

HAMID ZAHIR

Représentation-* régulière des groupes de Lie compacts

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 6^e série, tome 2, n° 1
(1993), p. 117-139

http://www.numdam.org/item?id=AFST_1993_6_2_1_117_0

© Université Paul Sabatier, 1993, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Représentation-* régulière des groupes de Lie compacts^(*)

HAMID ZAHIR⁽¹⁾

RÉSUMÉ. — Dans cet article on s'intéresse à la description de la représentation régulière d'un groupe de Lie compact G en quantifiant par déformation la variété symplectique $T^*(G)$. Il existe dans la littérature deux produits-* sur ce type de variété. Nous les avons étudiés dans cette optique de représentation de G , et nous avons réalisé la représentation régulière avec l'un d'eux.

ABSTRACT. — In this paper, we realize the cotangent bundle of a compact Lie groups as a coadjoint orbit of a larger group, that allows us to get a geometrical description of the regular representation, by quantization of this one by deformation.

0. Introduction

L'une des implications de la théorie de la quantification par déformation ([5]) dans l'analyse harmonique est la construction explicite de représentations des groupes de Lie, en construisant ce qu'on appelle des représentations-*, plus précisément :

soit G un groupe de Lie, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, W une orbite de la représentation coadjointe de G dans le dual $\mathfrak{g}^*$ de $\mathfrak{g}$ et $d\mu$ une mesure invariante sur W .

(*) Reçu le 17 novembre 1992

(1) Département de Mathématiques, U.R.A. CNRS 399, Université de Metz, Ile de Saulcy, F-57045 Metz cedex 01 (France)

DÉFINITION . — Une représentation-* de G est une application définie sur G qui associe à chaque élément g de G une distribution $E(g)$ sur W telle que :

$$i) \quad E(g^{-1}) = \overline{E(g)};$$

ii) si $f \in C_c^\infty(G)$, E détermine une transformation de Fourier $\mathcal{E}$ par

$$\mathcal{E}(f) = \int_G f(g) E(g^{-1}) dg,$$

c'est-à-dire $\mathcal{E}(f)$ ainsi défini est une fonction de $L^1(W)$. De plus, $\text{Ker } \mathcal{E}$ est stable par la convolution

$$(i.e., \quad \mathcal{E}(f) = 0 \Rightarrow \mathcal{E}(f \times f') = \mathcal{E}(f' \times f) = 0, \quad \forall f' \in C_c^\infty(G));$$

iii) si $\tilde{f}(g) = \overline{f(g^{-1})} \Delta(g)$ ($g \in G$, $\Delta(g)$ est la fonction module sur G), alors

$$\langle \mathcal{E}(f), \mathcal{E}(f') \rangle = \int_W \mathcal{E}(f \times \tilde{f}') d\mu,$$

est un produit scalaire sur l'espace $N = \mathcal{E}(C_c^\infty(G)) \subset L^1(W)$, en particulier, $\langle \mathcal{E}(f), \mathcal{E}(f) \rangle$ est strictement positif.

Avec ceci, on définit sur N un produit-* en posant $\mathcal{E}(f) * \mathcal{E}(f') = \mathcal{E}(f \times f')$.

D'autre part si on note R_g l'action régulière à droite de G sur N , alors on a une représentation e de G dans N définie par

$$e(g)\mathcal{E}(f) = \mathcal{E}(R_g f),$$

bien sûr si N est muni du produit scalaire défini ci-dessus, e est unitaire.

Une représentation-* sera dite associée à la représentation unitaire (ρ, V) de G , si $(e, \hat{N})$ ($\hat{N}$ est le complété de N pour le produit scalaire ci-dessus) est unitairement équivalente à (ρ, V) à une normalisation près de $d\mu$, c'est-à-dire s'il existe un opérateur unitaire T tel que :

$$e(g) \cdot T(u) = T(\rho(g) \cdot u).$$

Ce programme, initié par C. Fronsdal [7], a été réalisé :

- par D. Arnal et J.-C. Cortet, dans le cas des groupes de Lie nilpotents [1], des groupes de Lie exponentiels [2], puis pour le revêtement universel $\tilde{E}_2$ du groupe $SO(2) \times \mathbb{R}^2$ [3];
- par D. Arnal, M. Cahen et S. Gutt [4] dans le cas compact.

Ici, on s'intéresse à la description de la représentation régulière d'un groupe de Lie compact, celui-ci peut être considéré comme un sous-groupe de $SO(V)$ ou V est un espace euclidien de dimension $n + 1$ (voir [11]), et alors le fibré cotangent $T^*(G)$ de G se réalise comme une orbite de la représentation coadjointe du groupe produit semi-direct de G avec n exemplaires de V .

La construction de la représentation- $\ast$ associée à cette orbite nous permet de décrire la représentation régulière de G .

Rappelons que sur $T^*(G)$, deux produits- $\ast$ ont été construits, l'un par A. Lichnerowicz [10], l'autre par S. Gutt [8]; on utilise celui de S. Gutt, les polarisations naturelles de celui de A. Lichnerowicz définissent, en effet, un espace de fonctions réduit à zéro.

Ainsi, dans la section 1., on fera quelques rappels pour fixer les notations, on réalisera $T^*(G)$ comme une orbite de $G \times V_n = G \times V \times V \times \cdots \times V$ n fois. Ensuite, on construira la représentation induite unitaire associée à cette orbite par la méthode des orbites de Kirillov.

Dans la section 2, on établira une correspondance entre un sous-espace B de l'espace $C^\infty(T^*(G))$ et l'espace des opérateurs de Hilbert-Schmidt sur $L^2(G)$ par $f \rightarrow A_f$, avec

$$A_f(\phi)(g) = \int_C \int_{\mathfrak{g}} e^{i\alpha(X)} f\left(g \exp \frac{X}{2}, \alpha\right) \phi(g \exp X) dX d\alpha,$$

où C est un ouvert de $\mathfrak{g}$ défini dans paragraphe 1.1. Ceci nous permet de définir un produit associatif dans B par

$$A_{f \ast f'} = A_f \circ A_{f'}.$$

On montrera que ce produit associatif correspond au produit- $\ast$ de S. Gutt [8] pour la valeur du paramètre $\nu = -i/2$. Ensuite, on définira la représentation- $\ast$ associée à l'orbite $T^*(G)$. Puis, on définira la transformée de Fourier adaptée sur $G \times V_n$, et on en déduira par restriction une description géométrique de la représentation régulière de G .

Section 1

1.0 Produit-* [5]

DÉFINITION 1.0.1. — Soit N une algèbre associative et de Lie de fonctions C^∞ sur une variété de Poisson W pour le crochet de Poisson $\{\cdot, \cdot\}$. Un produit-* est une déformation formelle de N , c'est-à-dire une application de $N \times N$ vers l'espace $E(N, \nu)$ des séries formelles en ν à coefficients dans N :

$$u * v = \sum_{r \geq 0} \nu^r C^r(u, v)$$

ayant les propriétés :

- i) * prolongé à $E(N, \nu)$ définit une loi associative,
- ii) $C^0(u, v) = uv$,
- iii) $C^1(u, v) = \{u, v\}$,
- iv) $C^r(u, v) = (-1)^r C^r(v, u)$,
- v) $C^r(1, v) = C^r(v, 1) = 0$ ($r > 1$),
- vi) les C^r sont des opérateurs bilinéaires.

Si les C^r sont tous bidifférentiels, on dira que le produit-* est différentiel. Les conditions iii) et iv) impliquent que

$$[u, v]_* = \frac{1}{2\nu} (u * v - v * u)$$

est une déformation formelle du crochet de Poisson. v) et iv) assurent que 1 reste l'unité de la structure associative et que * est distributif par rapport à l'addition. Si ν est "imaginaire pur", $u \mapsto \bar{u}$ est une involution de l'algèbre associative $E(N, \nu)$ obtenue. Dans la suite, on s'intéressera à des produits-* non formels définis en général par des formules intégrales, et, pour une valeur fixée du paramètre ν , le développement (1) étant un développement asymptotique.

1.1 Groupes compacts [9]

G étant un groupe de Lie compact, soit $\mathbb{T}$ un tore maximal dans G , $\underline{\mathfrak{t}}$ son algèbre de Lie, $\underline{\Delta}$ le système des racines de la complexifiée $\underline{\mathfrak{g}}^{\mathbb{C}}$ de $\underline{\mathfrak{g}}$ par rapport à $\underline{\mathfrak{t}}^{\mathbb{C}}$, et $D(\underline{\mathfrak{g}})$ le diagramme :

$$D(\underline{\mathfrak{g}}) = \{H \in \underline{\mathfrak{t}} \text{ tel que } \alpha(H) \in 2i\pi\mathbb{Z}, \text{ pour un certain } \alpha \in \underline{\Delta}\}.$$

Notons $\underline{t}_r = \underline{t} - D(\underline{g})$ et fixons une composante connexe P_0 de $\underline{t}_r$ telle que $0 \in \overline{P_0}$. Si on pose

$$\mathcal{C} = \text{Ad}(G)P_0$$

où Ad est l'action adjointe de G , alors ([9]) l'application :

$$\begin{aligned} G/T \times P_0 &\rightarrow G_r \\ (gT, H) &\mapsto g(\exp H)g^{-1} \end{aligned}$$

est une bijection sur son image G_r qui sera appelée l'ensemble des points réguliers de G . G_r est dense dans G . Et par construction, l'application $\exp : \mathcal{C} \rightarrow G_r$ est bijective.

Pour X fixé dans $\mathcal{C}$, soit

$$\begin{aligned} D_X &= \{Y \in \mathcal{C} \text{ tel que } \exp(-X) \exp Y \notin G_r\} \\ D'_X &= \{Y \in \mathcal{C} \text{ tel que } \exp(-Y) \exp X \notin G_r\} \\ \mathcal{C}_X &= \mathcal{C} \setminus D_X, \quad \mathcal{C}'_X = \mathcal{C} \setminus D'_X. \end{aligned}$$

D'après ce qui précède, les applications

$$\psi(X, \cdot) : \mathcal{C}_X \rightarrow \mathcal{C} \quad \text{et} \quad \psi(\cdot, X) : \mathcal{C}'_X \rightarrow \mathcal{C}$$

où $\exp \psi(X, Y) = \exp(-X) \exp Y$ sont des injections à image dense. De plus

$$\psi(X, Y) = -\psi(Y, X) \quad \text{si } Y \in \mathcal{C}_X \cap \mathcal{C}'_X.$$

1.2 Réalisation de $T^*(G)$ comme une orbite de $G \times V_n$

On garde les notations précédentes. Rappelons que G peut être considéré comme un sous-groupe de $\text{SO}(V)$ où V est un espace euclidien de dimension $n+1$ [11]. Si on note $V_m = V \times \cdots \times V$ m fois, G agit alors sur V_m par :

$$g(e_1, \dots, e_m) = (ge_1, \dots, ge_m), \quad e_i \in V \text{ et } g \in G.$$

Notons O_m l'orbite d'un point $(e_1, \dots, e_m)$ dans V_m sous G .

LEMME 1.2.1. — Si $m = n$ et $\{e_1, \dots, e_n\}$ un système libre de V , alors O_n est isomorphe à G .

Preuve. — Soit $(e_1, \dots, e_{n+1})$ une base de V . Si g appartient au stabilisateur $G(e_1, \dots, e_n)$ de $(e_1, \dots, e_n)$, alors $ge_i = e_i$ pour $i = 1, \dots, n$, mais puisque g est dans $SO(V)$, alors g stabilise $\langle e_1, \dots, e_n \rangle^\perp$, et son orientation donc e_{n+1} , d'où $g = \text{Id}$. Et par conséquent

$$O_n \simeq G/G(e_1, \dots, e_n) \simeq G. \square$$

Considérons le groupe produit semi-direct $G \times V_n$ qu'on réalise matriciellement par

$$G \times V_n = \left\{ (g, Y_1, \dots, Y_n) = \begin{pmatrix} g & \dots & 0 & Y_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & g & Y_n \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Le produit dans $G \times V_n$ s'écrit :

$$(g, Y_1, \dots, Y_n)(g', Y'_1, \dots, Y'_n) = (gg', gY'_1 + Y_1, \dots, gY'_n + Y_n).$$

L'action adjointe de $G \times V_n$ est donnée par

$$\begin{aligned} \text{Ad}(g, Y_1, \dots, Y_n)(X, T_1, \dots, T_n) &= \\ &= (\text{Ad } gX, -(\text{Ad } gX)Y_1 + gT_1, \dots, -(\text{Ad } gX)Y_n + T_n). \end{aligned}$$

Par conséquent, si $(\xi, \eta_1, \dots, \eta_n)$ est un point du dual de $\underline{\mathfrak{g}}^* \times V_n^*$ de $\underline{\mathfrak{g}} \times V_n$ alors

$$\text{Ad}^*(g, Y_1, \dots, Y_n)(\xi, \eta_1, \dots, \eta_n) = (\xi', \eta'_1, \dots, \eta'_n),$$

où

$$\xi' = \text{Ad}^*(g)\xi + \sum_{i=1}^n g\eta_i \wedge Y_i, \quad \eta'_i = g\eta_i,$$

la forme $\eta \wedge Y$ étant définie sur $\underline{\mathfrak{g}}$ par

$$\langle \eta \wedge Y, X \rangle = \langle \eta, Y \cdot X \rangle$$

($X \cdot Y$ est l'action de X de $\underline{\mathfrak{g}}$ sur Y de V).

Soit $\{e_1, \dots, e_n\}$ un système libre de V . Prenons le point $(0, e_1, \dots, e_n)$ dans $\underline{\mathfrak{g}}^* \times V_n$. Notons O l'orbite de ce point sous $G \times V_n$.

PROPOSITION 1.2.2. — O est symplectomorphe à $T^*(G)$.

Preuve

$$T^*(G) = \{(g, \alpha) \text{ avec } g \in G \text{ et } \alpha \in T_g^*(G)\} \simeq G \times \underline{\mathfrak{g}}^*.$$

Tout d'abord l'application

$$\begin{aligned} O &\rightarrow T^*(G) \\ (\alpha, g(e_1, \dots, e_n)) &\mapsto (g, \alpha) \end{aligned}$$

est bijective, vu le lemme précédent.

D'autre part, soit λ la 1-forme de Liouville sur $T^*(G)$:

$$\lambda_{(g, \alpha)}(X, T) = \alpha(X) \quad \text{si } X \in \underline{\mathfrak{g}} \text{ et } T \in \underline{\mathfrak{g}}^*,$$

alors

$$\begin{aligned} d\lambda_{(g, \alpha)}((X, T), (X', T')) &= (X, T)\lambda_{(g, \alpha)}(X', T') - (X', T')\lambda_{(g, \alpha)}(X, T) + \\ &\quad - \lambda_{(g, \alpha)}([(X, T), (X', T')]). \end{aligned}$$

Remarquons que :

- 1) si X est dans $\underline{\mathfrak{g}}$, on peut voir $(X, 0)$ comme un champ de vecteurs sur $G \times \underline{\mathfrak{g}}^*$ et la fonction $(\widetilde{X}, 0)$ sur l'orbite est définie par

$$(\widetilde{X}, 0)_{(g, \alpha)} = \langle (X, 0), (\alpha, g \cdot (e_1, \dots, e_n)) \rangle = \alpha(X) = \lambda_{(g, \alpha)}(X, 0);$$

- 2) si $Y \in T_g^*(G)$ vu comme un vecteur tangent à la fibre de $T^*(G)$ en (g, α) , on a

$$\lambda_{(g, \alpha)}(0, Y) = 0.$$

Soit maintenant ω la 2-forme symplectique sur O :

$$\omega((X, Y), (X', Y')) = \{(\widetilde{X}, \widetilde{Y}), (\widetilde{X'}, \widetilde{Y'})\},$$

où $\{\cdot, \cdot\}$ est le crochet de Poisson sur O .

On va montrer que

$$\omega_{(g, \alpha)} = d\lambda_{(g, \alpha)}.$$

En effet, il suffit de voir que:

- a) $d\lambda_{(g,\alpha)}((X, 0), (X', 0)) =$
 $= (X', 0) \cdot \alpha(X) - (X, 0) \cdot \alpha(X') + \alpha([X, X'])$
 $= \{(\widetilde{X}, 0), (\widetilde{X'}, 0)\}_{(g,\alpha)} = \omega_{(g,\alpha)}((X, 0), (X', 0)) ;$
- b) $d\lambda_{(g,\alpha)}((X, 0), (0, Y)) =$
 $= (0, Y) \cdot \alpha(X) - (X, 0) \cdot \lambda_{(g,\alpha)}(0, Y) + \lambda_{(g,\alpha)}([X, 0], (0, Y))$
 $= ((0, Y) \cdot (\widetilde{X}, 0))(g, \alpha) = \{(\widetilde{X}, 0), (\widetilde{0}, Y)\}_{(g,\alpha)} ;$
- c) puisque $[(0, Y), (0, Y')] = 0$, alors
- $$d\lambda_{(g,\alpha)}((0, Y), (0, Y')) = 0 = \omega_{(g,\alpha)}((0, Y), (0, Y')) .$$

1.3 La représentation induite unitaire

Au point $(0, e_1, \dots, e_n)$ de l'orbite O , on choisit la polarisation algébrique réelle $\underline{h} = \{0\} \times V_n$, et on choisit un caractère χ sur $\underline{h}$ par :

$$\chi(0, v_1, v_2, \dots, v_n) = i \sum_{j=1}^n \langle e_j, v_j \rangle \quad ((v_1, \dots, v_n) \in V_n) .$$

Si on exponentie χ au sous-groupe $H = \{I\} \times V_n$ par

$$\chi(I, v_1, \dots, v_n) = e^{i \sum_{j=1}^n \langle e_j, v_j \rangle} .$$

La représentation induite unitaire

$$\pi = \text{ind}_{H \uparrow G \times V_n} \chi$$

se réalise alors sur l'espace $\mathcal{H}$ des fonctions F mesurables sur $G \times V_n$ à valeur complexes, telles que :

$$\begin{cases} 1) & F(hA) = \chi(h)F(A) & \text{si } h \in H \\ 2) & \int_{H \backslash G \times V_n} |F(A)|^2 dA < \infty, \end{cases}$$

par

$$(\pi(A) \cdot F)(A') = F(A'A)$$

(A et A' sont dans $G \times V_n$).

Or $H \setminus G \times V_n$ est canoniquement isomorphe à G . Considérons en effet la section τ ,

$$\begin{aligned}\tau : G &\rightarrow G \times V_n \\ g &\mapsto (g, 0, \dots, 0).\end{aligned}$$

Alors, à chaque F de $\mathcal{H}$ on associe une fonction f sur G définie par

$$f(g) = F(\tau(g)), \quad \forall g \in G.$$

Donc π se réalise sur $L^2(G)$, et, pour f dans $L^2(G)$, $(g, Y_1, \dots, Y_n)$ dans $G \times V_n$ et g' dans G , on aura

$$(\pi(g, Y_1, \dots, Y_n)f)(g') = \chi(I, g'^{-1}Y_1, \dots, g'^{-1}Y_n)f(g'g).$$

Les générateurs infinitésimaux de π sont

$$\begin{aligned}\text{si } X \in \underline{\mathfrak{g}}, \quad (\pi(X, 0)f)(g') &= \frac{d}{dt} f(g' \exp tX) \Big|_{t=0} \\ \text{si } Y \in V_n, \quad (\pi(0, Y)f)(g') &= \chi(I, g'^{-1}Y)f(g').\end{aligned}$$

Remarquons que l'on peut écrire

$$\begin{aligned}\chi(I, g^{-1}Y) &= i \sum_{j=1}^n \langle e_j, g^{-1}Y_j \rangle = i \sum_{j=1}^n \tilde{Y}_j(g e_j) \\ &= i \tilde{Y}(g) \quad (Y = (Y_1, \dots, Y_n)).\end{aligned}$$

Donc $\pi((\widetilde{0, Y}))$ est la multiplication par une fonction qui ne dépend que des variables de la base G du fibré $T^*(G)$.

Section 2

2.1 Représentation- $\ast$

Soit $\mathcal{C}$ l'ouvert de $\underline{\mathfrak{g}}$ défini dans le paragraphe 1.1.

DÉFINITION 2.1.1. — Soit f une fonction C^∞ à support compact sur $T^*(G)$ et φ une fonction de $L^2(G)$, on pose

$$(A_f \varphi)(g) = \int_{\mathcal{C}} \int_{\underline{\mathfrak{g}}^*} e^{i\alpha(X)} f\left(g \exp \frac{X}{2}, \alpha\right) (g \exp X) dX d\alpha.$$

Ainsi défini, A_f est un opérateur linéaire sur $L^2(G)$.

Notons par B l'ensemble des fonctions de $C^\infty(T^*(G))$, telles que la transformée de Fourier partielle $(\mathcal{F}_\alpha f)$ de f par rapport à la variable α dans la fibre ait un support κ compact et inclus dans $(G \times C)$.

PROPOSITION 2.1.2. — Si f est dans B alors :

i) A_f est un opérateur de Hilbert-Schmidt sur $L^2(G)$, et on a une estimation

$$\|A_f\|_{\text{HS}} \leq C(\kappa) \|f\|_{L^2}$$

($C(\kappa)$ est une constante qui dépend de κ);

ii) L'adjoint de l'opérateur A_f est $A_f^* = A_{\bar{f}}$;

iii) $\text{Tr } A_f = \int_{T^*(G)} f(g, \alpha) \, dg \, d\alpha$.

Preuve

i) Soit f un élément de B et φ une fonction de $L^2(G)$:

$$\begin{aligned} (A_f \varphi)(g) &= \int_C \int_{\underline{g}^*} e^{i\alpha(X)} f\left(g \exp \frac{X}{2}, \alpha\right) \varphi(g \exp X) \, dX \, d\alpha \\ &= \int_C (\mathcal{F}_\alpha f)\left(g \exp \frac{X}{2}, X\right) \varphi(g \exp X) \, dX. \end{aligned}$$

Si $\Delta(X) \, dX$ est une mesure de Haar invariante à gauche sur $\exp C$, on pose

$$\Phi_f(g, \exp X) = (\mathcal{F}_\alpha f)\left(g \exp \frac{X}{2}, X\right) \Delta(X)^{-1}.$$

Φ_f est C^∞ sur $G \times G$ et à support compact inclus dans $G \times \exp C$. Alors si dg est la mesure de Haar sur G , on a

$$\begin{aligned} (A_f \varphi)(g) &= \int_C \Phi_f(g, \exp X) \varphi(g \exp X) \Delta(X) \, dX \\ &= \int_G \Phi_f(g, g') \varphi(gg') \, dg' \\ &= \int_G \Phi_f(g, g^{-1}g') \varphi(g') \, dg'. \end{aligned}$$

Donc A_f est un opérateur de noyau $K_f(g, g') = \Phi_f(g, g^{-1}g')$. D'où

$$\begin{aligned} \|A_f\|_{\text{HS}}^2 &= \int_{G \times G} |K_f(g, g')|^2 dg dg' = \int_{G \times G} |\Phi_f(g, g^{-1}g')|^2 dg dg' \\ &= \int_G \int_G |\Phi_f(g, g')|^2 dg dg' \\ &= \int_G \int_{\mathcal{C}} |\Phi_f(g, \exp Y)|^2 \Delta(Y) dY dg \\ &= \int_G \int_{\mathcal{C}} \left| (\mathcal{F}_\alpha f) \left(g \exp \frac{Y}{2}, Y \right) \right|^2 \Delta^{-1}(Y) dY dg. \end{aligned}$$

Mais, comme f appartient à B , $(\mathcal{F}_\alpha f)$ est à support compact κ dans $G \times \mathcal{C}$, ce qui entraîne que

$$\begin{aligned} \|A_f\|_{\text{HS}}^2 &\leq C(\kappa) \int_G \int_{\mathcal{C}} \left| (\mathcal{F}_\alpha f) \left(g \exp \frac{Y}{2}, Y \right) \right|^2 dY dg \\ &\leq C(\kappa) \int_{G \times \underline{\mathcal{C}}} |(\mathcal{F}_\alpha f)(g, Y)|^2 dY dg = \text{constante} \|f\|_{L^2}^2, \end{aligned}$$

puisque $\Delta(Y)$ est bornée sur la projection de κ sur $\mathcal{C}$.

ii) Si $K_f(g, g')$ est le noyau de l'opérateur A_f , alors l'adjoint A_f^* de A_f a comme noyau

$$\overline{K}_f(g', g) = \overline{\Phi}_f(g, g'^{-1}g).$$

Posons $g = \exp X$, $g' = \exp Y$ avec X et Y dans $\mathcal{C}$ tels que $g'^{-1}g \in \exp \mathcal{C}$, alors

$$g^{-1}g' \in \exp \mathcal{C} \quad \text{et} \quad g^{-1}g' = \exp \psi(X, Y),$$

ψ étant définie au paragraphe 1.1. Donc

$$\overline{K}_f(g', g) = (\overline{\mathcal{F}_\alpha f}) \left(g' \exp \frac{\psi(Y, X)}{2}, \psi(X, Y) \right) \Delta(\psi(Y, X))^{-1}.$$

Mais

$$(\overline{\mathcal{F}_\alpha f})(g, X) = (\mathcal{F}_\alpha \overline{f})(g, -X) \quad \text{et} \quad \psi(Y, X) = -\psi(X, Y).$$

Alors

$$\begin{aligned} \overline{K}_f(g', g) &= (\mathcal{F}_\alpha \overline{f}) \left(g \exp \frac{\psi(X, Y)}{2}, \psi(X, Y) \right) \Delta(\psi(X, Y))^{-1} \\ &= \Phi_{\overline{f}}(g, \exp \psi(X, Y)) = \Phi_{\overline{f}}(g, g^{-1}g') \\ &= K_{\overline{f}}(g, g'). \end{aligned}$$

D'où

$$(A_f)^* = A_{\overline{f}}.$$

iii) Se déduit du fait que le noyau de A_f est continu et donc

$$\begin{aligned} \text{Tr } A_f &= \int_G K_f(g, g) \, dg = \int_G \Phi_f(g, I) \, dg \\ &= \int_G (\mathcal{F}_\alpha f)(g, 0) \, dg = \int_{T^*(G)} f(g, \alpha) \, dg \, d\alpha. \quad \square \end{aligned}$$

Maintenant, si f est dans B , la formule

$$\|A_f\|_{\text{HS}}^2 = \text{Tr}(A_f \circ A_{\overline{f}})$$

définit un produit scalaire dans B par

$$\langle f, f' \rangle = \text{Tr}(A_f \circ A_{\overline{f'}}).$$

Notons L_*^2 le complété de B pour cette norme.

PROPOSITION 2.1.3. — *L'application A qui à f associe A_f est une bijection de L_*^2 sur l'espace $\text{HS}(L^2(G))$ des opérateurs de Hilbert-Schmidt sur $L^2(G)$.*

Preuve. — D'une part, l'injectivité découle du fait que

$$\|A_f\|_{\text{HS}}^2 = \|f\|_{L_*^2}^2.$$

D'autre part, soit $\kappa \subset \kappa' \subset \mathcal{C}$ deux compacts, ρ_κ une fonction C^∞ telle que

$$\rho_\kappa(X) = \begin{cases} 1 & \text{si } X \in \kappa \\ 0 & \text{si } X \in \mathcal{C} \setminus \kappa' \end{cases} \quad \text{et} \quad 0 \leq \rho_\kappa(X) \leq 1.$$

Si A est un opérateur dans $\text{HS}(L^2(G))$, de noyau K , on définit la fonction f_κ dans B par

$$(\mathcal{F}_\alpha f_\kappa) \left(g \exp \frac{X}{2}, X \right) = \begin{cases} K(g, g \exp X) \Delta(X) \rho_\kappa(X) & \text{si } X \in \kappa' \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Notons K_{f_κ} le noyau de l'opérateur A_{f_κ} . Rappelons (voir *i*) de la preuve de la proposition 2.1.2) que

$$K_{f_\kappa}(g, g') = \Phi_{f_\kappa}(g, g^{-1}g').$$

Si $g^{-1}g'$ s'écrit $\exp X$, avec X dans $\mathcal{C}$, alors $g' = g \exp X$, et

$$\begin{aligned} K_{f_\kappa}(g, g') &= (\mathcal{F}_\alpha f_\kappa) \left(g \exp \frac{X}{2}, X \right) \Delta^{-1}(X) \\ &= K(g, g \exp X) \rho_\kappa(X) = K(g, g') \rho_\kappa(X). \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \int_{G \times G} |(K - K_{f_\kappa})(g, g')|^2 dg dg' &= \\ &= \int_G dg \left[\int_{\mathcal{C} \setminus \kappa} |K(g, g \exp X) - K(g, g \exp X) \rho_\kappa(X)|^2 \Delta(X) dX \right] \\ &\leq \int_G \int_{\mathcal{C} \setminus \kappa} |K(g, g \exp X)|^2 |(1 - \rho_\kappa(X))|^2 \Delta(X) dX dg \\ &\leq \int_G \int_{\mathcal{C} \setminus \kappa} |K(g, g \exp X)|^2 \Delta(X) dX dg \\ &= \int_G \int_{\exp(\mathcal{C} \setminus \kappa)} |K(g, g')|^2 dg dg'. \end{aligned}$$

Maintenant si κ_n est une suite de compacts dans $\mathcal{C}$ tel que $\kappa_n \subset \kappa_{n+1}$ et $\bigcup \kappa_n = \mathcal{C}$, alors la suite $K_{f_{\kappa_n}}$ converge vers K dans $L^2(G \times G)$. Ce qui entraîne que f_{κ_n} est une suite de Cauchy dans B . Elle converge donc dans $L^2_\ast$ vers un certain vecteur f et $K = K_f$. $\square$

DÉFINITION 2.1.4. — Si f et f' sont deux éléments de $L^2_\ast$, on pose

$$A_{f \ast f'} = A_f \circ A'_{f'}.$$

Ceci définit un produit associatif dans $L^2_\ast$. On va montrer que ce produit est associé au produit- $\ast$ défini par S. Gutt sur $T^\ast(G)$ dans [8]. Rappelons la définition de ce produit- $\ast$.

Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G , $S(\mathfrak{g})$ l'algèbre symétrique de $\mathfrak{g}$ et $U(\mathfrak{g})$ l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$. L'application de complète symétrisation σ de $S(\mathfrak{g})$ vers $U(\mathfrak{g})$ étant une bijection linéaire, on peut écrire

$$U(\mathfrak{g}) = \bigotimes_{n=0}^{\infty} \sigma(S^n(\mathfrak{g})),$$

si $S^n(\mathfrak{g})$ représente l'espace des polynômes homogène de degré n . Un vecteur u de $U(\mathfrak{g})$ se décomposera en $u = \sum u_n$ dans cette décomposition.

- Si P est dans $S^r(\underline{g})$ est Q dans $S^s(\underline{g})$, posons

$$P * Q = \sum_{n \geq 0} (2\nu)^n \sigma^{-1} \left((\sigma(P) \cdot \sigma(Q))_{r+s-n} \right),$$

et prolongeons $*$ par bilinéarité à $S(\underline{g}) \times S(\underline{g})$.

- Si f et f' sont des fonctions de G seulement, on a

$$f * f' = ff'.$$

- Si f est dans $C^\infty(G)$, f' dans $C^\infty(T^*(G))$ et τ est la projection canonique $T^*(G) \rightarrow G$, alors

$$\tau^*(f) * f' = \tau^*(f)f' + \sum_{r \geq 0} \frac{(-\nu)^r}{r!} \tau^*(X_{i_1} \dots X_{i_r}) Z_{i_1} \dots Z_{i_r} f',$$

où les X_i forment une base de $\underline{g}$ et sont vus comme des champs de vecteurs sur G et les Z_i sont les champs de vecteurs verticaux de $T^*(G)$ tels que $d\lambda_{(g,\alpha)}(Z_i, \tau^*X_j) = \delta_{i,j}$, λ est la 1-forme de Liouville sur $T^*(G)$.

Il existe alors un et un seul produit associatif formel sur $T^*(G) \simeq G \times \underline{g}^*$ qui vérifie ces trois relations (voir [8]).

PROPOSITION 2.1.5. — On peut étendre la transformation A à $L_\star^2 \oplus (\underline{g} \times V_n)$ d'une façon unique en posant

$$A_{\widetilde{X}} = -\pi(X), \quad \forall X \in \underline{g} \times V_n.$$

Preuve. — Il suffit de montrer que la relation qui définit A_f peut être étendue aux éléments d'une base de $\underline{g} \times V_n$.

Si X_j est un élément de $\underline{g}$, on notera le nombre $(\widetilde{X}, 0)(g, \alpha)$ par $\widetilde{X}(g, \alpha)$. Alors

$$\widetilde{X}_j = \alpha_j,$$

donc si φ est C^∞ sur G et si $\text{supp } \varphi$ est un compact inclus dans $g \exp \mathcal{C}$, posons

$$\phi(x) = \varphi \left(g \exp \sum_j x_j X_j \right),$$

alors ϕ est une fonction C^∞ à support compact dans $\mathbb{R}^m$ et

$$\begin{aligned} (A_{\tilde{X}_j} \varphi)(g) &= \int_{\mathcal{C}} \int_{\underline{\mathfrak{g}}^*} e^{i\alpha(X)} \alpha_j \varphi(g \exp X) dX d\alpha \\ &= \int_{\underline{\mathfrak{g}}^*} \alpha_j (\mathcal{F}\phi)(\alpha) d\alpha. \end{aligned}$$

par conséquent

$$\begin{aligned} (A_{\tilde{X}_j} \varphi)(g) &= \overline{\mathcal{F}}(\alpha_j(\mathcal{F}\phi))(0) = -i \frac{\partial}{\partial x_j} \phi(x) \Big|_{x=0} \\ &= -i(\pi(X_j)\varphi)(g). \end{aligned}$$

De même, si $(0, Y)$ est un élément de $\{0\} \times V_n \subset \underline{\mathfrak{g}} \times V_n$, alors la fonction $(0, \tilde{Y})$ que nous notons $\tilde{Y}$ est une fonction des variables de G seulement. Mais si φ' est une fonction des variables de G seulement et φ a les mêmes propriétés que ci-dessus alors :

$$(A_{\varphi'} \varphi)(g) = \int_{\underline{\mathfrak{g}}^*} \mathcal{F}(\phi'\phi)(\alpha) d\alpha = \overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}(\phi'\phi))(0),$$

où on a posé pour $X = \sum x_i X_i$ et $x = (x_1, \dots, x_{\dim \underline{\mathfrak{g}}})$:

$$\phi'(x) = \varphi' \left(g \exp \frac{X}{2} \right) \quad \text{et} \quad \phi(x) = \varphi(g \exp X).$$

Ce qui entraîne que

$$(A_{\varphi'} \varphi)(g) = \varphi'(g) \varphi(g).$$

Et, vu l'expression de $\pi((0, Y))$ (voir paragraphe 1.3), on a

$$(A_{\tilde{Y}} \varphi)(g) = -i(\pi((0, Y))\varphi)(g). \quad \square$$

COROLLAIRE 2.1.6. — $\ast$ "est" le produit de S . Gutt.

Preuve. — En effet, d'après la proposition précédente, le prolongement de la transformation A à $L_*^2 \oplus \underline{\mathfrak{g}} \times V_n$ définit un produit associatif sur un sous-espace de $L_*^2 \oplus S(\underline{\mathfrak{g}})$ tel que :

- si P et Q sont dans $S(\underline{\mathfrak{g}})$ homogènes de degrés r et s alors

$$P \ast Q = \sum_{n \geq 0} (2\nu)^n \sigma^{-1} \left((\sigma(P) \cdot \sigma(Q))_{r+s-n} \right),$$

où σ est la symétrisation de $S(\underline{g})$ dans $U(\underline{g})$; ceci se démontre par induction en utilisant la transformation A et le fait que π est une représentation de $U(\underline{g})$;

- si f et f' sont des fonctions C^∞ des variables de G seulement, d'après la preuve ci-dessus

$$f * f' = ff' ;$$

- un calcul direct en utilisant la transformation A et la proposition précédente montre que la troisième condition du produit- $*$ de S. Gutt est vérifiée. $\square$

Remarque 1.1.7. — Rappelons que A. Lichnerowicz dans [10] avait défini un produit- $*$ sur $T^*(G)$ de la façon suivante.

Prenons l'exemple $G = \text{SO}(V)$. On considère G comme une sous-variété de $V \times \cdots \times V$ n fois (comme dans la section 1.2), donc $T^*(G)$ se réalise comme une sous-variété de E :

$$E = ((V \times \cdots \times V) - \{0\}) \times (V \times \cdots \times V).$$

Soient $\{q_1, \dots, q_n\}, \{p_1, \dots, p_n\}$ deux systèmes libres de V , $\rho_i > 0$, $\sigma_{i,j}$, $\gamma_{i,j}$ et $\nu_{i,j}$ ($i, j = 1, \dots, n$) des nombres réels, on définit des transformations linéaires sur E par

$$\begin{aligned} q'_1 &= \rho_1 q_1 \\ q'_2 &= \rho_2 (q_2 + \gamma_{2,1} q_1) \\ &\vdots \\ q'_n &= \rho_n \left(q_n + \sum_{i=1}^{n-1} \gamma_{q,i} q_i \right) \\ p'_n &= \rho_n^{-1} \left(p_n + \sum_{i=1}^n \nu_{n,i} p_i \right) \\ p'_{n-1} &= \rho_{n-1}^{-1} \left(p_{n-1} + \sigma_{n-1,n} p_n + \sum_{i=1}^n \nu_{n-1,i} q_i \right) \\ &\vdots \\ p'_1 &= \rho_1^{-1} \left(p_1 + \sum_{i=1}^n \sigma_{1,i} p_i + s \sum_{i=1}^n \nu_{1,i} q_i \right). \end{aligned}$$

Si on impose $dp \wedge dq = dp' \wedge dq'$, on définit alors un groupe G_0 engendré par ces transformations qui agit sur E en préservant la structure symplectique et la connexion plate de E . De plus, l'espace des orbites de E sous G_0 est isomorphe à $T^*(G)$. On considère donc le fibré principal $\pi : E \rightarrow T^*(G)$ de groupe structurel G_0 et le produit- $\ast$ de Moyal usuel $\ast_M$ sur E . On pose alors, pour f et f' des fonctions C^∞ sur $T^*(G)$:

$$\pi^\ast f \ast_M \pi^\ast f' = \pi^\ast (f \ast f').$$

Ce produit- $\ast$ possède une polarisation- $\ast$ au sens de Fronsdal [7] réelle naturelle :

$$\{f \text{ tels que } f \ast q_i = 0, \forall i\}.$$

Un calcul direct dans le cas $G = \text{SO}(3)$ montre que cette polarisation- $\ast$ est réduite à 0. C'est pourquoi on ne considérera pas ici le produit- $\ast$ de A. Lichnerowicz.

Notons que ces deux produits- $\ast$ (celui de S. Gutt et celui de A. Lichnerowicz) sont différents (voir [6]).

Soit maintenant f dans $L_\ast^2$ et γ un élément de $G \times V_n$. $\pi(\gamma)$ est alors un opérateur unitaire, ce qui entraîne que $\pi(\gamma) \circ A_f$ est dans $\text{HS}(L^2(G))$. Ainsi, de l'action de $G \times V_n$ dans $\text{HS}(L^2(G))$, on déduit une action de $G \times V_n$ dans $L_\ast^2$, notée $E(\gamma)^\ast$.

DÉFINITION 2.1.8. — Pour γ dans $G \times V_n$ et f dans $L_\ast^2$, on pose

$$A_{E(\gamma)^\ast f} = \pi(\gamma) \circ A_f.$$

PROPOSITION 2.1.9. — Les relations suivantes sont vérifiées :

- i) $E(\gamma^{-1}) = \overline{E(\gamma)}$;
- ii) $\frac{d}{dt} ((\exp t\Gamma) \ast f) \Big|_{t=0} = i\tilde{\Gamma} \ast f, \quad \forall \Gamma \in \underline{\mathfrak{g}} \times V_n, \forall f \in B.$

Preuve

i) résulte des égalités suivantes :

$$\begin{aligned} A_{E(\gamma^{-1})^\ast f} &= \pi(\gamma^{-1}) \circ A_f = \pi(\gamma)^\ast \circ A_f = (A_f^\ast \circ \pi(\gamma))^\ast \\ &= A_{f^\ast E(\gamma)}^\ast = \overline{A_{f^\ast E(\gamma)}} = \overline{A_{E(\gamma)^\ast f}}. \end{aligned}$$

ii) Si f est dans B , A_f est de Hilbert-Schmidt et est un vecteur C^∞ pour la représentation de G sur $\text{HS}(L^2(G))$ définie par $(\gamma, A) \rightarrow \pi(\gamma) \circ A$. Donc f est un vecteur C^∞ pour la représentation $E(\gamma)_*$ et

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} A_{E(\exp t\Gamma)_* f} \Big|_{t=0} &= \frac{d}{dt} (\pi(\exp t\Gamma) \circ A_f) \Big|_{t=0} = \pi(\Gamma) \circ A_f \\ &= A_{i\tilde{\Gamma}_* f} = A \frac{d}{dt} (E(\exp t\Gamma)_* f) \Big|_{t=0} . \quad \square \end{aligned}$$

D'autre part, on peut définir $E(\gamma)$ comme une distribution sur B . Plus précisément, à partir du produit scalaire sur B défini précédemment, on définit une forme bilinéaire réelle sur B par

$$\langle\langle f, f' \rangle\rangle = \text{Tr}(A_f \circ A_{f'}) \quad (\text{si } f \text{ et } f' \text{ sont dans } B).$$

Avec les notations précédentes, si K_f (resp $K_{f'}$) est le noyau de l'opérateur A_f (resp $A_{f'}$), on a :

$$\begin{aligned} \langle\langle f, f' \rangle\rangle &= \int_{G \times G} K_f(g, g') K_{f'}(g', g) dg dg' \\ &= \int_{G \times G} \Phi_f(g, g^{-1}g') \Phi_{f'}(g', g'^{-1}g) dg dg'. \end{aligned}$$

Le changement de variable $g^{-1}g' = g''$ entraîne que

$$\begin{aligned} \langle\langle f, f' \rangle\rangle &= \\ &= \int_{G \times G} \Phi_f(g, g'') \Phi_{f'}(gg'', g''^{-1}) dg dg'' \\ &= \int_{G \times \mathcal{C}} (\mathcal{F}_\alpha f) \left(g \exp \frac{X}{2}, X \right) (\mathcal{F}_\alpha f') \left(g \exp \frac{X}{2}, -X \right) \Delta(-X) dg dX \\ &= \int_{G \times \mathcal{C}} (\mathcal{F}_\alpha f)(g, X) \overline{\mathcal{F}_\alpha f'}(g, X) \Delta(-X)^{-1} dg dX. \end{aligned}$$

Rappelons que Δ est définie par

$$\int_G f(g) dg = \int_{\mathcal{C}} f(\exp X) \Delta(X) dX.$$

Si f' est une fonction de B , $\overline{\mathcal{F}_\alpha f'}(g, X) \Delta(-X)^{-1}$ est un élément de l'espace $\mathcal{D}$ des fonctions C^∞ à support compact inclus dans $G \times \mathcal{C}$ et réciproquement. On identifie donc les duaux de ces deux espaces en disant

qu'une forme T sur B est une distribution sur B (un élément de B') si et seulement s'il existe une distribution S de $\mathcal{D}'$ telle que

$$\langle T, f \rangle_B = \left\langle S, \overline{\mathcal{F}_\alpha f} \Delta(-X)^{-1} \right\rangle_{\mathcal{D}}, \quad \forall f \in B.$$

En particulier, toute fonction f de B définit une distribution T_f sur B par

$$\langle T_f, f \rangle_B = \langle f, f' \rangle = \left\langle (\mathcal{F}_\alpha f), \overline{\mathcal{F}_\alpha f'} \Delta(-X)^{-1} \right\rangle_{\mathcal{D}}.$$

- Si $X \in \mathcal{C}$, la formule

$$\langle E(\exp X), f \rangle_B = \text{Tr}(\pi(\exp X) \circ A_f)$$

définit une distribution $E(\exp X)$ sur B .

En effet, le noyau $K_{X,f}$ de l'opérateur $\pi(\exp X) \circ A_f$ est

$$K_{X,f}(g, g') = K_f(g \exp X, g').$$

Donc :

$$\begin{aligned} \langle E(\exp X), f \rangle_B &= \int_G K_{X,f}(g, g) dg = \int_G K_f(g \exp X, g) dg \\ &= \int_G \Phi_f(g \exp X, \exp -X) dg \\ &= \int_G (\mathcal{F}_\alpha) \left(g \exp \frac{X}{2}, -X \right) \Delta(-X)^{-1} dg \\ &= \int_G (\overline{\mathcal{F}_\alpha f})(g, X) \Delta(-X)^{-1} dg \\ &= \left\langle 1_G \otimes \delta_X, (\overline{\mathcal{F}_\alpha f}) \Delta(-X)^{-1} \right\rangle_{\mathcal{D}}. \end{aligned}$$

Ce que l'on écrira formellement :

$$E(\exp X) = \mathcal{F}_\alpha(1_G \otimes \delta_X) = 1_G \otimes e^{i\alpha(X)} = 1_G \otimes e^{i\tilde{X}}.$$

- De même si $Y \in \{0\} \times V_n$, la distribution $E(\exp Y)$ définie par

$$\langle E(\exp Y), f \rangle_B = \text{Tr}(\pi(\exp Y) \circ A_f), \quad \forall f \in B,$$

existe.

En effet, si φ est une fonction de $L^2(G)$:

$$(\pi(\exp Y) \circ A_f \varphi) = e^{i\tilde{Y}}(A_f \varphi)(g).$$

Ce qui entraîne que le noyau $K_{Y,f}$ de l'opérateur $\pi(\exp Y) \circ A_f$ est

$$K_{Y,f}(g, g') = e^{i\tilde{Y}} K_f(g, g').$$

Et alors,

$$\begin{aligned} \langle E(\exp Y), f \rangle &= \int_G e^{i\tilde{Y}(g)} K_f(g, g) dg = \int_G e^{i\tilde{Y}(g)} \Phi_f(g, 1) dg \\ &= \int_G e^{i\tilde{Y}(g)} (\overline{\mathcal{F}_\alpha f}(g, 0)) dg \\ &= \left\langle e^{i\tilde{Y}(g)} \otimes \delta_0, (\overline{\mathcal{F}_\alpha f}) \Delta(-X)^{-1} \right\rangle. \end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$E(\exp Y) = \mathcal{F}_\alpha(e^{i\tilde{Y}} \otimes \delta_0(\alpha)) = e^{i\tilde{Y}(g)} \otimes 1_{\underline{g}^*}.$$

Remarque 2.1.10. — On peut définir le produit- $*$ d'une distribution T de B' par une fonction f de B en posant

$$\langle T * f, f' \rangle_B = \langle T, f * f' \rangle_B, \quad \forall f' \in B,$$

quand ceci a un sens. En particulier si $T = \exp \Gamma$ ($\Gamma \in \underline{g} \oplus V_n$), la formule ci-dessus a un sens car

$$\begin{aligned} \langle E(\exp \Gamma) * f, f' \rangle_B &= \text{Tr}(\pi(\exp \Gamma) \circ A_f \circ A_{f'}) \\ &= \text{Tr}(A_{E(\exp \Gamma) * f} \circ A_{f'}) \\ &= \langle E(\exp \Gamma) * f, f' \rangle. \end{aligned}$$

Ce qui montre que les deux définitions de E coïncident.

2.2 Transformée de Fourier adaptée

Soit φ dans $C_c^\infty(G \times V_n)$ alors d'après [12] l'opérateur

$$\pi(\varphi) = \int_{G \times V_n} \varphi(\gamma) \pi(\gamma) d\gamma$$

est un opérateur de Hilbert-Schmidt sur $L^2(G)$ qui est l'espace de la réalisation de π . Si on pose

$$\pi(\varphi) = A_{\mathcal{E}(\varphi)},$$

on définit ainsi une transformation :

$$\begin{aligned} \mathcal{E} : C_c^\infty(G \times V_n) &\rightarrow L_*^2 \\ \varphi &\mapsto \mathcal{E}(\varphi). \end{aligned}$$

PROPOSITION 2.2.1. — Pour φ et φ' dans $C_c^\infty(G \times V_n)$, on a :

- i) $\mathcal{E}(\varphi \times \varphi') = \mathcal{E}(\varphi) * \mathcal{E}(\varphi')$ (où $\times$ est le produit de convolution);
- ii) $\mathcal{E}(\check{\varphi}) = \overline{\mathcal{E}(\varphi)}$ ($\check{\varphi}(\gamma) = \overline{\varphi(\gamma^{-1})}$);
- iii) $\text{Tr } \pi(\varphi) = \int_{T^*(G)} \mathcal{E}(\varphi) d\mu$ (où $d\mu$ une mesure invariante sur $T^*(G)$);
- iv) si on pose $\langle \mathcal{E}(\varphi), f \rangle = \text{Tr}(\pi(\varphi) \circ A_f)$ pour $f \in B$, on définit une distribution qui au sens des distributions peut s'écrire :

$$\mathcal{E}(\varphi) = \int_{G \times V_n} \varphi(\gamma) E(\gamma) d\gamma.$$

Preuve. — i) est une conséquence des définitions puisque

$$\pi(\varphi \times \varphi') = A_{\mathcal{E}(\varphi \times \varphi')} = A_{\mathcal{E}(\varphi)} \circ A_{\mathcal{E}(\varphi')} = A_{\mathcal{E}(\varphi) * \mathcal{E}(\varphi')}.$$

ii) découle de la relation

$$\pi(\check{\varphi}) = \pi(\varphi)^* = A_{\overline{\mathcal{E}(\varphi)}}.$$

Pour iii), la proposition 2.1.2, nous permet en effet d'écrire

$$\text{Tr } \pi(\varphi) = \text{Tr } A_{\mathcal{E}(\varphi)} = \int_{T^*(G)} \mathcal{E}(\varphi) d\mu.$$

Pour *iv*), si on pose $\langle \mathcal{E}(\varphi), f \rangle = \text{Tr}(\pi(\varphi) \circ A_f)$ et si $\{\varphi_k\}$ est une base orthonormée de $L^2(G)$, alors

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{E}(\varphi), f \rangle &= \sum_k \langle \pi(\varphi) \circ A_f \varphi_k, \varphi_k \rangle \\ &= \sum_k \int_{G \times V_n} \varphi(\gamma) \langle \pi(\gamma) \circ A_f \varphi_k, \varphi_k \rangle d\gamma \\ &= \int_{G \times V_n} \varphi(\gamma) \sum_k \langle \pi(\gamma) \circ A_f \varphi_k, \varphi_k \rangle d\gamma \\ &= \int_{G \times V_n} \varphi(\gamma) \text{Tr}(\pi(\gamma) \circ A_f) d\gamma \\ &= \int_{G \times V_n} \varphi(\gamma) \langle E(\gamma), f \rangle d\gamma. \end{aligned}$$

Maintenant si on se restreint à G , π coïncide avec la représentation régulière droite de G (voir la preuve de la proposition 2.1.5), on a donc obtenu ici une représentation- $*$ associée à la représentation régulière droite de G .

Remarque 2.2.2. — Pour obtenir la représentation régulière gauche de G , il suffit de changer la définition de l'opérateur A_f comme suit :

$$(A_f \varphi)(g) = \int_C \int_{\underline{g}^*} e^{-i\alpha(X)} f\left(\exp -\frac{x}{2} g, \alpha\right) \varphi(\exp -Xg) dX d\alpha.$$

Remerciements

Mes vives remerciements au Professeur D. Arnal, pour ces nombreux conseils.

Bibliographie

- [1] ARNAL (D.) et CORTET (J. C.). — **-product in the method of orbits for nilpotent groups*, J. Geom. and Phys. Vol. 2, 2 (1985), pp. 85-116.
- [2] ARNAL (D.) et CORTET (J. C.). — *Représentations- $*$ des groupes exponentiels*, J. of Funct. anal. Vol. 92, 1 (1990), pp. 103-135.
- [3] ARNAL (D.) et CORTET (J. C.). — *Star representations of $E(2)$* , L.M.P 20 (1990), pp. 141- 149.

- [4] ARNAL (D.), CAHEN (M.) et GUTT (S.) . — *Representation of compact Lie groups and Quantization by deformation*, Acad. Royale de Belg. Bull. de la classe des Sc. 3ième série, t. LXXIV, 45 (1988), pp. 123-141.
- [5] BAYEN (F.) *and al.* . — *Deformation theory and quantization I, II* Ann. of Physics 111 (1978), pp. 61-110 et 111-151.
- [6] GUTT (S.) . — *Some aspects of deformation theory and quatization*, Actes du colloque "Quantum theory and Geometry" (M. Cahen et M. Flato éditeurs); Math. Phys. studies 10 (1988), pp. 77-102.
- [7] FRONSDAL (C.) . — *Remarks on quantization*, Reports on Mathematical Physics 15, n° 1 (1978), pp. 111-145.
- [8] GUTT (S.) . — *An explicit $\ast$ -product on the cotangent bundle to a Lie group*, Lett. Math. Phy. 7 (1983), pp. 249-258.
- [9] HELGASSON (S.) . — *Differential Geometry, Lie groups and symmetric spaces* Academic Press, New-York (1978).
- [10] LICHNEROWICZ (A.) . — *Construction of twisted product for cotangent bundles of classical groups and Stiefel manifolds*, L.M.P. 2 (1977), pp. 133-143.
- [11] PONTRYAGIN (L. S.) . — *Topological groups*, Edition Gordon and Breach. (1966).
- [12] WARNER (G.) . — *Harmonic analysis on semi-simple Lie groups I*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, New-York (1972).