

RÉMI LANGEVIN

JEAN-CLAUDE SIFRE

**Asymptotes des courbes tracées sur les  
variétés de Hadamard**

*Annales de la faculté des sciences de Toulouse 6<sup>e</sup> série*, tome 2, n° 3  
(1993), p. 375-427

[http://www.numdam.org/item?id=AFST\\_1993\\_6\\_2\\_3\\_375\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AFST_1993_6_2_3_375_0)

© Université Paul Sabatier, 1993, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## Asymptotes des courbes tracées sur les variétés de Hadamard<sup>(\*)</sup>

RÉMI LANGEVIN ET JEAN-CLAUDE SIFRE<sup>(1)</sup>

---

**RÉSUMÉ.** — Dans une variété de Hadamard ( $K \leq 0$ ), on étudie l'existence d'une géodésique asymptote stricte pour une courbe dont la courbure tend assez vite vers 0 à l'infini. Si  $|K|$  est assez grand, ces courbes se comportent comme dans le cas hyperbolique. Si  $|K|$  tend assez vite vers 0 à l'infini, elles se comportent comme dans  $\mathbb{R}^n$ . Sans hypothèse à l'infini sur  $K$ , on construit des contre-exemples.

**ABSTRACT.** — In a Hadamard manifold ( $K \leq 0$ ), we look for a geodesic strictly asymptotic to a curve, the curvature of which tends quickly enough to 0 at infinity. If  $|K|$  is large enough, these curves behave as in the hyperbolic case. When  $|K|$  tends quickly enough to 0 at infinity, they behave as in  $\mathbb{R}^n$ . If no assumption on  $K$  at infinity is made, we construct counterexamples.

---

### 1. Introduction

La courbure d'une parabole de  $\mathbb{R}^2$  paramétrée par la longueur de l'arc  $s$  est équivalente à  $A/s^{3/2}$  ( $A$  constante) lorsque  $s$  tend vers  $\infty$ ; celle d'une hyperbole, à  $A'/s^3$ . Si la courbure d'un arc  $s \rightsquigarrow q(s)$  de  $\mathbb{R}^n$  paramétré par la longueur est un  $O(1/s^{1+\epsilon})$ ,  $\epsilon > 0$ , la courbe a une direction asymptotique, car

$$\dot{q}(s) = \dot{q}(s_0) + \int_{s_0}^s \frac{d\dot{q}}{d\sigma} d\sigma,$$

et l'intégrale converge absolument. De plus si la courbe est un  $O(1/s^{2+\epsilon})$ ,  $\epsilon > 0$ , la courbe a une asymptote : on le voit par projection de l'intégrale

---

(\*) Reçu le 6 novembre 1992

(1) Laboratoire de Topologie, U.R.A., Université de Bourgogne, B.P. 138, F-21004 Dijon Cedex (France)

ci-dessus sur un hyperplan orthogonal à la direction asymptotique et une seconde intégration.

La généralisation de ces propriétés aux courbes tracées sur une variété  $M$  de Hadamard (complète, simplement connexe, à courbure  $\leq 0$ ) mène à une analyse fine de la géométrie à l'infini de  $M$ , en raison de la définition même de l'*asymptote*.

Soit en effet

$$q = (q_t) = (q(t)), \quad t \geq 0,$$

un arc non borné de  $M$ , paramétré par la longueur. On se demande si une décroissance assez rapide de sa courbure géodésique vers 0 entraîne l'existence d'une "géodésique asymptote" à l'arc. Mais il faut préciser ce qu'on entend par là, car selon l'usage, deux géodésiques  $c$  et  $c'$  sont dites asymptotes lorsque la distance  $d(c(t), c'(t))$  reste bornée quand  $t$  tend vers  $+\infty$  (Pansu [P, p. 5]) : elles définissent alors le même point  $c(+\infty) = c'(+\infty)$  sur la sphère à l'infini  $M(\infty)$ . Pour un arc quelconque  $q$ , une *direction asymptotique* de  $q$  est naturellement une géodésique  $\gamma$  telle que  $q_t$  tende, pour une topologie convenable de  $\overline{M} = M \cup M(\infty)$ , vers  $\gamma(+\infty)$ ; on appellera *asymptote* une direction asymptotique telle que la distance de  $q_t$  à  $\gamma$  reste bornée, et *asymptote stricte* une asymptote telle que  $\lim_{t \rightarrow \infty} d(q_t, \gamma) = 0$ . L'existence d'une asymptote stricte est alors liée à un écart sur l'ensemble des géodésiques allant en un même point à l'infini de  $\overline{M}$ , et non à une distance sur la sphère à l'infini. Néanmoins, cette existence est garantie par des hypothèses globales sur la courbure de  $M$  : grosso modo, il suffit que la courbure de  $M$  soit bornée inférieurement en valeur absolue par une constante  $> 0$ , auquel cas toutes les géodésiques allant en un même point de  $M(\infty)$  sont strictement asymptotes, ou au contraire que la courbure de  $M$  tende assez vite vers 0 à l'infini, mais alors il existe des géodésiques allant au même point de  $M(\infty)$  non strictement asymptotes.

## 2. Les résultats

On note  $|a, b|$  la distance  $d(a, b)$ . La demi-géodésique  $\gamma_{ab}$  paramétrée par la longueur sur  $\mathbb{R}^+$  telle que  $\gamma_{ab}(0) = a$  et  $\gamma_{ab}(|a, b|) = b$  est notée  $[ab]$ ; la géodésique tout entière est notée  $(ab)$ .

Rappelons les deux topologies classiques sur  $\overline{M}$  (Eberlein-O'Neill [EO, §2 et §3]), la topologie conique et la topologie horosphérique. Leurs restrictions

à  $M$  sont identiques à la topologie de variété. Si  $x$  est un point à l'infini, une base de voisinages de  $x$  pour la topologie conique est formée des cônes tronqués

$$T(v, \varepsilon, r) = C(v, \varepsilon) - \{ q \in M \mid |p, q| > r \},$$

où  $p$  est un point fixé de  $M$ ,  $v$  est le vecteur unitaire tangent à  $[px)$  en  $p$ , et  $C(v, \varepsilon)$  est l'ensemble des points  $y$  de  $\overline{M}$  tels que l'angle de  $v$  avec la demi-géodésique  $[py)$  soit inférieur à  $\varepsilon$ . Une base de voisinages de  $x$  pour la topologie horosphérique est formée des  $H \cup \{x\}$ , où  $H$  est une horoboule "centrée en  $x$ ".

Pour les théorèmes qui vont suivre, les hypothèses prises sur la courbure géodésique  $k_g(t)$  de l'arc  $q$  (toujours paramétré par la longueur) à l'instant  $t$  seront successivement :

(H1) il existe  $\varepsilon > 0$  tel que, lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$ ,

$$k_g(t) = O\left(\frac{1}{t^{1+\varepsilon}}\right);$$

(H2) la même chose avec l'exposant  $2 + \varepsilon$  au lieu de  $1 + \varepsilon$ .

Ainsi, (H2) entraîne (H1).

**THÉORÈME 1.** — *Sous l'hypothèse (H1),  $q_t$  admet une limite (son point à l'infini ou sa direction asymptotique)  $q_\infty \in M(\infty)$  pour les topologies conique et horosphérique de  $\overline{M}$ , et la distance entre  $q_t$  et la géodésique  $(p, q_\infty)$  est un  $o(t)$ .*

*Sous l'hypothèse (H2), la distance de  $q_t$  à la géodésique  $(p, q_\infty)$  reste bornée lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$ .*

Dans ce dernier cas,  $(p, q_\infty)$  est donc une "asymptote" de  $q$ . On verra que si la courbe est supposée non bornée, on peut remplacer les hypothèses (H1) et (H2) par les hypothèses (R1) et (R2) analogues obtenues en remplaçant  $O(1/t^{1+\varepsilon})$  par  $O(1/r^{1+\varepsilon})$  avec  $r = |p, q_t|$ .

Il faut des hypothèses supplémentaires sur  $M$  ou sur l'arc pour que l'arc  $q$  ait une asymptote stricte.

Soit  $\gamma_t$  la géodésique joignant  $q_t$  à  $q_\infty$ . Notons  $G(q_\infty)$  le séparé de l'espace des géodésiques allant en  $q_\infty$  muni de l'écart naturel :

$$d(\gamma, \gamma') = \inf_{u, v} |\gamma(u), \gamma'(v)|.$$

**THÉORÈME 2.** — *Si  $G(q_\infty)$  est complet, et toujours sous l'hypothèse (H2),  $q$  admet une asymptote stricte.*

Pour donner des hypothèses entraînant que  $G(q_\infty)$  soit complet, fixons des notations. Disons (cf. [EO, p. 67]) que la courbure de  $M$  est "d'ordre  $\leq 2$  en  $q_\infty$ " lorsque l'intégrale  $\int_1^\infty tk(\gamma, t) dt$  est définie, où  $k(\gamma, t)$  est le minimum des  $|K(\pi)|$  pour les plans  $\pi$  contenant le vecteur tangent à l'instant  $t$  à la géodésique  $\gamma$  allant en  $q_\infty$ , et  $K$  est la courbure sectionnelle de  $M$ .

**THÉORÈME 3.** — 1) *Si la courbure de  $M$  est d'ordre  $\leq 2$  en  $q_\infty$ ,  $G(q_\infty)$  est réduit à un point.*

Par ailleurs, l'espace  $G(q_\infty)$  est isométrique à  $\mathbb{R}$  (donc complet) pour une surface de Hadamard dans chacun des deux cas suivants :

2) *lorsqu'il existe une horoboule  $B$  "centrée en  $q_\infty$ " sur laquelle l'intégrale*

$$\iint_B r(m)K(m) d\sigma$$

*soit finie,  $K(m)$  étant la courbure au point courant  $m$  et  $r(m)$  la distance de  $m$  à un point fixe extérieur à cette horoboule,  $d\sigma$  étant l'élément d'aire ;*

3) *lorsque  $K(m)$  est un  $O(1/r(m)^{2+\varepsilon})$ ,  $\varepsilon > 0$ , quand  $r(m)$  tend vers l'infini.*

Le premier cas est en quelque sorte à l'opposé des deux autres. Si la courbure de  $M$  est d'ordre  $\leq 2$  en  $q_\infty$ ,  $M$  vérifie l'axiome 0 de [EO]. On notera que Eberlein et O'Neill supposent pour cela que la courbure de  $M$  est d'ordre  $\leq 1$  (ce qui est plus restrictif, mais semble dû à ce que l'on ne savait pas, lors de la publication de [EO], si les horosphères étaient  $C^2$  ; cela a été prouvé depuis par Eberlein, voir la mise au point là-dessus de Heintze et Im Hof [H-IH, p. 483]).

Dans un espace euclidien,  $G(q_\infty)$  est complet, et l'existence d'une asymptote est élémentaire, comme on l'a vu plus haut. C'est ainsi que les géodésiques d'une courbe algébrique complexe de  $\mathbb{C}^2$  ont une asymptote stricte pour la structure euclidienne de  $\mathbb{C}^2$ , si la courbe algébrique est transverse à la droite à l'infini (Simões Silva [S, prop. p. 86] et Langevin [L2]).

Nous verrons aussi que sur une courbe algébrique complexe de  $\mathbb{C}^2$ , les arcs vérifiant (H2) ont toujours une géodésique asymptote stricte sur la courbe complexe (voir la section 13), ce qui permet d'approcher les géodésiques allant à l'infini par des courbes réelles liées au plongement dans  $\mathbb{C}^2$ .

Revenant au cas général, entre les situations extrêmes vues dans le théorème, on peut trouver des contre-exemples d'arcs vérifiant (H2) mais sans asymptote stricte (voir les sections 14 à 16).

### 3. La courbe n'est pas bornée

Dans toute la suite de ce texte, on considère une variété  $M$  de Hadamard, un arc  $q = (q_t)$ ,  $t \geq 0$ , géométrique, c'est-à-dire de classe  $C^2$  paramétré par la longueur, de courbure géodésique  $k_g(t)$  à l'instant  $t$ .

**PROPOSITION 3.1.** — *Si  $k_g(t)$  tend vers 0 lorsque  $t$  tend vers  $\infty$ , la courbe n'est pas bornée.*

*Preuve.* — Montrons que pour tout  $\delta > 0$ , pour tout  $t_0$  et tout  $p \in M$ , il existe  $t > t_0$  tel que  $q_t$  ne soit pas dans la boule  $B$  fermée de centre  $p$  et de rayon  $\delta$ . Grâce à la continuité des symboles de Christoffel et la compacité des boules bornées de  $M$ , il existe  $\eta > 0$  tel que tout arc géométrique  $c$ , partant d'un point  $c(0)$  dans  $B$  et de courbure inférieure à  $\eta$  à partir de l'instant  $s = 0$ , vérifie :

$$\forall s \in [0, 4\delta], \quad \left| c(s), \exp_{c(0)}(s \dot{c}(0)) \right| < \delta.$$

Choissant  $t_1 > t_0$  à partir duquel la courbure  $k_g(t)$  de  $q$  est  $> \eta$ , on voit que  $q(t_1 + 4\delta)$  est hors de la boule de centre  $q(t_1)$  et de rayon  $3\delta$ , et donc hors de  $B$ .  $\square$

On notera que même dans un espace euclidien, cela n'empêche pas  $q(t)$  de repasser indéfiniment au voisinage de  $p$  lorsque  $t$  tend vers  $\infty$ .

Pour montrer qu'avec (H1) et  $p \in M$  fixé, la dérivée de la distance  $r(t) = |p, q_t|$  tend vers 1 si  $t \rightarrow \infty$ , et donc que  $q_t$  s'éloigne indéfiniment, nous allons écrire une inéquation différentielle reliant  $r(t)$  à la courbure  $k_g(t)$ , vraie même sans (H1).

#### 4. La formule du navigateur et l'inégalité loxodromique

Nous pouvons maintenant supposer que  $p$  ne coïncide jamais avec  $q_t$ .

L'angle  $\alpha(t) \in [0, \pi]$  (déviations méridienne) de  $\dot{q}_t$  avec la demi-géodésique  $[pq_t]$  vérifie (fig. 1) :

$$\frac{dr}{dt} = \cos \alpha(t) \quad (1)$$

(Helgason [Hel, lemme 13.6, p. 77]).

PROPOSITION 4.1. — (inégalité loxodromique) *La courbure de  $M$  étant toujours négative, si, pour tout  $t$  voisin de  $t_0$ ,  $q_t$  est distinct de  $p$  et si  $\dot{q}_t$  est transverse à  $[pq_t]$ , la déviation loxodromique  $d\alpha/dt$  vérifie :*

$$\frac{d\alpha}{dt}(t_0) \leq k_g(t_0) - \frac{\sin \alpha}{r}(t_0). \quad (2)$$

Remarquons que dans un espace euclidien, cette inégalité s'interprète comme :

$$\frac{d^2\mathcal{A}}{dt^2} \leq \frac{1}{2} r \frac{dr}{dt} k_g, \quad \text{dès que } \cos \alpha(t) > 0 \quad (3)$$

où  $\mathcal{A}$  est l'aire balayée par le rayon vecteur  $[pq_t]$  dans le temps  $t$ . Toutefois cette interprétation est particulière à l'espace euclidien.

La preuve de la proposition repose sur le lemme suivant, où l'on choisit  $t_0$  tel que  $\dot{q}_{t_0}$  soit transverse à la géodésique  $[pq_{t_0}]$ , de sorte que la réunion  $C(I)$  des  $[pq_t]$ , pour  $t \in I$  intervalle ouvert convenable, soit, au voisinage de  $q_{t_0}$ , une surface plongée (naturellement orientée).

LEMME 4.2. — (formule du navigateur) *Si  $k_g^q(t)$  est la courbure géodésique sur  $C(I)$  (et non sur la variété ambiante) de  $q$  à l'instant  $t$ , si  $\pi$  est la projection radiale sur la sphère de  $M$  centrée en  $p$  et de rayon  $r(t_0) = |p, q_{t_0}|$ , et si  $k_g^{\pi(q)}(t)$  est la courbure géodésique sur  $C(I)$  de l'arc projeté  $\pi(q)$ , alors*

$$\frac{d\alpha}{dt}(t_0) = k_g^q(t_0) - k_g^{\pi(q)}(t_0) \sin \alpha(t_0). \quad (4)$$

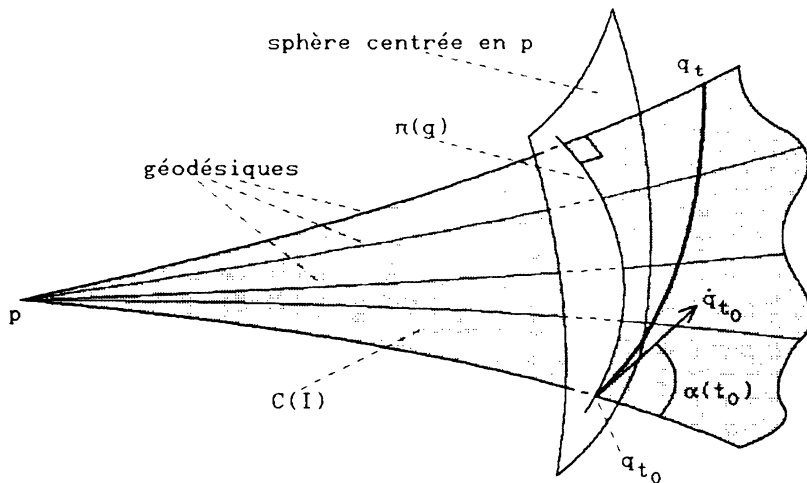


Fig. 1

*Preuve du lemme.* — Lorsque  $\alpha \neq \pi/2$ , appliquons la formule de Gauss-Bonnet au triangle curviligne dans  $C(I)$  bordé par l'arc  $q([t_0, t])$ , sa projection  $\pi(q([t_0, t]))$  et la géodésique  $(p, q_t)$ .

Ainsi,

$$\alpha(t) - \alpha(t_0) = \iint K \, d\sigma + \int_{t_0}^t k_g^q(\tau) \, d\tau + \int_{q(t_0)}^{\pi q(t)} k_g^{\pi(q)} \, dl,$$

$dl$  étant l'élément d'arc de  $\pi(q)$  (paramétré par sa longueur). Soit  $H(s, t)$  le paramétrage de  $C(I)$  "variation de  $[pq(t_0)]$  par des géodésiques paramétrées par la longueur" :

$$(s \geq 0) \quad H(s, t) = \gamma_{pq(t)}(s) = \exp_p(s v(t)),$$

où  $v(t)$  est le vecteur unitaire tangent en  $p$  à  $[pq(t)]$ . La dernière intégrale s'écrit alors, sachant que  $\pi(q(t)) = H(s_0, t)$  :

$$\int_{q(t_0)}^{\pi q(t)} k_g^{\pi(q)} \, dl = \int_{t_0}^t k_g^{\pi(q)}(\tau) \left\| \frac{\partial H}{\partial \tau}(s_0, \tau) \right\| \, d\tau, \quad \text{où } s_0 = r(t_0).$$



L'aire du triangle curviligne est un  $O(t - t_0)^2$  si  $t \rightarrow t_0$ , et l'intégrale de surface aussi. Comme

$$\left\| \frac{\partial H}{\partial \tau}(s_0, t_0) \right\| = \sin \alpha(t_0),$$

on obtient la formule du navigateur lorsque  $\alpha \neq \pi/2$ . On la déduit dans le cas  $\alpha = \pi/2$  par passage à la limite.  $\square$

Comme la courbure de  $M$  est négative, celle de  $C(I)$  est aussi négative, et on pourrait montrer que la courbure géodésique de  $\pi(q)$  sur  $C(I)$  est minorée par celle d'un cercle euclidien de même rayon. Nous utiliserons plutôt une interprétation du terme  $k_g^{\pi(q)}(t_0) \sin \alpha(t_0)$  de (4) à l'aide d'un champ de Jacobi.

LEMME 4.3. — *Toujours en supposant  $\dot{q}(t_0)$  transverse à  $[pq(t_0)]$ , si  $J$  est le champ de Jacobi le long de  $\gamma_{pq(t_0)}$  nul en  $0$  tel que  $J(r(t_0))$  soit la projection orthoradiale de  $\dot{q}(t_0)$  (dans l'espace tangent en  $q(t_0)$  à  $M$ ), alors :*

$$\frac{d\alpha}{dt}(t_0) = k_g^q(t_0) - \|J\|'(r(t_0)), \quad (5)$$

la dérivée  $\|J\|'$  prise bien sûr par rapport à  $s$  et non par rapport à  $t$ .

On prouve (5) par dérivation covariante (notée ici  $D_q(\cdot)/dt$ ), sur la surface  $C(I)$ , de

$$\alpha(t) = \text{Arccos} \langle \dot{q}(t), u(t) \rangle, \quad (6)$$

où  $u(t) = \partial H / \partial s(r(t), t)$  est le vecteur directeur en  $q(t)$  de  $[pq_t]$ .

En effet,

$$\frac{D_q u}{dt}(t_0) = \frac{D_q J}{ds}(r(t_0)) = J'(r(t_0)),$$

et  $J'$  est colinéaire à  $J$  puisque  $J$  est orthogonal à  $[pq(t_0)]$ , d'où :

$$\left\langle \dot{q}(t_0), \frac{D_q u}{dt}(t_0) \right\rangle = \langle \dot{q}(t_0), J'(r(t_0)) \rangle = \|J\|' \sin \alpha.$$

D'autre part :

$$\left\langle \frac{D_q(\dot{q})}{dt}, u \right\rangle = -k_g^q \sin \alpha. \quad \square$$

COROLLAIRE 4.4. — Dans les conditions du lemme, si  $k_g$  est la courbure géodésique dans la variété ambiante  $M$  :

$$\frac{d\alpha}{dt}(t_0) + \|J\|'(r(t_0)) \leq k_g(t_0). \quad (7)$$

*Preuve.* — En effet, la dérivée seconde covariante de  $q$  sur  $C(I)$  est la projection de sa dérivée seconde dans  $M$ , donc  $k_g^2(t_0) \leq k_g(t_0)$ .  $\square$

Puisque la courbure de  $M$  est négative, la fonction  $\psi(s) = \|J\|(s)$  est convexe. Comme  $J(0) = 0$ ,  $\psi(s)/s$  croît avec  $s$  et sa dérivée  $(s\psi'(s) - \psi(s))/s^2$  est positive ou nulle, de sorte que pour tout  $s$  positif,  $\|J\|'(s) \geq \|J(s)\|/s$ . Or  $\|J(r(t_0))\| = \sin \alpha(t_0)$ . Avec le corollaire ci-dessus, cela prouve l'inégalité loxodromique.  $\square$

Il sera avantageux de s'affranchir de la transversalité de  $\dot{q}(t)$  et  $[pq_t]$  nécessaire pour l'inégalité loxodromique. C'est ce que va permettre la relation  $dr/dt = \cos \alpha$ . Rappelons que  $dr/dt \in [-1, 1]$ .

PROPOSITION 4.5. — (inéquation différentielle loxodromique) Soit  $q$  un arc géométrique sur  $M$  tel que, pour tout  $t$ ,  $q(t) \neq p$ . Alors :

$$\frac{1 - \dot{r}^2}{r} - \ddot{r} \leq k_g \sqrt{1 - \dot{r}^2}. \quad (8)$$

*Preuve.* — Sur un intervalle ouvert où  $\dot{r} \neq \pm 1$ ,  $\dot{q}_t$  et  $[pq_t]$  sont transverses, (8) s'obtient à l'aide du corollaire en dérivant la relation

$$\alpha = \text{Arccos } r \in ]0, \pi[.$$

Sur un intervalle ouvert où  $\dot{r} = \pm 1$ ,  $\alpha$  est nul et  $k_g$  aussi. L'inégalité s'en déduit par densité.  $\square$

COROLLAIRE 4.6. — Sur un intervalle  $[t_0, t_1]$  où  $0 \leq \dot{r}(t) \leq 1$ ,

$$r(t_1)\sqrt{1 - \dot{r}(t_1)^2} - r(t_0)\sqrt{1 - \dot{r}(t_0)^2} \leq \int_{t_0}^{t_1} r \dot{r} k_g. \quad (9)$$

*Preuve.* — Sur un intervalle où  $0 \leq \dot{r}(t) < 1$ , la relation (8) entraîne

$$\frac{d}{dt} \left( r \sqrt{1 - \dot{r}^2} \right) \leq r \dot{r} k_g \quad (10)$$

qu'il suffit d'intégrer pour obtenir (9).

LEMME 4.7. — (formule pointée des accroissements finis) Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $a < b$  dans  $I$ . Soient  $f$  une fonction continue sur  $I$  dérivable sur  $I^* = f^{-1}(\mathbb{R}^*)$  et  $g$  une fonction de classe  $C^1$  sur  $I$  telles que, sur  $I^*$ ,  $f'(t) \leq g'(t)$ . Alors,

$$f(b) - f(a) \leq g(b) - g(a).$$

Le corollaire en résulte en appliquant le lemme aux deux membres de la relation (10).  $\square$

## 5. Limite de la courbe pour les deux topologies

Il faut d'abord montrer que la courbe va à l'infini. C'est vrai dans un cadre un peu plus général que (H1).

PROPOSITION 5.1. — Supposons que la courbure  $k_g(t)$  est un  $o(1/t)$ , ou bien que  $q$  n'est pas borné et que  $k_g(t)$  est un  $o(1/r(t))$  "lorsque  $r(t)$  tend vers l'infini". Dans ces deux cas,  $\dot{r}(t)$  tend vers 1 si  $t$  tend vers l'infini; dans le second cas,  $k_g(t)$  est alors aussi un  $o(1/t)$ .

Si l'arc  $q$  n'est pas borné,  $r(t)$  ne tend pas nécessairement vers  $\infty$ , et l'hypothèse " $k_g(t)$  est un  $o(1/r(t))$  lorsque  $r(t)$  tend vers  $\infty$ " signifie que pour tout  $\eta > 0$  il existe  $\rho$  tel que, pour tout  $t$  vérifiant  $r(t) > \rho$ ,  $k_g(t) \leq \eta/r(t)$ .

Preuve. — Comme la courbe n'est pas bornée (prop. 3.1), l'inégalité  $r(t) \leq t + |p, q(0)|$  ramène le premier cas au second. Dans les deux cas, pour tout  $\mu \in ]0, 1[$ , il existe  $t_0 > 0$  tel que  $\dot{r}(t_0) > 0$  et pour tout  $t > t_0$  tel que  $r(t) \geq r(t_0)$ ,  $k_g(t) \leq \mu/r(t)$ . Sur tout intervalle  $[t_0, t_1]$  où  $\dot{r}(t) \geq 0$ , le corollaire 4.6 entraîne que

$$r(t)\sqrt{1 - \dot{r}(t)^2} - r(t_0) \leq \mu(r(t) - r(t_0)),$$

ce qui s'écrit aussi

$$1 - \dot{r}(t)^2 \leq \left( \frac{r(t_0)}{r(t)} + \mu \left( 1 - \frac{r(t_0)}{r(t)} \right) \right)^2. \quad (11)$$

Si  $\dot{r}$  s'annulait au-delà de  $t_0$ , en appliquant (11) au plus petit  $t_1 > t_0$  tel que  $\dot{r}(t_1) = 0$ , on aboutirait à une contradiction puisque  $r$  est croissante sur

$[t_0, t_1[$  et  $\mu < 1$ . Donc, pour tout  $t > t_0$ ,  $\dot{r}(t) > 0$  et  $r$  est fonction croissante de  $t$ . Si  $r(t)$  avait une limite finie,  $\dot{r}$  serait minoré par une constante  $> 0$ , d'après (11), ce qui forcerait  $r$  à tendre vers l'infini. Enfin, l'existence de  $t_0$  pour tout  $\mu$  petit dans l'intervalle  $]0, 1[$ , et la relation (11) entraînent que  $\dot{r}(t)$  tend vers 1 si  $t$  tend vers l'infini, d'où la seconde assertion car  $r(t)$  est équivalent à  $t$  si  $t \rightarrow \infty$ .  $\square$

Les hypothèses de cette proposition n'entraînent nullement que la courbe ait une direction asymptotique comme le montre l'exemple dans un plan euclidien d'une spirale de courbure  $k_g(t) = 1/(t \operatorname{Log} t)$ .

Par ailleurs, nous savons maintenant que l'hypothèse (Ri) ( $i = 1, 2$ ) (i.e. l'existence de  $\varepsilon > 0$  tel que  $k_g = O(1/r^{i+\varepsilon})$ , voir section 2) est équivalente à (Hi).

L'existence d'une direction asymptotique va résulter d'une majoration de  $\alpha(t)$  permise par (H1). Pour chaque  $\varepsilon$  fixé  $> 0$ , nous noterons désormais (H1 $_\varepsilon$ ) et (H2 $_\varepsilon$ ) les hypothèses suivantes :

(H1 $_\varepsilon$ ) lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$ ,

$$k_g(t) = O\left(\frac{1}{t^{1+\varepsilon}}\right), \quad \varepsilon > 0;$$

(H2 $_\varepsilon$ ) la même chose avec l'exposant  $2 + \varepsilon$  au lieu de  $1 + \varepsilon$ .

Maintenant, (H2 $_\varepsilon$ ) est équivalente à (H1 $_{1+\varepsilon}$ ). On énonce de manière analogue les hypothèses (R1 $_\varepsilon$ ) et (R2 $_\varepsilon$ ).

PROPOSITION 5.2. — *Sous l'hypothèse (H1 $_\varepsilon$ ) avec  $0 < \varepsilon < 1$ ,  $\alpha(t)$  est un  $O(1/t^\varepsilon)$  lorsque  $t$  tend vers l'infini.*

*Preuve.* — Comme maintenant  $r(t)$  est équivalent à  $t$  quand  $t$  tend vers l'infini, il existe  $t_0$  et  $\lambda > 0$  tels que, si  $t \geq t_0$ ,

$$k_g(t) \leq \frac{\lambda}{r(t)^{1+\varepsilon}} \quad \text{et} \quad \dot{r}(t) > 0.$$

La relation (9) entraîne alors :

$$1 - \dot{r}(t)^2 \leq \left(\frac{r(t_0)}{r(t)}\right)^2 \left(1 + \frac{1}{1-\varepsilon} \left(\left(\frac{r(t)}{r(t_0)}\right)^{1-\varepsilon} - 1\right)\right)^2, \quad (12)$$

dont le second membre est un  $O(1/t^{2\varepsilon})$ , et le premier est équivalent à  $\alpha(t)^2$  compte tenu de (1).  $\square$

Le cas d'une droite  $\Delta$  sur laquelle ne se trouve pas  $p$ , dans un plan euclidien, pour lequel  $\alpha(t)$  est équivalent à  $d(p, \Delta)/t$  montre bien qu'on ne peut espérer  $\alpha(t) = O(1/t^\varepsilon)$  pour  $\varepsilon > 1$ . Venons-en au théorème.

**PROPOSITION 5.3.** — *Sous l'hypothèse (H1) (a fortiori si le nombre  $\varepsilon$  dont (H1) affirme l'existence est  $> 1$ , c'est-à-dire sous (H2)) le vecteur  $v(t)$  unitaire tangent en  $p$  à  $[p, q_t]$  admet une limite dans la sphère unité de  $M_p = T_p(M)$ , et  $q_t$  a une limite dans  $\overline{M}$  pour la topologie conique.*

Ce sera une conséquence facile du lemme 5.4.

**LEMME 5.4.** — *Avec les notations de la proposition 5.3, mais sans hypothèse de courbure sur l'arc  $q$ ,*

$$\left\| \frac{dv}{dt} \right\| \leq \frac{\sin \alpha}{r}.$$

Pour ce lemme, la courbure négative est essentielle, contrairement à la relation  $dr/dt = \cos \alpha$  qui s'étend aux variétés sans points conjugués. Soit  $Q_t$  tel que  $\exp_p(Q_t) = q_t$  et, comme dans [Hel, lemme 13.6, p. 77] soit

$$Y = \frac{dQ_t}{dt} = Y_0 + Y_1,$$

$Y_0$  dans la direction  $(p, Q_t)$  et  $Y_1$  orthogonal à cette direction (fig. 2).

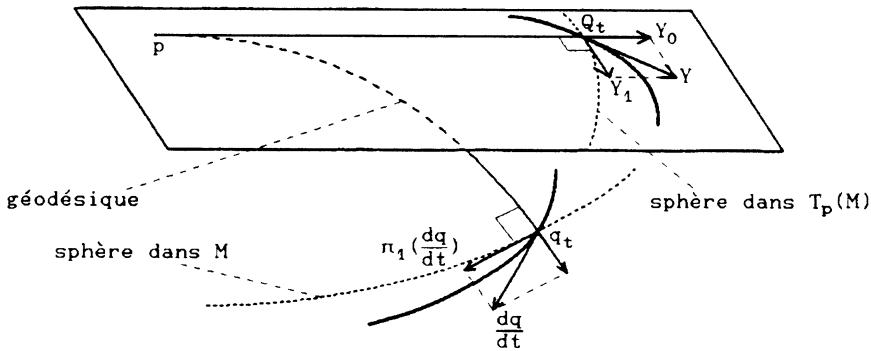


Fig. 2

Si  $\pi_1$  désigne la projection orthoradiale dans  $T_p(M)$ , aussi bien que la projection dans l'espace tangent en  $T_{q_t}(M)$  sur l'hyperplan tangent à la sphère centrée en  $p$  et passant par  $q_t$ , d'après le lemme de Gauss,

$$\pi_1 \left( \frac{dq}{dt} \right) = T \exp_p(\pi_1(Y)) = T \exp_p(Y_1),$$

dont la norme est  $\sin \alpha$ . Comme la courbure de  $M$  est négative,

$$\|T \exp_p(Y_1)\| \geq \|Y_1\| \quad ([\text{Hel, lemme 13.6, p. 77}],$$

d'où le lemme car  $\|dv/dt\|$  est justement  $\|Y_1\|/r(t)$ .  $\square$

*Preuve de la proposition.* — Si  $(H1_\varepsilon)$  est vérifiée avec  $\varepsilon \geq 1$ ,  $(H1)$  l'est aussi pour un autre  $\varepsilon < 1$ , et nous pouvons donc supposer ici que  $\varepsilon < 1$ . Pour un certain  $\lambda$ , si  $t$  est assez grand,  $0 \leq \alpha(t) \leq \lambda/t^\varepsilon$  et l'intégrale

$$\int_{t_0}^{\infty} \left\| \frac{dv}{dt} \right\| dt$$

est alors absolument convergente, car  $r(t)$  est équivalent à  $t$  si  $t$  tend vers l'infini. Ainsi  $v(t)$  a une limite quand  $t \rightarrow \infty$ . Or  $q_t$  s'éloigne indéfiniment, ce qui fournit la limite  $q_\infty$  sur la sphère à l'infini.  $\square$

**PROPOSITION 5.5.** — *Sous l'hypothèse  $(R1_\varepsilon)$  avec  $\varepsilon > 0$  (éventuellement  $> 1$ ), la distance de  $q_t$  à la géodésique  $(pq_\infty)$  est un  $o(t)$ .*

*Preuve.* — De la même manière que pour le lemme 4.2, soit  $H(s, t)$  le point de  $[pq_t]$  à une distance  $s$  de  $p$ , c'est-à-dire  $H(s, t) = \exp_p(Q_{s,t})$ , où  $q_t = \exp_p(Q_t)$  et où  $Q_{s,t}$  est défini par

$$\overrightarrow{pQ_{s,t}} = \frac{s}{\|pQ_t\|} \cdot \overrightarrow{pQ_t} = \frac{s}{r(t)} \cdot \overrightarrow{pQ_t} \quad (\text{voir fig. 3}).$$

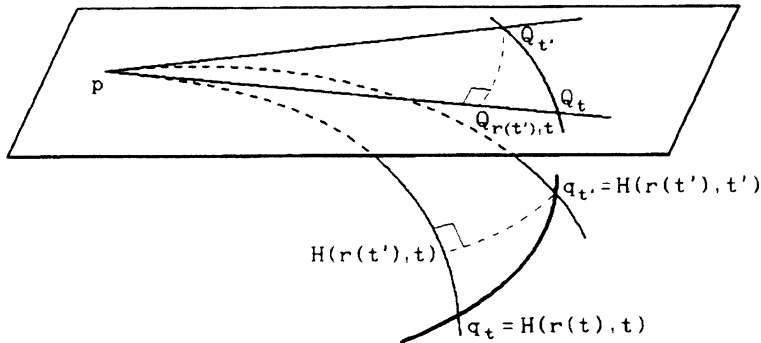


Fig. 3

Pour  $t$  fixé,

$$J(s) = \frac{\partial H(s, t)}{\partial t}$$

est, le long de  $[pq_t)$ , un champ de Jacobi nul en  $s = 0$ , et dont la valeur en  $r(t)$  est justement  $\pi_1(dq/dt)$  dans  $T_{q_t}(M)$  (voir lemme 5.4). La fonction  $s \rightsquigarrow \|J(s)\|$  est convexe, positive et nulle en 0 (Ballman, Gromov et Schroeder [BGS, p. 5]). Donc l'application  $s \rightsquigarrow \|J(s)\|/s$  est croissante sur  $\mathbb{R}^+$ . Ainsi, si  $t' \leq t$ , et si  $r$  est croissante sur  $[t', t]$ ,

$$\begin{aligned} \|J(r(t'))\| &\leq \frac{r(t')}{r(t)} \|J(r(t))\| = \\ &= \frac{r(t')}{r(t)} \left\| \pi_1 \left( \frac{dq}{dt} \right) \right\| = \frac{r(t')}{r(t)} \sin \alpha(t). \end{aligned} \quad (13)$$

Soit alors  $\varepsilon \in ]0, 1[$ ,  $\lambda, \mu$  des constantes  $> 0$ , et  $t_0 > 0$  tels que si  $t \geq t_0$  on ait à la fois :

$$\dot{r}(t) > 0, \quad \sin \alpha(t) \leq \frac{\lambda}{t^\varepsilon} \quad \text{et} \quad r(t) \geq \mu t.$$

Pour  $t_0 \leq t'$ ,

$$\int_{t'}^\infty \left\| \frac{\partial H(r(t'), t)}{\partial t} \right\| dt \leq \frac{\lambda r(t')}{\mu \varepsilon t'^\varepsilon},$$

donc pour  $t'$  fixé,  $H(r(t'), t)$  a une limite  $H(r(t'), \infty)$  lorsque  $t$  tend vers l'infini. Cette limite est sur la géodésique  $[pq_\infty)$ . Comme  $r(t')$  est un  $O(t')$ ,

$$d(q_{t'}, (pq_\infty)) \leq |q_{t'}, H(r(t'), \infty)| \leq \frac{\lambda r(t')}{\mu \varepsilon t'^\varepsilon}, \quad (14)$$

qui est un  $o(t')$  lorsque  $t'$  tend vers l'infini.  $\square$

**PROPOSITION 5.6.** — *La limite de  $q_t$  est aussi  $q_\infty$  pour la topologie horosphérique.*

*Preuve.* — La majoration de  $d(q_t, (pq_\infty))$  va nous permettre de montrer que si  $t$  est assez grand,  $q_t$  reste dans toute horoboule donnée "centrée en  $q_\infty$ ". À chaque "instant"  $t > 0$ , notons  $\pi_t$  l'image de  $q_t$  par la projection orthogonale sur  $\gamma = (pq_\infty)$  (voir [BGS, p. 8]). Comme  $|\pi_t, q_t|$  et un  $o(t)$  et  $|p, q_t| \sim t$  lorsque  $t$  tend vers l'infini,

$$|p, \pi_t| \rightarrow +\infty.$$

L'angle  $\angle ([pq_\infty), [pq_t])$  tend vers 0, puisque  $q_t \rightarrow q_\infty$  pour la topologie conique. Il est donc aigu pour  $t$  assez grand, et  $\pi_t$  s'éloigne indéfiniment de  $p$  du côté de  $q_\infty$ , ce qui signifie que sur la demi-géodésique  $[pq_\infty) = \text{Im}(\gamma)$  avec  $\gamma(0) = p$ ,  $\pi_t = \gamma(\omega(t))$  et  $\lim \omega(t) = +\infty$  si  $t$  tend vers  $+\infty$ .

Soit  $\rho_t$  l'image de  $q_t$  par la projection horosphérique (parallèlement aux horosphères centrées en  $q_\infty$ ) sur  $\gamma$ , c'est-à-dire l'unique point de  $\gamma$  sur la même horosphère que  $q_t$  (fig. 4).

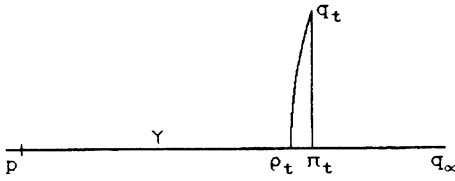


Fig. 4

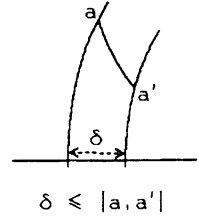


Fig. 5

Un arc entre deux points  $a$  et  $a'$  de  $M$  est au moins aussi long que sa projection horosphérique sur  $\gamma$ , car la longueur de cette dernière est la distance  $\delta$  entre les horosphères contenant  $a$  et  $a'$  (voir fig. 5; et Arnold et Avez [AA, appendice 21, p. 183]).

Ainsi,

$$|\rho_t, \pi_t| \leq |q_t, \pi_t|$$

et

$$|\rho_t, q_t| \leq |\rho_t, \pi_t| + |\pi_t, q_t| \leq 2|\pi_t, q_t|, \text{ qui est un } o(t).$$

Mais alors  $|\rho_t, \pi_t|$  est un  $o(t)$ , et  $\rho_t$  s'éloigne indéfiniment de  $p$  vers  $q_\infty$  de la même manière que  $\pi_t$  (et évidemment du même côté).

Une horoboule  $B$  centrée en  $q_\infty$  étant donnée, il existe donc  $A > 0$  tel que si  $t > A$ ,  $\rho_t \in B$ , et il en sera de même de  $q_t$ . Donc  $q_t$  tend vers  $q_\infty$  pour la topologie horosphérique.  $\square$



## 6. Existence d'une asymptote au sens large

Pour achever de prouver le théorème 1, il faut majorer  $\alpha(t)$  sous l'hypothèse (R2) (ou (H2) qui lui est équivalente).

PROPOSITION 6.1. — *Sous l'hypothèse (R2),  $\alpha(t)$  est un  $O(1/t)$  lorsque  $t$  tend vers l'infini.*

*Preuve.* — Pour reprendre les notations de la proposition 5.2, nous choisirons une constante  $\lambda$  telle que, pour  $t$  supérieur à  $t_0$ ,

$$k_g(t) \leq \frac{\lambda}{r(t)^{1+\varepsilon}}, \quad \text{avec } \varepsilon > 1,$$

ce qui traduit l'hypothèse (R2 $_{\varepsilon-1}$ ). Comme  $1 - \varepsilon$  est négatif,

$$0 \geq \left( \frac{r(t)}{r(t_0)} \right)^{1-\varepsilon} - 1 \geq -1$$

et

$$1 \leq \left( 1 + \frac{1}{1-\varepsilon} \left( \left( \frac{r(t)}{r(t_0)} \right)^{1-\varepsilon} - 1 \right) \right)^2 \leq \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon-1} \right)^2.$$

La relation (12) entraîne alors que

$$\dot{r}(t)^2 \geq 1 - \left( \frac{r(t_0)}{r(t)} \right)^2 \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon-1} \right)^2,$$

d'où il résulte avec (1) que  $\alpha(t)$  est un  $O(1/r(t))$ , et donc un  $O(1/t)$ .  $\square$

En fait, des hypothèses un peu plus faibles que (R2) entraînent que  $q_t$  reste à une distance bornée de  $(pq_\infty)$ . C'est l'objet de la proposition 6.2.

PROPOSITION 6.2. — *Supposons que l'arc  $q$  vérifie (R1) et que, de plus,  $\alpha(t)$  soit un  $O(1/t)$ . Alors la distance  $d(q_t, (pq_\infty))$  reste bornée lorsque  $t$  tend vers l'infini.*

*Preuve.* — Il suffit de reprendre la preuve de la proposition 5.5 en remplaçant à partir de la relation (13) le réel  $\varepsilon$  par 1, vue notre nouvelle hypothèse, la relation (14) devenant alors

$$d(q_{t'}, (pq_{\infty})) \leq |q_{t'}, H(r(t'), \infty)| \leq \frac{\lambda r(t')}{\mu \varepsilon t'},$$

qui est maintenant un  $O(1)$  lorsque  $t'$  tend vers l'infini.  $\square$

Bien entendu avec les hypothèses de la proposition 6.2,  $q_t$  reste à distance finie de toute géodésique dont le point à l'infini soit  $q_{\infty}$ .

On voit que sous l'hypothèse (H2), la distance  $d(q_t, (pq_{\infty}))$  reste bornée si  $t$  tend vers l'infini; ce qui achève de prouver le théorème 1.

## 7. La déviation méridienne à l'infini

Si l'on pouvait remplacer dans la discussion ci-dessus le point  $p$  par le point  $q_{\infty}$ , on aurait une preuve directe du théorème 2. Mais les sphères centrées en  $p$  devront être remplacées par des horosphères et les géodésiques  $[pq_t)$  par le flot radial à l'infini, qui n'ont pas, *a priori*, la différentiabilité suffisante au calcul. C'est pourquoi nous obtiendrons nos résultats par un passage à la limite dans les formules précédentes.

Menons de  $q_t$  la géodésique  $\gamma_t$  allant en  $q_{\infty}$  orientée vers  $q_{\infty}$ . Elle sera paramétrée de manière à couper en  $\gamma_t(0)$  l'horosphère  $H_0$  centrée en  $q_{\infty}$  passant par le point fixe  $p$ . Posons

$$R(t) = |\gamma_t(0), q_t|.$$

Pour  $t > T$  assez grand, nous venons de montrer que  $q_t$  reste dans l'horoboule bordée par  $H_0$ . Cela détermine le signe dans l'égalité :

$$R(t) = -f(q_t),$$

où  $f$  est la fonction de Busemann relative au point  $q_{\infty}$  nulle sur  $H_0$  (fig. 6). On supposera désormais  $t > T$ .

**PROPOSITION 7.1.** — *Sous l'hypothèse (H1),  $R(t)$  est équivalent à  $t$  si  $t$  tend vers l'infini.*

*Preuve.* — Avec les notations de la proposition 5.6, nous avons vu que

$$|p, q_t| \sim t \sim |p, \rho_t| \quad \text{si } t \rightarrow \infty$$

et

$$R(t) = |R(t)| = d(q_t, H_0) = |p, \rho_t|$$

([AA, lemmes A.21.2 et A.21.13, p. 183] : “Deux horosphères positives découpent des arcs de même longueur sur chaque asymptote à la géodésique  $\gamma$ .”).

On note alors  $\beta(t)$  l'angle (dans  $[0, \pi]$ ) que fait  $\dot{q}_t$  avec  $\gamma_t$  orientée vers  $q_\infty$  :

$$\beta = \text{Arccos} \langle \dot{q}_t, \gamma_t \rangle$$

(la déviation méridienne à l'infini). Nous aurons besoin d'une variante “à l'infini” de l'inégalité loxodromique (fig. 6).

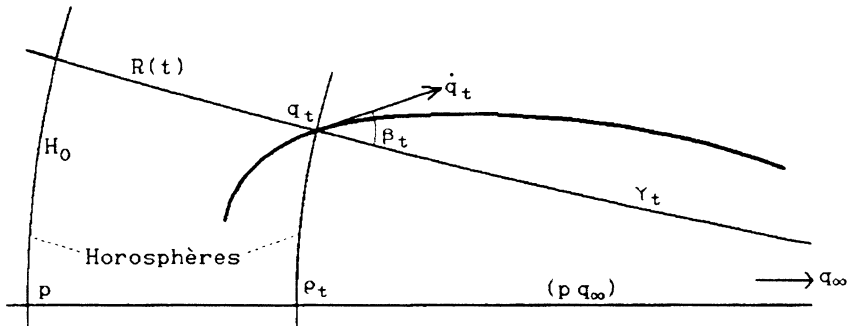


Fig. 6

PROPOSITION 7.2. — (inégalité loxodromique à l'infini) Si  $\dot{q}_t$  est transverse à  $\gamma_t = [q_t, q_\infty)$ , on a

$$-\frac{d\beta}{dt}(t) \leq k_g(t). \quad (15)$$

Pour cette preuve,  $t$  restera dans un intervalle borné  $I$  fixé. Si  $\xi$  est un point de  $\gamma = [p, q_\infty)$  distinct des  $q_t$  lorsque  $t$  reste dans  $I$ , soit  $w_\xi(t)$  le vecteur directeur unitaire de  $[q_t, \xi)$  en  $q_t$  et

$$\beta_\xi(t) = \text{Arccos} \langle \dot{q}_t, w_\xi(t) \rangle.$$

L'inégalité loxodromique (proposition 4.1) appliquée à  $\alpha_\xi = \pi - \beta_\xi(t)$  (et les "méridiens" partant de  $\xi$ , voir figure 7) entraîne que

$$-\frac{d\beta_\xi}{dt}(t) + \frac{\sin \beta_\xi(t)}{|q_t, \xi|} \leq k_g(t). \quad (16)$$

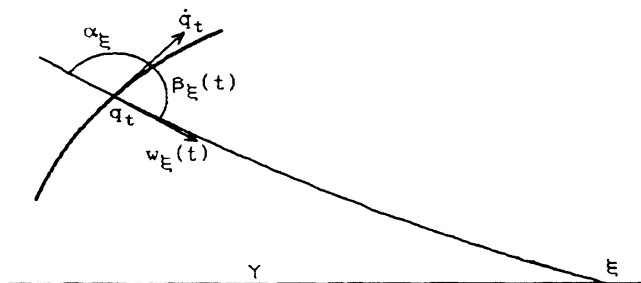


Fig. 7

Lorsque  $\xi$  tend vers  $q_\infty$  le long de  $\gamma$ ,  $\sin \beta_\xi(t)$  tend vers  $\sin \beta(t)$ , et le dénominateur tend vers l'infini. Il reste à montrer que  $(d\beta_\xi/dt)(t)$  tend vers  $(d\beta/dt)(t)$ , ou, ce qui est équivalent vue la définition de  $\beta_\xi$ , que la dérivée covariante  $(Dw_\xi/dt)(t)$  tend vers  $(Dw/dt)(t)$ . Ce sera une conséquence d'un résultat de Heintze et Im Hof.

LEMME ([H-IM, p. 484]) 7.3. — Soit  $\gamma$  une géodésique avec

$$\gamma(\infty) = z \quad \text{et} \quad p_n = \gamma(n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Si  $F_n$  est définie par

$$F_n(p) = |p_n, p| - n,$$

alors  $F = \lim F_n$  est une fonction de Busemann relative à  $z$ , et  $Z_n = -\text{grad } F_n$  est le champ radial en direction de  $p_n$  (non défini en  $p_n$ ). De plus,

- i) les champs  $Z_n$  convergent uniformément sur les compacts vers le champ  $Z = -\text{grad } F$ ;
- ii) et pour tout champ de vecteurs  $V$  sur  $M$  les dérivées covariantes  $\nabla_V Z_n$  convergent uniformément sur les compacts.

Pour appliquer ce lemme à notre proposition, dont nous reprenons les notations, posons  $p_n = \xi_n$ ,  $z = q_\infty$ , de sorte que  $Z_n(q(t))$  n'est autre que  $w_{\xi_n}(t)$  et  $Z(q(t)) = w(t)$ . Considérant les dérivées covariantes au voisinage de  $q(t_0)$  pour un champ de vecteurs  $V$  tel que  $V(q(t)) = \dot{q}(t)$ , la partie ii) du lemme entraîne que

$$\frac{Dw_{\xi_n}}{dt}(t) = \nabla_V Z_n(q(t))$$

converge lorsque  $\xi_n$  tend vers  $q_\infty$  sur  $\gamma$ , uniformément par rapport à  $t$  sur un intervalle borné. D'après la partie i) du lemme,  $w_{\xi_n}(t)$  tend vers  $w(t)$  uniformément par rapport à  $t$  dans l'intervalle  $I$ . Par convergence uniforme des dérivées covariantes,  $w$  est de classe  $C^1$ , et

$$\frac{Dw_{\xi_n}}{dt} \text{ converge vers } \frac{Dw}{dt} \text{ si } n \rightarrow \infty.$$

Cela prouve aussi la dérivabilité de  $\beta$ .  $\square$

Comme dans la proposition 4.5, l'inégalité loxodromique à l'infini donnera une inéquation différentielle, mais il faut établir l'analogie de (1) concernant la fonction  $R(t)$  pour  $t > T$ .

LEMME 7.4. — *Sans hypothèse de transversalité entre  $\dot{q}_t$  et  $\gamma_t$ ,*

$$\frac{dR}{dt} = \cos \beta.$$

*Preuve du lemme.* — Si  $\xi$  est un point assez loin sur  $\gamma = [pq_\infty)$ , et  $m$  un point de notre variété, posons :

$$F_\xi(m) = |m, \xi| - |p, \xi| \quad \text{et} \quad F(m) = \lim_{\xi \rightarrow q_\infty} F_\xi(m)$$

(cf. [H-IH]) de sorte que, comme  $p$  est sur  $H_0$ ,

$$F(q(t)) = -R(t).$$

La formule (1) s'écrit ici :

$$\frac{d}{dt} (F_\xi(q(t))) = \cos \alpha_\xi(t) = -\cos \beta_\xi(t),$$

et le lemme 7.3 i) entraîne que

$$\frac{d}{dt} (F_{\xi}(q(t))) = \langle \text{grad } F_{\xi}, \dot{q}_t \rangle \rightarrow \frac{d}{dt} (F(q(t))) = -\frac{dR}{dt} \quad \text{si } \xi \rightarrow q_{\infty}.$$

Or le vecteur directeur unitaire de  $[q_t \xi]$  en  $q_t$  tend vers celui de  $[q_t q_{\infty}]$  si  $\xi \rightarrow \infty$ , donc

$$\cos \beta_{\xi}(t) \rightarrow \cos \beta(t),$$

d'où le lemme.  $\square$

On a vu dans la preuve de la proposition 7.2 que  $\beta$  était de classe  $C^1$ , donc  $R$  est de classe  $C^2$  et

$$\frac{d^2 R}{dt^2} = -\sin \beta \frac{d\beta}{dt}, \quad (17)$$

ce qui, avec l'inégalité loxodromique à l'infini (15) et en se débarrassant de la condition de transversalité comme dans la proposition 4.5, donne les résultats suivants.

PROPOSITION 7.5. — Soit  $q$  un arc  $C^2$  vérifiant (H1) tel que si  $t > T$ ,  $q(t)$  reste dans l'horoboule dont le bord  $H_0$  passe par  $p$ , et soit  $R(t)$  la distance de  $q_t$  à  $H_0$ . Alors

$$\frac{d^2 R}{dt^2} \leq \sqrt{1 - \dot{R}^2} \cdot k_g. \quad (18)$$

COROLLAIRE 7.6. — Sous l'hypothèse (H1),  $dR/dt$  tend vers 1 si  $t$  tend vers l'infini.

Preuve. — Nous savons déjà que  $R(t)/t$  et  $r(t)/t$  tendent vers 1 si  $t$  tend vers l'infini. Sous l'hypothèse (H1 $_{\epsilon}$ ) et d'après la proposition 7.5, il existe une constante  $\lambda > 0$  telle que, pour  $t$  assez grand,  $d^2 R/dt^2 \leq \lambda/t^{1+\epsilon}$ , ce qui peut s'écrire aussi  $d\psi/dt \leq 0$ , où

$$\psi(t) = \frac{dR}{dt} + \frac{\lambda}{\epsilon t^{\epsilon}}.$$

La fonction  $\psi$  est décroissante à partir d'un certain  $t_1$ , et  $dR/dt$  a même limite, finie ou non, que  $\psi(t)$  lorsque  $t$  tend vers l'infini. Cette limite est 1 car  $R(t)/t$  tend vers 1.  $\square$

PROPOSITION 7.7. — *Sous l'hypothèse  $(H1_\varepsilon)$ ,  $\beta(t)$  est un  $O(1/t^\varepsilon)$  lorsque  $t$  tend vers l'infini.*

Contrairement à  $\alpha(t)$  dans la proposition 5.2, il n'est plus nécessaire que  $\varepsilon$  soit inférieur à 1.

*Preuve.* — D'après la proposition 7.5, il existe  $\lambda$  positif tel que, si  $t$  est assez grand pour que  $k_g(t)$  soit inférieur à  $\lambda/R^{1+\varepsilon}$ , et si  $\dot{R}(t)$  n'est pas nul, on a :

$$\frac{\ddot{R}}{\sqrt{1 - \dot{R}^2}}(t) \leq \frac{\lambda}{R^{1+\varepsilon}}(t). \quad (19)$$

Si  $t$  est assez grand,  $\dot{R}(t) = dR/dt$  est positif (car il tend vers 1) et l'on peut multiplier les deux membres de l'inégalité (19) par  $\dot{R}$ , et l'intégrer comme dans le corollaire 4.6, sans avoir à distinguer le cas où  $\dot{R}(t)$  est égal à 1. Ainsi, pour deux réels  $t_1$  et  $t_2$  assez grands tels que  $t_2 > t_1$ ,

$$\sqrt{1 - \dot{R}(t_2)^2} - \sqrt{1 - \dot{R}(t_1)^2} \geq \frac{\lambda}{\varepsilon} \left( \frac{1}{R(t_2)^\varepsilon} - \frac{1}{R(t_1)^\varepsilon} \right).$$

Si l'on fait tendre  $t_2$  vers l'infini, cela donne :

$$\sin \beta(t_1) = \sqrt{1 - \dot{R}(t_1)^2} \leq \frac{\lambda}{\varepsilon R(t_1)^\varepsilon},$$

et  $\sin \beta(t)$  et  $\beta(t)$  sont des  $O(t^\varepsilon)$  lorsque  $t$  tend vers l'infini.  $\square$

## 8. Preuve du théorème 2

L'ensemble des géodésiques allant en  $q_\infty$ , muni de l'écart naturel (voir, sect. 2) :

$$d(\gamma, \gamma') = \inf_{u, v \in \mathbb{R}} |\gamma(u), \gamma'(v)|$$

est un espace uniforme noté  $\mathcal{G}(q_\infty)$  (*a priori* non séparé), d'espace séparé associé  $G(q_\infty)$  considéré à la section 2.

LEMME 8.1. —  *$d(\gamma, \gamma')$  est aussi la limite, lorsque  $t$  tend vers l'infini, de  $d(\gamma(t), \gamma'(t))$  si  $\gamma(0)$  et  $\gamma'(0)$  sont sur la même horosphère (auquel cas,  $\gamma(t)$  et  $\gamma'(t)$  sont aussi sur la même horosphère pour tout  $t$ ).*

*Preuve.* — Si  $t_1 < t_2$ ,

$$|\gamma(t_1), \gamma'(t_2)| > |\gamma(t_2), \gamma'(t_2)|,$$

car la projection de  $\gamma'(t_2)$  sur  $\gamma$  est dans l'horoboule sur le bord de laquelle se trouve  $\gamma'(t_2)$ , et l'application  $t \rightsquigarrow |\gamma(t), \gamma'(t_2)|$  est convexe, donc décroissante sur  $] -\infty, t_2[$ . Donc  $d(\gamma, \gamma')$  est la borne inférieure des  $|\gamma(t), \gamma'(t)|$  lorsque  $t$  varie.  $\square$

Cela résultera aussi du lemme 9.2, qu'on verra plus loin.

**PROPOSITION 8.2.** — *Sous l'hypothèse (H2), la famille de géodésiques  $(\gamma_t)$  est de Cauchy dans l'espace  $\mathcal{G}(q_\infty)$  lorsque  $t$  tend vers l'infini.*

*Preuve.* — Les horosphères considérées désormais seront toutes “centrées” en  $q_\infty$ . On notera  $d_{\text{hor}}$  la distance sur la sous-variété  $H$  (de classe  $C^2$  (cf. sect. 2)). Soit  $H_0$  l'horosphère passant par  $p$ , bordant l'horoboule  $B_0$ . Rappelons que l'application  $\phi$  de  $\mathbb{R} \times H_0$  dans  $M$  qui associe à  $(s, m)$  le point de paramètre  $s$  sur la géodésique partant de  $m$  à l'instant 0 vers  $q_\infty$  est un homéomorphisme (voir [EO, prop. 3.4, p. 58]). Soit donc  $p(t)$  l'unique point de  $\gamma_t$  sur  $H_0$ . Notons  $\mathcal{H}(s, t)$  le point  $\phi(s, p(t))$  de  $B_0$  à la distance  $s \geq 0$  de  $p(t)$  sur  $\gamma_t$ , qui se trouve sur l'horosphère  $H_s$ , de sorte que  $\mathcal{H}(R(t), t) = q_t$  est sur  $H_{R(t)}$  (voir fig. 8).

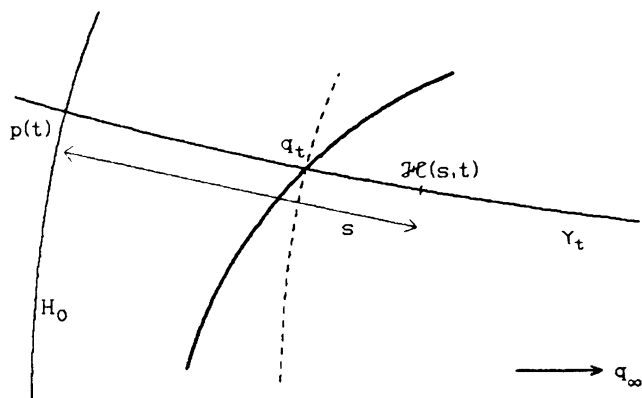


Fig. 8



Nous aurons besoin du lemme suivant.

LEMME FONDAMENTAL 8.3. — *L'application  $\mathcal{H}$  est de classe  $C^1$ , et pour tout  $t$  l'application*

$$s \rightsquigarrow \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}(s, t)$$

*est un champ de Jacobi.*

La preuve classique du fait que, pour une “variation  $\mathcal{H}$  par des géodésiques”,  $\partial \mathcal{H}(\cdot, t)/\partial t$  est un champ de Jacobi fait appel aux dérivées partielles troisièmes (covariantes) de  $\mathcal{H}$  et ne peut être utilisée ici, même si l'arc  $(q_t)$  est très régulier, car notre variation  $\mathcal{H}$  n'est pas *a priori* plus régulière que les horosphères (voir sect. 2).

Ainsi, ce lemme est d'autant plus remarquable qu'on ne sait même pas si  $\mathcal{H}$  est de classe  $C^2$ .

*Preuve du lemme.* — C'est une conséquence directe de la régularité du champ radial  $Z$  du lemme 7.3. Précisément, ce champ est de classe  $C^1$ , comme le montrent Heintze et Im Hof ([H-IH, prop. 3.1, p. 484] qui font justement usage de ce qu'on a rappelé ici avec le lemme 7.3). Donc son flot est de classe  $C^1$ , et l'on reconnaît dans  $\mathcal{H}$  la composée de ce flot et d'une application de classe  $C^1$  de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$  dans  $M$ , puisque

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial s(s, t)} = Z(\mathcal{H}(s, t)).$$

La même proposition de [H-IH] établit que tout champ  $J$  de Jacobi stable le long de la géodésique  $\mathcal{H}(\cdot, t)$  vérifie l'équation différentielle linéaire  $J' = \nabla_J Z$  (de variable  $s$ ). Or un théorème sur les dérivées croisées d'un flot de champ de vecteurs  $C^1$  (pas nécessairement  $C^2$ , voir par exemple [Hart, th. 3.1, p. 95 et th. 3.2, p. 97]) entraîne que  $\partial \mathcal{H}/\partial t$  admet une dérivée covariante par rapport à  $s$  telle que :

$$\frac{D}{ds} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = \frac{D}{dt} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial s} = \nabla_{\partial \mathcal{H}/\partial t} Z,$$

de sorte que  $\partial \mathcal{H}/\partial t(\cdot, t)$  vérifie la même équation différentielle linéaire que le champ de Jacobi stable de même valeur pour  $s = 0$ . Cette dérivée partielle est donc elle-même un champ de Jacobi stable.  $\square$

On peut donc écrire :

$$\frac{d}{dt} \mathcal{H}(R(t), t) = \dot{R}(t) \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial s}(R(t), t) + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}(R(t), t),$$

où

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial s}(R(t), t)$$

est unitaire tangent à  $\gamma_t$  en  $q_t$ , et

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}(R(t), t)$$

est tangent à  $H_{R(t)}$ . Ce dernier vecteur est donc le projeté orthogonal de  $\dot{q}_t$  sur l'hyperplan tangent à  $H_{R(t)}$  en  $q_t$  et sa norme est  $\sin \beta(t)$ .

On remarque que  $\mathcal{H}$  est un paramétrage par des coordonnées géodésiques-horosphériques, mais où l'on se déplace sur l'horosphère de référence  $H_0$  à une vitesse variable dépendant de l'angle  $\angle(\dot{q}_t, \gamma_t)$ .

Sous l'hypothèse  $(H1_\varepsilon)$ , si  $t$  est assez grand, d'après la proposition 7.7,  $\sin \beta(t)$  est majoré par  $\mu/t^\varepsilon$ ,  $\mu$  constante. Sous l'hypothèse  $(H2_\varepsilon)$  équivalente à  $(H1_{1+\varepsilon})$ , on a :

$$\sin \beta(t) \leq \frac{\mu}{t^{1+\varepsilon}}.$$

Supposons de plus  $t$  assez grand pour que l'application  $\tau \rightsquigarrow R(\tau)$  soit croissante sur l'intervalle  $[t, +\infty[$ , et soit  $t' > t$ .

Pour  $t'' \geq t'$ , lorsque  $\tau$  varie entre  $t$  et  $t'$ , le point

$$m_{t'', \tau} = \mathcal{H}(R(t''), \tau)$$

décrit un arc de l'horosphère qui contient  $q_{t''}$  (fig. 9), et

$$\left\| \frac{\partial}{\partial \tau}(m_{t'', \tau}) \right\| = \left\| \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}(R(t''), \tau) \right\| \leq \left\| \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}(R(\tau), \tau) \right\|$$

en vertu du lemme 8.3, et par convexité des normes des champs de Jacobi stables. Lorsque  $\tau$  varie entre  $t$  et  $t'$ , la distance parcourue par  $m_{t'', \tau}$  entre  $m_{t'', t}$  et  $m_{t'', t'}$  est

$$\begin{aligned} d_{\text{hor}}(m_{t'', t}, m_{t'', t'}) &= \int_t^{t'} \left\| \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}(R(t''), \tau) \right\| d\tau \leq \\ &\leq \int_t^{t'} \left\| \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}(R(\tau), \tau) \right\| d\tau \\ &\leq \mu \int_t^{t'} \frac{d\tau}{\tau^{1+\varepsilon}} = \frac{\mu}{\varepsilon} \left( \frac{1}{t^\varepsilon} - \frac{1}{t'^\varepsilon} \right). \end{aligned} \tag{20}$$

L'écart  $d(\gamma_t, \gamma_{t'})$  est la limite de la distance  $|m_{t'',t}, m_{t'',t'}|$ , mesurée cette fois-ci dans  $M$ , qui est majorée par le membre de droite de l'inégalité (20), d'où la proposition.  $\square$

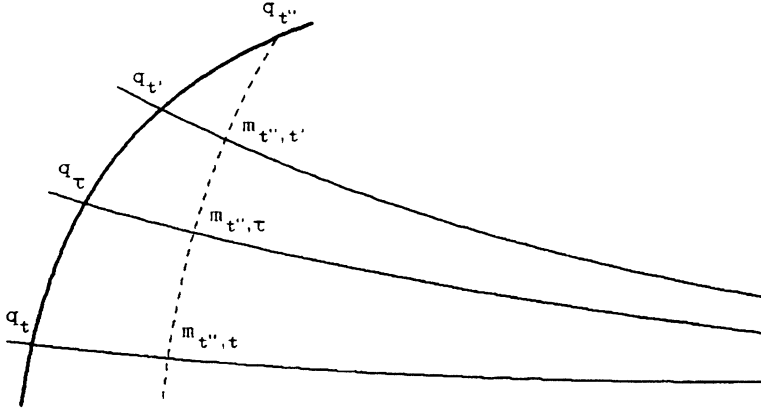


Fig. 9

PROPOSITION 8.4. — Si la famille  $(\gamma_t)$  converge dans  $\mathcal{G}(q_\infty)$  vers une géodésique  $\gamma$  lorsque  $t$  tend vers l'infini,  $\gamma$  est une asymptote stricte de l'arc  $q = (q_t)$ .

Preuve. — Fixons  $\eta > 0$ . Avec les notations de la preuve ci-dessus, il existe  $\mu > 0$  tel que, si  $T$  est assez grand, pour tout  $t > T$ ,

$$d(q_t, \gamma_T) \leq |q_t, m_{t,T}| \leq \frac{\mu}{\varepsilon} \left( \frac{1}{T^\varepsilon} - \frac{1}{t^\varepsilon} \right) \leq \eta.$$

L'image  $h_t$  de  $q_t$  par la projection orthogonale sur  $\gamma_T$  vérifie donc

$$|q_t, h_t| = d(q_t, \gamma_T) \leq \eta$$

(voir fig. 10) et tend vers  $q_\infty$  pour la topologie horosphérique lorsque  $t$  tend vers l'infini. En effet, une fonction  $f$  de Busemann en  $q_\infty$  vérifie :

$$f(h_t) \leq f(q_t) + |q_t, h_t|.$$

Le point  $\ell_t$  de  $\gamma$  sur la même horosphère que  $h_t$  tend de même vers  $q_\infty$ .

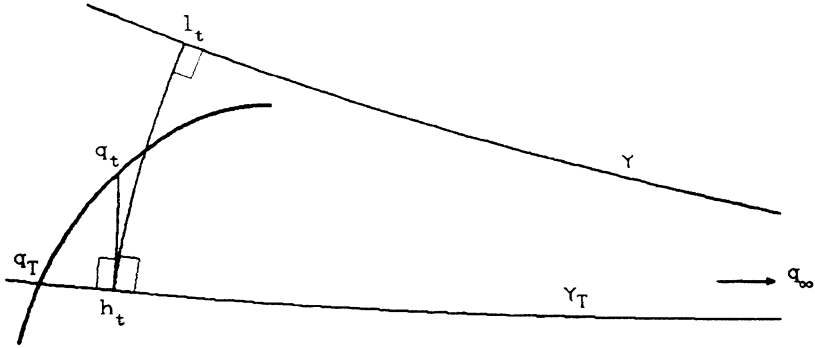


Fig. 10

Prenons  $T$  assez grand pour que, de plus, si  $t \geq T$ ,

$$d(\gamma_t, \gamma) \leq \eta.$$

Le lemme 8.1 entraîne que

$$d(\gamma_T, \gamma) = \lim_{t \rightarrow \infty} |h_t, \ell_t|,$$

et si  $t$  est assez grand,  $|h_t, \ell_t| \leq 2\eta$ . Mais alors  $|q_t, \ell_t| \leq 3\eta$ , d'où la proposition.  $\square$

Le théorème 2 est maintenant prouvé.

**COROLLAIRE 8.5.** — *Si la variété  $M$  vérifie l'axiome zéro de [EO] (c'est-à-dire que, pour deux géodésiques  $\gamma$  et  $\gamma'$  qui vont au même point à l'infini,  $d(\gamma, \gamma') = 0$ ), alors un arc  $C^2$  vérifiant (H2) a une asymptote stricte.*

En effet, toute géodésique allant en  $q_\infty$  est une limite de  $(\gamma_t)$ .  $\square$

On sait déjà, avec [EO], que c'est le cas lorsque la courbure de  $M$  est "d'ordre  $\leq 1$  en  $q_\infty$ " (voir ici la section 1, et [EO, prop. 5.11, p. 71]) et en particulier si la courbure de  $M$  est majorée par une constante  $a < 0$ . Nous affaiblirons l'hypothèse plus loin.

## 9. Une autre expression de l'écart à l'infini

Rappelons que l'ensemble des points à l'infini est l'ensemble des classes d'équivalence de géodésiques orientées pour la relation "rester à distance bornée quand le paramètre tend vers  $+\infty$ " (voir [EO]). Soit  $x$  une telle classe. Muni de l'écart défini à la section 8, l'ensemble  $x$  est noté  $\mathcal{G}(x)$  et son séparé  $G(x)$ .

Pour énoncer des conditions suffisantes sous lesquelles un arc vérifiant (H2) a une asymptote stricte, il sera avantageux de donner une autre expression de cet écart. Nous définirons provisoirement un autre écart, l'écart horosphérique à l'infini  $d_{\text{hor}}$ , sur  $\mathcal{G}(x)$ , pour montrer ensuite qu'il coïncide avec  $d$ .

Pour deux géodésiques  $\gamma, \gamma' \in x$ ,  $d_{\text{hor}}(\gamma, \gamma')$  est la limite, lorsque  $s$  tend vers l'infini, de la distance  $d_{\text{hor}}(\gamma(s), \gamma'(s))$  mesurée sur l'horosphère  $H_s$  centrée en  $x$  commune à  $\gamma(s)$  et  $\gamma'(s)$ , en paramétrant convenablement  $\gamma$  et  $\gamma'$ . L'existence de cette limite est garantie par le lemme 9.1.

LEMME 9.1. — Si  $\gamma$  et  $\gamma'$  sont deux géodésiques "allant en  $x \in M(\infty)$ ", paramétrées par la longueur de l'arc  $s$  de telle sorte que  $\gamma(s)$  et  $\gamma'(s)$  soient sur la même horosphère  $H_s$ , la fonction

$$s \rightsquigarrow d_{\text{hor}}(\gamma(s), \gamma'(s))$$

est décroissante.

Preuve du lemme. — Dans  $H_s$ , menons une géodésique (relative à  $H_s$ ) de  $\gamma(s)$  à  $\gamma'(s)$  de longueur minimale : elle existe, car une horosphère est  $C^2$  et complète comme surface de niveau d'une fonction de Busemann (voir [H-IH, § 4, p. 486]), mais n'est pas *a priori* unique car les horosphères ne sont pas nécessairement de courbure négative (voir [H-IH]). Comme d'habitude, cela définit une "variation de  $\gamma$  par des géodésiques"  $\mathcal{H}(\sigma, t)$  telle que, pour tout  $\sigma \geq s$ ,

$$\mathcal{H}(\sigma, a) = \gamma(\sigma), \quad \mathcal{H}(\sigma, b) = \gamma'(\sigma),$$

$\mathcal{H}(\cdot, t)$  soit une géodésique  $\gamma_t \in x$  paramétrée par la longueur, et que  $t \rightsquigarrow \mathcal{H}(s, t)$  soit un paramétrage par la longueur du chemin choisi de  $\gamma(s)$  à  $\gamma'(s)$ . Il n'y a aucune raison, si  $\sigma \neq s$ , pour que  $\mathcal{H}(\sigma, \cdot)$  paramètre un arc de géodésique sur la sous-variété  $H_\sigma$ . Mais avec le lemme 8.3, la longueur

de l'arc  $\mathcal{H}(\sigma, \cdot)$  est l'intégrale de  $\|\partial\mathcal{H}(\sigma, \cdot)/\partial t\|$  sur  $[a, b]$  et la convexité de la norme des champs de Jacobi stables entraîne que cette intégrale est majorée par la longueur de l'arc  $\mathcal{H}(s, \cdot)$  et majore elle-même la distance mesurée sur  $H_\sigma$  de  $\gamma(\sigma)$  à  $\gamma'(\sigma)$ .  $\square$

Pour montrer que  $d_{\text{hor}} = d$ , nous aurons besoin d'un lemme.

**LEMME 9.2.** — Soit  $M$  une variété de Hadamard,  $p \in M$ ,  $\gamma$  et  $\gamma'$  deux demi-géodésiques partant de  $p$ , paramétrées par la longueur de l'arc. Soit  $q \in \gamma$  et  $q' \in \gamma'$  tels que le segment géodésique  $[q, q']$  soit en tout point hors de la boule  $B(p, R)$  de rayon  $R$  centrée en  $p$  et bordée par la sphère  $S$ . Si  $d_S$  est la distance de la métrique induite sur  $S$ , alors :

$$d_S(\gamma(R), \gamma'(R)) \leq |q, q'|.$$

*Preuve du lemme.* — Si  $c(t)$  est le point du segment  $[q, q']$  à une distance  $t$  de  $q$ , soit  $H(s, t)$  le point du rayon géodésique  $[p, c(t)]$  à la distance  $s$  de  $p$ , et définissons  $r(t)$  par  $c(t) = H(r(t), t)$ . Ainsi,

$$\begin{aligned} |q, q'| &= \int_0^t \left\| \frac{d}{d\tau} H(r(\tau), \tau) \right\| d\tau \\ &= \int_0^t \left\| \frac{dr}{d\tau} \frac{\partial H}{\partial s}(r(\tau), \tau) + \frac{\partial H}{\partial t}(H(r(\tau), \tau)) \right\| d\tau. \end{aligned}$$

Comme  $H(s, t) = \exp_p(sw(t))$ ,  $w(t)$  de norme 1 partant de  $p$  vers  $c(t)$ ,  $\partial H/\partial s$  est radial,  $\partial H/\partial t$  orthoradial, et d'après Pythagore :

$$\left\| \frac{dr}{d\tau} \frac{\partial H}{\partial s}(r(\tau), \tau) + \frac{\partial H}{\partial t}(H(r(\tau), \tau)) \right\| \geq \left\| \frac{\partial H}{\partial t}(H(r(\tau), \tau)) \right\|.$$

Mais

$$\left\| \frac{\partial H}{\partial t}(H(r(\tau), \tau)) \right\| \geq \left\| \frac{\partial H}{\partial t}(H(R, \tau)) \right\|,$$

car  $r(\tau) \geq R$  et la fonction  $\|\partial H/\partial t(\cdot, t)\|$  est convexe et nulle en 0, donc croissante. L'intégrale :

$$\int_0^t \left\| \frac{\partial H}{\partial t}(H(R, \tau)) \right\| d\tau$$

majore la distance  $d_S(\gamma(R), \gamma'(R))$ , d'où le lemme.  $\square$

PROPOSITION 9.3. — *Les écarts  $d_{\text{hor}}$  et  $d$  sur  $\mathcal{G}(x)$  sont identiques.*

*Preuve.* — Soit  $\gamma$  et  $\gamma'$  deux géodésiques telles que

$$\gamma(+\infty) = \gamma'(+\infty) = x$$

de paramètre  $s$  donné maintenant par la même fonction de Busemann (donc partant, pour  $s = 0$ , de la même horosphère). On sait que si  $s \geq 0$ ,

$$d_{\text{hor}}(\gamma(s), \gamma'(s)) \geq |\gamma(s), \gamma'(s)|.$$

L'arc géodésique de  $M$  qui joint  $\gamma(s)$  à  $\gamma'(s)$  est compact et  $\subset M$ . Il se trouve donc à l'extérieur d'une horosphère contenant  $\gamma(s_1)$  et  $\gamma'(s_1)$ , pour un certain  $s_1 > s$ . Le lemme 9.2 montre, par passage à la limite (licite d'après le lemme 8.3) sur le centre de la sphère (rejeté maintenant en  $x \in M(\infty)$ ), que :

$$d_{\text{hor}}(\gamma(s_1), \gamma'(s_1)) \leq |\gamma(s), \gamma'(s)|.$$

On conclut en passant ensuite à la limite sur  $s$ .  $\square$

Signalons que, dans le cas où la valeur absolue de la courbure de la variété  $M$  est majorée sur une horoboule centrée en  $x$ , on pouvait déduire l'équivalence des écarts  $d_{\text{hor}}$  et  $d$  sur  $\mathcal{G}(x)$  de [H-IH, th. 4.6] qui compare la distance entre deux points d'une horosphère mesurée dans  $M$  et sur l'horosphère. Il est remarquable qu'à l'infini, ces écarts soient égaux sans hypothèse sur la courbure (négative).

### 10. Preuve de la première assertion du théorème 3

PROPOSITION 10.1. — *Si la courbure de  $M$  est d'ordre  $\leq 2$  en  $x \in M(\infty)$ ,  $d(\gamma, \gamma') = 0$  pour tout couple  $(\gamma, \gamma')$  de géodésiques allant en  $x$ , et  $G(x)$  est réduit à un point.*

À chaque chemin de classe  $C^1$  paramétré par la longueur de l'arc joignant  $\gamma(0)$  à  $\gamma'(0)$  sur  $H_0$ , on peut faire correspondre comme dans le lemme 9.1 une "variation"  $\mathcal{H}(s, t)$  telle que, pour tout  $s \geq 0$ ,

$$\mathcal{H}(s, a) = \gamma(s), \quad \mathcal{H}(s, b) = \gamma'(s),$$

pour tout  $t \in [a, b]$ ,

$$\mathcal{H}(\cdot, t) = \gamma_t \in x,$$

et l'application  $t \rightsquigarrow \mathcal{H}(0, t)$  soit un paramétrage par la longueur de ce chemin.

D'après le lemme 8.3,  $J(s, t) = \partial \mathcal{H} / \partial t(s, t)$  définit sur la géodésique  $\gamma_t$  un champ de Jacobi stable et la longueur de l'arc  $\mathcal{H}(s, \cdot)$  de l'horosphère  $H_s$  est :

$$\ell(s) = \int_a^b \|J(s, t)\| dt.$$

La proposition est établie si l'on montre que  $\ell(s)$  tend vers 0 lorsque  $s$  tend vers l'infini. Nous allons prouver pour cela que  $\|J(s, t)\|$  tend vers zéro lorsque  $s$  tend vers l'infini, uniformément par rapport à  $t \in [a, b]$ . Il suffit que la limite simple de  $J(s, t)$  soit nulle, car pour tout  $t$  la fonction  $s \rightsquigarrow \|J(s, t)\|$  est décroissante par convexité des champs de Jacobi stables, et la convergence uniforme résulte du premier théorème de Dini car  $J(s, \cdot)$  est continue d'après le lemme 8.3.

On peut poser  $t = 0$ . Le champ de Jacobi  $J(s) = J(s, 0)$  est orthogonal à  $\dot{\gamma}$  et vérifie le résultat suivant.

LEMME 10.2. — Si  $K$  est la courbure sectionnelle du plan  $\mathbb{R}\dot{\gamma} + \mathbb{R}J$ ,

$$\frac{d^2 \|J\|}{ds^2} = \|J\|'' \geq |K| \cdot \|J\|.$$

En effet,

$$\begin{aligned} \|J\|'' &= \frac{\langle J, J'' \rangle}{\|J\|} + \frac{\langle J', J' \rangle \langle J, J \rangle - \langle J, J' \rangle^2}{\|J\|^3} \geq \\ &\geq \frac{\langle J, J'' \rangle}{\|J\|} = -K \|J\|. \quad \square \end{aligned}$$

Rappelons que  $k(\gamma, s)$  est le minimum des valeurs absolues  $|K(\pi)|$  pour les plans qui contiennent  $\dot{\gamma}(s)$ . Par hypothèse, l'intégrale

$$\int_0^\infty s k(\gamma, s) ds$$

diverge, et, d'après le lemme 10.2, l'intégrale

$$\int_0^\infty s \frac{\|J\|''}{\|J\|}(s) ds$$

aussi.



La convergence de  $\|J(s)\|$  vers 0 lorsque  $s$  tend vers l'infini résulte alors du lemme suivant.

LEMME 10.3. — Soit  $u$  une fonction convexe, strictement positive, décroissante et de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}^+$ . La limite de  $u$  en  $+\infty$  est nulle si et seulement si l'intégrale

$$I = \int_0^\infty t \frac{u''(t)}{u(t)} dt$$

diverge.

On peut déduire ce lemme de Hartman [Hart, corol. 9.1, p. 380]. Mais nous préférons l'établir directement à l'aide d'un "sous-lemme" qui nous sera utile plus loin.

LEMME DE TASSEMENT PAR CONVEXITÉ 10.4. — Soit  $u$  une fonction convexe, minorée, décroissante, et  $C^2$  sur  $\mathbb{R}^+$ . Alors

$$\lim_{t \rightarrow \infty} tu'(t) = 0.$$

Comme la fonction  $t \rightsquigarrow u(t) - tu'(t)$  (ordonnée de  $N_t$  sur la figure 11) est décroissante minorée,  $tu'(t)$  converge, et ce ne peut être que vers 0.  $\square$

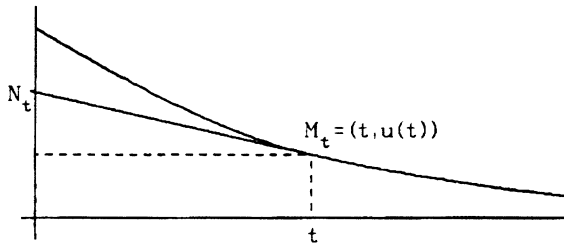


Fig. 11

Pour le lemme 10.3,  $u$  est strictement positive, de limite  $\lambda$  en  $+\infty$ . Montrons que si  $\lambda > 0$ , l'intégrale  $I$  converge. En effet,

$$\text{si } t \geq 0, \quad \int_0^t \tau \frac{u''(\tau)}{u(\tau)} d\tau \leq \frac{1}{\lambda} \int_0^t \tau u''(\tau) d\tau,$$

et cette dernière intégrale converge, par intégration par parties, lorsque  $t$  tend vers l'infini. Dans l'autre sens, supposons que l'intégrale  $I$  converge et

que  $u(t)$  tende vers 0 si  $t$  tend vers l'infini, et montrons une contradiction. Pour tout  $a \geq 0$ , si  $t \geq a$ ,

$$\begin{aligned} \int_a^t \tau \frac{u''(\tau)}{u(\tau)} d\tau &\geq \frac{1}{u(a)} \int_a^t \tau u''(\tau) d\tau = \\ &= \frac{1}{u(a)} (u(a) - au'(a) - u(t) + tu'(t)). \end{aligned}$$

Or si  $u(t)$  tend vers 0 lorsque  $t$  tend vers l'infini,  $u(t) - tu'(t)$  tend vers 0, d'après le sous-lemme, et

$$\int_a^\infty \tau \frac{u''(\tau)}{u(\tau)} d\tau \geq 1 - \frac{au'(a)}{u(a)} \geq 1,$$

pour tout  $a$ , ce qui contredit la convergence de  $I$ .  $\square$

## 11. L'espace des géodésiques allant en $x$ en dimension 2

Nous avons introduit l'écart  $d_{\text{hor}}$  pour le résultat suivant.

**PROPOSITION 11.1.** — *Soit  $M$  une variété de Hadamard de dimension 2, et  $x \in M(\infty)$ . L'espace  $G(x)$  séparé associé à  $\mathcal{G}(x)$  est isométrique à un intervalle de  $\mathbb{R}$ .*

*Preuve.* — Choisissons un horocycle  $H_0$ , qui est sous-variété de classe  $C^2$  complète (voir [H-IH], même référence que pour le lemme 9.1) maintenant isométrique à  $\mathbb{R}$ , et une géodésique  $\gamma \in x$ , telle que  $\gamma(0)$  soit sur  $H_0$ .

Un paramétrage par la longueur de l'arc de  $H_0$  donne lieu, comme dans la proposition 10.1, à une variation  $\mathcal{H}(s, t)$  de  $\gamma$  ( $s \geq 0$ ,  $t$  maintenant quelconque), et

$$\mathcal{H}(s, t) = \phi(s, \mathcal{H}(0, t)),$$

où  $\phi$  est l'homéomorphisme de la proposition 8.2. Soit  $f_s(t)$  le paramètre de longueur d'arc de  $\mathcal{H}(s, t)$  sur  $H_s = \mathcal{H}(s, \cdot)$  orienté d'origine  $\mathcal{H}(s, 0)$ . Pour  $\sigma > s$ , les géodésiques allant en  $x$  donnent une contraction  $H_s \rightarrow H_\sigma$  pour les métriques induites. En particulier, les  $f_s$  sont (monotones et) 1-lipschitziennes.

Comme les horocycles sont de dimension 1, les fonctions  $f_s$  admettent une limite simple  $f_\infty$  (en décroissant) lorsque  $s$  tend vers l'infini, qui est, comme elles, monotone et 1-lipschitzienne. L'écart  $d_{\text{hor}}$  sur  $\mathcal{G}(x)$  est alors l'image réciproque de la distance euclidienne de  $\mathbb{R}$  par l'application  $f_\infty \circ \mathcal{H}(0, \cdot)^{-1}$  monotone et continue, d'où le résultat.  $\square$

En particulier, le complété de  $G(x)$  a au plus deux points en plus de  $G(x)$ , et c'est "au bord" de  $G(x)$  seulement que peut "manquer" une géodésique limite pour une suite de Cauchy.

## 12. Fin de la preuve du théorème 3

Ici aussi, nous utiliserons l'écart de  $\mathcal{G}(x)$  sous la forme  $d_{\text{hor}}$ . Soit  $M$  une surface de Hadamard,  $x \in M(\infty)$ ,  $B_0$  un "horodisque" centré en  $x$  et bordé par l'horocycle  $H_0$ . Paramétrons  $H_0$  par la longueur de l'arc de  $-\infty$  à  $+\infty$ , et soit encore  $\mathcal{H}(s, t)$  le point à une distance  $s$  de  $\mathcal{H}(0, t)$  sur la géodésique  $\gamma_t = \mathcal{H}(\cdot, t) \in x$ , où  $\mathcal{H}(0, \cdot)$  paramètre  $H_0$ . Posons  $J(s, t) = (\partial \mathcal{H} / \partial t)(s, t)$ . Les deux dernières assertions du théorème 3 reposent alors sur le lemme 12.1.

LEMME 12.1. — *Pour tout réel  $t$ ,*

$$t - d_{\text{hor}}(\gamma_0, \gamma_t) = \mathcal{A}_t,$$

où

$$\mathcal{A}_t = - \int_0^t \int_0^\infty s K(\mathcal{H}(s, \tau)) \|J(s, \tau)\| \, d\tau \, ds.$$

*Preuve du lemme.* — Le signe constant de la courbure donne un sens à cette intégrale.

En dimension 2,  $\partial^2 \|J\| / \partial s^2 = -K \|J\|$  puisque  $\partial J / \partial s$  est colinéaire à  $J$ . Donc

$$\mathcal{A}_t = \int_0^t \int_0^\infty s \frac{\partial^2 \|J\|}{\partial s^2}(s, \tau) \, d\tau \, ds. \quad (22)$$

Comme  $\|J(s, t)\|$  est borné lorsque  $s$  varie, le lemme de tassement par convexité (lemme 10.4) entraîne que  $s \partial \|J\| / \partial s$  tend vers 0 si  $s$  tend vers l'infini. Si, pour  $0 \leq \tau \leq t$ ,  $\lambda_\tau$  est la limite de  $\|J(s, \tau)\|$  quand  $s$  tend vers l'infini,

$$\int_0^A s \frac{\partial^2 \|J\|}{\partial s^2}(s, \tau) \, ds = \left[ s \frac{\partial \|J\|}{\partial s} - \|J\| \right]_{s=0}^{s=A} \quad \text{tend vers } \|J(0, \tau)\| - \lambda_\tau$$

en croissant, lorsque  $A$  tend vers l'infini. Comme la fonction à intégrer dans (22) est positive, d'après le théorème de Fubini,

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_t &= \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^t \int_0^A s \frac{\partial^2 \|J\|}{\partial s^2}(s, \tau) \, ds \, d\tau \\ &= \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^t \left[ s \frac{\partial \|J\|}{\partial s} - \|J\| \right]_{s=0}^{s=A} d\tau \\ &= \int_0^t (\|J(0, \tau)\| - \lambda_\tau) \, d\tau, \quad \text{d'après le lemme de Fatou} \\ &= t - \int_0^t \lambda_\tau \, d\tau, \quad \text{vu le choix de paramétrage de } H_0.\end{aligned}$$

Par convergence dominée,

$$\int_0^t \lambda_\tau \, d\tau = \lim_{s \rightarrow \infty} \int_0^t \|J(s, \tau)\| \, d\tau = d_{\text{hor}}(\gamma_0, \gamma_t),$$

et

$$\mathcal{A}_t = t - d_{\text{hor}}(\gamma_0, \gamma_t). \quad \square$$

**PROPOSITION 12.2.** — *Soit  $p$  un point de l'horocycle  $H_0$  qui borde  $B_0$ . Si l'intégrale de surface*

$$\mathcal{K} = - \iint_{B_0} |m, p| K(m) \, d\sigma(m)$$

*est bornée,  $G(x)$  est isométrique à  $\mathbb{R}$  et donc complet.*

*Preuve de la proposition.* — Pour appliquer la proposition XI.1, nous allons montrer que  $d_{\text{hor}}(\gamma_0, \gamma_t)$  tend vers l'infini si  $t$  tend vers l'infini.

Comme pour tout  $(s, t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$  les vecteurs

$$J(s, t) = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}(s, t) \quad \text{et} \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial s}(s, t)$$

sont linéairement indépendants, le lemme fondamental 8.3 nous permet d'utiliser  $\mathcal{H}$  comme changement de variable pour l'intégrale :

$$\iint_{\mathcal{D}_t} |m, p| K(m) \, d\sigma(m),$$

sur le domaine  $\mathcal{D}_t = \mathcal{H}(\mathbb{R}^+ \times [0, t])$ . Ainsi, le jacobien du changement de variable étant  $\|J(s, t)\|$ ,

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{D}_t} |m, p| K(m) d\sigma(m) &= \\ &= \int_0^t \int_0^\infty |p, \mathcal{H}(s, \tau)| K(\mathcal{H}(s, \tau)) \|J(s, \tau)\| d\tau ds. \end{aligned}$$

Comme  $p$  est sur  $H_0$ , la distance  $|p, \mathcal{H}(s, t)|$  majore  $d(H_0, H_s) = s$ , toujours d'après [AA, lemme A.21.12], de sorte que :

$$\begin{aligned} \mathcal{K} &= - \iint_{B_0} |m, p| K(m) d\sigma(m) \geq \\ &\geq - \iint_{\mathcal{D}_t} |m, p| K(m) d\sigma(m) \\ &\geq - \int_0^t \int_0^\infty s K(\mathcal{H}(s, \tau)) \|J(s, \tau)\| d\tau ds = \mathcal{A}_t. \end{aligned}$$

La famille de réels  $(\mathcal{A}_t)$  est bornée par l'intégrale  $\mathcal{K}$ . Donc

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad d_{\text{hor}}(\gamma_0, \gamma_t) \in [t - \mathcal{K}, t + \mathcal{K}],$$

ce qui prouve que  $G(x)$  n'est pas borné.  $\square$

**PROPOSITION 12.3.** — *Lorsque la courbure  $K(m)$  en un point  $m$  à une distance  $r = r(m)$  de  $p$  fixé est un  $O(1/r^{2+\varepsilon})$  ( $\varepsilon > 0$ ) lorsque  $r$  tend vers l'infini,  $G(x)$  est aussi isométrique à  $\mathbb{R}$ , et complet.*

*Preuve.* — Il existe des constantes  $C, r_0 > 0$  telles que si  $r(m) > r_0$ ,  $|K(m)| \leq C/r(m)^{2+\varepsilon}$ . Pour tout  $\delta > r_0$  (quelconque pour l'instant), choisissons l'horosphère  $H_0$  du lemme 12.1, dont nous reprenons les notations, à la distance  $\delta$  de  $p \in \gamma_0$  (extérieur à  $B_0$ ).

Comme  $\|J(s, \tau)\| \leq \|J(0, \tau)\| = 1$ , cela donne la majoration :

$$\begin{aligned} \int_0^\infty s |K(\mathcal{H}(s, \tau))| \|J(s, \tau)\| ds &\leq \\ &\leq \int_0^\infty s |K(\mathcal{H}(s, \tau))| ds \leq C \int_0^\infty \frac{s}{(\delta + s)^{2+\varepsilon}} ds \leq \frac{C}{\varepsilon \delta^\varepsilon}, \end{aligned}$$

car  $r(m) \geq \delta + s$ .

Choisissons maintenant  $\delta$  de sorte que  $C/\varepsilon\delta^\varepsilon < 1/2$ . Avec le lemme 12.1, cela entraîne que  $d_{\text{hor}}(\gamma_0, \gamma_t) \geq t - t/2 = t/2$ , et  $G(x)$  n'est pas borné.  $\square$

Cela achève de prouver les théorèmes annoncés.

### 13. Application aux courbes algébriques complexes

Une courbe algébrique complexe  $\Gamma$  de  $\mathbb{C}^2$  a une courbure négative en ses points réguliers, et l'étude du comportement à l'infini des arcs réels géodésiques peut être faite en ignorant les singularités qui sont à distance finie, puisqu'on ne s'intéresse qu'à des propriétés asymptotiques de géodésiques sortant de tout compact.

Soit  $t \rightsquigarrow z = z(t)$  un arc tracé sur  $\Gamma$  tendant vers un point  $\zeta$  de la droite projective à l'infini  $\mathbb{P}_\infty$  en restant sur une branche de  $\Gamma$ .

La courbure gaussienne  $K(z)$  de  $\Gamma$  en  $z$  est un  $O(1/|z|^{4+\varepsilon})$  ou un  $O(1/|z|^{2+\varepsilon})$ , selon qu'au point  $\zeta$  cette branche de  $\Gamma$  est transverse à  $\mathbb{P}_\infty$  ou non ([S] et [L2]). Si l'arc  $t \rightsquigarrow z(t)$  est une géodésique, il a une courbure euclidienne égale à  $\sqrt{|K(z)|}$  [L2] et vérifie donc respectivement (H2) et (H1) dans les deux cas ci-dessus pour la métrique euclidienne de  $\mathbb{C}^2$ . Il a ainsi une asymptote stricte ou une direction asymptotique pour la raison élémentaire vue à la section 2.

Si l'on considère maintenant la métrique de sous-variété de  $\Gamma$  (comme sous-variété de  $\mathbb{C}^2$  et non de  $\mathbb{P}_\infty$ ) au voisinage de  $\zeta$ , la courbure gaussienne vérifie l'hypothèse de la proposition 12.3 sur n'importe laquelle de ses branches en  $\zeta$ . Chaque branche de  $\Gamma$  en  $\zeta \in \mathbb{P}_\infty$  fournit une infinité de points à l'infini pour  $\Gamma$ , qui correspondent aux directions réelles de la tangente projective en  $\zeta$  [S]. Si  $x$  est un tel point à l'infini, on peut préciser la relation entre l'espace métrique  $G(x)$  et la tangente projective en  $\zeta$  (direction asymptotique de la branche de  $\Gamma$ ).

**PROPOSITION 13.1.** — *La projection sur la direction complexe asymptotique réalise une isométrie de  $G(x)$  sur l'espace (isométrique à  $\mathbb{R}$ ) des droites euclidiennes du plan de direction donnée.*

Esquissons-en la preuve. En reprenant les notations de la proposition 12.3, pour la "variation"  $\mathcal{H}$ , lorsqu'on fixe  $t > 0$ , les vecteurs  $(\partial\mathcal{H}/\partial s)(s, \tau)$  (avec  $0 \leq \tau \leq t$ ) convergent uniformément vers le vecteur unitaire  $\bar{v}$  de la direction asymptotique réelle de  $x$  lorsque  $s$  tend vers l'infini.

Mais comme la droite vectorielle complexe tangente en  $\mathcal{H}(s, \tau)$  admet aussi une limite, cela entraîne que les vecteurs  $(\partial\mathcal{H}/\partial t)(s, \tau)$  renormalisés convergent aussi uniformément vers le vecteur  $i\vec{v}$ . Le calcul de la fin de la proposition 12.3 (en remplaçant  $1/2$  par un réel arbitrairement petit) montre que les  $(\partial\mathcal{H}/\partial t)(s, \tau)$  convergent eux-mêmes uniformément vers  $i\vec{v}$ . La proposition en résulte, à l'aide de la proposition 12.3, puisqu'on peut faire cela pour tout  $t > 0$ .  $\square$

Une courbe tracé sur  $\Gamma$  allant en un tel point à l'infini et dont la courbure géodésique vérifie (H2) a, d'après la proposition 12.3, une géodésique asymptote sur  $\Gamma$  alors qu'elle peut n'avoir qu'une direction asymptotique dans  $\mathbb{C}^2$  lorsque  $\Gamma$  elle-même n'a qu'une direction asymptotique complexe.

## 14. L'éventail

Nous cherchons à décrire ici un exemple de surface de Hadamard et de courbe  $C^2$  tracée dessus qui vérifie (H2) mais n'a pas d'asymptote stricte. L'espace  $G(q_\infty)$  sera isométrique à un intervalle ouvert borné de  $\mathbb{R}$ . Nous commencerons par considérer une variété  $M$ , de classe  $C^\infty$ , mais dont la métrique sera seulement de classe  $C^1$  et, en un sens naturel,  $C^2$  par morceaux, mais non  $C^\infty$ , pour laquelle la courbe géodésique d'un arc de classe  $C^2$  sera une fonction continue, et les géodésiques seront de classe  $C^1$ . La *distribution de courbure de notre variété  $M$*  (au sens de [L1, B § 1]) sera en fait une fonction continue "par morceaux". Un lissage convenable de la métrique pourra en faire une métrique  $C^\infty$  en conservant l'hypothèse (H2) pour tout arc  $q$  de classe  $C^2$  qui la vérifie déjà dans  $M$ , le contre-exemple désiré étant le résultat du lissage.

Le principe de la construction est le suivant.

Choisissons une famille dénombrable  $(\gamma_n)$  de géodésiques d'un disque  $H$  de Poincaré ayant même point  $x$  à l'infini et balayant toute une horoboule centrée en  $x$  (fig. 12).

On colle le long des  $\gamma_n$  des bandes euclidiennes dont les largeurs forment une série convergente, ce qui donne un éventail  $M$ . On peut réaliser le collage de manière à assurer les propriétés ci-dessus décrites pour la métrique de  $M$ . D'autre part, soit  $q$  une courbe de  $H$  vérifiant (H2) de point à l'infini  $x$  et coupant toutes les  $\gamma_n$ .

On peut évidemment la choisir pour qu'au voisinage des points de contact avec les  $\gamma_n$  sa courbure géodésique soit nulle. À partir de cette courbe, on va construire une courbe  $q'$  de  $M$  (essentiellement en "joignant les morceaux hyperboliques par des segments dans les bandes euclidiennes") vérifiant encore (H2), et qui n'a pas d'asymptote stricte.

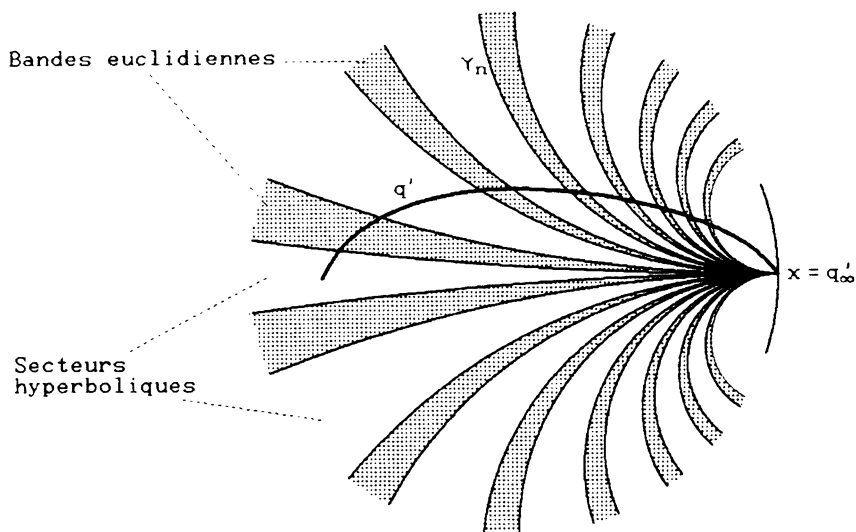


Fig. 12

Mais il est facile de voir que l'espace  $G(q'_\infty)$  est un intervalle dont la largeur est la somme de la série, et que la famille de géodésiques allant de  $q'_t$  à  $q'_\infty$  est de Cauchy sans converger. Cependant la courbure géodésique de  $q'$  vérifie (H2).

Entrons maintenant dans les détails. Soient  $g'$  et  $g''$  deux métriques riemanniennes  $C^\infty$  sur la même surface  $M_0$  orientée de classe  $C^\infty$  de Hadamard pour les deux métriques, et soit  $\gamma$  une géodésique commune aux deux métriques avec un même paramétrage par la longueur de l'arc.

Soit  $\varphi'$  l'application de  $\mathbb{R}^2$  dans  $M_0$  :

$$(u, v) \rightsquigarrow \exp_{\gamma(v)}(-u \cdot \dot{\gamma}_1(v)),$$

où  $\dot{\gamma}_1(v)$  est le vecteur unitaire tangent orthogonal à  $\dot{\gamma}(v)$  dans le sens direct choisi, pour la métrique  $g'$ , de sorte que l'image par  $\varphi'$  de l'axe des ordonnées (orienté) soit  $\gamma$ . Construisons de même  $\varphi''$  pour la métrique  $g''$ . Comme  $M_0$  est de Hadamard pour  $g'$  et  $g''$ ,  $\varphi'$  et  $\varphi''$  sont des  $C^\infty$ -difféomorphismes.



L'application  $\varphi$  de  $\mathbb{R}^2$  dans  $M$  (dont la restriction à  $\mathbb{R}^- \times \mathbb{R}$  est celle de  $\varphi'$  et dont la restriction à  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$  est celle de  $\varphi''$ ) est une carte et définit une nouvelle structure de variété  $C^\infty$  sur l'espace topologique sous-jacent à  $M_0$ , notée  $M$  et donc homéomorphe à  $M_0$ . Les deux structures différentiables coïncident sur  $M - \gamma$ . La restriction de  $g'$  à gauche de  $\gamma$  et la restriction de  $g''$  à droite de  $\gamma$  font de  $M - \gamma$  une variété riemannienne (non connexe) de métrique  $C^\infty$ .

LEMME 14.1. — *La métrique obtenue sur  $M - \gamma$  admet un prolongement  $g$  par continuité sur  $M$  toute entière, qui est une métrique riemannienne de classe  $C^1$ . Les arcs de classe  $C^2$  dont la dérivée ne s'annule pas ont pour cette métrique une courbure géodésique continue, et les géodésiques sont  $C^2$ .*

Il est clair que, par construction, chaque dérivée partielle seconde de la métrique  $g$  est continue sur chaque demi-variété ouverte et prolongeable par continuité sur la demi-variété fermée contenant  $\gamma$  (ce que nous appellerons "continue par morceaux").

Pour que  $g$  soit de classe  $C^1$ , il suffit de montrer que lorsque  $i$  et  $j$  décrivent  $\{1, 2\}$ , la différentielle de la fonction réelle  $\langle \partial\varphi'/\partial u_i, \partial\varphi'/\partial u_j \rangle$  est nulle sur l'axe  $\{0\} \times \mathbb{R}$  (où les variables de  $\varphi'$  sont notées un instant  $u_1$  et  $u_2$ ). Comme

$$\frac{\partial}{\partial u_k} \left\langle \frac{\partial\varphi'}{\partial u_i}, \frac{\partial\varphi'}{\partial u_j} \right\rangle = \left\langle \frac{D^2\varphi'}{\partial u_k \partial u_i}, \frac{\partial\varphi'}{\partial u_j} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial\varphi'}{\partial u_i}, \frac{D^2\varphi'}{\partial u_k \partial u_j} \right\rangle,$$

il suffit que les dérivées covariantes  $D^2\varphi'/\partial u_i \partial u_j$  soient toutes nulles sur  $\{0\} \times \mathbb{R}$ , autrement dit que la différentielle seconde covariante de  $\varphi'$  soit nulle sur l'image réciproque de  $\gamma$ . Or  $(D^2\varphi'/\partial u^2)(0, v)$  est nulle car  $\varphi'(\cdot, v)$  est une géodésique (pour  $g'$ ) paramétrée par la longueur de l'arc.  $(D^2\varphi'/\partial v^2)(0, v)$  est nulle car  $\gamma$  est elle-même une géodésique; et  $(D^2\varphi'/\partial v \partial u)(0, v)$  est nulle parce que

$$\frac{\partial\varphi'}{\partial u}(0, v) = -\dot{\gamma}_1(v),$$

vecteur unitaire restant orthogonal à  $\gamma$  lorsque  $v$  varie.

Il résulte donc du choix de  $\varphi'$  et  $\varphi''$  que  $g$  est de classe  $C^1$  et ses symboles de Christoffel sont  $C^0$ , et  $C^1$  par morceaux. La courbure géodésique d'un arc  $C^2$  non stationnaire est donc continue, et l'équation différentielle des géodésiques est localement lipschitzienne, d'où le lemme.  $\square$

Le recollement d'un demi-plan euclidien et d'un demi-plan  $H_2$  de Poincaré montre que l'on ne peut espérer directement une métrique  $C^2$ .

On appelle  $\varphi$  l'application de recollement de la gauche de  $\gamma$  munie de  $g'$  avec la droite de  $\gamma$  munie de  $g''$ . On recolle de la même manière la partie à gauche de  $\gamma$  d'un ouvert de  $M_0$  contenant  $\gamma$  avec la partie à droite de  $\gamma$  d'un ouvert de  $M_0$  contenant  $\gamma$ .

On peut décrire la distance associée à  $g$  directement comme ceci. Si  $a$  et  $b$  sont des points de  $M$ ,  $d(a, b)$  est la borne inférieure des longueurs des courbes  $C^1$  pour l'ancienne structure de variété ne changeant qu'un nombre fini de fois de côté de  $\gamma$ , la longueur étant mesurée avec la métrique  $g'$  ou  $g''$  selon le côté où l'on se trouve.

Nous allons maintenant recoller une infinité de bandes alternativement euclidiennes et hyperboliques. Soient  $(x_n)_{n \geq 0}$  une suite strictement croissante de réels tendant vers l'infini,  $(x'_n)_{n \geq -1}$  une autre suite telle que

$$-\infty = x'_{-1} < x_0 < x'_0 < x_1 < x'_1 < \dots < x_n < x'_n < \dots$$

Appelons *demi-plan euclidien* le demi-plan d'ordonnées positives muni de la métrique  $dy^2/y^2 + dx^2$  qui le rend isométrique à un plan euclidien par l'application

$$(x, y) \rightsquigarrow (x, \text{Log } y).$$

Pour  $n \geq 0$ , l'application de recollement de la bande  $H(n) = ]x'_{n-1}, x_n[ \times R^{*+}$  de  $H_2$  avec la bande  $E(n) = ]x_n, x'_n[ \times R^{*+}$  du demi-plan euclidien est notée  $\psi_n$ . De même, l'application de recollement de la bande  $E(n)$  avec  $H(n+1)$  est notée  $\varphi_n$ . Les applications  $\psi_n$  et  $\varphi_n$  fournissent, lorsque  $n$  varie dans  $\mathbb{N}$ , un atlas du demi-plan pour une structure de variété  $C^\infty$  notée  $M$ , qui induit la topologie usuelle du demi-plan car les cartes sont des homéomorphismes entre ouverts du plan, mais n'est pas sa structure usuelle de variété (tout en lui restant difféomorphe, comme le sont deux structures de variété sur  $\mathbb{R}^2$ , voir Hirsch [Hir, exercice 3, p. 207]).

Cette construction munit, avec le lemme 14.1, notre variété  $M$  de classe  $C^\infty$  d'une métrique  $g$  riemannienne de classe  $C^1$  et  $C^2$  par morceaux (par bandes).

Montrons maintenant que  $M$  est complète. L'application

$$(x, y) \rightsquigarrow \text{Log } y$$

est lipschitzienne de rapport 1 pour la métrique  $g$ . Si  $(a_n)$  est une suite de Cauchy de points de  $M$ ; les logarithmes de leurs ordonnées forment donc une suite de Cauchy, et les  $a_n$  restent dans une bande  $y_0 \leq y \leq y_1$  du demi-plan (ouvert). La restriction de la distance de  $M$  à cette bande n'est pas équivalente à la distance euclidienne (mais une fois prouvée la complétude de  $M$ , il est clair que  $\text{Log } y$  est une fonction de Busemann pour le point à l'infini commun des verticales qui sont des géodésiques de  $g$ , et que les horizontales sont les horcoycles correspondants). Néanmoins, la suite  $(a_n)$  est de Cauchy pour la métrique hyperbolique. En effet, si  $a$  et  $b$  sont dans le demi-plan  $H_2(y_0)$  des points d'ordonnée supérieure ou égale à  $y_0 > 0$ , la distance (pour  $M$ ) entre  $a$  et  $b$  est la borne inférieure des longueurs des chemins dans  $H_2(y_0)$ , de classe  $C^1$  par morceaux, alternativement dans les bandes hyperboliques et "euclidiennes". Des inégalités suivantes dans  $H_2(y_0)$ , si  $y_0 \leq 1$ ,

$$\frac{dx^2 + dy^2}{y^2} \leq \frac{dx^2}{y_0^2} + \frac{dy^2}{y^2} \leq \frac{1}{y_0^2} \left( dx^2 + \frac{dy^2}{y^2} \right),$$

il résulte alors (toujours si  $y_0 \leq 1$ ) que

$$d(a, b) \geq y_0 d_h(a, b),$$

où  $d_h$  est la distance de  $H_2$  aussi bien que celle qu'elle induit sur le convexe  $H_2(y_0)$ . La suite  $(a_n)$  converge donc dans  $H_2(y_0)$ , fermé dans  $H_2$  et dans  $M$  qui ont même topologie. Donc  $M$  est complète.

La distribution de courbure de  $M$  est une fonction continue par morceaux, car les symboles de Christoffel sont  $C^1$  par morceaux.

Pour construire l'arc  $q'$  de  $M$ , soit  $q$  un arc de  $H_2$  tendant vers le point à l'infini vertical, vérifiant (H2), transverse aux verticales qu'il balaye toutes de gauche à droite à partir de l'axe des ordonnées et dont la courbure géodésique au voisinage des points  $q(t_n)$  d'abscisse  $\xi_n > 0$  (croissante et tendant vers l'infini avec  $n$ ) est nulle. L'image de l'arc paramétré  $q$  est le graphe d'une application  $f$  de classe  $C^2$  de  $[0, +\infty[$  dans  $\mathbb{R}$  qui tend vers l'infini à l'infini.

Nous allons déterminer des suites  $(x_n)$  et  $(x'_n)$  par récurrence, pour le collage de bandes ci-dessus, de manière à définir une fonction  $F$  continue de  $[0, +\infty[$  dans  $\mathbb{R}$  dont le graphe soit,

- dans chaque bande “euclidienne”  $E(n)$  de  $M$ , un arc géodésique,
- dans chaque bande hyperbolique  $H(n)$  de  $M$ , l'image du graphe de  $f$  restreinte à  $] \xi_{n-1}, \xi_n [$  par une homothétie (donc une isométrie hyperbolique),
- au voisinage des points de raccordement entre bandes successives, le paramétrage par l'abscisse d'une géodésique de  $M$ .

Ce graphe va être une ligne brisée pour la structure  $C^\infty$  usuelle de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{*+}$ , pour laquelle la métrique est discontinue, et le raccordement se fait à l'aide de la loi de réfraction de Descartes pour des milieux discontinus non isotropes. Une géodésique de  $M$  est, dans chaque bande, un arc de cercle ou un arc de graphe de fonction exponentielle. Le rapport des pentes au passage d'une bande hyperbolique à une bande euclidienne est l'ordonnée, car la métrique discontinue est  $(dx^2 + dy^2)/y^2$  d'un côté et  $dy^2/y^2 + dx^2$  de l'autre. Ce rapport est inversé quand la géodésique repasse dans une bande hyperbolique; et c'est ce qui va permettre de construire le graphe de  $F$  à l'aide d'homothéties à partir de celui de  $f$ .

Ainsi, une fois choisie une suite  $(\delta_n)$  de réels  $> 0$ , on commence par définir par récurrence les suites  $(x_n)_{n \geq 0}$ ,  $(x'_n)_{n \geq -1}$  et  $(\lambda_n)_{n \geq 0}$  par

$$\begin{cases} x_0 = \xi_0, & x_{n+1} = x'_n + \lambda_{n+1}(\xi_{n+1} - \xi_n), \\ x'_{-1} = -\infty, & x'_n = x_n + \delta_n, \\ \lambda_0 = 1, & \lambda_{n+1} = \lambda_n e^{f'(\xi_n)\delta_n}. \end{cases}$$

La fonction  $F$  est alors définie (voir fig. 13) sur  $[0, x_0]$  par

$$F(x) = f(x),$$

sur  $[x_n, x'_n]$  par

$$F(x) = \lambda_n f(\xi_n) e^{f'(\xi_n)(x-x_n)},$$

et sur  $[x'_n, x_{n+1}]$  par

$$F(x) = \lambda_{n+1} f\left(\xi_n + \frac{x - x'_n}{\lambda_{n+1}}\right)$$

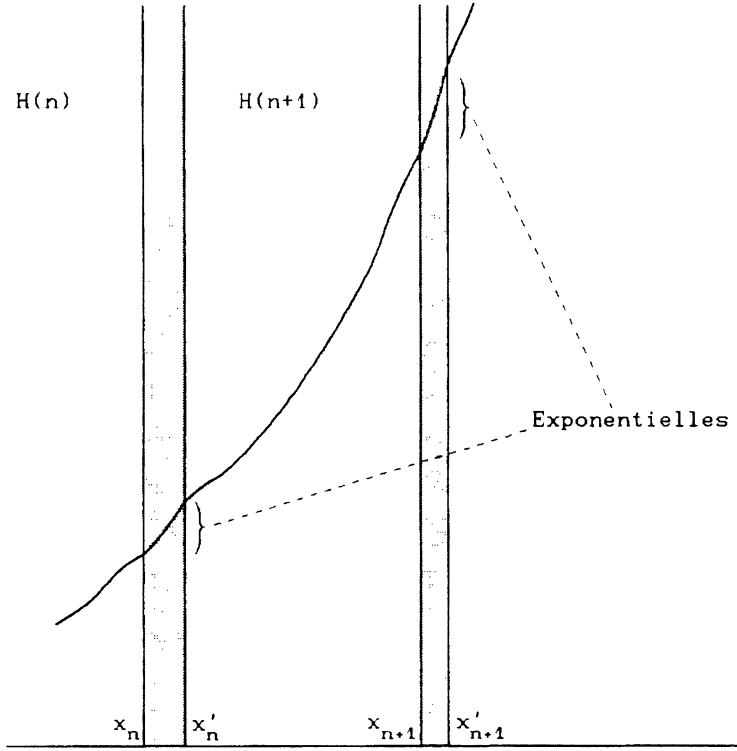


Fig. 13

L'arc  $q'$  est le paramétrage par la longueur de l'arc du graphe de  $F$  de classe  $C^2$  car les géodésiques de  $M$  sont de classe  $C^2$ . Il ne reste plus qu'à choisir la suite  $(\delta_n)$  afin que  $q'$  vérifie encore (H2).

Or la distance parcourue par  $q'$  dans la bande euclidienne  $E(n)$  est

$$\sqrt{\delta_n^2 + (\text{Log}(F(x'_n)) - \text{Log}(F(x_n)))^2} = \delta_n \sqrt{1 + f'(\xi_n)^2} = \frac{\delta_n}{\sin(\beta(t_n))},$$

où  $\beta(t)$  est l'angle de  $\dot{q}(t)$  avec la verticale dans  $H_2$  (la déviation méridienne à l'infini de la section 7). Il suffit que la suite  $(t_{n+1} - t_n)$  soit minorée dans  $\mathbb{R}^{*+}$ , et que la série  $\sum_n \delta_n / \sin(\beta(t_n))$  converge pour que  $q'$  vérifie (H2). La convergence de cette série montre aussi que  $q'$  n'a pas d'asymptote stricte, car sa somme est le diamètre de l'espace  $G(q'_\infty)$ .

Il reste à modifier légèrement la métrique de  $M$  pour que ce soit une métrique de classe  $C^\infty$  sans perdre les propriétés voulues de l'arc  $q'$  (qui ne sera pas modifié, lui). La modification sera faite en un voisinage de chaque géodésique  $\gamma_n$ , suffisamment étroit pour permettre la modification de la métrique au voisinage de la suivante. Les choix successifs de ces voisinages seront aisés avec le lemme suivant, où est décrit un lissage de la métrique riemannienne du lemme 14.1.

LEMME 14.2. — *Supposons que la courbure de la métrique  $g'$  sur  $M$  du lemme 14.1 ne s'annule en aucun point de la géodésique  $\gamma$  ou, au contraire, soit identiquement nulle sur tout un voisinage de  $\gamma$ ; et il en est de même pour celle de  $g''$ . Alors pour tout voisinage  $V(\gamma)$  de  $\gamma$ , il existe une famille de métriques riemanniennes  $g_\theta$  ( $\theta \in ]0, 1[$ ), de classe  $C^\infty$ , à courbure négative, coïncidant avec  $g$  hors de  $V(\gamma)$  et vérifiant les conditions suivantes. Pour tout  $\theta$ ,*

$$\frac{g}{4} \leq g_\theta \leq 4g$$

*et, lorsque  $\theta$  tend vers 0,  $g_\theta$  converge uniformément localement vers  $g$ , ainsi que ses dérivées partielles premières (dans la carte  $\varphi$  du lemme 14.1 par exemple) vers celles de  $g$ .*

La preuve de ce lemme est rejetée en appendice 1 (sect. 15).

Il résulte de ce lemme que si un arc de  $M$  est paramétré pour la métrique  $g$  par la longueur  $s$  de l'arc, sa courbure géodésique pour la métrique  $g_\theta$  converge uniformément localement (par rapport à  $s$ ) vers sa courbure géodésique pour la métrique  $g$ , lorsque  $\theta$  tend vers 0. Revenant à l'évantaill  $M$ , au voisinage de  $\gamma_n$ , la courbe  $q'$  est un arc de géodésique pour la métrique  $g$ . On peut donc lisser  $g$  autour de  $\gamma_n$ , pour tout  $n$ , de telle sorte que la courbure géodésique de  $q'$  pour la métrique lissée (sur  $M$  toute entière) vérifie encore l'hypothèse (H2). La variété  $M$  est encore complète pour la métrique lissée car les deux métriques sont équivalentes d'après les inégalités du lemme 14.2.

Si l'on cherche seulement une surface de Hadamard  $M$  telle que, pour un  $x \in M(\infty)$ , l'espace  $G(x)$  ne soit pas complet, sans exhiber de courbe vérifiant (H2) mais n'ayant pas d'asymptote stricte, on peut en construire assez simplement un exemple immergé dans  $\mathbb{R}^3$ . C'est l'objet de l'appendice 2 (sect. 16).

## 15 Appendice 1 : preuve du lemme de lissage

Reprenons les notations du lemme 14.1. Nous supposons que la courbure de  $g$  est nulle au voisinage à gauche de  $\gamma$  ( $\gamma$  exclue), et ne s'annule pas dans un voisinage à droite de  $\gamma$  ( $\gamma$  incluse), la preuve s'adaptant aisément aux autres cas. Dans la carte  $\varphi$ , la métrique riemannienne  $g$  admet pour matrice :

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix},$$

où  $G(u, v)$  est une fonction de classe  $C^1$  et de classe  $C^2$  en un sens évident à gauche ou à droite de l'axe des ordonnées. En effet, les géodésiques  $\varphi(\cdot, v)$  sont orthogonales aux courbes intégrales  $\varphi(u, \cdot)$  des champs de Jacobi  $J(\cdot, v) = (\partial\varphi/\partial v)(\cdot, v)$ . La fonction  $\sqrt{G}$  a des dérivées partielles premières nulles le long de l'axe des ordonnées. En effet,  $\sqrt{G}$  est la norme du champ de Jacobi  $J$  et

$$\frac{\partial J}{\partial u}(0, v) = k_g(v)J(0, v),$$

où  $k_g(v)$  est la courbure géodésique de  $\gamma = \varphi(0, \cdot)$  en  $v$  qui est ici nulle. Bien sûr,  $\partial^2\sqrt{G}/\partial v^2$  est nul le long de l'axe des  $v$  (tout comme  $\partial^2\sqrt{G}/\partial u\partial v$ , mais nous n'en aurons pas besoin). L'équation de jacobi appliquée de part et d'autre de l'axe des  $v$  au champs  $J(\cdot, v)$  s'écrit :

$$\frac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial u^2}(u, v) + K(u, v)\sqrt{G}(u, v) = 0,$$

où  $K(u, v)$  est la courbure de  $M$  au point  $(u, v)$  sur la carte. La courbure négative se traduit par la convexité des fonctions  $\sqrt{G}(\cdot, v)$ .

Les métriques  $g_\theta$  vont avoir la même forme que  $g$  en remplaçant, dans la matrice,  $G$  par  $G_\theta$ . La fonction  $\sqrt{G_\theta}$  sera de classe  $C^\infty$  et coïncidera avec  $\sqrt{G}$  hors d'un voisinage de l'axe des  $v$  contenu dans  $\varphi^{-1}(V(\gamma))$  (et  $\sqrt{G_\theta}(\cdot, v)$  sera convexe). On la construit comme moyenne de  $\sqrt{G}$  pondérée en tout point par une fonction bosse de taille variable et réduite à une distribution de Dirac hors de  $V(\gamma)$  pour ne modifier  $\sqrt{G}$  que dans  $V(\gamma)$ . On se donne la fonction  $\nu$  de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}^2$ , nulle hors de  $[-1, 1]^2$ , positive et d'intégrale 1; et on va définir la fonction  $G_\theta$  sur  $\mathbb{R}^2$  par :

$$\sqrt{G_\theta}(u, v) = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \sqrt{G}(u + \xi\theta\rho(u, v), v + \eta\theta\rho(u, v))\nu(\xi, \eta) d\xi d\eta,$$

où  $\rho(u, v)$  va nous permettre de régler la largeur de la bosse, nulle hors de  $\varphi^{-1}(V(\gamma))$ .

Pour cela, soit  $\delta$  une fonction réelle bornée sur  $\mathbb{R}$  et strictement positive telle que la bande  $B$  :

$$-3\delta(v) \leq u \leq 3\delta(v)$$

soit contenue dans  $\varphi^{-1}(V(\gamma))$ . Choisissons  $\delta$  de sorte que, si  $u \geq 0$  et  $(u, v) \in B$ , on ait

$$1 \leq \sqrt{G}(u, v) \leq 2,$$

ce qui est possible car  $\sqrt{G}(\cdot, v)$  est convexe,

$$\sqrt{G}(0, v) = 1 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}(0, v) = 0.$$

Cela nous permettra d'en déduire que les métriques  $g_\theta$  sont équivalentes à  $g$ .

De plus, pour que les variations de la largeur des bosses n'affectent pas le signe de la courbure, on choisit  $\delta$  pour que, dans  $B$  à droite de l'axe des  $v$ , la courbure de  $g$  ne soit pas trop petite ou encore que, par exemple,

$$\frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2}(u, v) \geq \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2}(0, v) \quad (\text{dérivée partielle à droite}).$$

Lorsque le centre de la bosse est dans la bande  $B'$  définie par

$$\delta(v) \leq u \leq 2\delta(v),$$

la largeur de la bosse variera entre  $\theta\mu(v)$  et 0, où  $\mu$  est une fonction de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^{*+}$ , telle que, pour tout  $u \in [\delta(v), 2\delta(v)]$ , le pavé fermé de centre  $(u, v)$  et de côté  $2\mu(v)$  soit entièrement dans  $B$  et ne rencontre pas l'axe des  $v$  (fig. 14).

On peut alors définir la fonction  $\rho$  à partir d'une fonction  $\lambda$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , de classe  $C^\infty$ , qui vaut 1 sur  $\mathbb{R}^-$ , 0 sur  $[1, +\infty[$ , et décroissante sur  $[0, 1]$  par

$$\text{si } u \geq 0, \quad \rho(u, v) = \mu(v) \lambda\left(\frac{u - \delta(v)}{\delta(v)}\right),$$

$$\text{si } u \leq 0, \quad \rho(u, v) = \rho(-u, v).$$

Comme  $G_\theta = G$  hors de  $B$  et comme le pavé où est prise la moyenne qui définit  $G_\theta(u, v)$  sur  $B$  est contenu dans  $B$ , le choix de  $\delta$  entraîne que :

$$\frac{\sqrt{G}}{2} \leq \sqrt{G_\theta} \leq 2\sqrt{G} \quad \text{et} \quad \frac{g}{4} \leq g_\theta \leq 4g, \quad \text{si } \theta \in ]0, 1].$$



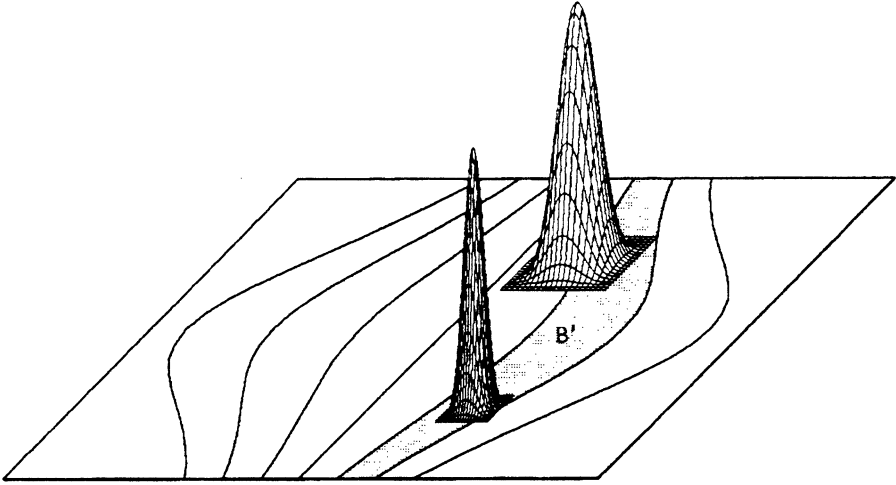


Fig. 14

Il ne nous reste plus qu'à affiner le choix de  $\mu$  pour que la courbure de  $g_\theta$  soit négative, et établir les convergences uniformes locales. Or, en notant

$$\begin{cases} \zeta = (u + \xi\theta\rho(u, v), v + \eta\theta\rho(u, v)), \\ \tau = \frac{u - \delta(v)}{\delta(v)}, \end{cases}$$

et en abrégant  $\nu(\xi, \eta)$  en  $\nu$  dans les intégrales, on a pour tout  $u \geq 0$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sqrt{G_\theta}}{\partial u} &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}(\zeta) \nu \, d\xi \, d\eta + \\ &+ \theta \frac{\mu(v)}{\delta(v)} \lambda'(\tau) \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left( \xi \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}(\zeta) + \eta \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial v}(\zeta) \right) \nu \, d\xi \, d\eta, \end{aligned} \quad (23)$$

le facteur de la seconde intégrale étant simplement changé de signe si  $u$  est négatif.

Le terme  $\partial^2 \sqrt{G_\theta} / \partial u^2$ , qui a le même signe que la courbure de  $g_\theta$ , se met sous la forme :

$$\frac{\partial^2 \sqrt{G_\theta}}{\partial u^2} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2}(\zeta) \nu \, d\xi \, d\eta + \mu(v) \mathcal{B}(u, v),$$

où  $\mathcal{B}(u, v)$  s'écrit lorsque  $u \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(u, v) = & \frac{2\theta\lambda'(\tau)}{\delta(v)} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left( \xi \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2}(\zeta) + \eta \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u \partial v}(\zeta) \right) \nu \, d\xi \, d\eta + \\ & + \frac{\mu(v)\theta^2\lambda'(\tau)^2}{\delta(v)^2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left( \xi^2 \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2}(\zeta) + 2\xi\eta \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u \partial v}(\zeta) + \right. \\ & \quad \left. + \eta^2 \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial v^2}(\zeta) \right) \nu \, d\xi \, d\eta + \\ & + \frac{\theta\lambda''(\tau)}{\delta(v)^2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left( \xi \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}(\zeta) + \eta \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial v}(\zeta) \right) \nu \, d\xi \, d\eta. \end{aligned}$$

Mais alors  $\mathcal{B}(u, v)$  est, à droite de l'axe des  $v$ , nulle hors de la bande  $B'$  car  $\lambda'$  et  $\lambda''$  sont nulles hors de  $[0, 1]$ . De plus sur tout compact de  $B'$ ,  $\mathcal{B}(u, v)$  est bornée indépendamment de  $\mu$  et de  $\theta \in ]0, 1]$ . En effet, les dérivées partielles de  $\sqrt{G}$  et la fonction  $1/\delta$  sont localement bornées et les dérivées de  $\lambda$  sont bornées.

On peut donc choisir  $\mu(v)$  pour que sur  $B'$  :

$$|\mu(v)\mathcal{B}(u, v)| \leq \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2}(0, v),$$

puisque le second membre est continu strictement positif.

La fonction  $\partial^2 \sqrt{G_\theta} / \partial u^2$  est ainsi positive sur  $B'$ . De l'autre côté de l'axe des  $v$ ,  $\mathcal{B}(u, v)$  est nulle. Le fait que  $G$  soit constante et égale à 1 à gauche de l'axe des  $v$  n'est pas suffisant pour annuler  $\mathcal{B}(u, v)$ . Cependant, pour les  $(u, v)$  tels que les intégrales ci-dessus ne sont pas nulles (car le support de la bosse de pondération déborde sur le demi-plan des  $u \geq 0$ ),  $\lambda'(\tau)$  et  $\lambda''(\tau)$  sont nuls.

Donc, la fonction  $\sqrt{G_\theta}(\cdot, v)$  est convexe pour tout  $v$  et la courbure de  $g_\theta$  est partout négative.

La formule de définition de  $G_\theta$  implique la convergence uniforme locale de  $\sqrt{G_\theta}$  vers  $\sqrt{G}$  lorsque  $\theta$  tend vers 0.

Par ailleurs, la convergence uniforme locale de  $\partial \sqrt{G_\theta} / \partial u$  vers  $\partial \sqrt{G} / \partial u$  résulte du passage à la limite lorsque  $\theta$  tend vers 0 dans la première intégrale de l'équation (23) et du facteur  $\theta$  à l'extérieur de la seconde. Il en est de même pour  $\partial \sqrt{G_\theta} / \partial v$ .  $\square$

## 16. Appendice 2 : le tourbillon

Nous allons décrire une surface de Hadamard  $M$  immergée dans  $\mathbb{R}^3$  dont un des espaces  $G(x)$  est isométrique à un intervalle borné ouvert de  $\mathbb{R}$ , et n'est donc pas complet. Son image par l'immersion est une sorte de tourbillon coïncé entre deux tubes verticaux, le premier "pointu" se retrécissant indéfiniment sur l'axe vertical, et le second "cylindrique" admettant un cylindre asymptote de même axe. Le tourbillon va spiraler du tube cylindrique vers le tube pointu. Les sections horizontales du tourbillon sont des spirales coïncées dans une couronne (dont le cercle intérieur est de plus en plus petit) qui vont converger, lorsque le plan de section horizontale s'élève indéfiniment, vers une spirale de longueur finie isométrique à  $G(x)$ , où  $x$  est le point à l'infini verticalement du tourbillon (fig. 15). Les notations seront indépendantes de celles de l'appendice 1 (sect. 15).

Les deux tubes sont des surfaces de révolution de paramétrage cylindrique

$$(\theta, z) \rightsquigarrow (\mu_i(z) \cos \theta, \mu_i(z) \sin \theta, z), \quad i = 0, 1,$$

où  $\mu_0$  et  $\mu_1$  sont des fonctions de classe  $C^\infty$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}^{*+}$ , convexes telles que :

$$\begin{cases} \text{pour } i = 0, 1, \text{ si } z \leq 0, \mu_i(z) = 1 - z ; \\ \text{pour tout } z, \mu_0(z) \leq \mu_1(z) ; \\ \text{si } z \rightarrow +\infty, \mu_0(z) \rightarrow 0, \text{ et } \mu_1(z) \rightarrow 1/2. \end{cases}$$

Ces deux tubes ont une partie conique commune en-dessous du plan de cote nulle. Le domaine commun  $\mathbb{R}^2$  de ces paramétrages est une variété de Hadamard notée  $M_i$  ( $i = 0, 1$ ) pour la métrique  $g_i$  induite de celle  $\mathbb{R}^3$  par le paramétrage associé à  $\mu_i$ . Notre variété  $M$  est aussi  $\mathbb{R}^2$ , muni de la métrique  $g$  induite par une immersion  $F$  :

$$F(\theta, z) = (\mu_0(z) + (\mu_1(z) - \mu_0(z))\rho(\theta) \cos \theta, \\ \mu_0(z) + (\mu_1(z) - \mu_0(z))\rho(\theta) \sin \theta, z)$$

où  $\rho$  est une fonction sur  $\mathbb{R}$  à valeur dans  $]0, 1]$  à déterminer. La figure 15 représente l'image par  $F$  de la partie  $0 \leq \theta \leq 4\pi$  du plan.

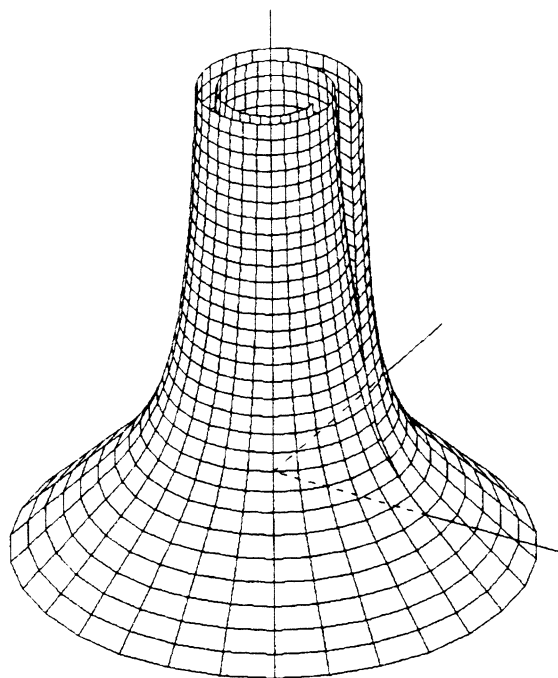


Fig. 15

Nous voulons que la courbe plane  $\Gamma_a$  de paramétrage polaire  $\rho$

- soit contenue dans le disque unité
- ait sa courbure tournée vers l'origine en tout point (pour que  $M$  ait une courbure négative)
- spirale vers l'origine.

La longueur totale de la courbe, lorsque  $\theta$  varie entre  $-\infty$  et  $+\infty$ , doit être finie. De plus, nous voulons que les tangentes à la courbe sur le demi-axe des abscisses positives soient parallèles à l'axe des ordonnées, afin que les courbes  $F(2n\pi, \cdot)$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ) soient des géodésiques du tourbillon. Pour assurer cette dernière propriété de  $\rho$ , soit  $\lambda$  une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}^+$ , de classe  $C^\infty$ , qui vaut 1 sur  $\mathbb{R}^-$ , est nulle sur  $[1, +\infty[$  et est décroissante sur  $[0, 1]$  (comme à la section 15).

La fonction  $\rho_a$  définie sur  $[0, 2\pi]$  par

$$\rho_a(\theta) = (1 - a)\lambda\left(\frac{\theta}{2\pi}\right) + a$$

converge uniformément vers 1, et ses dérivées vers 0, lorsque  $a$  tend vers 1 en restant inférieur à 1. Nous pouvons donc choisir  $a \in ]0, 1]$  tel que, pour tout  $a' \in [a, 1]$ , la convexité de l'arc de paramétrage polaire  $\rho_{a'}$  (sur  $[0, 2\pi]$ ) soit vers l'origine. On définit alors  $\rho$  sur  $\mathbb{R}^+$  par

$$\forall \theta \in [2n\pi, 2(n+1)\pi[, \quad n \text{ entier } \geq 0, \quad \rho(\theta) = a^n \rho_a(\theta - 2n\pi),$$

et sur  $\mathbb{R}^-$  par  $\rho(\theta) = \rho(-\theta)$ .

Remarquons que  $\Gamma_1$  est un cercle. Pour la valeur de  $a$  choisie, la courbe  $\Gamma_a$  a les propriétés requises. De plus, les projections horizontales des courbes  $F(\cdot, z)$  (pour  $z \geq 0$ ) sont aussi des spirales, images par homothétie de conchoïdes de  $\Gamma_a$ , et

$$\rho_a(\theta) + b = (1 + b)\rho_{(a+b)/(1+b)}(\theta).$$

Comme, pour  $b > 0$ ,  $1 > (a + b)/(1 + b) > a$ , le choix de  $a$  entraîne que ces spirales ont aussi leur convexité tournée vers l'origine. Notons que la projection de la courbe  $F(\cdot, z)$  est asymptote à un cercle de rayon  $\mu_0(z)$ .

Pour voir que  $M$  est complète, on observera que l'angle entre la tangente en un point de  $\Gamma_a$  avec le rayon vecteur reste voisin de  $\pi/2$ , uniformément par rapport à  $\theta$ , puisque  $a$  est choisi assez proche de 1.

On peut par calcul de comparaison des premières formes fondamentales des variétés immergées  $M$ ,  $M_0$  et  $M_1$ , en déduire l'existence de constantes  $A$  et  $B$  telles que :

$$Ag_0 \leq g \leq Bg_1.$$

Or  $M_0$  et  $M_1$  sont complètes, donc  $M$  l'est aussi.

Soit  $\gamma_n$  la géodésique  $\{2n\pi\} \times \mathbb{R}$  de  $M$  ( $\mathbb{R}^2$  munie de  $g$ ). La distance à l'infini (voir sect. 8) de  $\gamma_n$  à  $\gamma_{n+1}$  est inférieure ou égale à la limite des longueurs des courbes  $F([2n\pi, 2(n+1)\pi] \times \{z\})$  lorsque  $z$  tend vers l'infini, et cette limite est celle d'un tour de  $\Gamma$ . La borne supérieure des distances à l'infini entre ces géodésiques  $\gamma_n$  est donc finie. Le lemme suivant entraîne que  $G(x)$  n'est pas complet.

LEMME DE BALAYAGE ASYMPTOTIQUE 16.1. — Soient  $(u, v) \rightsquigarrow F(u, v)$  un difféomorphisme de  $\mathbb{R}^2$  sur la surface de Hadamard  $M$ , et  $(u_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  une famille strictement croissante de réels, de limite  $-\infty$  si  $n$  tend vers  $-\infty$  et  $+\infty$  si  $n$  tend vers  $+\infty$ , telle que les courbes  $\gamma_n : v \rightsquigarrow F(u_n, v)$  soient des géodésiques allant toutes au même point  $x \in M(\infty)$  lorsque  $v$  tend  $+\infty$ . Soit  $d_n = d(\gamma_0, \gamma_n)$ . L'espace  $G(x)$  est complet si et seulement si la suite  $(d_n)_{n > 0}$  est stationnaire ou tend vers l'infini lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ , et de même avec la suite  $(d_n)_{n < 0}$  lorsque  $n$  tend vers  $-\infty$ .

Il suffit en particulier que  $(d_n)$  soit bornée et non stationnaire pour que  $G(x)$  ne soit pas complet.

Preuve du lemme. — La réunion des bandes  $B_n = F([u_n, u_{n+1}] \times \mathbb{R})$  est toute la variété; et toute géodésique allant en  $x$  à l'infini a un point dans l'une des  $B_n$  et y reste, car les géodésiques qui vont en  $x$  feuilletent  $M$ . L'existence d'une courbe (un horocycle) transverse à ce feuilletage implique que les géodésiques de  $B_n$  sont celles de l'intervalle  $[\gamma_n, \gamma_{n+1}]$  de  $G(x)$ . Les conditions pour que  $G(x)$  soit complet sont alors claires, car  $\gamma_n$  va au bord de  $G(x)$  lorsque  $n$  tend vers l'infini.  $\square$

## Références

- [AA] ARNOLD et AVEZ. — *Ergodic Problems of Classical Mechanics*, Addison-Wesley (1989).
- [EO] EBERLEIN (P.) et O'NEILL (B.). — *Visibility Manifolds*, Pacific Journal of Mathematics **46**, n° 1 (1973), pp. 45-109.
- [Hart] HARTMAN (P.). — *Ordinary Differential Equations*, Birkhäuser (1982).
- [H-IH] HEINTZE (E.) et IM HOF (H.C.). — *Geometry of Horospheres*, Journal of Differential Geometry **12** (1977), pp. 481-491.
- [Hel] HELGASON (S.). — *Differential Geometry, Lie Groups and Symetric Spaces*, Academic Press (1978).
- [Hir] HIRSCH (M.W.). — *Differential Topology*, Springer Verlag (1976).
- [IH-R] IM HOF (H.C.) et RUH (E.A.). — *An Equivariant Pinching Theorem*, Comment. Math. Helvetici **50** (1975), pp. 389-401.
- [L1] LANGEVIN (R.). — *Courbures, feuilletages et surfaces (mesures et distributions de Gauss)*, Thèse, Université Paris-Sud (1980).
- [L2] LANGEVIN (R.). — *Geometry of Algebraic Curves, Hypersurfaces, Singularities and Foliations*, Preprint.
- [P] PANSU (P.). Séminaire Bourbaki, exposé n° 738, février 1991.
- [S] SIMÕES SILVA (N.). — *Comportement asymptotique des géodésiques aux bouts d'une courbe algébrique complexe de  $\mathbb{C}^2$* , Mathematica Contemporânea **1** (1991), pp. 89-92.