

MOHAMED EL MORSALANI

**Bifurcations de polycycles infinis pour les champs  
de vecteurs polynomiaux du plan**

*Annales de la faculté des sciences de Toulouse 6<sup>e</sup> série*, tome 3, n<sup>o</sup> 3  
(1994), p. 387-410

[http://www.numdam.org/item?id=AFST\\_1994\\_6\\_3\\_3\\_387\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AFST_1994_6_3_3_387_0)

© Université Paul Sabatier, 1994, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## Bifurcations de polycycles infinis pour les champs de vecteurs polynomiaux du plan<sup>(\*)</sup>

MOHAMED EL MORSALANI<sup>(1)</sup>

---

**RÉSUMÉ.** — On montre que les *2-polycycles hyperboliques non identiques* avec des sommets qui sont *des points de selle hyperboliques résonnants* et dont le *produit des deux rapports d'hyperbolicité est égal à 1* sont de *cyclicité finie* dans des familles suffisamment différentiables de champs de vecteurs sur le plan vérifiant certaines conditions qui ne sont pas restrictives. Cette cyclicité est bornée par un entier qui ne dépend que de l'ordre de non trivialité du polycycle.

**ABSTRACT.** — We show that *non identical hyperbolic 2-polycycles* with *resonant hyperbolic saddle points* as vertices and *product of their hyperbolicity is equal 1* are of finite cyclicity inside sufficiently differentiable families of vector fields on the plane verifying some conditions which are not restrictive. This cyclicity is bounded by an integer which depends only on the order of non triviality of the polycycle.

---

### 1. Introduction

Dans la seconde partie du 16<sup>ème</sup> problème, Hilbert pose la question suivante : pour tout  $n$  existe-t-il une borne  $c(n)$  du nombre de cycles limites (orbites périodiques isolées) de tout champ de vecteurs polynomial du plan de degré inférieur ou égal à  $n$ ? Dans la note [R1], Roussarie a expliqué que le problème de Hilbert pouvait se poser plus généralement à propos des familles analytiques de feuilletages avec singularités et pouvait se réduire à une conjecture sur la cyclicité finie des déformations d'ensembles limites périodiques. Une réponse positive à cette conjecture permettrait de résoudre la partie existentielle du 16<sup>ème</sup> problème de Hilbert. Le but de cet article

---

(\*) Reçu le 7 septembre 1992

(1) Université de Bourgogne, Laboratoire de Topologie, C.N.R.S. DO 755, B.P. 138, F-21004 Dijon Cedex (France)

est de démontrer cette conjecture dans un cas particulier. Avant d'énoncer le résultat précis, on va tout d'abord rappeler quelques définitions utiles.

Soient  $\Sigma$  une surface analytique réelle et  $\mathbb{R}^A$  un espace de paramètres. Une famille locale de feuilletages analytiques (orientées, avec singularités) est définie par la donnée d'un recouvrement ouvert  $U_i$ ,  $i \in I$ , de  $\Sigma \times V$ , où  $V$  est un voisinage de zéro dans  $\mathbb{R}^A$  et, pour chaque  $i$ , d'un champ de vecteurs analytique  $X_\lambda^i$  sur  $U_i$ , parallèle à la surface  $\Sigma$ . On suppose de plus que si  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ , il existe une fonction réelle analytique positive  $f_{i,j}(x, \lambda) : U_i \cap U_j \rightarrow \mathbb{R}^+$  telle que

$$X_\lambda^i = f_{i,j}(x, \lambda) X_\lambda^j(x) \quad \text{pour tout } (x, \lambda) \in U_i \cap U_j.$$

Les notions de récurrence, cycles limites, application de Poincaré, etc., se définissent pour les feuilletages orientés de manière analogue que pour les champs de vecteurs. (Un cycle limite est une feuille difféomorphe au cercle et isolée parmi de telles feuilles.) La notion suivante introduite par Françoise et Pugh dans [FP] est cruciale pour traiter les questions de finitude du nombre de cycles limites.

**DÉFINITION 1.1.** — Soit  $F_\lambda$  une famille locale de feuilletages analytiques définie sur  $\Sigma \times V$ . On appelle ensemble limite périodique en  $\lambda = 0$  de la famille, tout sous-ensemble compact  $\Gamma$  de  $\Sigma$ , invariant par  $F_0$  (c'est-à-dire formé d'une réunion de feuilles), tel qu'il existe une suite  $(\lambda_i)_i \rightarrow 0$  dans  $V$  et, pour chaque  $i$ , un cycle limite  $C_{\lambda_i}$  de  $F_{\lambda_i}$  avec la propriété

$$\text{dist}_H(\Gamma, C_{\lambda_i}) \xrightarrow{i \rightarrow +\infty} 0,$$

où  $\text{dist}_H$  désigne la distance de Hausdorff entre compacts de  $\Sigma$  :

$$\text{dist}_H(K, L) = \sup_{x \in K, y \in L} (\text{dist}(x, L), \text{dist}(y, K)).$$

**DÉFINITION 1.2.** — Soient  $F_\lambda$  une famille locale comme ci-dessus,  $\Gamma$  un ensemble limite périodique en  $\lambda = 0$ . On dira que  $\Gamma$  a une cyclicité finie pour la famille  $F_\lambda$ , s'il existe  $N \in \mathbb{N}$ ,  $\varepsilon > 0$  et un voisinage  $W$  de  $\lambda = 0$  dans  $V$  tels que pour tout  $\lambda \in W$ , le nombre de cycles limites  $\gamma$  de  $F_\lambda$  vérifiant  $\text{dist}_H(\gamma, \Gamma) \geq \varepsilon$  est inférieur à  $N$ .

On pourra alors définir la cyclicité de  $\Gamma$  dans la famille  $F_\lambda$  comme le minimum de  $N$  lorsque  $\varepsilon$  et le diamètre de  $W$  tendent vers zéro.

Ces notions sont en fait attachées au germe de la famille  $F_\lambda$  le long de  $\Gamma$ . Nous appellerons déformation un tel germe, et nous dirons qu'une déformation le long de  $\Gamma$  a une cyclicité finie s'il existe une famille locale  $F_\lambda$  représentant la déformation et ayant une cyclicité finie.

Roussarie [R1] a conjecturé que toute déformation analytique d'ensemble limite périodique sur la sphère  $S^2$  a une cyclicité finie, et il a expliqué qu'une réponse positive à cette conjecture résoudrait le 16<sup>e</sup> problème de Hilbert relatif aux champs de vecteurs polynomiaux.

Supposons que  $\Sigma \subset S^2$  ( $\Sigma$  le disque de Poincaré). Un ensemble limite périodique est dit non dégénéré s'il ne contient que des points singuliers isolés. Il suit de la théorie de Poincaré-Bendixson qu'un tel ensemble est, soit un cycle (feuille difféomorphe au cercle), soit un point singulier, soit un graphique de  $F_0$ . Un graphique est une image continue du cercle, formée d'une réunion de points singuliers et de séparatrices les connectant. Lorsque le graphique possède sur un côté une application de retour on l'appelle polycycle.

Les ensembles limites périodiques les plus simples sont les cycles et les points singuliers elliptiques étudiés dans [FP]. Ensuite, il y a les lacets et les points cuspidaux dont Roussarie a établi la finitude de leur cyclicité dans [R2] et [R3]. Il semble naturel de considérer ensuite les graphiques hyperboliques à deux sommets. Cherkas [C] est le premier à avoir étudié la cyclicité d'un tel graphique lorsque  $r_1(0) \neq 1$ ,  $r_2(0) \neq 1$  et  $r_1(0)r_2(0) \neq 1$  ( $r_i(\lambda)$  est le rapport d'hyperbolicité associé au point de selle hyperbolique  $P_i$ , il est obtenu en prenant la valeur absolue du rapport des deux valeurs propres de la matrice associée au 1-jet du champ de vecteurs  $X_\lambda^i$  au point  $P_i$ ). Il a montré dans [C] qu'un tel graphique a une cyclicité inférieure ou égale à 2. Mourlada [M] a étudié aussi la cyclicité d'un tel graphique lorsqu'il est non trivial (l'application 1<sup>o</sup> retour associée au graphique est non identiquement égale à l'identité pour  $\lambda = 0$ ), les cas traités dans son travail sont

$$r_1(0)r_2(0) \neq 1 \quad \text{et} \quad r_1(0) = 1 \text{ ou } r_2(0) = 1$$

et

$$r_1(0)r_2(0) = 1 \quad \text{et} \quad r_1(0) \notin \mathbb{Q}.$$

Le problème qui subsiste est d'étudier donc les graphiques hyperboliques à deux sommets tels que

$$r_1(0)r_2(0) = 1 \quad \text{et} \quad r_1(0) \in \mathbb{Q}.$$

Dans la catégorie de tels graphiques hyperboliques à deux sommets tels que  $r_1(0)r_2(0) = 1$  et  $r_1(0) \in \mathbb{Q}$ . Dans la catégorie de tels graphiques hyperboliques à deux sommets apparaît, lors de l'étude de champs de vecteurs polynomiaux sur le disque de Poincaré  $\mathbf{D}^2 \subset \mathbf{S}^2$ ; en particulier de degrés pairs, un graphique hyperbolique  $\Gamma_0$  ayant deux sommets symétriques sur l'équateur de  $\mathbf{D}^2$ . Dans [DRR], les auteurs ont exhibé de tels graphiques qu'ils ont appelés hémicycles  $H_1^1$ .

Lorsqu'on perturbe donc  $\Gamma_0$ , la connexion se trouvant sur l'équateur persiste. De plus, l'étude de la cyclicité d'un tel graphique reste une approche pour comprendre les phénomènes qui se manifestent dans le cas  $r_1(0)r_2(0) = 1$  et  $r_1(0) \in \mathbb{Q}$ . Le but de l'article est de montrer la finitude de la cyclicité d'un tel graphique dans une déformation  $X_\lambda$  possédant certaines propriétés :

- a) une connexion entre les deux sommets reste fixe;
- b) le produit des deux rapports d'hyperbolicité associés aux deux sommets reste égal à 1 quand  $\lambda$  décrit un certain voisinage de zéro dans l'espace des paramètres  $\mathbb{R}^A$ .

**THÉORÈME 1.3.** — Soit  $X_\lambda$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}^A$ , une famille de champs de vecteurs sur le plan ayant un graphique  $\Gamma_0$  pour  $\lambda = 0$  du type décrit ci-dessus et avec la déformation  $X_\lambda$  vérifiant a) et b). Soit  $\gamma_0$  l'application aux cycles associée à  $\Gamma_0$  pour  $\lambda = 0$ . Supposons que  $\gamma_0(x)$  est non infiniment plate en  $x = 0$  alors, pour  $\lambda$  assez petit,  $X_\lambda$  a une borne uniforme finie du nombre de cycles limites voisins de  $\Gamma_0$ . Précisément :

si  $\gamma_0(x) \sim \rho x^k \ln^m x$ ,  $\rho \neq 0$ , alors  $X_\lambda$  a au plus  $\left[ \frac{k(k+3)}{2} - m \right]$  cycles.

## 2. Développement asymptotique de l'application de Dulac

**DÉFINITION 2.1.** — Soit  $s$  un point de selle hyperbolique d'un champ de vecteurs  $C^\infty X$ , avec  $r(s) \in \mathbb{Q}$ ,  $r(s) = (p/q)$ ,  $r(s)$  étant le rapport d'hyperbolicité de  $X$  en  $s$ . Le jet infini de  $X$  en  $s$  est  $C^\infty$  équivalent à

$$j^\infty X(s) \stackrel{C^\infty}{\sim} x \frac{\partial}{\partial x} - r(s)y \frac{\partial}{\partial y} + \left( \sum_{i \geq 1} \alpha_{i+1} (x^p y^q)^i \right) y \frac{\partial}{\partial y}.$$

(L'équivalence  $C^\infty$  est une équivalence à un difféomorphisme  $C^\infty$  près et multiplication par une fonction  $C^\infty$  positive.)

On dira qu'un point de selle est d'ordre  $k \geq 1$  si  $\alpha_{k+1}$  est le premier coefficient  $\alpha_i$  non nul dans le développement précédent.

**PROPOSITION 2.2 ([M1]).** — Soit  $X_\lambda$  une famille de champs de vecteurs, telle que  $X_0$  admette un point de selle  $s$  avec :

$$r_0(s) = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, \quad p \wedge q = 1.$$

Il existe alors une suite  $(\delta_n)_n$ ,  $0 < \dots < \delta_{n+1} < \delta_n < \dots < \delta_1$ , et des fonctions  $C^\infty$ ,  $\alpha_n(\lambda)$  définies sur  $W_n = \{\lambda; |\alpha_1(\lambda)| \leq \delta_n\}$  vérifiant ce qui suit : pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , il existe un entier  $N(k)$  tel que  $\forall \lambda \in W_{N(k)+1}$ , la famille soit  $C^k$ -équivalente à la famille polynomiale de champs de vecteurs :

$$x \frac{\partial}{\partial x} - r_0(s)y \frac{\partial}{\partial y} + \left( \sum_{i=0}^{N(k)} \alpha_{i+1}(\lambda) (x^p y^q)^i \right) y \frac{\partial}{\partial y}.$$

*Remarque.* — Dans tout ce qui suit, on travaillera avec une famille de champs de vecteurs  $X_\lambda$ , au voisinage du point de selle  $s$ , de la forme :

$$X_\lambda = x \frac{\partial}{\partial x} - r_0 y \frac{\partial}{\partial y} + \left( \sum_{i=0}^N \alpha_{i+1}(\lambda) (x^p y^q)^i \right) y \frac{\partial}{\partial y}. \quad (2.1)$$

Ceci découle des travaux de Sternberg [S].

De plus par homothétie, on peut supposer que la famille est définie sur un voisinage de  $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$  contenant une boule en rayon 2. Soient  $\sigma$  et  $\tau$  les deux transversales au champ  $X_\lambda^N$  définies par :

$$\sigma = \{(x, y); |x| \leq 2, y = 1\} \quad \text{et} \quad \tau = \{(x, y); |y| \leq 2, x = 1\}.$$

Notons  $D_\lambda$  l'application de Dulac relative au point de selle  $O$ , envoyant la demi-transversale positive  $\sigma$  paramétrée par  $x$  sur la demi-transversale positive  $\tau$  paramétrée par  $y$  (fig. 1).

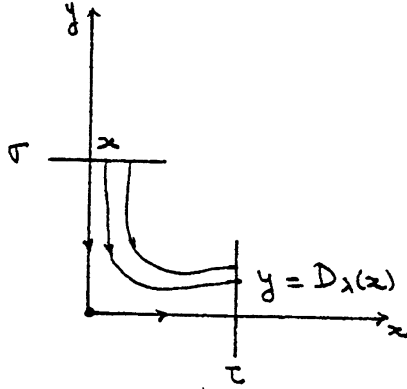


Fig. 1

Pour une famille  $X_\lambda$  comme dans (2.1), on définit l'expression suivante

$$\omega(x, y) = \begin{cases} \frac{x^{-\alpha_1(\lambda)} - 1}{\alpha_1(\lambda)} & \text{si } \alpha_1(\lambda) \neq 0 \\ -\ln x & \text{si } \alpha_1(\lambda) = 0. \end{cases}$$

**THÉORÈME 2.3.** — Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , il existe un voisinage  $W$  de  $\lambda = 0$  dans  $\mathbb{R}^A$ , des transversales  $\sigma, \tau$  au champ  $X_\lambda$  paramétrées en classe  $C^k$  par  $x$  et  $y \in [0, \varepsilon[$  et des fonctions  $C^\infty$   $\alpha_{ij} : W \rightarrow \mathbb{R}$  tels que l'application de Dulac pour le système (2.1) s'écrive :

$$y = D_\lambda(x) = x^{r_0} + \alpha_1 x^{r_0} \omega + \sum_{i \leq j \leq i \leq K(k)} \alpha_{ij} x^{(iq+1)r_0} \omega^j + \psi_k(x, \lambda),$$

où  $\alpha_{ij}$  sont des polynômes en  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_i$ .  $\psi_i$  est une fonction de classe  $C^k$   $k$ -plate en  $x = 0$ , vérifiant  $\psi_k = x^k R_k$  où  $R_k$  vérifie la propriété  $I_0^\infty$  introduite par Mourada [M1].

$$(I_0^\infty) : \forall n \in \mathbb{N}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^n \frac{\partial^n R_k}{\partial x^n}(x, \lambda) = 0 \text{ uniformément en } \lambda \in W.$$

*Preuve.* — Dans tout ce qui suit on travaillera dans une classe de différentiabilité  $k$ . Ce théorème a été démontré par Roussarie [R2] lorsque  $r_0 = 1$ .

Considérons la famille  $X_\lambda$  donnée par l'expression (2.1); elle s'écrit :

$$X_\lambda \begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = \left[ -r_0 + \sum_{i=0}^{N(k)} \alpha_{i+1}(\lambda) (x^p y^q)^i \right] y. \end{cases} \quad (2.3)$$

Dans le premier quadrant ouvert, faisons le changement de variable suivant :

$$\begin{cases} x = x \\ u = x^{r_0} y. \end{cases}$$

Le système (2.3) se transforme alors en un système à variables séparées :

$$\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{u} = + \sum_{i=0}^N \alpha_{i+1} u^{1+iq}, \end{cases} \quad (2.4)$$

on note par  $N$  l'entier  $N(k)$  défini dans la proposition 2.2. Désignons par  $U(t, u)$  la solution de la seconde équation différentielle du système vérifiant la condition initiale suivante :  $U(0, u) = u$ . Cette solution peut être développée en  $u$  par :

$$U(t, u) = \sum_{j=1}^{\infty} g_j(t, u) u^j,$$

où les fonctions  $g_i$  dépendent des fonctions  $\alpha_i$ .

En substituant la fonction  $U(t, u)$  dans l'équation différentielle qu'elle vérifie, on obtient des équations récurrentes pour les fonctions  $g_i$  :

$$\begin{cases} \dot{g}_1 = \alpha_1 g_1 \\ \dot{g}_{q+1} = \alpha_1 g_{q+1} + \alpha_2 g_1^{q+1} \\ \vdots \\ \dot{g}_{iq+1} = \alpha_1 g_{iq+1} + S_i(\alpha_2, \dots, \alpha_i, g_1, \dots, g_{(i-1)q+1}) \quad \text{pour } i \geq 2, \end{cases} \quad (2.5)$$

où  $\dot{g}$  est la dérivée de  $g$  par rapport à  $t$  et  $S_i(\alpha_2, \dots, \alpha_i, g_1, \dots, g_{(i-1)q+1})$  est un polynôme en  $(\alpha_2, \dots, \alpha_i, g_1, \dots, g_{(i-1)q+1})$  avec des coefficients positifs rationnels.

*Remarque.* — Les fonctions  $g_i$  avec  $i \not\equiv 1 \pmod{q}$  sont identiquement nulles.



Utilisant les équations vérifiées par les fonctions  $g_i$  ainsi que la méthode des séries majorantes, on peut prouver comme dans [R2] les estimations suivantes :

$\exists c > 0$ , tel que  $\forall n \geq 1$ ,  $\exists c_n > 0$  vérifiant :

$$\forall i > 1, \quad \forall \lambda \in W_{N+1}, \quad \left| \frac{dg_i}{dt^n} \right| \leq c_n \left[ c \exp \frac{t}{2} \right]^i. \quad (2.6)$$

La fonction  $U(t, u)$  va nous permettre de trouver l'expression de l'application de Dulac  $D_\lambda$ . En effet, il faut remarquer que  $u|_\sigma = x^{r_0}$  et  $u|_\tau = u$ , on obtient donc :

$$D_\lambda(x) = U(-\ln x, x^{r_0}), \quad (2.7)$$

où  $-\ln x$  est le temps nécessaire pour aller de  $x \in \sigma$  à  $\tau$ .

Il est facile de voir que le rayon de convergence de la série  $\sum_{i=1}^{\infty} g_i(t)u^i$  est plus grand que  $(1/c) \exp((-1/2)t)$ , ceci est une conséquence de l'estimation (2.6). Il s'en suit que pour tout  $x$  assez petit, par exemple  $x \in [0, x_0]$ , on peut utiliser cette inégalité pour  $t \leq -2 \ln x$ , et particulièrement pour  $t = -\ln x$ . On aura alors :

$$D_\lambda(x) = \sum_{i=0}^{\infty} g_{iq+1}(-\ln x) x^{(iq+1)r_0}. \quad (2.8)$$

La série de l'expression (2.8) est normalement convergente sur un certain intervalle  $[0, x_0]$  et  $\lambda$  dans un certain voisinage de 0 dans l'espace des paramètres.

De plus, utilisant encore les estimations de (2.6) pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on voit qu'on peut dériver la série de (2.8) terme par terme. On obtient donc ce qui suit : étant donné  $k \in \mathbb{N}$ , il existe  $K(k)$  tel que :

$$D_\lambda(x) = \sum_{i=0}^{K(k)} g_{iq+1}(-\ln x) x^{(iq+1)r_0} + \psi_k(x, \lambda), \quad (2.9)$$

où  $\psi_k$  est  $C^k$  et  $k$ -plate en  $x = 0$ .

Finalement, on va donner l'expression des fonctions  $g_i$ . Posons

$$\Omega(t, \alpha_1) = \frac{\exp(\alpha_1 t) - 1}{\alpha_1},$$

on a alors  $g_1(t) = \exp(\alpha_1 t)$  et

$$g_{iq+1}(t) = \exp(\alpha_1 t) (\alpha_{i+1} \Omega + Q_{iq+1}(\alpha_1, \dots, \alpha_i, Q))$$

pour  $i \geq 1$ , où  $Q_{iq+1}$  est un polynôme de degré  $i$  en  $\Omega$  avec des coefficients dans l'idéal  $\mathcal{I}(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}) \cap (\mathcal{I}(\alpha_1, \dots, \alpha_i))^2$ .

Ceci peut être montré par induction en utilisant les équations différentielles récurrentes vérifiées par les fonctions  $g_i$ . On a

$$g_1(t) = \exp \alpha_1 t ; \quad g_{q+1}(t) = \exp(\alpha_1 t) (\alpha_2 \Omega + Q_{q+1}(\alpha_1, \alpha_2, \Omega)),$$

et ainsi de suite. Or  $\Omega(-\ln x, \alpha_1) = \omega(x, \alpha_1)$ , donc on a

$$g_{iq+1}(-\ln x) = x^{-\alpha_1} (\alpha_i \omega + Q_{iq+1}(\omega))$$

et

$$D_\lambda(x) = \sum_{i=0}^{K(x)} x^{(iq+1)r_0 - \alpha_1} (\alpha_i \omega + Q_i(\omega)) + \psi_k(x, \lambda).$$

En posant  $x^{-\alpha_1} = 1 + \alpha_1 \omega$  et en ordonnant les monômes  $x^{ir_0} \omega^j$  (par l'ordre suivant  $x^{ir_0} \omega^j < x^{mr_0} \omega^n$  ssi  $(i \leq m)$  ou bien  $(i = m \text{ et } j > n)$ ) dans le développement précédent, on obtient le résultat annoncé dans le théorème 2.2.

*Remarque.* — Les fonctions  $\alpha_{ij}$  se calculent à partir de l'équation différentielle vérifiée par  $g_i$  dans (2.5) pour  $i$  fixé. Une propriété importante qui sera utilisée dans la section 3 est la suivante :

$$\alpha_{ij} = \alpha_i \alpha_1^{j-1} + P(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}),$$

où  $P(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1})$  est un polynôme des  $\alpha_n$  avec  $1 \leq n \leq i-1$ .

Maintenant, on est en mesure de délimiter le cadre de notre étude.

On considère un champ de vecteurs  $X_0$  ayant un graphique  $\Gamma_0$  comme décrit dans l'introduction. On va étudier la cyclicité d'un tel polycycle dans des déformations  $X_\lambda$  vérifiant les deux hypothèses suivantes :

- a) une connexion entre  $P_1$  et  $P_2$  reste fixe;
- b) le produit des deux rapports d'hyperbolicités associés aux deux sommets reste égal à un pour  $\lambda$  dans un certain voisinage de zéro dans l'espace des paramètres.

*Remarque.* — Dans la suite de l'article, on traitera le cas  $r_0 = 1$  sachant que le cas général  $r_0 \in \mathbb{Q}$  est résolu de la même façon.

### 3. L'équation aux cycles voisins de $\Gamma_0$

Jusqu'à la fin, on suppose donnée une famille  $C^\infty$  locale  $X_\lambda$ , de champs de vecteurs, définie sur  $\mathbb{R}^2 \times W$ , où  $W$  est un voisinage de zéro dans  $\mathbb{R}^\Lambda$  et  $\lambda \in \mathbb{R}^\Lambda$ .

Pour  $\lambda = 0$ , le champ de vecteurs  $X_0$  possède un graphique, à deux sommets,  $\Gamma_0$ . La déformation  $X_\lambda$  le long de  $\Gamma_0$  sera définie par la donnée de trois familles de champs de vecteurs  $X_\lambda^1$ ,  $X_\lambda^2$  et  $X_\lambda^3$  définies respectivement sur  $A_1 \times W$ ,  $A_2 \times W$  et  $A_3 \times W$  avec les propriétés suivantes :

i) Dans  $A_1$  de coordonnées  $(x_1, y_1)$  avec

$$A_1 = \{(x_1, y_1); |x_1| \leq 2, |y_1| \leq 2\},$$

la famille  $X_\lambda^1$  a un point singulier unique  $P_1(\lambda)$ , qui est un point de selle hyperbolique situé à l'origine  $P_1(\lambda) \equiv 0$  et

$$j^1 X_\lambda^1(0) = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - (1 - \alpha_1(\lambda)) y_1 \frac{\partial}{\partial y_1}, \quad (3.1)$$

où  $\alpha_1$  est une fonction  $C^\infty$  en  $\lambda$  et  $\alpha_1(0) = 0$ .

ii) Dans  $A_2$  de coordonnées  $(x_2, y_2)$  avec

$$A_2 = \{(x_2, y_2); |x_2| \leq 2, |y_2| \leq 2\},$$

la famille  $X_\lambda^2$  a un seul point singulier  $P_2(\lambda)$ , qui est un point de selle hyperbolique situé à l'origine  $P_2(\lambda) \equiv 0$  et

$$j^1(-X_\lambda^2)(0) = y_2 \frac{\partial}{\partial y_2} - (1 - \alpha_1(\lambda)) x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad (3.2)$$

où  $\alpha_1$  est la même fonction définie précédemment dans i).

Il est à remarquer qu'on a défini le linéarisé du champ de vecteurs  $-X_\lambda^2$  à l'origine 0 de  $A_2$ . Ceci est une conséquence de la condition b) que vérifie la déformation  $X_\lambda$ .

La condition  $r_1(\lambda)r_2(\lambda) = 1$  est équivalente au fait que les deux coefficients de trace de  $X_\lambda^1$  en  $P_1$  et de  $(-X_\lambda^2)$  en  $P_2$  soient égaux.

iii) Dans  $A_3$  le champ  $X_\lambda^3$  est sans singularités.

Les transversales  $\sigma_i = \{x_i = 1\}$ ,  $\tau_i = \{y_i = 1\}$  sont contenues dans  $A_i \cap A_3$  avec  $i = 1, 2$ .

Pour  $k \in \mathbb{N}$  et  $W$  voisinage de zéro dans  $\mathbb{R}^\Lambda$ , il existe deux transversales  $\sigma_i, \tau_i$  paramétrées respectivement par  $x_i, y_i$  contenues dans  $A_i \cap A_3$ ,  $i = 1, 2$ , telles que les deux applications de Dulac (fig. 2) définies par le flot de  $X_\lambda^i$  dans  $A_i \cap A_3$  soient données par

$$\begin{aligned} y_1 &= D_{1,\lambda}(x_1) \\ &= x_1 + \sum_{1 \leq j \leq i \leq k+1} \alpha_{ij}(\lambda) x_1^i \omega^j + \psi_1(x_1, \lambda); \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} x_2 &= D_{2,\lambda}(y_2) \\ &= y_2 + \sum_{1 \leq j \leq i \leq k+1} \beta_{ij}(\lambda) y_2^i \omega^j + \psi_2(y_2, \lambda). \end{aligned} \quad (3.4)$$

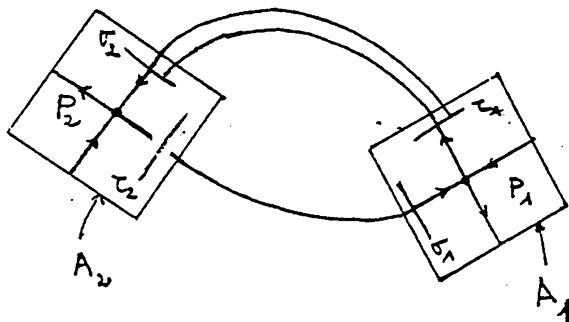


Fig. 2

$D_{1,\lambda}$  est définie à partir du flot de  $X_\lambda^1$  au voisinage de  $P_1$  tandis que  $D_{2,\lambda}$  est définie à partir du flot de  $(-X_\lambda^2)$ . Ces deux écritures nous permettront de déterminer l'application aux cycles associée au polycycle  $\Gamma_0$  perturbé dans  $X_\lambda$ .

Les deux fonctions  $\psi_1$  et  $\psi_2$  sont de classe  $C^k$ , respectivement  $k$ -plates en  $x_1 = 0$  et  $y_2 = 0$ . La fonction  $\omega$  est celle qui avait été définie auparavant. Les  $\alpha_{ij}$  sont des polynômes homogènes en  $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ . Les  $\beta_{ij}$  sont des polynômes homogènes en  $\alpha_1, \beta_2, \beta_3, \dots$ . Les fonctions  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_i, \dots$  (resp.  $\alpha_1, \beta_2, \beta_3, \dots, \beta_i, \dots$ ) sont les coefficients qui apparaissent dans le jet infini normalisé de  $X_\lambda^1$  en  $P_1$  (resp. de  $(-X_\lambda^2)$  en  $P_2$ ).

Dans les deux écritures (3.3) et (3.4) des deux applications de Dulac  $x_i$ ,  $y_i$  appartiennent à un intervalle  $[0, \varepsilon_0[$ .

Dans  $A_3$ , le flot de  $X_\lambda^3$  définit deux applications de Poincaré  $R_{1,\lambda}$  et  $R_{2,\lambda}$  :

$$R_{1,\lambda} : \tau_1 \rightarrow \sigma_2$$

$$R_{2,\lambda} : \tau_2 \rightarrow \sigma_1$$

$$x_2 = R_{1,\lambda}(y_1) \quad \text{et} \quad x_1 = R_{2,\lambda}(y_2).$$

Les deux applications  $R_{1,\lambda}$  et  $R_{2,\lambda}$  sont des difféomorphismes. On peut donc les écrire sous la forme :

$$R_{1,\lambda}(y_1) = a_0 + a_1 y_1 + \dots + a_k y_1^k + o(y_1^k) \quad (3.5)$$

$$R_{2,\lambda}(y_2) = b_1 y_2 + \dots + b_k y_2^k + o(y_2^k), \quad (3.6)$$

les  $a_i, b_i$  sont des fonctions  $C^\infty$  de  $\lambda$  avec  $a_1(\lambda) \geq 0$  et  $b_1(\lambda) \geq 0$  ( $\forall \lambda \in W$ ).

*Remarque 1.* — La condition  $a)$  que vérifie la déformation  $X_\lambda$  se traduit par le fait que le terme constant de l'écriture (3.6) soit identiquement nul pour  $\lambda$  appartenant à  $W$ .

*Remarque 2.* — Les applications de Dulac sont analytiques à droite de 0, prolongeables par continuité en 0 par 0.

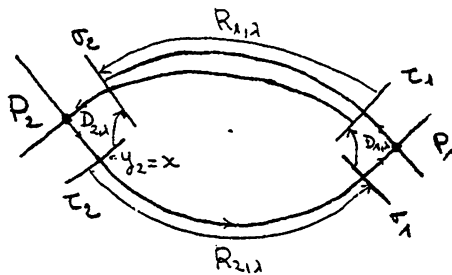


Fig. 3

Considérons l'application (fig. 3)

$$\delta_\lambda = R_{1,\lambda} \circ D_{1,\lambda} \circ R_{2,\lambda} - D_{2,\lambda} \quad (3.7)$$

$$\delta_\lambda : \tau_2 \rightarrow \sigma_2.$$

Quitte à restreindre  $W$ , le voisinage de zéro dans  $\mathbb{R}^\Lambda$ , on suppose que l'application  $\delta_\lambda$  est définie sur  $[0, \varepsilon_0]$  avec  $\varepsilon_0$  un réel strictement positif pris très petit. Il existe alors une relation biunivoque, évidente, entre les zéros de l'équation  $\delta_\lambda(y_2) = 0$  et les cycles de  $X_\lambda$  voisins de  $\Gamma_0$ . Dans la suite, on utilisera les notations suivantes

$$y_2 = x \quad \text{et} \quad \delta(x, \lambda) = \delta_\lambda(x).$$

**THÉORÈME 3.1.** — *Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , il existe un voisinage  $W$  dans l'espace des paramètres  $\mathbb{R}^\Lambda$ , un réel strictement positif  $\varepsilon \geq 0$ , tels que  $\delta$  s'écrive :*

$$\delta(x, \lambda) = \sum_{0 \leq j \leq i \leq k+1} \gamma_{ij}(\lambda) x^i \omega^j + \psi_k(x, \lambda), \quad (3.8)$$

où les  $\gamma_{ij}$  sont des fonctions  $C^\infty$  en  $\lambda$  et  $\psi_k$  est une fonction  $C^k$ ,  $k$ -plate en  $x = 0$ .

*Remarque.* — L'écriture de l'application  $\delta$  dans le théorème précédent ne peut être réduite comme dans le cas du lacet non trivial étudié par Roussarie dans [R2], ceci étant dû au fait que le coefficient de trace  $\alpha_1$  est multiplié par un nouveau paramètre qui s'annule pour  $\lambda = 0$ . Par suite, on ne pourra pas diviser les termes de la forme  $f(\lambda) \alpha_1^\ell x^i \omega^j$  dans aucun autre terme de l'écriture.

**LEMME 3.2.** — *Soient  $f$  une fonction de classe  $C^k$  sur  $[0, \varepsilon[ \times W$  telle que  $f(0, \lambda) = 0$ ,  $a(\lambda)$  une fonction strictement positive, il existe alors deux fonctions  $G_1$  et  $G_2$  de classe  $C^k$  en  $(x, \lambda)$  sur  $[0, \varepsilon[ \times W$  telle que*

$$\omega(ax(1+f), \lambda) = (*1 + \alpha_1 G_1(x, \lambda)) \omega(x, \lambda) + G_2(x, \lambda). \quad (3.9)$$

*Preuve.* — On a :

$$\omega(ax(1+f), \lambda) = \frac{a^{-\alpha_1} x^{-\alpha_1} (1+f(x, \lambda))^{-\alpha_1} - 1}{\alpha_1}.$$

De plus,

$$a^{-\alpha_1} = 1 - \alpha_1 \ln a(1 + o(\alpha_1));$$

$$(1+f)^{-\alpha_1} = 1 - \alpha_1 g(x, \lambda), \quad g \text{ est obtenue en développant } f;$$

$$x^{-\alpha_1} = 1 + \alpha_1 \omega(x, \lambda).$$

La démonstration découle facilement des trois égalités précédentes. Les fonctions  $G_1$  et  $G_2$  sont également données par ces trois égalités.

*Preuve du théorème 3.1.* — Pour démontrer le théorème 3.1, on a :

$$b_1(\lambda) > 0, \quad \forall \lambda \in W, \quad \text{où } b_1(\lambda) = \frac{\partial R_{2,\lambda}}{\partial x}(0).$$

D'après (3.3) et (3.5) :

$$\begin{aligned} (D_{1,\lambda} \circ R_{2,\lambda})(x) &= \\ &= R_{2,\lambda}(x) + \sum_{1 \leq j \leq i \leq k+1} R_{2,\lambda}^i(x) \omega^j(R_{2,\lambda}(x), \lambda) + \psi_1(R_{2,\lambda}(x), \lambda). \end{aligned}$$

On applique le lemme 6 à  $\omega(R_{2,\lambda}(x), \lambda)$  sachant que

$$R_{2,\lambda}(x) = b_1 x \left( 1 + \frac{b_2}{b_1} x + \frac{b_3}{b_1} x^2 + \dots \right).$$

Les fonctions  $G_i$  s'obtiennent facilement par un développement de Taylor; après, on applique  $R_{1,\lambda}$  au résultat. En utilisant l'ordre partiel entre les monômes  $x^i \omega^j$  qui sera étudié dans la section suivante, un tronquage à l'ordre  $k+1$ , un réarrangement des termes de  $R_{1,\lambda} \circ D_{1,\lambda} \circ R_{2,\lambda}(x) - D_{2,\lambda}(x)$ , on obtient l'écriture énoncée dans le théorème 3.1.

#### 4. L'algèbre des fractions rationnelles admissibles

**DÉFINITION 4.1.** — Soit  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\psi(x, \lambda)$  une fonction de classe  $C^k$  définie sur  $[0, \varepsilon[ \times W$  et  $\xi(x, \lambda)$  une fonction continue positive vérifiant

$$\lim_{(x,\lambda) \rightarrow (0,0)} \xi(x, \lambda) = 0.$$

Dans [M1], l'auteur a défini la notion suivante : on dira que  $\psi$  vérifie la propriété  $I_0^k(\xi)$  si les conditions suivantes sont satisfaites :

$$i) \quad \lim_{(x,\lambda) \rightarrow (0,0)} \psi(x, \lambda) = 0;$$

$$ii) \quad \text{pour tout } n \leq k, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\xi^n \partial^n \psi}{\partial^n x}(x, \lambda) = 0 \text{ uniformément en } \lambda \in W.$$

*Remarque.* — Les monômes  $x^{i+m\alpha_1}\omega^j$  avec  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $m \in \mathbb{Z}$  vérifient la propriété  $I_0^k(x^{1+\alpha_1}\omega)$ .

L'algèbre des fractions rationnelles admissibles est l'algèbre contenant les monômes  $x^i\omega^j$  et stable par les opérations de division et de dérivation.

Cette algèbre a été étudiée dans [R2]. On rappellera les résultats qui nous intéressent et, de plus, on généralisera certains autres.

Dans tout ce qui suit, on va noter  $\omega = (x^{-\alpha_1} - 1)/\alpha_1$ , où  $\alpha_1$  est le coefficient de trace défini précédemment.

On introduit entre ces monômes un ordre partiel strict qui correspond à l'ordre de platitude en  $x = 0$  pour  $\lambda = 0$  :

$$x^{\ell+n\alpha_1}\omega^m < (\text{moins plat}) x^{\ell'+n'\alpha_1}\omega^{m'} \Leftrightarrow \ell < \ell'$$

ou bien

$$\ell = \ell', \quad n = n' \text{ et } m > m'.$$

(On n'introduit pas d'ordre entre les monômes  $x^{n\alpha_1}\omega$ .)

On considère ensuite l'algèbre des combinaisons finies de monômes à coefficients des fonctions  $C^\infty$  en  $\lambda$ ; de telles combinaisons seront appelées fonctions admissibles.

Nous utiliserons la convention suivante :  $*$  désignera une fonction  $C^\infty$  en  $\lambda$  non nulle pour  $\lambda = 0$ .

On considère enfin l'algèbre des fonctions quotients  $u/(1 + \psi(x, \lambda))$ , où  $\psi(x, \lambda)$  vérifie la propriété  $I_0^k(x^{1+\alpha_1}\omega)$ .

$1 + \psi(x, \lambda)$  est appelé une unité. Cette algèbre est l'algèbre des fractions rationnelles admissibles.

On étend l'ordre partiel sur les monômes en un ordre sur les fractions rationnelles admissibles. Posons

$$G_i = *g_i \frac{(1 + \varphi_i(x, \lambda))}{1 + \psi_i(x, \lambda)}, \quad i = 1, 2,$$

avec  $g_1$  et  $g_2$  deux monômes,  $\psi_i, \phi_i$  vérifient  $I_0^k(x^{1+\alpha_1}\omega)$ , alors on a

$$G_1 < G_2 \Leftrightarrow g_1 < g_2. \quad (4.1)$$

Les monômes  $x^i\omega^j$  jouissent de certaines propriétés très intéressantes dont le lemme suivant, qui sera la clé de l'algorithme de finitude.



LEMME 4.2. — Soient  $\ell$ ,  $m$  et  $k$  trois entiers tels que  $m \leq \ell < k$ , alors :

$$\frac{\partial^k(x^\ell \omega^m)}{\partial x^k} = x^{\ell-k-\alpha_1} \sum_{j=1}^m * \omega^{m-j} \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial^k(x^k \omega^m)}{\partial x^k} = \sum_{j=0}^m * \omega^{m-j}, \quad (4.3)$$

avec  $*$  qui désigne une fonction  $C^\infty$  en  $\lambda$ , non nulle pour  $\lambda = 0$ .

Preuve. — Une double récurrence sur  $\ell$  et  $m$  permet de montrer le lemme. Par exemple, on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x\omega)}{\partial x} &= (1 - \alpha_1)\omega - 1 \\ \frac{\partial^2(x\omega)}{\partial x^2} &= -(1 - \alpha_1)x^{-\alpha_1-1}. \end{aligned}$$

Dans tout ce qui suit, on notera la dérivée  $k^{\text{ième}}$  de  $f$  par  $f^{(k)}$ .

On énonce maintenant une proposition obtenue par un calcul direct.

PROPOSITION 4.3. — 1) Soit

$$G = g \frac{(1 + f_1(x, \lambda))}{(1 + f_2(x, \lambda))},$$

où  $g$  est un monôme non faible ( $g \neq x^{n\alpha_1}\omega^j$ ) et  $f_i$  ( $i = 1, 2$ ) vérifient la propriété  $I_0^k(x^{1+\alpha_1}\omega)$ , alors si  $g^{(1)} = g'(1 + f_3(x, \lambda))$ , on aura :

$$G^{(1)} = * g' \frac{(1 + f_4(x, \lambda))}{(1 + f_5(x, \lambda))},$$

où  $f_4$  et  $f_5$  vérifient  $I_0^k(x^{1+\alpha_1}\omega)$ .

2) Si

$$G_i = g_i \frac{(1 + \varphi_i(x, \lambda))}{(1 + \psi_i(x, \lambda))},$$

où  $\varphi_i$  et  $\psi_i$  vérifient la propriété,  $g_i$  est un monôme non faible  $i = 1, 2$ , tels que  $g_1 < g_2$  alors :

$$G_i^{(1)} = g'_i \frac{(1 + \varphi'_i(x, \lambda))}{(1 + \psi'_i(x, \lambda))}, \quad i = 1, 2,$$

avec  $g'_1 < g'_2$  et  $\varphi'_i, \psi'_i$  vérifient aussi les propriétés  $I_0^k$ .

## 5. Ordre du polycycle $\Gamma_0$ dans la déformation $X_\lambda$

Commençons par définir l'application  $P_\lambda$  de la transversale  $\sigma_2$  vers  $\sigma_2$

$$P_\lambda(x_2) = (R_{1,\lambda} \circ D_{1,\lambda} \circ R_{2,\lambda} \circ D_{2,\lambda}^{-1})(x_2).$$

Les applications  $R_{1,\lambda}$ ,  $R_{2,\lambda}$  et  $D_{1,\lambda}$  sont les applications définies précédemment et  $D_{2,\lambda}^{-1}$  est l'application inverse de  $D_{2,\lambda}$ ; c'est une application ayant le même type de développement asymptotique que ceux de  $D_{1,\lambda}$  et  $D_{2,\lambda}$ . En effet :

$$D_{2,\lambda}^{-1}(x_2) = x_2 + \sum_{1 \leq j \leq i \leq k+1} \bar{\beta}_{ij} x_2^i \omega^j + \psi(x_2, \lambda), \quad (5.1)$$

où  $\bar{\beta}_{ij} = * \beta_{ij} (1 + o(\lambda))$ .

L'application  $P_\lambda$  est appelée l'application 1° retour associée au graphique  $\Gamma_0$ . De plus, les zéros de l'équation  $P_\lambda(x_2) - x_2 = 0$  correspondent biunivoquement aux cycles de  $X_\lambda$  voisins de  $\Gamma_0$ .

**DÉFINITION 5.1.** — *On dira que le graphique  $\Gamma_0$  est non identique (ou graphique non dégénéré) si  $P_0 - I$  n'est pas infiniment plat en  $x_2 = 0$ , où  $I$  est l'application identique.*

Maintenant faisons le lien avec  $\delta_0(x)$  l'application définie dans la section 3. Dorénavant on note  $x_2$  par  $x$ . Il est immédiat que

$$\delta_\lambda(x) = \delta(x, \lambda) = (P_\lambda - I)(D_{2,\lambda}(x)).$$

Donc pour  $\lambda = 0$ ,

$$\delta_0(x) = (P_0 - I)(D_{2,0}(x)).$$

Or

$$D_{2,0}(x) = x + \text{termes plus plats que le monôme } x.$$

Ceci nous permet d'affirmer que les deux applications  $\delta_0$  et  $P_0 - I$ , dans le cas où  $\Gamma_0$  est non identique, sont équivalentes au même monôme  $\rho x^k \ln^m x$  avec  $\rho \neq 0$ . Cette notion se rattache à ce qu'on appelle l'ordre du polycycle, notion qui est intrinsèque d'après ce qu'on vient de dire.

## 6. Algorithme de finitude

**THÉORÈME 6.1.** — Soit  $X_\lambda$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}^\Lambda$ , une famille de champs de vecteurs sur le plan ayant un polycycle  $\Gamma_0$ , pour  $\lambda = 0$ , du type décrit précédemment et vérifiant les conditions a) et b).

Soit  $\delta_0$  l'application  $1^\circ$  retour associée à  $\Gamma_0$  pour  $\lambda = 0$ . Si  $\delta_0$  est non infiniment plate alors, pour  $\lambda$  assez petit,  $X_\lambda$  a une borne uniforme finie du nombre de cycles limites voisins de  $\Gamma_0$ .

*Précisément*

si  $\delta_0(x) \sim \rho x^k$  avec  $\rho \neq 0$  alors  $X_\lambda$  a au plus  $\left\lfloor \frac{k(k+3)}{2} \right\rfloor$  cycles.

si  $\delta_0(x) \sim \rho x^k \ln^m x$  avec  $\rho \neq 0$  alors

$X_\lambda$  a au plus  $\left\lfloor \frac{k(k+3)}{2} - m \right\rfloor$  cycles.

*Démonstration.* — On va supposer que  $\Gamma_0$  est non trivial, donc

$$\delta_0(x) \sim \rho x^k \ln^m x.$$

On va choisir un entier naturel  $K \gg k(k+3)/2$ . D'après le théorème 3.1, il existe alors un voisinage  $W$  de  $\lambda = 0$  dans  $\mathbb{R}^\Lambda$ , un réel  $\varepsilon > 0$ , des fonctions  $\gamma_{ij}(\lambda)$  de classe  $C^\infty$  en  $\lambda$ , une fonction  $\psi_k(x, \lambda)$  de classe  $C^k$ ,  $k$ -plate en  $x = 0$ , tels que les cycles apparaissant au voisinage de  $\Gamma_0$ , pour  $\lambda$  assez petit, correspondent biunivoquement aux zéros de l'application :

$$\delta(x, \lambda) = \sum_{0 \leq j \leq i \leq K+1} \gamma_{ij}(\lambda) x^i \omega^j + \psi_K(x, \lambda), \quad (6.1)$$

avec

$$\gamma_{km}(0) \neq 0$$

et

$$\gamma_{ij}(0) = 0 \quad \text{pour } 0 \leq j \leq i \leq k-1$$

et

$$\gamma_{kj}(0) = 0 \quad \text{pour } m+1 \leq j \leq k.$$

On divisera l'algorithme en deux étapes.

*Étape 1*

$$\begin{aligned}\delta(x, \lambda) = & \gamma_{00} + \gamma_{11}x\omega + \gamma_{10}x + \cdots + \gamma_{mm}x^m\omega^m + \\ & + \gamma_{mm-1}x^m\omega^{m-1} + \cdots + \gamma_{m2}x^m\omega^2 + \\ & + \gamma_{m1}x^m\omega + \gamma_{m0}x^m + \cdots + \gamma_{kk}x^k\omega^k + \\ & + \cdots + \gamma_{k1}x^k\omega + \gamma_{k0}x^k + [\cdots] + \psi_K(x, \lambda).\end{aligned}\tag{6.2}$$

Entre les deux crochets il y a tous les monômes  $x^i\omega^j$  avec  $k+1 < j \leq i \leq K+1$ , c'est-à-dire des monômes plus plats que  $x^k$ .

On commence par dériver  $\delta(x, \lambda)$   $k$  fois pour éliminer tous les monômes  $\gamma_{i0}x^i$  avec  $0 \leq i \leq k-1$ .

$$\begin{aligned}\delta^{(k)}(x, \lambda) = & \sum_{1 \leq j \leq i \leq k-1} \gamma_{ij}x^{i-k-\alpha_1}(*\omega^{j-1} + *\omega^{j-2} + \cdots + *\omega + *) + \\ & + \sum_{1 \leq j \leq k} \gamma_{kj}(*\omega^j + *\omega^{j-1} + *\omega^{j-2} + \cdots + *\omega + *) + \\ & + \gamma_{k0} + [\cdots] + \psi_K^{(k)}(x, \lambda).\end{aligned}\tag{6.3}$$

On multiplie  $\delta^{(k)}(x, \lambda)$  par  $x^{\alpha_1+k-1}$ , on obtient :

$$\begin{aligned}x^{\alpha_1+k-1}\delta^{(k)}(x, \lambda) = & \\ = & \sum_{1 \leq j \leq i \leq k-1} \gamma_{ij}x^{i-1}(*\omega^{j-1} + *\omega^{j-2} + \cdots + *\omega + *) + \\ & + \sum_{1 \leq j \leq k} \gamma_{kj}x^{\alpha_1+k-1}(*\omega^j + *\omega^{j-1} + *\omega^{j-2} + \cdots + *\omega + *) + \\ & + *x^{\alpha_1+k-1} + [\cdots] + x^{\alpha_1+k-1}\psi_K^{(k)}(x, \lambda).\end{aligned}\tag{6.4}$$

Dans la première somme de l'égalité (6.4), regardons tous les monômes  $x^{i-1}\omega^j$ ,  $1 \leq j \leq i$ . Cette partie de la somme ou ce qu'on peut appeler le  $i^{\text{ème}}$  bloc est :

$$\gamma_{ii}x^{i-1} \sum_{j=0}^{i-1} *\omega^j + \cdots + \gamma_{i2}x^{i-1}(*\omega + *) + *\gamma_{i1}x^{i-1}.$$

Dans l'écriture précédente on factorise par les  $x^{i-1}\omega^j$ ,  $1 \leq j \leq i-1$ , on obtient donc

$$\begin{aligned} & * \gamma_{ii} x^{i-1} \omega^{i-1} + (* \gamma_{ii} + * \gamma_{ii-1}) x^{i-1} \omega^{i-2} + \dots + \\ & + \left( \sum_{\ell=j+1}^i * \gamma_{i\ell} \right) x^{i-1} \omega^j + \dots + \left( \sum_{\ell=1}^i * \gamma_{i\ell} \right) x^{i-1}. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Posons

$$\bar{\gamma}_{ij} = \sum_{k=j}^i * \gamma_{ij}.$$

Le bloc  $i$  s'écrit alors

$$\bar{\gamma}_{ii} x^{i-1} \omega^{i-1} + \bar{\gamma}_{ii-1} x^{i-1} \omega^{i-2} + \dots + \bar{\gamma}_{i1} x^{i-1}. \quad (6.6)$$

Chacun des blocs jusqu'au  $(k-1)^{\text{ième}}$  subissent les mêmes transformations. De plus,

$$\bar{\gamma}_{ij}(0) = 0 \quad \text{pour } 1 \leq j \leq i \leq k-1. \quad (6.7)$$

Quant au  $k^{\text{ième}}$  bloc, il s'écrit :

$$\begin{aligned} & \gamma_{kk} x^{\alpha_1+k-1} \sum_{j=0}^k * \omega^j + \gamma_{k\ k-1} x^{\alpha_1+k-1} \sum_{j=0}^{k-1} * \omega^j + \dots + \\ & + \gamma_{k1} x^{\alpha_1+k-1} (* \omega + *) + * \gamma_{k0} x^{\alpha_1+k-1}. \end{aligned}$$

Même opération que précédemment, on factorise par les monômes  $x^{\alpha_1+k-1} \omega^j$ ,  $0 \leq j \leq k$ . On trouve alors :

$$\sum_{j=0}^k \bar{\gamma}_{kj} x^{\alpha_1+k-1} \omega^{k-j}, \quad (6.8)$$

où  $\bar{\gamma}_{kj} = \sum_{\ell=j}^k \gamma_{k\ell}$  et vérifiant les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} \bar{\gamma}_{kj}(0) = 0 & \text{si } m+1 \leq j \leq k \\ \bar{\gamma}_{km}(0) \neq 0. \end{cases}$$

D'où, les différents coefficients  $\bar{\gamma}_{ij}$  gardent les mêmes propriétés que leurs prédécesseurs  $\gamma_{ij}$ .

Pour ne pas alourdir le texte par trop de notations, les nouveaux coefficients  $\bar{\gamma}_{ij}$  seront notés encore par  $\gamma_{ij}$ .

La fonction  $x^{\alpha_1+k-1}\delta^{(k)}(x, \lambda)$  s'écrit alors :

$$\begin{aligned} x^{\alpha_1+k-1}\delta^{(k)}(x, \lambda) = & \gamma_{11} + \gamma_{22}x\omega + \gamma_{21}x + \dots + \gamma_{mm}x^{m-1}\omega^{m-1} + \\ & + \gamma_{m\ m-1}x^{m-1}\omega^{m-2} + \dots + \gamma_{m1}x^{m-1} + \dots + \\ & + \gamma_{kk}x^{\alpha_1+k-1}\omega^k + \gamma_{k\ k-1}x^{\alpha_1+k-1}\omega^{k-1} + \dots + \\ & + \gamma_{k1}x^{\alpha_1+k-1}\omega + \gamma_{k0}x^{\alpha_1+k-1} + [\dots] + \psi_1(x, \lambda), \end{aligned} \quad (6.9)$$

où ce qui est entre les crochets reste plus plat que  $x^{\alpha_1+k-1}$ , et  $\psi_1(x, \lambda)$  est une fonction de classe  $C^{K-k}$  au moins  $(K-k)$ -plate en  $x = 0$ .

On note cette fonction  $x^{\alpha_1+k-1}\delta^{(k)}(x, \lambda)$  par  $\delta_1(x, \lambda)$ . Localement dans un certain voisinage de  $(0, 0) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^\Lambda$ , les zéros de  $\delta^{(k)}(x, \lambda)$  sont les zéros de la fonction  $\delta_1(x, \lambda)$ . Dérivons la fonction  $\delta_1(k-1)$  fois :

$$\begin{aligned} \delta_1^{(k-1)}(x, \lambda) = & \sum_{2 \leq j \leq i \leq k-1} \gamma_{ij}x^{i-k-\alpha_1}(*\omega^{j-2} + *\omega^{j-3} + \dots + *\omega + *) + \\ & + \sum_{0 \leq j \leq k} \gamma_{kj}x^{\alpha_1}(*\omega^j + *\omega^{j-1} + \dots + *\omega + *) + \\ & + [\dots] + \psi_1^{(k-1)}(x, \lambda). \end{aligned} \quad (6.10)$$

Cette opération nous a permis de supprimer tous les monômes de la forme  $\gamma_{i1}x^i$ ,  $1 \leq i \leq k-1$ . Multiplions la fonction  $\delta_1(x, \lambda)$  par  $x^{\alpha_1+k-2}$  et réarrangeons son écriture comme précédemment. Notons encore les nouveaux coefficients qui apparaissent par  $\gamma_{ij}$ . On obtient donc :

$$\begin{aligned} x^{\alpha_1+k-2}\delta_1(x, \lambda) = & \gamma_{22} + \gamma_{33}x\omega + \gamma_{32}x + \dots + \gamma_{mm}x^{m-2}\omega^{m-2} + \\ & + \gamma_{m\ m-1}x^{m-2}\omega^{m-3} + \dots + \gamma_{m2}x^{m-2} + \dots + \\ & + \gamma_{kk}x^{2\alpha_1+k-2}\omega^k + \gamma_{k\ k-1}x^{2\alpha_1+k-2}\omega^{k-1} + \dots + \\ & + \gamma_{k1}x^{2\alpha_1+k-2}\omega + \gamma_{k0}x^{2\alpha_1+k-1} + [\dots] + \psi_2(x, \lambda), \end{aligned} \quad (6.11)$$

où  $\psi_2(x, \lambda) = x^{\alpha_1+k-2}\psi_1^{(k-1)}(x, \lambda)$  est une fonction de classe  $C^{K-(k+(k-1))}$  et  $K-(k+(k-1))$ -plate en  $x = 0$ , les monômes entre les crochets gardent toujours le même ordre de platitude supérieur à celui de  $x^{2\alpha_1+k-2}$ . Posons :

$$\delta_2(x, \lambda) = x^{2\alpha_1+k-2}\delta_1(x, \lambda)$$

localement sur un certain voisinage de  $(0, 0)$  dans  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^\Lambda$ , la fonction  $\delta_1$  a les mêmes zéros que  $\delta_2$ .

On dérive encore  $\delta_2$  ( $k - 3$ ) fois pour éliminer les monômes  $\gamma_{i2}x^{i-2}$ ,  $2 \leq i \leq k - 1$ . Ainsi, on définit une suite de fonction  $\delta_3, \delta_4, \delta_5, \dots, \delta_{k-1}$  telle que

$$\begin{aligned} \delta_i(x, \lambda) = & \gamma_{ii} + \gamma_{i+1\ i+1}x\omega + \gamma_{i+1\ i}x + \dots + \\ & + \gamma_{\ell\ell}x^{\ell-i}\omega^{\ell-i} + \gamma_{\ell\ell-1}x^{\ell-i}\omega^{\ell-i-1} + \dots + \\ & + \gamma_{\ell i}x^{\ell-i} + \dots + \\ & + \gamma_{kk}x^{i\alpha_1+k-i}\omega^k + \gamma_{k\ k-1}x^{i\alpha_1+k-i}\omega^{k-1} + \dots + \\ & + \gamma_{k1}x^{i\alpha_1+k-i}\omega + \gamma_{k0}x^{i\alpha_1+k-i} + [\dots] + \psi_i(x, \lambda), \end{aligned} \quad (6.12)$$

où  $\psi_i$  est une fonction de classe  $C^{K-(k+k-1+\dots+i)}$  et  $K-(k+k-1+\dots+i)$ -plate en  $x = 0$ .

Jusqu'à la fonction  $\delta_i$ , on aura éliminé les monômes dont les coefficients étaient  $\gamma_{i1}, \gamma_{i2}, \gamma_{i3}, \dots, \gamma_i, i \leq k - 1$ .

La fonction  $\delta_{k-1}$  s'écrira alors :

$$\begin{aligned} \delta_{k-1}(x, \lambda) = & \gamma_{k-1\ k-1} + \gamma_{kk}x^{(k-1)\alpha_1+1}\omega^k + \dots + \gamma_{k1}x^{(k-1)\alpha_1+1}\omega + \\ & + \gamma_{k0}x^{(k-1)\alpha_1+1} + [\dots] + \psi_{k-1}(x, \lambda), \end{aligned} \quad (6.13)$$

la fonction  $\psi_{k-1}$  étant de classe  $C^{K-\frac{k(k+1)}{2}}$  et  $(K - (k(k+1)/2))$ -plate en  $x = 0$ .

On dérive  $\delta_{k-1}$  une fois, on obtient donc :

$$\begin{aligned} \delta_{k-1}^{(1)}(x, \lambda) = & \sum_{j=0}^k \gamma_{kj}x^{(k-1)\alpha_1}(*\omega^j + *\omega^{j-1}) + \gamma_{k0}x^{(k-1)\alpha_1} + \\ & + [\dots] + \psi_{k-1}^{(1)}(x, \lambda). \end{aligned} \quad (6.14)$$

Une multiplication de  $\delta_{k-1}^{(1)}$  par  $x^{(1-k)\alpha_1}$  et un réarrangement des monômes nous permettent d'avoir :

$$\Delta(x, \lambda) = \gamma_{kk}\omega^k + \gamma_{k\ k-1}\omega^{k-1} + \dots + \gamma_{k1}\omega + \gamma_{k0} + [\dots] + \varphi(x, \lambda), \quad (6.15)$$

où  $\varphi$  est une fonction  $C^{K-(\frac{k(k+1)}{2})+1}$  et  $(K - (k(k+1)/2) + 1)$ -plate en  $x = 0$ .

Les zéros de l'application  $\delta_{k-1}^{(1)}$  localement sont les zéros de  $\Delta$ .

*Étape 2*

Comme l'application  $\delta_0$  vérifie  $\delta_0(x) \sim \gamma_{km}(0)x^k \ln^m x$ , c'est-à-dire  $\gamma_{km}(0) \neq 0$ , alors on peut écrire  $\Delta(x, \lambda)$  sous la forme :

$$\Delta(x, \lambda) = \gamma_{kk}\omega^k + \gamma_{kk-1}\omega^{k-1} + \cdots + \gamma_{km+1}\omega^{m+1} + \gamma_{km}\omega(1 + f(x, \lambda)), \quad (6.16)$$

où  $f(x, \lambda)$  est une fonction vérifiant la propriété  $I_0^K(x^{1+\alpha_1}\omega)$ .

Localement sur un voisinage de  $(0, 0)$  dans  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^\Lambda$ , les zéros de l'application  $\Delta$  sont les zéros de l'application

$$\Delta_k(x, \lambda) = \frac{1}{\omega^k} \Delta(x, \lambda).$$

$\Delta_k(x, \lambda)$  s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \Delta_k(x, \lambda) &= \gamma_{kk} + \gamma_{kk-1}\frac{1}{\omega} + \gamma_{kk-2}\frac{1}{\omega^2} + \cdots + \\ &+ \gamma_{km}\frac{1}{\omega^{k-m}}(1 + f_k(x, \lambda)), \end{aligned} \quad (6.17)$$

Dérivons  $\Delta_1$ , on obtient alors :

$$\begin{aligned} \Delta_k^{(1)}(x, \lambda) &= \gamma_{kk-1}\frac{x^{-\alpha_1-1}}{\omega^2} + \cdots + \\ &+ \gamma_{km}\frac{x^{-\alpha_1-1}}{\omega^{k-m+1}}(* + f_{k-1}(x, \lambda)). \end{aligned}$$

*Remarque.* — Les différentes fonctions  $f_i$  qui apparaîtront au cours de cet algorithme vérifieront la propriété  $I_0^N(x^{1+\alpha_1}\omega)$  où  $N$  est un entier naturel non nul.

Maintenant localement les zéros de  $\Delta_k^{(1)}$  sont les mêmes que ceux de la fonction  $\Delta_{k-1}(x, \lambda) = x^{\alpha_1+1}\omega^2\Delta_k^{(1)}(x, \lambda)$ , on a alors :

$$\begin{aligned} \Delta_{k-1}(x, \lambda) &= \gamma_{kk-1} + \gamma_{kk-2}\frac{1}{\omega} + \cdots + \\ &+ \gamma_{km}\frac{1}{\omega^{k-m-1}}(* + f_{k-1}(x, \lambda)). \end{aligned} \quad (6.18)$$

Ainsi, on définit une suite finie de fonctions  $\Delta_k, \Delta_{k-1}, \Delta_{k-2}, \dots, \Delta_{m+1}$  :

$$\Delta_{m+1}(x, \lambda) = \gamma_{km+1} + \frac{\gamma_{km}}{\omega}(* + f_{m+1}(x, \lambda)). \quad (6.19)$$



Une dernière dérivation nous donne

$$\Delta_{m+1}^{(1)}(x, \lambda) = \gamma_{m1} \frac{x^{-\alpha_1-1}}{\omega^2} (* + f_m(x, \lambda)). \quad (6.20)$$

Alors localement les zéros de l'application  $\Delta_m^{(1)}(x, \lambda)$  sont ceux de l'application

$$\Delta_m(x, \lambda) = x^{\alpha_1+1} \omega^2 \Delta_{m-1}^{(1)}(x, \lambda) = \gamma_{km}(* + f_m(x, \lambda)).$$

avec  $*$  une fonction du paramètre qui est non nulle pour  $\lambda = 0$  et  $f_m(0, 0) = 0$ .

Il en résulte que localement, comme  $\gamma_{km}(0) \neq 0$ , la fonction  $\Delta_m(x, \lambda)$  est non nulle pour  $(x, \lambda)$  voisins de  $(0, 0)$  dans  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^A$  et  $x \geq 0$ . Par suite,  $\Delta_{m+1}^{(1)}(x, \lambda)$  est non nulle pour  $x$  et  $\lambda$  suffisamment petits.

*Conclusion.* — Le théorème de Rolle nous permet d'affirmer que  $\Delta_{m+1}$  a au plus un zéro pour  $(x, \lambda)$  petit. Donc  $\Delta_{m+2}$  en a au plus 2. Et ainsi de suite, on trouve que  $\delta(x, \lambda)$  a au plus  $[(k(k+3)/2) - m]$  zéros si  $\gamma_{km}(0) \neq 0$ .

## Références

- [C] CHERKAS (L.A.) . — *Structure of a successor function in the neighborhood of a separatrix of a perturbed analytic autonomous system in the plane*, Translated From *Differentsial'nye Uravneniya* 17, n° 3, (March 1981), pp. 469-478.
- [DRR] DUMORTIER (F.), ROUSSARIE (R.) et ROUSSEAU (C.) . — *The 16<sup>th</sup> problem of Hilbert in quadratic fields*, Preprint (1991).
- [FP] FRANÇOISE (J.-P.) et PUGH (C.C.) . — *Keeping track of limit cycles*, Journal of Diff. Eq. 65 (1986), pp. 139-157.
- [M1] MOURTADA (A.) . — *Cyclicité finie des polycycles hyperboliques de champs de vecteurs du plan. Mise sous forme normale*, L.N.M. Proceeding Luminy 1989 (Bifurcations of planar vector fields), ed. J.-P. Françoise et R. Roussarie 1445 (1989), pp. 272-314.
- [M] MOURTADA (A.) . — *Polycycles hyperboliques dégénérés et non triviaux à deux sommets*, à paraître dans J. Differential Equations.
- [R1] ROUSSARIE (R.) . — *A note on finite cyclicity property and Hilbert's 16<sup>th</sup> problem*, Dynamical systems, (proc. Chilean Symp. Valparaiso, 1986), L.N.M., ed. R. Bamon, R. Labarca and J. Palis Jr., Berlin springer 1331 (1988), pp. 161-168.
- [R2] ROUSSARIE (R.) . — *On the number of limit cycles which appear by perturbation of separatrix loop of planar vector fields*, Bol. Soc. Mat. 17, n° 2 (1986), pp. 67-101.
- [R3] ROUSSARIE (R.) . — *Cyclicité finie des lacets et des points cuspidaux*, Nonlinearity 2 (1989), pp. 73-117.
- [S] STERNBERG (S.) . — *On the structure of local homeomorphisms of euclidean n-space III*, American Journal of Math. 81 (1959), pp. 578-604.