ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

JEAN-PAUL BÉZIVIN

Suites d'entiers et fonctions entières arithmétiques

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 6e série, tome 3, nº 3 (1994), p. 313-334

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1994_6_3_3_313_0>

Suites d'entiers et fonctions entières arithmétiques[(*)]

JEAN-PAUL BÉZIVIN[(1)]

RÉSUMÉ. — Soient $f(z)$ une fonction entière d'une variable complexe et $q \in \mathbb{Z}$, $|q| > 1$. On suppose que $f(q^a) \in \mathbb{Z}$, $\forall\, a \in \mathbb{N}$, et que

$$\log|f|(R) \leq \delta \frac{(\log R)^2}{\log|q|}$$

pour tout R assez grand. Si $\delta < 1/4$, un théorème de Gel'fond assure que f est un polynôme.

Dans cet article, nous démontrons des résultats de même nature, avec $\mathbb{N}$ remplacée par une partie infinie A, sous quelques conditions restrictives sur A.

ABSTRACT. — Let $f(z)$ be an entire function of a complex variable, $q \in \mathbb{Z}$, $|q| > 1$. Suppose that $f(q^a) \in \mathbb{Z}$ for all $a \in \mathbb{N}$ and

$$\log|f|(R) \leq \delta \frac{(\log R)^2}{\log|q|}$$

for all sufficiently large R, with $\delta < 1/4$. Then a theorem of Gel'fond asserts that f is a polynomial.

In this paper, we prove some results of the same kind, with $\mathbb{N}$ replaced by an infinite set A, under some restrictive conditions.

1. Introduction

En 1933, Gel'fond [Gel] démontrait le résultat suivant.

THÉORÈME G. — *Soit $f(z)$ une fonction entière d'une variable complexe z ; on pose*

$$|f|(R) = \max\left\{ \left|f(z)\right|,\ |z| \leq R \right\}.$$

(*) Reçu le 15 décembre 92

(1) Université de Caen, Département de Mathématiques, Esplanade de la Paix, F-14032 Caen Cedex (France)

Soit d'autre part, $q \in \mathbb{Z}$ avec $|q| > 1$. On suppose que $f(q^n) \in \mathbb{Z}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et que

$$\log |f|(R) \leq c \frac{(\log R)^2}{\log |q|}$$

pour tout R assez grand, avec $c < 1/4$. Alors f est un polynôme.

Le résultat est le meilleur possible pour l'ordre de croissance et la constante limite, comme le montre Gel'fond par un exemple.

Il y a eu depuis beaucoup d'études sur ce type de questions, tant sur le problème à une variable que sur celui à plusieurs variables correspondant.

Nous renvoyons aux articles [Be], [Bu], [Ge1], [Ge2], [Gr], [GS], [Gu], [Wa] pour des compléments et des références bibliographiques.

Dans cet article, nous nous proposons d'examiner le problème suivant.

PROBLÈME .— *Soit $q \in \mathbb{Z}$ tel que $|q| > 1$ et A une partie infinie de $\mathbb{N}$. On suppose que la fonction $f(z)$ d'une variable complexe z vérifie $f(q^a) \in \mathbb{Z}$ pour tout élément $a \in A$. Donner des conditions sur la croissance de la fonction f pour que ceci entraîne que f soit un polynôme.*

Nous allons voir que, sous certaines conditions sur A, on peut donner une réponse comparable à celle donnée dans le théorème G, qui correspond au cas de $A = \mathbb{N}$, en utilisant la même méthode que celle utilisée par Gel'fond, à savoir la méthode d'interpolation.

Nous aurons besoin de quelques notations.

Les éléments de A rangés par ordre croissant forment une suite que nous noterons $u(n)$, $n \in \mathbb{N}$.

On pose d'autre part :

$$\psi_A(x) = \text{cardinal}\{a \in A \mid a \leq x\}$$

$$\Omega(c, A) = \{z \in \mathbb{N} \mid \exists\ a\,,\ b \in A\,,\ c \geq b \geq a\,,\ z = b - a\}$$

$$\theta(A) = \limsup \frac{1}{x\psi_A(x)} \sum_{\substack{b \in A \\ b \leq x}} \sum_{\substack{a \in A \\ a \leq b}} (b - a)\,.$$

On a $\theta(A) \in [\,0\,,\,\infty\,]$. De même, on pose :

$$\mu(A) = \limsup \frac{1}{x\psi_A(x)} \sum_{\substack{b \in A \\ b \leq x}} b\psi_A(b) \in [\,0\,,\,\infty\,]$$

et enfin

$$\lambda(A) = \limsup \frac{1}{x\psi_A(x)} \sum_{\substack{b\in A\\ b\le x}} b \in [0\,,1]\,.$$

Remarquons tout de suite qu'il est clair que $\mu(A) \geq 1$ pour toute partie infinie A de $\mathbb{N}$. Nous montrerons plus loin que les deux fonctions θ et μ définies sur les parties infinies de $\mathbb{N}$ sont en fait égales, de sorte que l'on a aussi $\theta(A) \geq 1$ pour toute partie infinie de $\mathbb{N}$.

Nous allons démontrer les résultats suivants.

THÉORÈME 1.— *Soient A une partie infinie de $\mathbb{N}$, telle que $\mu(A) < \infty$, et $q \in \mathbb{N}$, $|q| > 1$. On suppose que la fonction entière f d'une variable complexe z vérifie $f(q^a) \in \mathbb{Z}$ pour tout $a \in A$. On suppose qu'il existe une constante δ positive, telle que $\delta < 1$, et que f vérifie*

$$\log|f|(R) \leq \delta(\log R)\psi_A\left(\frac{\log R}{\log|q|}\right)$$

pour tout R assez grand. Alors la fonction f est polynomiale.

Sous les hypothèses du théorème, le résultat est le meilleur possible pour l'ordre de croissance et la constante limite, comme le montre l'exemple de la fonction $g(z) = \prod_{a\in A}(1 - z/q^a)$ qui n'est pas polynomiale, vérifie $g(q^a) = 0 \in \mathbb{Z}$, pour tout $a \in A$, et vérifie l'estimation :

$$\log|g|(R) \leq (\log R)\psi_A\left(\frac{\log R}{\log|q|}\right) + o(\log R)\psi_A\left(\frac{\log R}{\log|q|}\right)\,.$$

COROLLAIRE 2.— *Soient $\alpha \in \mathbb{N}$, $\alpha > 1$, $A = \{\alpha^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ et $q \in \mathbb{Z}$, $|q| > 1$. Soit $f(x)$ une fonction entière d'une variable complexe, telle que l'on ait $f(q^{\alpha^n}) \in \mathbb{Z}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et telle que*

$$\log|f|(R) \leq \delta(\log R)\frac{\log\log R}{\log\alpha}$$

avec $\delta < 1$ pour tout R assez grand. Alors f est un polynôme, et le résultat est le meilleur possible pour l'ordre de croissance et la constante limite.

Remarque.— L'exemple de $A = \bigcup_{n\geq 1}[\,2^{n^2}\,,\,2^{n^2}+n\,[$, où l'on vérifie que $\mu(A) = +\infty$, montre qu'il ne suffit pas que la suite $u(n)$ tende vers l'infini rapidement pour que la condition du théorème 1 sur A soit satisfaite. On a dans cet exemple $u(n) = 4^{n+c_1(n)\sqrt{n}+c_2(n)}$, avec $c_1(n)$ et $c_2(n)$ suites bornées quand n tend vers l'infini.

COROLLAIRE 3.— *Soient* $A = \{n! \mid n \in \mathbb{N}\}$, $q \in \mathbb{N}$, $|q| > 1$ *et* $f(z)$ *une fonction entière d'une variable complexe telle que* $f(q^a) \in \mathbb{Z}$ *pour tout* $a \in A$. *On suppose que*

$$\log |f|(R) \leq \delta \log R \frac{\log \log R}{\log \log \log R}$$

avec $\delta < 1$ *pour tout* R *assez grand. Alors* $f(z)$ *est un polynôme, et le résultat est le meilleur possible pour l'ordre de croissance et la constante limite.*

THÉORÈME 4.— *On suppose que la partie* A *vérifie la condition suivante : il existe* $\alpha \in \,]0\,,1[$ *et* $\beta > 0$ *tels que*

$$\psi_A(x) = \beta x^\alpha + o(x^\alpha)\,.$$

Soient $f(x)$ *une fonction entière d'une variable complexe et* $q \in \mathbb{Z}$, $|q| > 1$. *On suppose que* $f(q^a) \in \mathbb{Z}$ *pour tout* $a \in A$ *et que, pour tout* R *assez grand :*

$$\log |f|(R) \leq \delta \frac{(\log R)^{2/(2-\alpha)}}{(\log |q|)^{\alpha/(2-\alpha)}}$$

avec

$$\delta < \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \left(\frac{\alpha\beta}{\varepsilon(A)}\right)^{\alpha/(2-\alpha)},$$

où $\varepsilon(A) = 2$ *ou* 1 *suivant que l'équation* $x + y = 2z$ *a une solution avec* x, y, $z \in A$ *et* $y > z > x$ *ou non.*

Alors $f(x)$ *est un polynôme.*

COROLLAIRE 5.— *Soient* $s \in \mathbb{N}$ *tel que* $s \geq 2$, *et* P_s *la partie de* $\mathbb{N}$ *formée des puissances s-ièmes des éléments de* $\mathbb{N}$. *Soit* $q \in \mathbb{Z}$, $|q| > 1$. *Soit* $f(z)$ *une fonction entière d'une variable complexe, on suppose que* $f(q^a) \in \mathbb{Z}$ *pour tout* $a \in P_s$. *Si* $f(z)$ *vérifie l'estimation :*

$$\log |f|(R) \leq \delta \frac{(\log R)^{2s/(2s-1)}}{(\log |q|)^{1/(2s-1)}}$$

pour tout R *assez grand, et si on a :*

$$\delta < \frac{2s-1}{2s} \left(\frac{1}{s\varepsilon(P_s)}\right)^{1/(2s-1)}$$

alors, $f(z)$ *est un polynôme.*

Remarque 1.— Tout d'abord, il est peu probable que le résultat soit le meilleur possible, tant pour l'ordre de croissance que pour la constante limite. On devrait pouvoir prendre dans le théorème 4 comme condition sur la croissance

$$\log|f|(R) \leq \delta \frac{(\log R)^{1+\alpha}}{(\log|q|)^{\alpha}}$$

pour une constante δ convenable et pour tout R assez grand.

Nous montrerons à la fin de la section 4 que la méthode d'interpolation ne semble pas pouvoir donner le meilleur résultat que l'on puisse espérer.

Remarque 2.— La présence du terme $\varepsilon(P_s)$ est une curiosité. Pour $s = 2$, l'égalité $1^2 + 7^2 = 2 \cdot 5^2$ montre que $\varepsilon(P_s) = 2$. Pour $s \geq 3$, déterminer $\varepsilon(P_s)$ est simplement dire si l'équation $x^s + y^s = 2z^s$ a ou non uniquement les solutions triviales (x, x, x) dans $\mathbb{N}$, et donc résoudre un problème de type Fermat. Voir [De] et [Ga] pour des valeurs de s telles que $\varepsilon(P_s) = 1$

Remarquons aussi que, dans le cas général, dire $\varepsilon(A) = 2$ revient à affirmer l'existence dans A d'une progression arithmétique de trois termes.

Nous ne savons pas si ce facteur est nécessaire dans le cas général.

THÉORÈME 6.— *Soit A une partie de $\mathbb{N}$. On suppose que A vérifie la condition :*

$$\psi_A(x) = \beta x + o(x)$$

avec $\beta \in \,]0\,,1]$.

Soient $f(z)$ une fonction entière d'une variable complexe, et $q \in \mathbb{Z}$, $|q| > 1$. On suppose que $f(q^a) \in \mathbb{Z}$ pour tout $a \in A$ et que

$$\log|f|(R) \leq \delta \frac{(\log R)^2}{\log|q|}$$

avec $\delta < \beta^2/2(1+\beta)$ pour tout R assez grand.

Alors $f(z)$ est un polynôme.

COROLLAIRE 7.— *Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > 1$ et $A = \{[\lambda n] \mid n \in \mathbb{N}\}$ où on a noté $[x]$ la partie entière du réel x. Soient $f(z)$ une fonction entière d'une variable complexe et $q \in \mathbb{Z}$, $|q| > 1$. On suppose que la fonction $f(z)$ vérifie $f(q^{[\lambda n]}) \in \mathbb{Z}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et que l'on a la majoration :*

$$\log|f|(R) \leq \delta \frac{(\log R)^2}{\log|q|}$$

avec $\delta < 1/2\lambda(\lambda+1)$ *pour tout* R *assez grand.*

Alors $f(z)$ *est un polynôme.*

COROLLAIRE 8.— *Soient* A *une partie de* $\mathbb{N}$ *de densité arithmétique* 1 *et* $f(z)$ *une fonction entière d'une variable complexe. Soit* $q \in \mathbb{Z}$, $|q| > 1$. *On suppose que* $f(q^a) \in \mathbb{Z}$ *pour tout* $a \in A$, *et que*

$$\log |f|(R) \leq \delta \frac{(\log R)^2}{\log |q|}$$

avec $\delta < 1/4$ *pour tout* R *assez grand.*

Alors $f(z)$ *est un polynôme, et ce résultat est le meilleur possible pour l'ordre de croissance et la constante limite.*

Remarque 1.— Nous revenons sur le corollaire 7. Pour $\lambda \in \mathbb{N}$, $\lambda \geq 2$, la condition arithmétique sur $f(z)$ s'écrit $f(q^{\lambda n}) \in \mathbb{Z}$. On voit donc que l'on est dans les conditions d'application du théorème G avec q^λ à la place de q.

Par suite, la constante limite serait dans ce cas particulier $1/4\lambda$ et non pas $1/2\lambda(1+\lambda)$. Nous ne savons pas quelle est la meilleure constante possible pour δ dans le cas général.

Remarque 2.— Le corollaire 8 est une légère amélioration du théorème G.

Remarque 3.— Dans toute la suite, nous utilisons la convention qu'une somme sur un ensemble vide d'indices est nulle, et qu'un produit sur un ensemble vide d'indices est égal à 1.

2. Résultats préliminaires généraux

On note dans toute la suite $b(n)$ le n-ième coefficient d'interpolation de la fonction entière $f(z)$ sur la suite $q^{u(n)}$.

Les résultats suivants sont bien connus.

LEMME 2.1.— *Le coefficient* $b(n)$ *est donné par les deux expressions suivantes :*

i) $b(n) = \dfrac{1}{2i\pi} \displaystyle\int_{|z|=R} \frac{f(z)}{\prod_{j=0}^{n}(z - q^{u(j)})} \, dz$ *pour tout* $R > |q|^{u(n)}$;

$$ii)\ b(n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f(q^{u(k)})}{\prod_{j\neq k,\,0\leq j\leq n}\left(q^{u(k)} - q^{u(j)}\right)} .$$

Démonstration. — Voir [Ge1].

LEMME 2.2. — *On a la formule suivante :*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} b(k) \prod_{j=0}^{k-1} \left(x - q^{u(j)}\right) +$$
$$+ \frac{1}{2i\pi} \prod_{j=0}^{n} \left(x - q^{u(j)}\right) \int_{|z|=R} \frac{f(z)}{(z-x)\prod_{j=0}^{n}\left(z - q^{u(j)}\right)}\, \mathrm{d}z ,$$

pour $x \in \mathbb{C}$ *et* $R > \max\{|x|,\ |q|^{u(n)}\}$.

Démonstration. — Voir [Ge1].

LEMME 2.3. — *Soit* $c \in A$. *On considère pour* $a \in A$, $a \leq c$, *les polynômes*

$$P_{a,c}(x) = \prod_{b\in A, b\neq a, b\leq c} \left(x^{|b-a|} - 1\right) .$$

On pose d'autre part $\varepsilon(A) = 2$ *ou* 1 *suivant que l'équation* $x + y = 2z$ *admet des solutions avec* x, y, $z \in A$ *et* $y > z > x$ *ou non.*

Alors le polynôme $Q_c(x) = \prod_{m\in\Omega(c,A)}\left(x^m - 1\right)^{\varepsilon(A)}$ *est un multiple de tous les* $P_{a,c}$.

Démonstration. — On fixe a, $c \in A$ avec $a \leq c$. On utilise la formule $x^h - 1 = \prod_{k|h} \Phi_k(x)$, où $\Phi_k(x)$ est le k-ième polynôme cyclotomique, pour décomposer les $P_{a,c}(x)$ en facteurs irréductibles sur $\mathbb{Z}[x]$.

Soit $d \in \mathbb{N}^*$ fixé. L'exposant de $\Phi_d(x)$ dans $P_{a,c}(x)$ est égal au cardinal de l'ensemble $\{b \in A \mid b \leq c,\ b \neq a,\ d \text{ divise } |b-a|\}$. Les $b - a$ (pour $\{b \in A,\ a < b \leq c\}$) sont tous distincts, de même que les $a - b$ (pour $\{a > b,\ b \in A\}$) et ces entiers sont tous dans $\Omega(c, A)$. Donc, dans l'expression de $P_{a,c}$ seuls apparaissent des facteurs du type $x^h - 1$, avec $h \in \Omega(c, A)$, et avec un exposant au plus 2. Plus précisément, ces facteurs n'apparaissent qu'avec l'exposant 1, sauf si l'équation $x + y = 2z$ a une solution (x, y, z) dans A^3 avec $y > z > x$. Comme l'exposant de $\Phi_d(x)$ dans $Q_c(x)$ est $\varepsilon(A)$ multiplié par le cardinal de l'ensemble des $m \in \Omega(c, A)$ tels que d divise m, le lemme en résulte.

Lemme 2.4. — *Un multiple commun dans $\mathbb{Z}$ des nombres entiers*

$$\prod_{j\neq k,\, 0\leq j\leq n} \left(q^{u(k)} - q^{u(j)}\right) = \prod_{b\in A,\, b\neq a,\, b\leq c} \left(q^{a} - q^{b}\right),$$

où on a posé $a = u(k)$ et $c = u(n)$, k variant entre 0 et n, est donné par $q^{\sum_{b\in A,\, b<c} b} Q_c(q)$.

Démonstration. — On a :

$$\prod_{\substack{b\in A\\ b\neq a,\, b\leq c}} \left(q^{a} - q^{b}\right) = \pm q^{(\psi_A(c)-\psi_A(a))a+\sum_{b\in A,\, b<a} b} \prod_{\substack{b\in A\\ b\neq a,\, b\leq c}} \left(q^{|b-a|} - 1\right).$$

Cette quantité est donc égale à

$$\pm q^{(\psi_A(c)-\psi_A(a))a+\sum_{b\in A,\, b<a} b} P_{a,c}(q).$$

On voit facilement que la somme $(\psi_A(c)-\psi_A(a))a+\sum_{b\in A,\, b<a} b$ est toujours inférieure ou égale à $\sum_{b\in A,\, b<c} b$. Le lemme 2.3 montre que $P_{a,c}(q)$ divise $Q_c(q)$, d'où le résultat.

Lemme 2.5. — *Soit $c(n) = q^{\sum_{j<n} u(j)} Q_{u(n)}(q)$. On a alors l'estimation :*

$$\log\left|c(n)\right| \leq \left(\varepsilon(A) \sum_{m\in\Omega(u(n),A)} m + \sum_{\substack{a\in A\\ a\leq u(n)}} a\right) \log|q| + O(1).$$

Démonstration. — On a :

$$Q_u(n)(q) = \prod_{m\in\Omega(u(n),A)} \left(q^{m} - 1\right)^{\varepsilon(A)}.$$

Donc on a :

$$\left|Q_{u(n)}(q)\right| \leq |q|^{\varepsilon(A)\sum_{m\in\Omega(u(n),A)} m} \prod_{m\in\Omega(u(n),A)} \left(1 + \frac{1}{|q|^{m}}\right)^{2}.$$

La série de terme général $1/|q|^{n}$ étant convergente, le lemme en résulte immédiatement.

3. Preuve du théorème 1 et des corollaires 2 et 3

Dans toute cette section, nous supposons que les hypothèses du théorème 1 sont réalisées. Nous aurons besoin de quelques résultats auxiliaires.

LEMME 3.1. — *Les deux fonctions θ et μ, définies sur les parties infinies de $\mathbb{N}$, sont égales. De plus, si la partie A est telle que $\theta(A) = \mu(A)$ est une quantité finie alors $\lambda(A) = 0$.*

Démonstration. — Tout d'abord, on a :

$$\sum_{\substack{b\in A\\ b\leq x}} \sum_{\substack{a\in A\\ a\leq b}} (b-a) \leq \sum_{\substack{b\in A\\ b\leq x}} \sum_{\substack{a\in A\\ a\leq b}} b = \sum_{\substack{b\in A\\ b\leq x}} b\psi_A(b)\,.$$

on en déduit immédiatement que

$$\theta(A) \leq \mu(A)$$

et ceci pour toute partie de $\mathbb{N}$.

Soient d un élément de A et x un réel plus grand que d. On a :

$$\sum_{\substack{b\in A\\ b\leq x}} \sum_{\substack{a\in A\\ a\leq b}} (b-a) = \sum_{\substack{b\in A\\ d<b\leq x}} \sum_{\substack{a\in A\\ a\leq b}} (b-a) + \sum_{\substack{b\in A\\ b\leq d}} \sum_{\substack{a\in A\\ a\leq b}} (b-a)\,.$$

Donc :

$$\sum_{\substack{b\in A\\ b\leq x}} \sum_{\substack{a\in A\\ a\leq b}} (b-a) \geq \sum_{\substack{b\in A\\ d<b\leq x}} \sum_{\substack{a\in A\\ a\leq d}} (b-a) + \sum_{\substack{b\in A\\ b\leq d}} \sum_{\substack{a\in A\\ a\leq b}} (b-a)$$

Soit encore :

$$\sum_{\substack{b\in A\\ b\leq x}} \sum_{\substack{a\in A\\ a\leq b}} (b-a) \geq \psi_A(d) \sum_{\substack{b\in A\\ b\leq x}} b - \psi_A(x) \sum_{\substack{a\in A\\ a\leq d}} a + \sum_{\substack{b\in A\\ b\leq d}} \sum_{\substack{a\in A\\ a\leq b}} (b-a)$$

On divise cette inégalité par $x\psi_A(x)$, on fait tendre x vers l'infini en laissant d fixé, et on obtient

$$\theta(A) \geq \psi_A(d)\lambda(A)\,.$$

Compte tenu de ce qui précède, on a donc

$$\mu(A) \geq \theta(A) \geq \psi_A(d)\lambda(A)$$

et ceci pour toute valeur de $d \in A$. Supposons $\lambda(A) > 0$. Comme $\psi_A(d)$ tend vers l'infini quand d tend vers l'infini en restant dans A. Il en résulte que l'on a $\theta(A) = \mu(A) = +\infty$ dans ce cas.

Nous supposons maintenant que $\lambda(A) = 0$. Soit ε un réel positif. Puisque $\lambda(A) = 0$, il existe un réel x_0 tel que, pour tout $x > x_0$, on ait

$$\sum_{\substack{a \in A \\ a \leq x}} a < \varepsilon x \psi_A(x) .$$

On a :

$$\sum_{\substack{b \in A \\ b \leq x}} \sum_{\substack{a \in A \\ a \leq b}} a = \sum_{\substack{b \in A \\ b \leq x_0}} \sum_{\substack{a \in A \\ a \leq b}} a + \sum_{\substack{b \in A \\ x_0 < b \leq x}} \sum_{\substack{a \in A \\ a \leq b}} a$$

Donc

$$\sum_{\substack{b \in A \\ b \leq x}} \sum_{\substack{a \in A \\ a \leq b}} a \leq \sum_{\substack{b \in A \\ b \leq x_0}} \sum_{\substack{a \in A \\ a \leq b}} a + \varepsilon \sum_{\substack{b \in A \\ x_0 < b \leq x}} b\psi_A(b)$$

ce qui entraîne :

$$\sum_{\substack{b \in A \\ b \leq x}} \sum_{\substack{a \in A \\ a \leq b}} a \leq \sum_{\substack{b \in A \\ b \leq x_0}} \sum_{\substack{a \in A \\ a \leq b}} a + \varepsilon \sum_{\substack{b \in A \\ b \leq x}} b\psi_A(b)$$

Comme $\sum_{b \in A,\, b \leq x} b\psi_A(b)$ tend vers l'infini avec x, on en déduit que

$$\limsup \frac{\sum_{b \in A,\, b \leq x} \sum_{a \in A,\, a \leq b} a}{\sum_{b \in A,\, b \leq x} b\psi_A(b)} \leq \varepsilon .$$

Par suite

$$\frac{\sum_{b \in A,\, b \leq x} \sum_{a \in A,\, a \leq b} a}{\sum_{b \in A,\, b \leq x} b\psi_A(b)}$$

tend vers zéro si x tend vers l'infini.

On a maintenant l'égalité :

$$\sum_{\substack{b \in A \\ b \leq x}} \sum_{\substack{a \in A \\ a \leq b}} (b - a) = \sum_{\substack{b \in A \\ b \leq x}} b\psi_A(b) - \sum_{\substack{b \in A \\ b \leq x}} \sum_{\substack{a \in A \\ a \leq b}} a .$$

Ce qui précède montre que $\sum_{b\in A,\, b\leq x}\sum_{a\in A,\, a\leq b}(b-a)$ est équivalent à $\sum_{b\in A,\, b\leq x} b\psi_A(b)$ quand x tend vers l'infini. Il en résulte $\theta(A) = \mu(A)$ comme annoncé.

Enfin, les inégalités

$$\mu(A) \geq \theta(A) \geq \psi_A(d)\lambda(A)$$

et le fait que $\psi_A(d)$ tend vers l'infini si d tend vers l'infini montrent que, si $\theta(A) = \mu(A)$ est fini, on a $\lambda(A) = 0$, ce qui termine la démonstration du lemme.

LEMME 3.2. — *On suppose les hypothèses du théorème 1 vérifiées. Soit λ une constante telle que $\lambda > 1$. La quantité $c(n) = q^{\sum_{j<n} u(j)} Q_{u(n)}(q)$ du lemme 2.5 vérifie la majoration :*

$$\log\left|c(n)\right| \leq \lambda\varepsilon(A)\theta(A)nu(n)\log|q|$$

pour tout n assez grand.

Démonstration. — Par définition de $\Omega(c,A)$, on a :

$$\sum_{m\in\Omega(c,A)} m \leq \sum_{\substack{b\in A\\ b<c}}\sum_{\substack{a\in A\\ a<b}}(b-a)$$

de sorte que le lemme 2.5 donne l'estimation :

$$\log\left|c(n)\right| \leq \varepsilon(A)\left(\sum_{\substack{b\in A\\ b\leq u(n)}}\sum_{\substack{a\in A\\ a<b}}(b-a) + \sum_{\substack{a\in A\\ a<u(n)}} a\right)\log|q| + O(1)\,.$$

Comme $1 \leq \theta(A) < +\infty$ et que $\lambda > 1$, on a pour tout n assez grand,

$$\sum_{\substack{b\in A\\ b\leq u(n)}}\sum_{\substack{a\in A\\ a<b}}(b-a) \leq \lambda\theta(A)nu(n)\,.$$

D'autre part, $\big(1/nu(n)\big)\sum_{a\in A,\, a\leq u(n)} a$ tend vers zéro si n tend vers l'infini, d'après le lemme 3.1. D'où l'assertion (nous avons utilisé ici et utiliserons souvent plus tard le fait que $\psi_A\big(u(n)\big) = n+1$ est équivalent à n).

LEMME 3.3.— *On suppose les hypothèses du théorème 1 vérifiées. On a l'estimation suivante pour le n-ième coefficient d'interpolation de la fonction* $f(z)$ *sur la suite* $q^{u(n)}$ *: pour tout* $\theta > 1$ *et tout* $\delta' > \delta$*, on a :*

$$\log\big|b(n)\big| \leq -\theta(1-\delta')nu(n)\log|q|$$

pour tout n assez grand.

Démonstration.— On utilise la formule i) du lemme 2.1, d'où l'estimation :

$$\log\big|b(n)\big| \leq \log|f|(R) - \sum_{j=0}^{n} \log\big(R - |q|^{u(j)}\big) + \log R$$

pour $R > |q|^{u(n)}$. Soit $\theta > 1$ fixé, et posons $c = u(n)$. On choisit de prendre $R = |q|^{\theta c}$. Il vient

$$\log\big|b(n)\big| \leq \log|f|\big(|q|^{\theta c}\big) - \theta c\psi_A(c)\log|q| - \sum_{\substack{a\in A\\ a\leq c}} \log\left(1 - \frac{1}{|q|^{\theta c - a}}\right) + O(c)\,.$$

Du fait que $\theta c - a \geq (\theta-1)a$ et que la série de terme général $1/|q|^{(\theta-1)a}$ indexée par les $a \in A$ est convergente, on déduit que :

$$\log\big|b(n)\big| \leq \log|f|\big(|q|^{\theta c}\big) - \theta c\psi_A(c)\log|q| + O(c)\,.$$

Par suite, on a en utilisant l'hypothèse sur la croissance de f :

$$\log\big|b(n)\big| \leq \delta\theta c\psi_A(\theta c)\log|q| - \theta c\psi_A(c)\log|q| + O(c)\,.$$

Il nous faut comparer $\psi_A(c)$ et $\psi_A(\theta c)$.

Soit $\varepsilon > 0$ que nous prendrons assez petit ($\theta\varepsilon < 1$). D'après les hypothèses du théorème et le lemme 3.1, il existe un x_0 tel que $c > x_0$ implique

$$\frac{1}{c\psi_A(c)} \sum_{\substack{a\in A\\ a\leq c}} a < \varepsilon\,.$$

Il en résulte, pour $c > x_0$,

$$\varepsilon\theta c\psi_A(\theta c) \geq \sum_{\substack{a\in A\\ c<a\leq\theta c}} a\,.$$

Donc :

$$\varepsilon\theta c\psi_A(\theta c) \geq c\big(\psi_A(\theta c) - \psi_A(c)\big)$$

et finalement

$$\psi_A(\theta c) \leq \frac{1}{1-\theta\varepsilon}\,\psi_A(c)\,.$$

Il en résulte donc que

$$\log\big|b(n)\big| \leq -\theta\left(1 - \frac{\delta}{1-\theta\varepsilon}\right) c\psi_A(c)\log|q| + o\big(c\psi_A(c)\big)\,.$$

On choisit alors ε assez petit pour avoir le résultat annoncé.

LEMME 3.4. — *Sous les hypothèses du théorème 1, la fonction f est somme de sa série d'interpolation aux points de la suite $q^{u(n)}$, $n \in \mathbb{N}$.*

Démonstration. — Le lemme 2.2 donne :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} b(k)\prod_{j=0}^{k-1}\big(x - q^{u(j)}\big) +$$
$$+\frac{1}{2i\pi}\prod_{j=0}^{n}\big(x - q^{u(j)}\big)\int_{|z|=R}\frac{f(x)}{(z-x)\prod_{j=0}^{n}\big(z - q^{u(j)}\big)}\,\mathrm{d}z\,.$$

Il suffit donc de montrer que :

$$R_n(x) = \frac{1}{2i\pi}\prod_{j=0}^{n}\big(x - q^{u(j)}\big)\int_{|z|=R}\frac{f(z)}{(z-x)\prod_{j=0}^{n}\big(z - q^{u(j)}\big)}\,\mathrm{d}z$$

admet pour limite zéro si n tend vers l'infini pour un choix convenable de $R = R(n) > \max\big(|x|\,,\,|q|^{u(n)}\big)$.

On a la majoration :

$$\big|R_n(x)\big| \leq \prod_{j=0}^{n}\big(|x| - |q|^{u(j)}\big)\frac{R|f|(R)}{(R-|x|)\prod_{j=0}^{n}\big(R - q^{u(j)}\big)}\,,$$

d'où on déduit que :

$$\log\big|R_n(x)\big| \leq \left(\sum_{j=0}^{n} u(j)\right)\log|q| + \log|f|(R) - (n+1)\log R +$$
$$-\sum_{j=0}^{n}\log\left(1 - \frac{|q|^{u(j)}}{R}\right) + O(1)\,.$$

On choisit encore $R = |q|^{\theta u(n)}$ avec $\theta > 1$. Il vient en posant $c = u(n)$:

$$\log\left|R_n(x)\right| \leq \left(\sum_{a\in A,\, a\leq c} a\right) \log|q| + \theta\delta c\psi_A(\theta c)\log|q| + \\ - \theta c\psi_A(c)\log|q| + O(1)\,.$$

En procédant comme dans la démonstration du lemme 3.3, il vient :

$$\log\left|R_n(x)\right| \leq -\theta\left(1 - \frac{\delta}{1-\theta\varepsilon}\right) c\psi_A(c)\log|q| + o\big(c\psi_A(c)\big)\,,$$

et le résultat suit en choisissant ε suffisamment petit.

Preuve du théorème 1

En raison du lemme 3.4, il suffit de démontrer que les coefficients d'interpolation $b(n)$ sont nuls pour tout n assez grand.

Soit $c(n)$ la quantité introduite dans le lemme 2.5. D'après le lemme 3.2, on a l'estimation :

$$\log|c_n| \leq \lambda\varepsilon(A)\theta(A)nu(n)\log|q|$$

pour tout n assez grand. De même, le lemme 3.3 donne :

$$\log\left|b(n)\right| \leq -\theta(1-\delta')nu(n)\log|q|$$

pour tout n assez grand. On a donc :

$$\log\left|b(n)c_n\right| \leq \big(\lambda\varepsilon(A)\theta(A) - \theta(1-\delta')\big)nu(n)\log|q|$$

pour tout n assez grand. On choisit un $\lambda > 1$, puis un θ assez grand pour que le coefficient $\lambda\varepsilon(A)\theta(A) - \theta(1-\delta')$ soit négatif. Alors $b(n)c_n$ tend vers zéro si n tend vers l'infini.

Comme le lemme 2.4 et la formule ii) du lemme 2.1 montrent que cette quantité est entière, il en résulte qu'elle est nulle à partir d'un certain rang. C'est ce qui prouve que $f(z)$ est un polynôme et qui termine la démonstration. □

Démonstration du corollaire 2

Nous allons vérifier que les hypothèses du théorème 1 sont bien satisfaites. On a dans ce cas $\psi_A(x) \sim \log x / \log \alpha$. La somme $\sum_{b \in A,\, b \leq x} b\psi_A(b)$ est égale à

$$\sum_{k \leq \log x / \log \alpha} (k+1)\alpha^k$$

quantité qui est inférieure à

$$\left(1 + \frac{\log x}{\log \alpha}\right) \alpha^{\log x / \log \alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^{-k} \leq M x \log x \,,$$

où M est une constante, d'où le résultat. □

Preuve du corollaire 3

On a, compte tenu de la formule de Stirling

$$\log n! = n \log n - n + \frac{1}{2} \log n + O(1) \,,$$

l'estimation $\psi_A(x) \sim \log x / \log\log x$. On a :

$$\sum_{k \leq n} k!\,(k+1) \leq 1 + 2 \sum_{k=1}^{n} k!\,k \leq 2(n+1)! \,,$$

inégalité qui se vérifie aussi immédiatement par récurrence.

Comme $n!\,\psi_A(n!) = (n+1)!$, on voit donc que les hypothèses du théorème 1 sont vérifiées. □

4. Cas des ensembles A de type polynomial

Dans toute cette section, nous supposons que la partie A satisfait à la condition :

$$\psi_A(x) = \beta x^{\alpha} + o(x^{\alpha})$$

avec $\alpha \in \,]\,0\,,\,1\,[\,$, $\beta > 0$. Nous allons démontrer des résultats analogues à ceux démontrés dans la section 3.

Lemme 4.1. — *Soit* $c_n = q^{\sum_{j=0}^{n} u(j)} Q_{u(n)}(q)$. *On a alors la majoration :*

$$\log |c_n| \leq \frac{\varepsilon(A)}{2} u(n)^2 \log |q| + o\big(u(n)^2\big) .$$

Démonstration. — Posons $c = u(n)$. Le lemme 2.5 donne

$$\log(c_n) \leq \left(\varepsilon(A) \sum_{m \in \Omega(c,A)} m + \sum_{a \in A,\, a \leq c} a \right) \log |q| + O(1) .$$

On a

$$\sum_{m \in \Omega(c,A)} m \leq \frac{c^2 + c}{2}$$

car l'ensemble $\Omega(c, A)$ est inclus dans $\{0, 1, \ldots, c\}$. D'autre part, on a

$$\sum_{\substack{a \in A \\ a \leq c}} a \leq c \psi_A(c) = o(c^2) ,$$

d'où le résultat.

Lemme 4.2. — *On suppose que la fonction entière d'une variable complexe $f(z)$ vérifie l'inégalité :*

$$\log |f|(R) \leq \delta \frac{(\log R)^{2/(2-\alpha)}}{(\log |q|)^{\alpha/(2-\alpha)}}$$

pour tout R assez grand, avec $\delta > 0$. Soit θ un réel supérieur à 1. On a alors :

$$\log\big|b(n)\big| \leq \big(\delta \theta^{2/(2-\alpha)} - \theta \beta\big) u(n)^2 \log |q| + o\big(u(n)^2\big) .$$

Démonstration. — On utilise la formule i) du lemme 2.1, d'où l'estimation :

$$\log\big|b(n)\big| \leq \log |f|(R) - \sum_{j=0}^{n} \log\big(R - |q|^{u(j)}\big) + \log R$$

pour $R > |q|^{u(n)}$. Soit $\theta > 1$. On choisit $R = |q|^{\theta u(n)^{2-\alpha}}$. On a bien $R > |q|^{u(n)}$ et il vient :

$$\log\big|b(n)\big| \leq \delta\theta^{2/(2-\alpha)} u(n)^2 \log|q| - \theta n u(n)^{2-\alpha} \log|q| + o\big(u(n)^2\big)\,.$$

On termine la démonstration en remarquant que l'on a :

$$\psi_A\big(u(n)\big) = n+1 = \beta u(n)^\alpha + o\big(u(n)^\alpha\big)\,.$$

LEMME 4.3.— *Soit $f(z)$ une fonction entière d'une variable complexe. On suppose que l'on a l'inégalité :*

$$\log|f|(R) \leq \delta \frac{\big(\log R\big)^{1+\alpha}}{\big(\log|q|\big)^{\alpha}}$$

avec $\delta < 1/(1+\alpha)$ pour tout R assez grand. Alors $f(z)$ est somme de la série d'interpolation aux points de sa suite $q^{u(n)}$, $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration.— Il suffit de démontrer que le reste $R_n(x)$ (défini dans la preuve du lemme 3.4) tend vers zéro si n tend vers l'infini. On a la majoration (déjà vue dans le lemme 3.4) :

$$\big|R_n(x)\big| \leq \prod_{j=0}^{n} \big(|x| + |q|^{u(j)}\big) \frac{R|f|(R)}{\big(R - |x|\big)\prod_{j=0}^{n}\big(R - |q|^{u(j)}\big)}\,.$$

On en déduit que $\log\big|R_n(x)\big|$ est inférieur ou égal à

$$\left(\sum_{j=0}^{n} u(j)\right)\log|q| + \beta\delta(\log R)\left(\frac{\log R}{\log|q|}\right)^{\alpha} +$$
$$- (n+1)\log R - \sum_{j=0}^{n}\log\left(1 - \frac{|q|^{u(j)}}{R}\right) + O(1)\,.$$

On choisit de prendre $R = |q|^{\eta u(n)}$ avec $\eta > 1$. D'où la majoration :

$$\log\big|R_n(x)\big| \leq \left(\sum_{j=0}^{n} u(j)\right)\log|q| +$$
$$+ \beta\delta\eta^{1+\alpha} u(n)^{1+\alpha}\log|q| - n\eta u(n)\log|q| + O(1)\,.$$

On a $u(n) = (n/\beta)^{1/\alpha} + o(n^{1/\alpha})$, d'où on tire

$$\log\left|R_n(x)\right| \leq \left(\frac{\alpha}{1+\alpha} + \delta\eta^{1+\alpha} - \eta\right) n^{1+1/\alpha}\frac{\log|q|}{\beta^{1/\alpha}} + o(n^{1+1/\alpha}).$$

On choisit $\eta = \big(1/\delta(1+\alpha)\big)^{1/\alpha} > 1$, d'où

$$\log\left|R_n(x)\right| \leq -\frac{\alpha}{1+\alpha}(\eta-1)\eta^{1+1/\alpha}\frac{\log|q|}{\beta^{1/\alpha}} + o(n^{1+1/\alpha}),$$

et le résultat en découle.

LEMME 4.4.— *Sous les hypothèses du lemme 4.2, on a* $b(n) = 0$ *pour* n *assez grand si*

$$\delta < \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\beta\left(\frac{\alpha\beta}{\varepsilon(A)}\right)^{\alpha/(2-\alpha)}.$$

Démonstration.— On a :

$$\log\left|b(n)c_n\right| \leq \left(\frac{\varepsilon(A)}{2} + \delta\theta^{2/(2-\alpha)} - \theta\beta\right) u(n)^2 \log|q| + o\big(u(n)^2\big)$$

par les lemmes 4.1 et 4.2. On choisit de prendre

$$\theta = \left(\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\frac{\beta}{\delta}\right)^{(2-n)/\alpha}.$$

Il vient alors

$$\log\left|b(n)c_n\right| \leq \frac{\varepsilon(A) - \alpha\beta\theta}{2}\, u(n)^2 + o\big(u(n)^2\big),$$

et on a $\varepsilon(A) - \alpha\beta\theta > 0$ car

$$\left(\frac{\varepsilon(A)}{\beta\delta}\right)^{\alpha/(2-\alpha)} < \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\frac{\beta}{\delta}.$$

Donc encore une fois $b(n)c_n$ tend vers zéro et, étant entier, est donc nul à partir d'un certain rang.

Démonstration du théorème 4

Le résultat est immédiat à partir des lemmes qui précèdent, en tenant compte du fait que $1+\alpha > 2/(2-\alpha)$ puisque $\alpha \in \,]0, 1[$. □

Démonstration du corollaire 5

Elle est immédiate. En effet, on voit tout de suite que l'on a $\psi_{P_s}(x) = x^{1/s}+o(x^{1/s})$, donc les hypothèses du théorème 3 sont vérifiées avec $\alpha = 1/s$ et $\beta = 1$.

Montrons maitenant, comme énoncé dans l'introduction, que la méthode ne semble pas pouvoir donner de meilleurs résultats.

Nous allons pour cela nous limiter à considérer le cas de P_2, c'est-à-dire le cas de l'ensemble des carrés d'éléments de $\mathbb{N}$. Posons :

$$\prod_{\substack{j \neq k \\ j \leq n}} \left(x^{|j^2-k^2|} - 1\right) = \prod_{d} \Phi_d(x)^{\theta(k,d,n)} .$$

Soit B l'ensemble des entiers qui sont de la forme p_1p_2 avec p_1 et p_2 premiers impairs, vérifiant $p_1 \leq n$, $p_2 \leq n$. Montrons que pour tout $d \in B$, il existe au moins un indice k et un indice j tels que l'on ait d divise $j^2 - k^2$. Il suffit pour cela de prendre $j = (p_1 + p_2)/2$ et $k = (p_1 - p_2)/2$ en supposant que $p_1 \geq p_2$. Notons φ l'indicateur d'Euler. Le degré du plus petit commun multiple des polynômes

$$\prod_{\substack{j \neq k \\ j \leq n}} \left(x^{|j^2-k^2|} - 1\right)$$

est donc au moins

$$\sum_{3 \leq p_2 \leq p_1 \leq n} \varphi(p_1p_2) \geq \frac{8}{15} \sum_{3 \leq p_2 \leq p_1 \leq n} p_1p_2 .$$

Compte tenu de

$$\sum_{p \leq x} p \geq c_1 \frac{x^2}{\log x}$$

où $c_1 > 0$, le degré du plus petit commun multiple des polynômes ci-dessus quand k varie est au moins $c_2\left(n^4/(\log n)^2\right)$. Comme cette quantité contrôle la manière dont on majore le plus petit commun multiple des dénominateurs des facteurs qui interviennent dans l'expression des coefficients d'interpolation, et que nous avions obtenu dans ce cas particulier $\log|c_n| \leq n^4 \log|q| + o(n^4)$, ceci prouve l'assertion. □

5. Le cas des ensembles de densité arithmétique positive

Dans toute cette partie, nous faisons l'hypothèse que la partie A vérifie la condition :

$$\psi_A(x) = \beta x + o(x)$$

où β est une constante $\in \,]0\,,1\,[$.

Les démonstrations du théorème 6 et des corollaires 7 et 8 se déroulent essentiellement comme celles des résultats qui précèdent.

LEMME 5.1. — *Le nombre entier* $c(n) = q^{\sum_{b\in A,\, b\le u(n)} b} L_{u(n)}(q)$ *avec*

$$L_c(q) = \prod_{\substack{m\in \mathbb{N}^* \\ m\le c}} (q^m - 1)$$

est un multiple des nombres entiers

$$\prod_{\substack{b\in A \\ b\ne a,\, b\le c}} (q^b - q^a)\,, \quad a\in A\,,\ a\le c$$

et vérifie l'estimation

$$\log\bigl|c(n)\bigr| \le \frac{1+\beta}{2}\, u(n)^2 \log|q| + o\bigl(u(n)^2\bigr)\,.$$

Démonstration. — Un des nombres entiers considérés s'écrit

$$q^m \prod_{\substack{b\in A \\ b\ne a,\, b\le c}} (q^{|b-a|} - 1)\,,$$

et l'exposant m de q est visiblement inférieur à l'exposant de q dans $c(n)$. De plus, le polynôme $\prod_{b\in A,\, b\ne a,\, b\le c}(x^{|b-a|}-1)$ divise $\prod_{b\in \mathbb{N},\, b\ne a,\, b\le c}(x^{|b-a|}-1)$, qui lui-même divise $\prod_{m\in\mathbb{N}^*,\, m\le c}(x^m - 1)$, résultat qui figure dans la démonstration par Gel'fond du théorème G. La première assertion en résulte.

D'autre part, on a $u(n) = (n/\beta) + o(n)$, et il vient :

$$\log(c_n) \le \left(\frac{1+\beta}{2}\right) u(n)^2 \log|q| + o\bigl(u(n)^2\bigr)\,.$$

LEMME 5.2. — *Sous l'hypothèse que la fonction $f(z)$ vérifie l'estimation :*

$$\log|f|(R) \leq \delta \frac{(\log R)^2}{\log|q|},$$

avec $\delta > 0$, pour tout R assez grand, la quantité $b(n)$ vérifie l'estimation :

$$\log|b(n)| \leq \theta(\theta\delta - \beta)u(n)^2 \log|q| + o(u(n)^2).$$

Démonstration. — Elle suit les grandes lignes des estimations de ce type déjà rencontrées. On choisit $R = |q|^{\theta u(n)}$ avec $\theta > 1$, et on utilise la formule i) du lemme 2.1.

LEMME 5.3. — *La fonction entière $f(z)$ est somme de sa série d'interpolation aux points $q^{u(n)}$ dès que l'on a la majoration :*

$$\log|f|(R) \leq \delta \frac{(\log R)^2}{\log|q|}$$

pour tout R assez grand, avec $\delta < \beta/2$.

Démonstration. — Là encore, la démonstration suit des lignes déjà vues. On utilise le lemme 2.2 en prenant comme valeur pour R la valeur $R = |q|^{\theta u(n)}$. On voit facilement que la valeur à prendre pour θ est $\theta = \beta/2\delta > 1$.

Démonstration du théorème 6

On a, d'après ce qui précède, la majoration :

$$\log|b(n)c_n| \leq \left(\frac{1+\beta}{2} + \delta\theta^2 - \beta\theta\right) u(n)^2 \log|q| + o(u(n)^2).$$

On choisit de prendre $\theta = \beta/2\delta > 1$, et il en résulte :

$$\log|b(n)c_n| \leq \left(\frac{1+\beta}{2} - \frac{\beta^2}{4\delta}\right) u(n)^2 + o(u(n)^2).$$

Comme $(1+\beta)/2 < \beta^2/4\delta$, il en résulte que $b(n)c(n)$ tend vers zéro et donc est nul à partir d'un certain rang. Le lemme 5.3 s'applique car $\beta/2 > \beta^2/2(1+\beta)$ et démontre le résultat. □

Démonstration du corollaire 7

On a immédiatement que $\psi_A(x) = (x/\lambda) + o(x)$. Et on applique le théorème 6 avec $\beta = 1/\lambda$. □

Démonstration du corollaire 8

C'est une conséquence immédiate du théorème 6, en prenant $\beta = 1$. Le fait que ce résultat soit le meilleur possible vient de l'exemple donné par Gel'fond d'une fonction entière non polynomiale f telle que

$$\log |f|(R) \leq \frac{1}{4} \frac{(\log R)^2}{\log |q|} + o\big((\log R)^2\big),$$

vérifiant $f(q^n) \in \mathbb{Z}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Remerciements

L'auteur remercie vivement le referee pour une lecture attentive du texte et de nombreuses suggestions.

Bibliographie

[Be] BÉZIVIN (J.-P.) .— *Une généralisation à plusieurs variables d'un théorème de Gel'fond*, Analysis 4 (1984), pp. 125-141.

[Bu] BUNDSCHUH (P.) .— *Arithmetische Eigenschaften ganzer Funktionen mehrerer Variablen*, J. Für die Reine Angw Math. **313** (1980), pp. 116-132.

[De] DENES (P.) .— *Ueber die Diophantische Gleichung $x^l + y^l = cz^l$*, Acta Math. **88** (1952), pp. 241-251.

[Ga] GANDHI (V.M.) .— *Generalized Fermat's last theorem and regular primes*, Proc. Japan Acad. **46** (1970), pp. 626-629.

[Ge1] GEL'FOND (A.O.) .— *Sur les fonctions entières qui prennent des valeurs entières aux points β^n*, En Russe, Mat. Sbornik **40** (1933), pp. 42-47.

[Ge2] GEL'FOND (A.O.) .— *Functions which takes on integral values*, Math. Notes **1** (1967), pp. 337-340.

[Gr] GRAMAIN (F.) .— *Fonctions entières d'une ou plusieurs variables complexes prenant des valeurs entières sur une progression arithmétique*, Cinquante ans de polynômes; M. Langevin et M. Waldschmidt (*ed.*), Lecture notes in Math., Springer Verlag, **1415** (1990), pp. 123-137.

[GS] GRAMAIN (F.) and SCHNITZER (F.J.) .— *Ganze ganzwertige Funktionen: Historiche Bemerkungen, Complex Methods on partial differential equations*, Math. Res **53** (1989), pp. 151-177.

[Gu] GUELFOND (A.O.) .— *Calcul des différences finies*, Dunod, Paris (1963).

[Wa] WALLISSER (R.) .— *On entire functions assuming integer values in a geometric sequence*, Theorie des nombres, Comptes Rend. Int. Univ. Laval 1987; J.-M. de Konink et C. Levesques (*ed.*), 981-989 Berlin, De Gruyter (1989).