-1}(V^{n+1})$; et si de plus pour $s = 2$,

$$b \in C^0(V^{n+1}) \text{ et } \nabla b \in C^0(\mathbb{R}, L_{\text{loc}}^{q''}(S))$$

avec $q'' \geq q_n$, avec $q_1 = q_2 > 2, q_3 = 6$, alors la solution globale unique $u \in E_{\text{loc}}^s(V^{n+1})$.

iii) Si de plus $\phi, \psi \in C^\infty(S)$ et $a, b \in C^\infty(V^{n+1})$, alors le problème de Cauchy (5.5) possède une solution globale unique $u \in C^\infty(V^{n+1})$.

Remarque. — Lorsque (V^{n+1}, g) est l'espace-temps de Minkowski $(\mathbb{R}^4, \eta)$, l'existence globale pour le problème de Cauchy (5.5) peut s'étendre au cas de l'exposant critique $p = 5$ (cf. Struwe [15] pour les données initiales à symétrie radiale et Grillakis [13] pour les données initiales quelconques).

Preuve de i) et ii) du théorème 1. — Il suffit de montrer que $\forall T > 0$, le problème de Cauchy (5.5) possède une solution unique u définie sur V_T^{n+1} tout entier et appartenant à $E_{\text{loc}}^s(V_T^{n+1})$. Soit $\gamma_0(T)$ le réel > 0 , associé à T , déterminé à la proposition 1. Soit $\gamma_1 = \max(\gamma_0(T), \gamma_0(2T))$.

Soient $(R, R', \gamma) \in (\mathbb{R}_+^*)^3$ tels que $\gamma \geq \gamma_1$, $\gamma R < \delta$, $R' < R < T$.

D'après le lemme 7, $\forall x_0 \in S$ et pour $t_0 = 0$, le problème de Cauchy (5.4) possède une solution unique u_{x_0} définie sur $B_{R, R', \gamma}(x_0, t_0)$ tout entier.

Soit u_1 la fonction définie sur $V_{R'}^{n+1}$ par

$$u_1 = u_{x_0} \quad \text{sur } B_{R,R',\gamma}(x_0, t_0) \quad \forall x_0 \in S.$$

Compte tenu de l'unicité du problème de Cauchy hyperbolique, u_1 est bien définie et est l'unique solution du problème de Cauchy (5.5) sur $V_{R'}^{n+1}$.

Considérons maintenant les problèmes de Cauchy :

$$\begin{cases} \square_g u + au + bu^p = 0 & \text{dans } S \times \left[\frac{R'}{2}, \frac{3R'}{2} \right] \\ u = u_1 \text{ et } \partial_t u = \partial_t u_1 & \text{sur } S \times \left\{ \frac{R'}{2} \right\}. \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \square_g u + au + bu^p = 0 & \text{dans } S \times \left[-\frac{3R'}{2}, -\frac{R'}{2} \right] \\ u = u_1 \text{ et } \partial_t u = \partial_t u_1 & \text{sur } S \times \left\{ -\frac{R'}{2} \right\}. \end{cases} \quad (2)$$

En recollant, comme précédemment, les solutions partielles des problèmes de Cauchy (5.4) associés aux domaines $B_{R,R',\gamma}(x_0, t_0)$ (avec $t_0 = R'/2$ pour (1) et $t_0 = -R'/2$ pour (2)), on montre que les problèmes (1) et (2) ont des solutions globales respectives $u_2^+, u_2^- \in E_{\text{loc}}^s$.

Soit $u_2 \in E_{\text{loc}}^s(V_{3R'/2}^{n+1})$ définie par :

$$u_2 = \begin{cases} u_1 & \text{dans } V_{R'}^{n+1}, \\ u_2^+ & \text{dans } S \times \left[\frac{R'}{2}, \frac{3R'}{2} \right] \\ u_2^- & \text{dans } S \times \left[-\frac{3R'}{2}, -\frac{R'}{2} \right]. \end{cases}$$

Compte tenu de l'unicité du problème de Cauchy hyperbolique, u_2 est bien définie et est l'unique solution du problème (5.5) dans $V_{3R'/2}^{n+1}$.

On peut définir ainsi, par récurrence, une suite (u_k) de solutions du problème de Cauchy (5.5) dans $V_{(k+1)R'/2}^{n+1}$ tout entier.

Soit k_0 le plus petit entier naturel tel que $(k_0 + 1)R'/2 \geq T$.

Alors la restriction u de u_{k_0} au domaine V_T^{n+1} est l'unique solution $u \in E_{\text{loc}}^s(V_T^{n+1})$ du problème de Cauchy (5.5). La preuve de iii) est standard.

Remarques

i) Si les données initiales ϕ et ψ sont à supports compacts, alors la solution u est à "support compact dans l'espace", c'est-à-dire que $\forall t \in \mathbb{R}$, l'application partielle $u(\cdot, t)$ est à support compact dans S ; de façon plus précise, si on note :

D = diamètre (par rapport à la distance d) de la réunion des supports de ϕ et ψ ;

D_t = diamètre du support de $u(\cdot, t)$, si (γ, R, R') sont des réels ≥ 0 tels que :

$$\gamma > \gamma_0(|2t|), \quad \gamma R < \delta, \quad R' < R < 2t.$$

Si k_0 est le plus petit entier naturel tel que $(k_0+1)R'/2 \geq t$, alors on obtient, par une preuve par récurrence sur k_0 :

$$D_t \leq D + 2k_0\gamma R'. \quad (5.6)$$

En particulier si $\phi, \psi \in \mathcal{D}(S)$ (fonctions C^∞ à support compact dans S) alors $u \in C_0^\infty(V^{n+1})$ (fonctions C^∞ à support compact dans l'espace). Il convient de signaler ici que pour aboutir aux mêmes conclusions dans [4], on était obligé de supposer que les normes des champs de tenseurs $X, \tilde{n}$, $\text{Riem}(g)$ et de leurs dérivées covariantes de tout ordre sont uniformément bornées sur les V_T^{n+1} .

ii) Les résultats du théorème 1 se généralisent immédiatement à la classe des équations des ondes non linéaires :

$$\square_g u + F(x, u) = 0 \quad (5.7)$$

où :

$$\left\{ \begin{array}{l} F \text{ est de classe } C^k \text{ avec } k \text{ assez grand} \\ F(x, 0) = 0, \quad F(x, u) = \frac{\partial H}{\partial u}(x, u), \\ \text{il existe un réel } p \text{ (} 1 < p < +\infty \text{ si } n = 1 \text{ ou } 2, 1 < p \leq n/(n-2) \\ \text{si } n \geq 3 \text{) tel que à tout compact } K \text{ de } V^{n+1}, \text{ on peut associer} \\ \text{des constantes } c_1, c_2, c_3 > 0 \text{ telles que } \forall x \in K : \\ \left| \frac{\partial F}{\partial u}(x, u) \right| \leq c_1 |u|^{p-1} \quad \text{pour } |u| \geq 1 \\ \left| X^\alpha \frac{\partial H}{\partial x^\alpha}(x, u) \right| \leq c_2 |u|^{p+1} \quad \text{pour } |u| \geq 1 \\ H(x, u) \geq c_3 u^2. \end{array} \right. \quad (5.8)$$

En effet le tenseur d'impulsion-énergie $(T^{\alpha\beta})$ associé à (5.7) :

$$T^{\alpha\beta} = \nabla^\alpha u \nabla^\beta u - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \nabla_\rho u \nabla^\rho u + \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} H$$

vérifie, compte tenu de (5.8), la condition de l'énergie dominante et les relations :

$$T^{\alpha\beta} X_\beta n_\alpha = \frac{1}{2} (|\nabla u|^2 + NH) \geq c_4 (|\nabla u|^2 + Nu^2)$$

$$\nabla_\alpha (T^{\alpha\beta} X_\beta) = [\square u + F(x, u)] X^\alpha \nabla_\alpha u + X^\alpha \frac{\partial H}{\partial x^\alpha}(x, u) + \frac{T^{\alpha\beta}}{2} (L_X g)^{\alpha\beta},$$

(c_4 constante > 0 ; $L_X g$ = dérivée de Lie de g dans la direction X). Lorsque (V^{n+1}, g) est l'espace-temps de Minkowski $(\mathbb{R}^{n+1}, \eta)$ des auteurs comme Ginibre et Velo (cf. [14] pour une bibliographie sur le sujet) ont obtenu l'existence globale pour (5.7) sous la condition moins restrictive $1 < p < (n+2)/(n-2)$ pour $n \geq 3$, à condition que F soit une fonction indépendante de la variable x .

6. Applications harmoniques globales de source (V^2, g)

6.1 Définitions et rappels de résultats [5]

Soit (V^{n+1}, g) une variété régulièrement hyperbolique de dimension $n+1$. Soit (N, h) une variété proprement riemannienne complète de classe C^∞ , de rayon d'injectivité > 0 , dont le tenseur de courbure et ses dérivées covariantes jusqu'à un ordre convenable sont uniformément bornés en norme.

Soit f une application de V^{n+1} dans N . $\forall x \in V^{n+1}$, la différentielle de f en x ,

$$\nabla f(x) \in T_x^*(V^{n+1}) \otimes T_{f(x)}(N).$$

La différentielle $\nabla f : x \rightarrow \nabla f(x)$ est une section du fibré vectoriel $T^*(V^{n+1}) \otimes f^{-1}TN$ de base V^{n+1} et de fibre en x , $T_x^*(V^{n+1}) \otimes T_{f(x)}(N)$. Notons (x^α) , (y^a) les coordonnées locales respectives sur V^{n+1} et N . Alors, dans ces coordonnées, f est représentée par $y^a = f^a(x^\alpha)$ et $\nabla f = (\partial_\alpha f^a)$.

Le fibré vectoriel $E = T^*(V^{n+1}) \otimes f^{-1}TN$ est muni du produit scalaire $G(x) = g^{-1}(x) \otimes h(f(x))$ et de la connexion linéaire ∇ défini par :

$$\nabla_V(t \otimes s) = {}^g\nabla_V t \otimes s + t \otimes f^* h \nabla_V s$$

si t est une section de T^*V^{n+1} et s est une section de $f^{-1}TN$ (fibré vectoriel de base V^{n+1} et de fibre en x), $T_{f(x)}(N)$, ${}^g\nabla$, ${}^h\nabla$ désignant respectivement les dérivations covariantes dans les métriques g , h .

L'application f est dite harmonique si $\text{tr}_g \nabla^2 f = 0$, c'est-à-dire en coordonnées locales :

$$\begin{aligned} g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \partial_\beta f^a &\equiv \\ &\equiv g^{\alpha\beta} \left(\partial_{\alpha\beta}^2 f^a - \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda(x) \partial_\lambda f^a + \Gamma_{bc}^a(f(x)) \partial_\alpha f^b \partial_\beta f^c \right) = 0 \end{aligned} \quad (6.1)$$

($\Gamma_{\alpha\beta}^\lambda$, Γ_{bc}^a sont respectivement les symboles de Christoffel des connexions riemanniennes de g et h).

Le tenseur d'impulsion-énergie de f est donné par :

$$T = (h \circ f)(\nabla f, \nabla f) - \frac{1}{2} g(g^{-1} \otimes h \circ f)(\nabla f, \nabla f) \quad (6.2)$$

et vérifie $\nabla \cdot T \equiv (h \circ f)(\nabla f, \text{tr}_g \nabla^2 f) = 0$ si f est harmonique, ce qui donne en coordonnées locales :

$$\nabla_\alpha T_\beta^\alpha \equiv (h_{ab} \circ f) \partial_\beta f^a \nabla^\alpha \partial_\alpha f^b = 0.$$

Toute application harmonique régulière satisfait à l'équation :

$$\nabla \cdot \nabla(\nabla f) - \text{Ricc}(g) \nabla f + \text{tr}_g(f^* \text{Riem}(h) \cdot \nabla f) = 0,$$

c'est-à-dire en coordonnées locales :

$$\nabla^\lambda \nabla_\lambda \partial_\alpha f^a - R_\alpha^\beta(x) \partial_\beta f^a + R_{cdb}^a(f(x)) \partial_\alpha f^c \partial_\beta f^d \partial^\beta f^b = 0. \quad (6.3)$$

Le tenseur d'impulsion-énergie $T^{(1)}$ associé à (6.3) s'écrit en coordonnées locales :

$$T_{\alpha\beta}^{(1)} = \gamma^{\lambda\mu} h_{ab} \left\{ \nabla_\alpha \partial_\lambda f^a \nabla_\beta \partial_\mu f^b - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} g^{\rho\sigma} \nabla_\rho \partial_\lambda f^a \nabla_\sigma \partial_\mu f^b \right\}$$

et vérifie, compte tenu de (6.3), la formule de divergence covariante :

$$\nabla_\alpha T_{(1)}^{\alpha\beta} = Q(f, \nabla f, \nabla^2 f),$$

où Q est un polynôme de degré 2 en $\nabla^2 f$ avec des coefficients de degré 1 en ∇f pour les termes de degré 1 en $\nabla^2 f$ et avec des coefficients de degré 3 en ∇f pour les termes de degré 2 en $\nabla^2 f$.

Les notations et définitions étant maintenant celles introduites ci-dessus, on a le résultat suivant qui généralise un résultat de [5].

THÉORÈME 2. — Soit (V^2, g) une variété régulièrement hyperbolique de dimension 2. Soit (N, h) une variété proprement riemannienne complète de classe C^∞ , définie comme une sous-variété de $(\mathbb{R}^q, e)$ (e métrique euclidienne canonique sur $\mathbb{R}^q$) par une application :

$$\varphi : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^p, \quad N = \{y \in \mathbb{R}^q \mid \varphi(y) = 0\},$$

(N, h) est de rayon d'injectivité > 0 .

i) Soit

$$\phi \in H_{\text{loc}}^s(S), \quad \psi \in H_{\text{loc}}^{s-1}(S), \quad s \geq 2$$

des applications données $\phi : S \rightarrow \mathbb{R}^q, \psi : S \rightarrow \mathbb{R}^q$ telles que $\varphi \circ \phi = 0$, $(\nabla \varphi \circ \phi)\psi = 0$. Alors il existe sur V^2 tout entier une application harmonique $f : (V^2, g) \rightarrow (N, h)$ telle que :

- $f \in E_{\text{loc}}^s(V^2)$,
- $f|_S \times \{0\} = \Phi, \partial_t f|_S \times \{0\} = \psi$.

ii) Si de plus $\Phi, \psi \in C^\infty(S, N)$, alors l'application harmonique $f \in C^\infty(V^2, N)$.

Preuve. — Compte tenu des calculs de [5] et de la technique de globalisation des solutions partielles exposée dans la preuve du théorème 1, il suffit de montrer que les densités d'énergie de f relatives aux hypersurfaces L (frontière latérale de $B_{R, R', \gamma}^+(x_0, t_0)$ avec $\gamma \geq \gamma_0(T)$, $R\gamma < \delta$, $R' < R$,

$|t_0| + R < T$) et au champ de vecteurs temporels X sont positives sur L . Or ces densités sont :

$$\begin{aligned} e(f) &\equiv T^{\alpha\beta} X_\beta p_\alpha = \frac{1}{2} \tilde{\gamma} \otimes (h \circ f)(\nabla f, \nabla f) \\ &\equiv \frac{1}{2} \tilde{\gamma}^{\alpha\beta} h_{ab}(f(x)) \partial_\alpha f^a \partial_\beta f^b \\ e_1(f) &\equiv T^{\alpha\beta} X_\beta p_\alpha = \frac{1}{2} \tilde{\gamma} \otimes \tilde{\gamma} \otimes (h \circ f)(\nabla^2 f, \nabla^2 f) \\ &\equiv \frac{1}{2} \tilde{\gamma}^{\alpha\beta} \tilde{\gamma}^{\lambda\mu} h_{ab}(f(x)) \nabla_\alpha \partial_\lambda f^a \nabla_\beta \partial_\mu f^b, \end{aligned}$$

avec $\tilde{\gamma} = X \otimes p + p \otimes X - g(X, p)g$, p étant la normale extérieure à L .

Or, d'après la proposition 1, p est temporel, orienté vers le futur, d'où $\tilde{\gamma}$ est une métrique définie positive, d'où $e(f) > 0$ et $e_1(f) > 0$ sur L , ce qui termine la preuve du théorème 2. $\square$

7. Solutions globales de systèmes de Higgs

Considérons un instant sur une variété régulièrement hyperbolique (V^4, g) les équations de Yang-Mills-Higgs usuelles, de potentiel de Yang-Mills A_α et de champ de Higgs scalaire $u = (u^I)$, $I = 1, \dots, N$. Le potentiel de Yang-Mills A_α prend ses valeurs dans l'algèbre de Lie de Yang-Mills $\mathcal{G}$ représentée par une algèbre de Lie de $N \times N$ matrices antihermitiennes. Le champ de Yang-Mills associé à A_α est :

$$F_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha A_\beta - \nabla_\beta A_\alpha + [A_\alpha, A_\beta]. \quad (7.1)$$

$F_{\alpha\beta}$ est donc une $N \times N$ matrice antisymétrique de composantes :

$$F_{\alpha\beta L}^I = \nabla_\alpha A_{\beta L}^I - \nabla_\beta A_{\alpha L}^I + (A_{\alpha K}^I A_{\beta L}^K - A_{\beta K}^I A_{\alpha L}^K). \quad (7.2)$$

Les équations de Yang-Mills-Higgs s'écrivent alors :

$$\hat{\nabla}_\alpha F_L^{\alpha\beta, I} = J_L^{\beta, I} \quad (7.3)$$

$$\hat{\nabla}_\alpha \hat{\nabla}^\alpha u^K + m u^K - \left(\mu - \sum_{I=1}^N |u^I|^2 \right) u^K = 0, \quad (7.4)$$

où le courant J est donné par :

$$J_L^{\beta, I} = \widehat{\nabla}^\beta u_L^* \cdot u^I + u_L^* \widehat{\nabla}^\beta u^I, \quad (7.5)$$

où u^* désigne le conjugué hermitien de u , $\widehat{\nabla}$ est la dérivée covariante de jauge et riemannienne pour g :

$$\begin{cases} \widehat{\nabla}_\alpha u^I = \partial_\alpha u^I + A_\alpha^I u^L & \text{(action sur les fonctions scalaires)} \\ \widehat{\nabla}_\alpha F^{\alpha\beta} = \nabla_\alpha F^{\alpha\beta} + [A_\alpha, F^{\alpha\beta}] & \text{(action sur les fonctions à} \\ & \text{valeurs dans } \mathcal{G}) \end{cases} \quad (7.6)$$

m et μ sont deux réels ≥ 0 .

Dans le cas où (V^4, g) est l'espace-temps de Minkowski, les solutions physiquement intéressantes des équations de Yang-Mills-Higgs sont celles pour lesquelles :

- i) $|A(t, x)| \sim c/|x|$ quand $|x| \rightarrow \infty$ (c borné > 0);
- ii) $|u(t, x)| \sim \mu$ ($\mu > 0$) quand $|x| \rightarrow \infty$.

Ces comportements asymptotiques i), ii), interdisent à $A(t, \cdot)$ et $u(t, \cdot)$ d'appartenir à $L^2(\mathbb{R}^3)$. Des résultats d'existence globale pour les équations de Yang-Mills-Higgs sont obtenus dans les espaces $H^s(\mathbb{R}^3)$ ([11] cas de $\mu = 0$) ou $\{(\bar{A}_\alpha, \bar{u})\} + H^s(\mathbb{R}^3)$ ([2] cas $\mu > 0$), $(\bar{A}_\alpha, \bar{u})$ étant une solution connue, statique, vérifiant i) et ii) (monopôle magnétique) des équations de Yang-Mills-Higgs. L'extension de ces résultats d'existence globale au cadre fonctionnel (plus vaste et mieux adapté aux conditions i), ii) des fonctions $H_{\text{loc}}^s(\mathbb{R}^3)$ a été réalisée dans [16]).

Il serait intéressant de prolonger ce dernier résultat au cadre géométrique d'une variété régulièrement hyperbolique quelconque (V^4, g) . L'étude du système de Higgs (7.4) en constitue une étape importante. On se propose donc ici, de démontrer, sur une variété régulièrement hyperbolique quelconque (V^4, g) un résultat d'existence dans $H_{\text{loc}}^s(S)$, $E_{\text{loc}}^s(V^4)$, pour le système de Higgs (7.4) :

$$\widehat{\nabla}_\alpha \widehat{\nabla}^\alpha u^K + m u^K - \left(\mu - \sum_{I=1}^N |u^I|^2 \right) u^K = 0$$

en supposant que le potentiel de Yang-Mills A_α est donné et vérifie la condition de jauge temporelle :

$$X^\alpha A_\alpha = 0 \quad \text{sur } V^4$$

(c'est-à-dire $A_0 = 0$ dans toute carte adaptée au feuilletage $S \times \mathbb{R}$).

7.1 Solutions globales du système de Higgs (7.4)

Dans le cas où $A^\alpha \equiv 0$, le système (7.6) se réduit à :

$$\square_g u^K + m u^K - \left(\mu - \sum_{I=1}^N |u^I|^2 \right) u^K = 0. \quad (7.7)$$

Le tenseur d'impulsion-énergie associé à (7.7) est :

$$\begin{aligned} T^{\alpha\beta} = & \sum_K \left\{ \nabla^\alpha u^K \nabla^\beta u^K - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \nabla_\rho u^K \nabla^\rho u^K \right\} + \\ & + \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} m \sum_{K=1}^N |u^K|^2 + \frac{1}{4} g^{\alpha\beta} \left(\mu - \sum_{I=1}^N |u^I|^2 \right)^2. \end{aligned}$$

Il possède les propriétés suivantes :

i) il vérifie la condition de l'énergie dominante et

$$T^{\alpha\beta} X_\beta n_\alpha = \sum_I \frac{1}{2} |\nabla u^I|^2 + \frac{Nm}{2} \sum_I |u^I|^2 + \frac{N}{4} \left(\mu - \sum_I |u^I|^2 \right)^2 ;$$

ii) $\nabla_\alpha (T^{\alpha\beta} X_\beta) \equiv$

$$\begin{aligned} \equiv & \sum_K \left\{ \square_g u^K + m u^K - \left(\mu - \sum_{I=1}^N |u^I|^2 \right) u^K \right\} X^\mu \nabla_\mu u + \\ & + \frac{T^{\alpha\beta}}{2} (L_X g)_{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

On en déduit, pour le système (7.7) et compte tenu des résultats et calculs des sections 3, 4 et 5, un résultat d'existence globale dans les espaces $H_{\text{loc}}^s(S)$, $E_{\text{loc}}^s(V^4)$, $s \geq 1$.

On étudiera maintenant le système (7.4) sous la condition plus faible de jauge temporelle $X^\alpha A_\alpha = 0$ (c'est-à-dire $A_0 = 0$ dans toute carte adaptée au feuilletage $S \times R$).

THÉORÈME 3

i) Soit (V^4, g) une variété régulièrement hyperbolique. Soit s un entier ≥ 1 . Soit $s_1 = \max\{s, 3\}$.

Considérons le problème de Cauchy global suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\delta_I^K \nabla^\alpha + A_I^\alpha K)(\partial_\alpha u^I + A_{\alpha J}^I u^J) + \\ \quad + m u^K - \left(\mu - \sum_{I=1}^N |u^I|^2 \right) u^K = 0 \text{ dans } V^4 \\ u^I = \Phi^I \text{ et } \partial_t u^I = \psi^I \text{ sur } S \times \{0\}, \end{array} \right. \quad (7.8)$$

où m et μ sont deux constantes ≥ 0 , $A = (A_{\alpha J}^I)$ est une 1-forme sur V^4 à valeurs dans l'espace des matrices antisymétriques réelles d'ordre N , telle que :

$$\left\{ \begin{array}{l} X^\alpha A_{\alpha J}^I \equiv 0 \quad I, J = 1, \dots, N \\ A = (A_J^I) \in E_{\text{loc}}^{s_1}(V^4) \end{array} \right. \quad (7.9)$$

$$\phi = (\phi^I) \in H_{\text{loc}}^s(S), \quad \psi = (\psi^I) \in H_{\text{loc}}^{s-1}(S). \quad (7.10)$$

Alors, le problème (7.8) possède une solution globale unique $u = (u^I) \in E_{\text{loc}}^s(V^4)$.

ii) Si de plus $A \in C^\infty(V^4)$ et $\phi, \psi \in C^\infty(S)$, alors $u \in C^\infty(V^4)$.

Preuve. — La solution globale unique $u = (u^I)$ du problème de Cauchy (7.8) s'obtient, comme dans la preuve du théorème 1 (sect. 5), par recollement "global" de solutions partielles associées à des problèmes de Cauchy de la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\delta_I^K \nabla^\alpha + A_I^\alpha K)(\partial_\alpha u^I + A_{\alpha J}^I u^J) + \\ \quad + m u^K - \left(\mu - \sum_{I=1}^N |u^I|^2 \right) u^K = 0 \text{ dans } B \\ u^I = \Phi^I \text{ et } \partial_t u^I = \psi^I \text{ sur } K \\ u = (u^I) \in E^s(B) \end{array} \right. \quad (7.11)$$

avec $\{B, K\}$ domaines associés à des paramètres géométriques $(x_0, t_0, \gamma, R, R')$ satisfaisant aux conditions du lemme 2 :

$$\left\{ \begin{array}{l} X^\alpha A_{\alpha J}^I = 0, \quad A_J^I \in E^{s_1}(B), \quad s_1 = \max\{3, s\} \\ \Phi = (\Phi^I) \in H^s(K) \\ \psi = (\psi^I) \in H^{s-1}(K). \end{array} \right. \quad (7.12)$$

La résolution globale du problème de Cauchy (7.11), (7.12) découlera des lemmes 4 et 5 (sect. 4) et des majorations a priori données par le lemme suivant.

LEMME 8. — Soit T un réel > 0 . Soient $(x_0, t_0) \in S \times \mathbb{R}$, $(R, R', \gamma) \in (\mathbb{R}_+^*)^3$, tels que $\gamma \geq \gamma_0(T)$, $\gamma_0(T)$ étant le réel > 0 déterminé à la proposition 1, $\gamma R < \delta$, $R' < R$, $|t_0| + R < T$. Soient $\{B, K\}$ les domaines associés aux paramètres géométriques $(x_0, t_0, \gamma, R, R')$.

Alors toute solution $u \in E^s(B)$ du problème de Cauchy (7.11), (7.12) vérifie, pour tout $R'' \in]0, R']$, une majoration a priori de la forme :

$$\begin{aligned} \|u\|_{E^s(B_{R,R'',\gamma}(x_0,t_0))} &\leq \\ &\leq C_{T,R} \left(R'', \|A\|_{E^{s_1}(B_{R,R'',\gamma}(x_0,t_0))}, \|(\phi, \psi)\|_{H^s \times H^{s-1}(K)} \right). \end{aligned} \quad (7.13)$$

Preuve. — Sans nuire à la généralité de la démonstration (lemme 4, sect. 4), on peut supposer $A, u \in C^\infty(B)$.

Le tenseur d'impulsion-énergie associé à (7.4) :

$$\begin{aligned} T^{\alpha\beta} &= \sum_I \left(\widehat{\nabla}^\alpha u^I \widehat{\nabla}^\beta u^I - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \widehat{\nabla}_\rho u^I \widehat{\nabla}^\rho u^I \right) + \\ &+ \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} m \sum_I |u^I|^2 + \frac{1}{4} g^{\alpha\beta} \left(\mu - \sum_I |u^I|^2 \right)^2 \end{aligned} \quad (1)$$

vérifie la formule de divergence covariante :

$$\begin{aligned} \nabla_\alpha (T^{\alpha\beta} X_\beta) &= \\ &= \sum_I X^\beta \widehat{\nabla}_\beta u^I \left\{ \widehat{\nabla}_\alpha \widehat{\nabla}^\alpha u^I + m u^I - \left(\mu - \sum_K |u^K|^2 \right) u^I \right\} + \\ &+ \sum_I F_{\beta\alpha J}^I X^\alpha \widehat{\nabla}^\beta u^I u^J + \frac{T^{\alpha\beta}}{2} (L_X g)_{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (2)$$

avec :

$$\begin{cases} \widehat{\nabla}_\alpha u^I = \partial_\alpha u^I + A_{\alpha J}^I u^J \\ F_{\alpha\beta} \text{ matrice } N \times N \text{ antisymétrique de composantes} \\ \nabla_\alpha A_{\beta J}^I - \nabla_\beta A_{\alpha J}^I + (A_{\alpha K}^I A_{\beta J}^K - A_{\beta K}^I A_{\alpha J}^K) \end{cases} \quad (3)$$

L'intégration de (2) sur $B \cap (S \times [t_0, t])$ donne, compte tenu de (7.11) :

$$\begin{aligned} \int_{\partial M_t} T^{\alpha\beta} X_\beta p_\alpha d\sigma &= \\ &= \int_{t_0}^t \int_{B_\tau} \left\{ \sum F_{\beta\alpha J}^I X^\alpha \widehat{\nabla}^\beta u^I \cdot u^J + \frac{T^{\alpha\beta}}{2} (L_X g)_{\alpha\beta} \right\} N d\mu_\tau d\tau \equiv \\ &\equiv R_t, \end{aligned} \quad (4)$$

où :

$$\partial M_t = B_t \cup L_t \cup K$$

avec :

$$B_t = B \cap (S \times \{t\}), \quad L_t = L \cap (S \times [t_0, t]),$$

L étant la frontière latérale de B .

Sur L_t , le covecteur (p_α) étant, d'après la proposition 1, temporel par rapport à g orienté vers le futur, on a :

$$\begin{aligned} \tilde{N} &= g(X, p) > 0, \\ \tilde{\gamma}^{\alpha\beta} &= (X^\alpha p^\beta + X^\beta p^\alpha) - \tilde{N} g^{\alpha\beta} \text{ définie positive,} \end{aligned} \quad (5)$$

d'où :

$$\begin{aligned} T^{\alpha\beta} X_\beta p_\alpha &= \sum_I \frac{1}{2} \tilde{\gamma}^{\alpha\beta} \hat{\nabla}_\alpha u^I \hat{\nabla}_\beta u^I + \\ &+ \frac{\tilde{N}m}{2} \sum_I |u^I|^2 + \frac{\tilde{N}}{4} \left(\mu - \sum_I |u^I|^2 \right)^2 > 0 \text{ sur } L_t. \end{aligned} \quad (6)$$

Sur B_t et K le covecteur (p_α) étant égal respectivement à (n_α) et $(-n_\alpha)$, on a :

$$T^{\alpha\beta} X_\beta p_\alpha = \begin{cases} \sum_I \frac{1}{2} \gamma^{\alpha\beta} \hat{\nabla}_\alpha u^I \hat{\nabla}_\beta u^I + \\ \quad + \frac{Nm}{2} \sum_I |u^I|^2 + \frac{N}{4} \left(\mu - \sum_I |u^I|^2 \right)^2 & \text{sur } B_t, \\ - \sum_I \frac{1}{2} \gamma^{\alpha\beta} \hat{\nabla}_\alpha u^I \hat{\nabla}_\beta u^I + \\ \quad - \frac{Nm}{2} \sum_I |u^I|^2 - \frac{N}{4} \left(\mu - \sum_I |u^I|^2 \right)^2 & \text{sur } K. \end{cases} \quad (7)$$

D'autre part, de (1), (3), (4) et des inégalités de Sobolev, on tire pour tout $t \in]t_0, R'']$:

$$\begin{aligned} R_t &\leq C_{T,R} \left(\|A\|_{E^3(B_{R,R'',\gamma}(x_0,t_0))} \right) \int_{t_0}^t \int_{B_\tau} \left\{ \sum_I \gamma^{\alpha\beta} \hat{\nabla}_\alpha u^I \hat{\nabla}_\beta u^I + \right. \\ &\quad \left. + \frac{m}{2} \sum_I |u^I|^2 + \frac{1}{4} \left(\mu - \sum_K |u^K|^2 \right)^2 \right\} N \, d\mu_\tau \, d\tau. \end{aligned} \quad (8)$$

Des relations (4), (6), (7) et (8), on déduit immédiatement à l'aide du lemme de Gronwall, pour tout $t \in]t_0, R'']$, l'inégalité :

$$\begin{aligned} \int_{B_t} \left\{ \sum_I \gamma^{\alpha\beta} \widehat{\nabla}_\alpha u^I \widehat{\nabla}_\beta u^I + \frac{m}{2} \sum_I |u^I|^2 + \frac{1}{4} \left(\mu - \sum_K |u^K|^2 \right)^2 \right\} N \, d\mu_t \leq \\ \leq C_{R,T} \left(\|A\|_{E^3(B_{R,R''}, \gamma(x_0, t_0))}, \|(\phi, \psi)\|_{H^1 \times L^2(K)} \right) \equiv c. \end{aligned} \quad (9)$$

On se place désormais dans une carte adaptée au feuilletage $S \times \mathbb{R}$ dont le domaine contient entièrement le domaine $B_{R,R''}, \gamma(x_0, t_0)$.

Comme, dans cette carte, $\gamma^{00} > 0$, $\gamma^{0i} = 0$ et (γ^{ij}) est définie positive, de (9), on tire des majorations a priori de la forme :

$$\int_{B_t} \sum_I \gamma^{00} |\widehat{\nabla}_0 u^I|^2 \, d\mu_t \leq c \quad (10)$$

$$\int_{B_t} \sum_I \gamma^{ij} \widehat{\nabla}_i u^I \widehat{\nabla}_j u^I \, d\mu_t \leq c \quad (11)$$

$$m \int_{B_t} \sum_I |u^I|^2 \, d\mu_t \leq c \quad (12)$$

$$\int_{B_t} \left(\mu - \sum_I |u^I|^2 \right)^2 \, d\mu_t \leq c \quad (13)$$

Comme, dans la carte adaptée considérée, $A_{0J}^I \equiv 0$ (jauge temporelle), l'inégalité (10) se réduit à :

$$\int_{B_t} \sum_I \gamma^{00} |\nabla_0 u^I|^2 \, d\mu_t \leq c \quad (14)$$

B étant borné, (12) et (14) entraînent, même si $m = 0$, une majoration a priori, pour $\sum_I |u^I|^2$ de la forme :

$$\int_{B_t} \sum_I |u^I|^2 \, d\mu_t \leq c. \quad (15)$$

Comme $A \in E^3(B)$, de (11) et (15) on tire :

$$\int_{B_t} \sum_I \gamma^{ij} \nabla_i u^I \nabla_j u^I \, d\mu_t \leq c. \quad (16)$$

En ajoutant (14) et (16), on obtient :

$$\int_{B_t} \sum_I \gamma^{\alpha\beta} \nabla_\alpha u^I \nabla_\beta u^I d\mu_t \leq c \quad (\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3). \quad (17)$$

En ajoutant membre à membre les inégalités (15) et (17), on obtient la majoration a priori (7.13) pour $s = 1$.

Majoration a priori (7.13) pour $s \geq 2$

Supposons le lemme démontré jusqu'à $s - 1$.

Comme solution du système *linéaire* :

$$\nabla^\lambda \nabla_\lambda u^K + m u^K = f^K \quad (1)$$

avec

$$\begin{aligned} f^K = & - \left(\nabla^\alpha A_{\alpha J}^K u^J + A_{\alpha J}^K \nabla^\alpha u^J + A_I^{\alpha K} \partial_\alpha u^I + A_I^{\alpha K} A_{\alpha J}^I u^J + \right. \\ & \left. - \left(\mu - \sum_{I=1}^N |u^I|^2 \right) u^K \right); \end{aligned} \quad (2)$$

$u = (u^K)$ vérifie l'inégalité :

$$y_{u,s}(t) \leq c \left(y_{u,s}(t_0) + \int_{t_0}^t \{ y_{u,s}(\tau) + y_{f,s-1}^{1/2}(\tau) y_{u,s}^{1/2}(\tau) \} d\tau \right), \quad (3)$$

où on a posé pour toute fonction $v = (V^I)$:

$$y_{v,s}(t) = \int_{B_t} \sum_{0 \leq k \leq s} |\nabla^k V^I|^2 d\mu_t \quad (4)$$

(voir l'inégalité (4) de la preuve de l'inégalité énergétique (3.4) du lemme 2).

De (2), de l'hypothèse de récurrence et des inégalités de Sobolev, on obtient pour tout $\tau \in]t_0, R'']$:

$$\begin{aligned} y_{f,s-1}^{1/2}(\tau) & \leq C_{T,R} \left(\|A\|_{E^{s1}(B_{R,R''}, \gamma(x_0, t_0))}, \|(\phi, \psi)\|_{H^s \times H^{s-1}(K)} \right) y_{u,s}^{1/2}. \end{aligned} \quad (5)$$

En substituant (5) dans (3) et en appliquant à l'inégalité obtenue le lemme de Gronwall, on obtient la majoration a priori (7.13) pour s .

Remerciements

Je voudrais exprimer ma profonde gratitude à Mme Yvonne Choquet-Bruhat et à M. Francis Cagnac dont les nombreux conseils et suggestions ont permis d'améliorer ce travail, autant dans le fond que dans la forme.

Bibliographie

- [1] AUBIN (T.) . — *Nonlinear analysis on manifolds, Monge-Ampère equations*, Springer-Verlag (1982).
- [2] BURZLAFF (J.) et O'MURCHADHA (N.) . — *Global existence of time-dependent Yang-Mills-Higgs monopoles*, Comm. Math. Phys. **105** (1986), pp. 85-98.
- [3] CAGNAC (F.) . — *Espaces de Sobolev sur les variétés hyperboliques*, Annales de la Faculté des Sciences de Yaoundé, Série I, 1, n° 2 (1987), pp. 5-34.
- [4] CAGNAC (F.) et CHOQUET-BRUHAT (Y.) . — *Solution globale d'une équation non linéaire sur une variété hyperbolique*, J. Math. Pures et Appl. **63** (1984), pp. 377-390.
- [5] CHOQUET-BRUHAT (Y.) . — *Global existence theorems for hyperbolic harmonic maps*, Ann. Inst. Henri-Poincaré **46**, n° 1 (1987), pp. 97-111.
- [6] CHOQUET-BRUHAT (Y.) . — *Global solutions of hyperbolic equations of gauge theories*, in Relativity, Cosmology, Topological Mass and Supergravity, C. Aragone éd., World Scientific (1983).
- [7] DIEUDONNÉ (J.) . — *Éléments d'analyse*, tome 4 (1971).
- [8] DOSSA (M.) . — Thèse de 3^{ème} cycle, Université de Yaoundé, Cameroun (1982).
- [9] DOSSA (M.) . — *Inégalités énergétiques sur un cône caractéristique*, Annales de la Faculté des Sciences de Yaoundé, Série I, 1, n° 1 (janvier 1985), pp. 23-54.
- [10] DOSSA (M.) . — *Solutions globales d'équations non linéaires sur des variétés hyperboliques*, C.R.A.S. Paris, Série I, **309** (1989), pp. 601-604.
- [11] EARDLEY (D.) et MONCRIEF (V.) . — *The global existence of Yang-Mills-Higgs fields in 4-dimensional Minkowski space*, Comm. Math. Phys. **83** (1982), pp. 171-212.
- [12] GÄRDING (L.) . — *Cauchy problem for hyperbolic equations*, Leçons à Chicago (1957).
- [13] GRILLAKIS (M.) . — *Regularity and asymptotic behaviour of the wave equation with a critical nonlinearity*, Ann. of Math. (to appear).
- [14] STRAUSS (W. A.) . — *Nonlinear wave equations*, C.B.M.S Regional Conference Series in Mathematics **73**, held at George Mason University (January 1989).
- [15] STRUWE (M.) . — *Globally regular solutions to the u^5 Klein-Gordon equations*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa cl. Sci. **15**, n° 4 (1988); n° 3 (1989), pp. 495-513.
- [16] GINIBRE (J.) et VELO (G.) . — *Problème de Cauchy global pour les équations de Yang-Mills-Higgs*, Séminaire École Polytechnique de Paris, exposé n°XIII, 1982.