ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

JEAN-MARIE DUMONT
ALAIN THOMAS

Une modification multiplicative des nombres g normaux

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 5e série, tome 8, nº 3 (1986-1987), p. 367-373
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1986-1987_5_8_3_367_0>

Annales Faculté des Sciences de Toulouse Vol.VIII, n°3, 1986-1987

Une modification multiplicative des nombres g normaux

JEAN-MARIE DUMONT[(1)] et ALAIN THOMAS[(2)]

RÉSUMÉ. — Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'entiers, de limite infinie, telle que $\alpha =_g\ 0, a_1\ a_2 \cdots a_n \cdots$ soit normal en base g (g entier ≥ 1).

Soit $(C_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite bornée d'entiers non nuls. Alors, si

$$\alpha^* =_g\ 0, (C_1 a_1)(C_2 a_2) \cdots (C_n a_n) \cdots,$$

chaque produit $C_n a_n$ étant écrit en base g, α^* est normal en base g.

ABSTRACT. — Let $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ be a sequence of natural numbers such that $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ and $\alpha =_g \cdot a_1 a_2 \cdots a_n \cdots$ is normal to the base g (integer ≥ 2).

Then, if $(C_n)_{n\in\mathbf{N}}$ is a bounded sequence of positive natural numbers, and if $\alpha^* =_g \cdot(C_1 a_1)(C_2 a_2) \cdots (C_n a_n) \cdots$, each product $C_n a_n$ being written in the base g, we prove the normality of α^* to the base g.

1. Introduction

Soit g un entier ≥ 2. On dit que le réel α est normal en base g (ou : g-normal) si et seulement si la suite $(\alpha g^n)_{n\in\mathbf{N}}$ est équirépartie modulo 1 [4].

Plusieurs exemples de nombres normaux ont été construits sous la forme :

$$\alpha =_g 0, \overline{a}_1\ \overline{a}_2 \cdots \overline{a}_n \cdots \tag{1}$$

où $a_n \in \mathbf{N}$ et $\overline{m}$ désigne l'écriture de l'entier m en base g.

(1) Département de Mathématiques-Informatique Faculté des Sciences de Luminy, 70 route Léon-Lachamp - 13288 Marseille Cédex 9
(2) Département de Mathématiques Faculté des Sciences de St-Charles Université de Provence, 3 place Victor Hugo - 13331 Marseille Cédex 3

Ainsi, lorsque $a_n = n$ ([1]), ou bien, plus généralement, quand la suite (a_n) vérifie la condition de "densité" suivante :

$\forall\epsilon > 0$, $\exists N_0(\epsilon)$ tel que : $\forall N,\ N \geq N_0(\epsilon) \Longrightarrow$ card $\{n/a_n \leq N\} \geq N^{1-\epsilon}$,

incluant notamment le cas $a_n = n^{\text{ième}}$ nombre premier ([2]), ou encore : $a_n = f(n)$, f polynôme à coefficients entiers ([3]), alors, dans tous les cas, le nombre α correspondant dans (1) est normal en base g.

En 1979, B.Volkmann ([5]) a prouvé le théorème de "modification de nombres normaux" suivant :

α étant comme dans (1) avec a_n suite croissante non bornée, et $\alpha^* =_g 0,\overline{a_1^*}\ \overline{a_2^*}\cdots\overline{a_n^*}\cdots$ où $a_n^* = a_n + J_n$ avec J_n entier, $\log(J_n) \in o\,(\log a_n)$, alors la g-normalité de α implique celle de α^*.

Sa démonstration repose sur une évaluation de la fréquence limite de chaque bloc de chiffres, en base g, dans α^*.

Pour parler rapidement : cette fréquence étant asymptotiquement "normale" dans α et la longueur de l'écriture de J_n en base g "petite" devant celle de a_n, les blocs $\overline{a_n^*}$ et $\overline{a_n}$ ne diffèrent que d'une façon asymptotiquement négligeable; d'où le résultat.

Nous proposons ici de démontrer le théorème suivant :

Théorème .— *Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'entiers, de limite infinie, telle que $\alpha =_g 0,\ a_1\ a_2 \cdots a_n \cdots$ soit normal en base g (g entier ≥ 2).*

Soit $(C_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite bornée d'entiers non nuls. Alors, si

$$\alpha^* =_g 0,(C_1a_1)(C_2a_2)\cdots(C_na_n)\cdots,$$

chaque produit C_na_n étant écrit en base g, α^* est normal en base g.

Notre démarche, en vue d'obtenir le résultat énoncé, est sensiblement différente. Elle repose sur le critère de Weyl pour l'équirépartition modulo 1 et le lemme suivant :

Lemme .— *Soit g un entier au moins égal à 2 et soit α un nombre normal en base g. Pour tout entier C et tous réels ϵ et η strictement positifs, il existe une partie E de $\mathbf{N}$ et un entier N qui vérifient les conditions suivantes :*

(i) pour tout entier n de E et tout entier relatif c tel que $1 \leq |c| \leq C$, on a :

$$\frac{1}{N}\left|\sum_{m=nN}^{(n+1)N-1} e(\alpha c g^m)\right| < \epsilon \text{ où l'on a posé } e(x) = \exp(2i\pi x)$$

(ii) $d(E) > 1 - \eta$, *où* $d(E) = \lim_{k\to\infty} 1/k$ *card* $(E \cap [0,k])$ ***désigne la*** *densité la densité (ordinaire) de l'ensemble* E.

Ce lemme exprime qu'il y a "beaucoup" de tranches suffisamment longues d'entiers consécutifs sur lesquelles les suites $(\alpha c g^n)_{n\in\mathbf{N}}$ pour $1 \le |c| \le C$ possèdent simultanément une "bonne" répartition modulo 1.

Remarquons que g étant entier et donc les suites $(\alpha c g^n)$ non uniformément équiréparties ("well-distributed", cf. [4] p.42) l'ensemble des entiers n vérifiant l'inégalité de (i) n'est jamais un segment infini de $\mathbf{N}$.

2. Démonstration du lemme

Soit c un entier relatif non nul, pour tout entier n nous posons :

$$F_n(c) = \Big\{\alpha' \in [0,1[/ \Big|\sum_{0\le m<n} e(\alpha' c g^m)\Big| < \epsilon n\Big\}.$$

Presque tout nombre, au sens de la mesure de Lebesgue λ, étant g-normal, on a, pour tout $\epsilon > 0$ et $c \in \mathbf{Z}^*$:

$$\lambda\Big(\bigcup_{N\in\mathbf{N}} \bigcap_{n\ge N} F_n(c)\Big) = 1.$$

Par suite, il existe un entier $N(c)$ tel que :

$$\lambda\Big(\bigcap_{n\ge N(c)} F_n(c)\Big) > 1 - \eta/4C.$$

Posons alors $N = \max\{N(c)/1 \le |c| \le C\}$, $F_N = \bigcap_{1\le c\le C} F_N(c)$.

Pour tout c, tel que $1 \le |c| \le C$, on a $F_N(c) \supset \bigcap_{n\ge N(c)} F_n(c)$. Donc, en notant $\overline{A}$ le complémentaire dans $[0,1[$ de l'ensemble A, on trouve :

$$\lambda(\overline{F}_N) \le \sum_{1\le|c|\le C} \lambda\big(\overline{F_N(c)}\big) \le \sum_{1\le|c|\le C} \frac{\eta}{4C} = \eta/2.$$

De plus, chaque ensemble $F_N(c)$ étant ouvert, il existe F, union finie d'intervalles, tel que $F \subset F_N$ et $\lambda(F) > 1 - \eta$.

Maintenant, puisque par hypothèse α est g-normal, α est aussi g^N-normal, et par suite :

$$d\Big(\{n \in \mathbf{N}/\alpha\, g^{Nn} \in F (\mathrm{mod}\, 1)\}\Big) = \lambda(F).$$

Pour démontrer le lemme il suffit de considérer l'entier N et l'ensemble $E = \{n \in \mathbf{N}/\alpha\ g^{Nn} \in F(\text{mod}\,1)\}$. En effet, pour tout entier n de E et pour tout c tel que $1 \le |c| \le C$, on a, modulo 1, $\alpha g^{nN} \in F \subset F_N(c)$ et on trouve

$$\Big|\sum_{0\le m<N} e(\alpha c g^{Nn} g^m)\Big| < \epsilon N.$$

3. Démonstration du théorème

Soit donc une suite d'entiers $(a_j)_{j\in\mathbf{N}}$ avec $\lim_{j\to+\infty} a_j = +\infty$, et $\|a\|$ désignant la longueur de l'écriture en base g de l'entier a, soient, pour tout j entier, $j \ge 1$:

$$s_j = \sum_{k=1}^{j} \|a_k\| \quad \text{et} \quad \alpha = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{a_j}{g^{s_j}}.$$

On suppose que α est g-normal.

Soient encore $C \in \mathbf{N}^*$, une suite C_n d'entiers avec $1 \le C_n \le C$,et

$$\forall j \ge 1\ a_j^* = C_j a_j\ ,\ s_j^* = \sum_{k=1}^{j} \|a_k^*\| \quad \text{et} \quad \alpha^* = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{a_j^*}{g^{s_j^*}}.$$

Posons

$$A(M) = \sum_{0\le m<M} e\ (\alpha^*\ q\ g^m)\ (\text{pour } M \in \mathbf{N}^*).$$

Pour démontrer que le nombre α^* est g-normal, il suffit, d'après le critère de Weyl, de démontrer que, pour tout entier relatif non nul q, on a $\lim_{M\to+\infty} 1/M\ |A(M)| = 0$. Nous fixons donc un entier relatif non nul q pour faire la démonstration.

Celle-ci consiste dans un premier temps à approcher dans $A(M)$ la somme de la tranche relative à a_j^* par celle correspondant dans la somme de Weyl de $C_j\ \alpha\ q$; puis à utiliser le lemme qui permet une majoration uniforme de la presque totalité de ces sommes.

Soit pour $M \in \mathbf{N}^*$, $J(M)$ l'entier tel que :

$$s_{J(M)}^* \le M < s_{J(M)+1}^*.$$

On a donc, posant $s_0^* = 0$ et $J = J(M)$:

$$A(M) = \sum_{1\le j\le J}\ \sum_{s_{j-1}^*\le m<s_j^*} e\ (\alpha^* q g^m) + \sum_{s_J^*\le m<M} e\ (\alpha^*\ q\ g^m).$$

Or, si $s_{j-1}^* \leq m < s_j^*$:

$$\alpha^* g^m = \frac{a_j^*}{g^{s_j^*-m}} + \Big(\sum_{n \geq j+1} \frac{a_n^*}{g^{s_n^*}} \Big) g^m \quad \text{modulo 1.}$$

Le second terme du membre de droite est majoré par $1/g^{s_j^*-m}$.

Par suite, utilisant le fait que :

$$\text{Pour tous } x, y \text{ réels } \ |e(x) - e(y)| \leq 2\pi \ |x - y|,$$

on a :

$$\sum_{s_{j-1}^* \leq m < s_j^*} e(\alpha^* q g^m) = \sum_{s_{j-1}^* \leq m < s_j^*} e \ (a_j^* \ q/g^{s_j^*-m}) + R_j, \tag{2}$$

où

$$|R_j| \leq 2\pi |q| \sum_{s_{j-1}^* \leq m < s_j^*} (1/g^{s_j^*-m}) < \frac{2\pi|q|}{g-1}.$$

D'où

$$A(M) = \sum_{1 \leq j \leq J} \sum_{0 < n \leq s_j^* - s_{j-1}^*} e \ (a_j^* \ q/g^n) + \sum_{s_{J+1}^* - M < n \leq s_{J+1}^* - s_J^*} e \ (a_{J+1}^* \ g/g^n) + \mathcal{O}(J),$$

en posant pour $1 \leq j \leq J+1 : n = s_j^* - m$.

Si, pour chaque j, $1 \leq j \leq J$, on somme pour $n \in]0, \|a_j^*\|]$, on modifiera cette somme d'une quantité dont le module est majoré par $\|C_j a_j\| - \|a_j\|$, c'est-à-dire, puisque $C_j \leq C$, par $\log_g C$.

On procède de même pour la dernière sommation en posant :

$$M' = (s_{J+1} - s_{J+1}^*) + M < s_{J+1}$$

et on obtient :

$$A(M) = \sum_{1 \leq j \leq J} \sum_{0 < n \leq \|a_j\|} e(a_j^* \ q \ g^{-n}) + \\ + \sum_{s_{J+1} - M' < n \leq \|a_{J+1}\|} e(a_{J+1}^* \ q \ g^{-n}) + \mathcal{O}(J) + \mathcal{O}(1),$$

étant entendu que la dernière somme est nulle si :

$$M \leq s^*_{J+1} - \|a_{J+1}\|.$$

Utilisant alors pour chaque j, $1 \leq j \leq J+1$ une approximation analogue à (2), où maintenant α^* est à remplacer par $C_j\alpha$, et s_j^* par s_j, on obtient :

$$\begin{aligned} A(M) = \sum_{1 \leq j \leq J} \sum_{s_{j-1} \leq m < s_j} & e(C_j \alpha\ q\ g^m) + \\ & + \sum_{s_J \leq m < M} e(C_{J+1}\alpha\ q\ g^m) + \mathcal{O}(J). \end{aligned}$$

(On peut remplacer M' par M car $M - M'$ est un $\mathcal{O}(J)$). C'est ici qu'intervient le lemme.

$\epsilon > 0$ étant donné, on l'applique pour $\eta = \epsilon$ et $|q|C$ au lieu de C. On découpe chaque intervalle $[s_{J-1}, s_j[$, ainsi que $[s_j, M[$ en tranches successives d'entiers consécutifs, chaque tranche ayant la longueur N.

Il vient, utilisant le (i) du lemme :

$$\begin{aligned} |A(M| < & \sum_{j=1}^{J} \epsilon N \left[\frac{s_j - s_{j-1}}{N}\right] + \epsilon N \left[\frac{M - s_J}{N}\right] + 2N(J+1) \\ & + N \text{ card } \left\{ n \in \mathbf{N}/n \leq \frac{M}{N} \text{ et } n \notin E \right\} + \mathcal{O}(J). \end{aligned}$$

D'où, utilisant la partie (ii), si M est assez grand :

$$\begin{aligned} |A(M)| &< \epsilon s_J + \epsilon(M - s_J) + N\epsilon(M/N) + \mathcal{O}(J) \\ &= 2\epsilon M + \mathcal{O}(J). \end{aligned}$$

Or, puisque $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ et $C_n \neq 0$, on a $\lim_{n\to\infty} \|a_n^*\| = +\infty$, et par suite

$$\lim_{M\to+\infty} \frac{s^*_{J(M)}}{J(M)} = \lim_{J\to+\infty} \frac{1}{M}\Big(\sum_{k=1}^{J} \|a_k^*\|\Big) = +\infty,$$

donc $\lim_{M\to+\infty}(J(M)/M) = 0$, ce qui permet de conclure.

Remarque finale : Le théorème devient faux si l'on suppose seulement que α est *simplement normal*, c'est-à-dire si la fréquence asymptotique de chaque chiffre de l'écriture de α en base g est égale à $1/g$.

Par exemple, pour $g = 2$ et $a_n = (4^n - 1)/3$, $\alpha =_2 0, a_1 a_2 \cdots a_n \cdots$ est simplement normal puisque $a_n = 10101 \cdots 01$ (n fois 01); mais, si pour tout

$n : C_n = 3$, le nombre α^* correspondant n'est pas simplement normal (ici $\alpha^* = 1$).

Références

[1] CHAMPERNOWNE (D.G.). — The construction of decimals normal in the scale of ten, *J. London Math. Soc.*, t. **8**, 1933, p. 254-260.

[2] COPELAND (A.H.) and ERDŐS (P.). — Note on normal numbers, *Bull. Amer. Math. Soc.*, t. **52**, 1946, p. 857-860.

[3] DAVENPORT (H.) and ERDŐS (P.). — Note on normal decimals, *Canad. J. Math.*, t. **4**, 1952, p. 58-63.

[4] KUIPERS (L.) and NIEDERREITER (H.). — *Uniform distribution of sequences.* New-York Wiley-Interscience 1974.

[5] VOLKMANN (B.). — On modifying constructed normal numbers, *Ann. Fac. Sc. Toulouse*, t. **1**, 1979, p. 269-285.

(Manuscrit reçu le 1er décembre 1986)