

ABDELILAH GMIRA

**Existence de la trace initiale pour des solutions
d'une équation parabolique dégénérée**

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 5^e série, tome 8, n° 3
(1986-1987), p. 315-329

http://www.numdam.org/item?id=AFST_1986-1987_5_8_3_315_0

© Université Paul Sabatier, 1986-1987, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Existence de la trace initiale pour des solutions d'une équation parabolique dégénérée

ABDELILAH GMIRA^{(1) (2)}

RÉSUMÉ. — On démontre l'existence et l'unicité de la trace initiale pour chaque solution positive de l'équation $u_t = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$ dans $\mathbf{R}^N \times]0, T[$. De plus on prouve que la trace doit vérifier une certaine condition de croissance; d'où on déduit que la moyenne sur la boule $B_R(0)$ de $u(x, 0)$ ne doit pas croître plus vite que $|x|^{p/p-2}$ quand $|x| \rightarrow +\infty$.

ABSTRACT. — We show the existence of an unique trace of each non-negative solution of the equation $u_t = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$ in $\mathbf{R}^N \times]0, T[$. And we prove that the trace must satisfy some growth condition; then we deduce that the average on the ball $B_R(0)$ of $u(x, 0)$ cannot grow faster than $|x|^{p/p-2}$ as $|x| \rightarrow +\infty$.

Introduction

L'objet de cet article est d'étudier l'existence et l'unicité de la trace initiale de solutions non négatives de l'équation parabolique non linéaire :

$$u_t = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) ; p \geq 2 \quad (0.1)$$

sur $\Omega_T = \mathbf{R}^N \times]0, T[$.

Si $p = 2$, on obtient l'équation de la chaleur :

$$u_t = \nabla u. \quad (0.2)$$

⁽¹⁾ Faculté des Sciences et des Techniques, Laboratoire de Mathématiques 16, route de Gray - 25030 Besançon Cédex

⁽²⁾ Faculté des Sciences, B.P. 300 - Tétouan (Maroc)

ARONSON dans [1], en utilisant la représentation de Widder, démontre l'existence et l'unicité d'une mesure de Borel μ non négative telle que

$$\lim_{t \searrow 0} \int_{\mathbf{R}^N} u(x, t) \varphi(x) dx = \int_{\mathbf{R}^N} \varphi(x) \mu(dx), \quad (0.3)$$

pour toute fonction $\varphi \in C_0(\mathbf{R}^N)$.

C'est-à-dire que toute solution u non négative de (0.2) admet une unique mesure de Borel μ comme trace initiale, au sens de (0.3). De plus il prouve que μ est σ -finie et elle vérifie

$$\int_{\mathbf{R}^N} e^{-|\xi|^2/4t} \mu(dx) < +\infty. \quad (0.4)$$

Si $p > 2$, l'équation (0.1) apparaît en théorie des fluides non newtoniens (voir LEE et AMES [4]). De plus de telles équations sont un prototype pour certaines classes d'équations dégénérées.

En utilisant des solutions de similarité explicites de l'équation (0.1), et une inégalité d'Harnack faible, on démontre l'existence et l'unicité d'une mesure de Borel μ qui est trace initiale pour chaque solution de (0.1). De plus on prouve que μ vérifie l'estimation

$$\int_{B_R(0)} \mu(dx) \leq C \left\{ R^{k/p-2} T^{-1/p-2} + T^{N/p} u^{k/p}(0, T) \right\}, \quad (0.5)$$

où $k = p + N(p - 2)$, C étant une constante positive dépendant de N et p , pour tout $R \in \mathbf{R}^+$. C'est-à-dire que la moyenne $\int_{B_R(0)} u(x, 0) dx$ de $u(x, 0)$ sur $B_R(0)$ ne peut pas croître plus vite que $|x|^{\frac{p}{p-2}}$ quand $|x| \rightarrow +\infty$.

L'article va être divisé en 2 parties :

Dans la 1ère partie, on donne un principe de comparaison locale des solutions de l'équation (0.1).

Quant à la 2ème partie, elle est consacrée à l'existence et à l'unicité de la trace initiale.

I. Préliminaires

Dans cette partie, on va donner quelques propriétés des solutions faibles de l'équation

$$u_t = \operatorname{div} [|\nabla u|^{p-2} \nabla u] \quad (1.1)$$

où $p > 2$.

DÉFINITION 1.1. — Une solution du problème (1.1) dans $\Omega_T = \mathbf{R}^N \times (0, T)$ est une fonction $u = u(x, t)$ définie et continue sur Ω_T telle que :

- (i) $\nabla u \in L^p_{loc}(\Omega_T)$,
- (ii) Pour toute fonction φ à support compact dans Ω_T dont les dérivées $\varphi_t \in L^1(\Omega_T)$ et $\nabla \varphi \in L^p(\Omega_T)$, on a :

$$\int_0^T \int_{\mathbf{R}^N} [u \varphi_t - |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \varphi] dx dt = 0. \quad (1.2)$$

Pour donner un principe de comparaison locale des solutions de l'équation (1.1), on a besoin d'introduire un problème tronqué de (1.1). Ainsi, pour tout $x_o \in \mathbf{R}^N$, $R \in \mathbf{R}^+$ et $t_1, t_2 : 0 < t_1 < t_2 \leq T$. On pose $S = B_R(x_o) \times]t_1, t_2[$ et $\partial_p S = \overline{S} \setminus S$ étant la frontière parabolique où $B_R(x_o)$ est la boule de centre x_o et de rayon R . On considère le problème

$$\begin{cases} v_t = \operatorname{div} [|\nabla v|^{p-2} \nabla v] & \text{dans } S, \\ V = g & \text{sur } \partial_p S. \end{cases} \quad (1.3)$$

DÉFINITION 1.2. — Une solution du problème (1.3) est une fonction $V = V(x, t)$ définie et continue sur \overline{S} telle que :

- (i) $\nabla V \in L^p(S)$
- (ii) $V = g$ sur $\partial_p S$
- (iii) Pour toute fonction φ à support compact dans S dont les dérivées $\varphi_t \in L^1(S)$ et $\nabla \varphi \in L^p(S)$, on a :

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{B_R(x_o)} (V \varphi_t - |\nabla V|^{p-2} \nabla V \nabla \varphi) dx dt = 0. \quad (1.4)$$

Les solutions de l'équation (1.3) vérifient le principe de comparaison locale suivant :

PROPOSITION 1.1. — Soit V_i ($i = 1, 2$) la solution faible du problème (1.3), dont la donnée sur la frontière parabolique $\partial_p S$ est g_i .

Si $g_1 \leq g_2$ sur $\partial_p S$, alors $V_1 \leq V_2$ sur \overline{S} .

Preuve. — On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ définie sur $[0, R]$ à valeurs dans \mathbf{R}^+ par :

$$\begin{cases} 0 \leq f_n \leq 1, \\ f_n(r) = 1 & \text{si } r \in [0, R - \frac{1}{n}], \\ f_n \in \mathcal{D}([0, R]). \end{cases} \quad (1.5)$$

On se donne un point quelconque $t \in (t_1, t_2)$, et puis on définit la suite de fonctions $(Z_k)_{k \in \mathbf{N}}$ par :

$$Z_k(s) = \begin{cases} 1 & \text{sur } [t_1, t - \frac{1}{k}], \\ k(t - s) & \text{sur }]t - \frac{1}{k}, t], \\ 0 & \text{sur }]t, t_2]. \end{cases} \quad (1.6)$$

On pose $V = V_1 - V_2$.

Soit la fonction φ définie sur $(t_1, t_2) \times B_R(x_o)$ par :

$$\varphi(x, s) = Z_k(s) f_n(|x - x_o|) \int_s^{s+h} \frac{V^+(x, \mathcal{I})}{h} d\mathcal{I}. \quad (1.7)$$

D'où on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, s) &= Z'_k(s) f_n(|x - x_o|) \int_s^{s+h} h^{-1} V^+(x, \mathcal{I}) d\mathcal{I} \\ &\quad + Z_k(s) f_n(|x - x_o|) \nabla_h(V^+(x, s)) \end{aligned} \quad (1.8)$$

où

$$\nabla_h(V^+(x, s)) = h^{-1} [V^+(x, s + h) - V^+(x, s)] \quad (1.9)$$

$$\begin{aligned} \nabla \varphi(x, s) &= Z_k(s) \nabla f_n(|x - x_o|) \int_s^{s+h} h^{-1} V^+(x, \mathcal{I}) d\mathcal{I} \\ &\quad + Z_k(s) f_n(|x - x_o|) \int_s^{s+h} h^{-1} \nabla V^+(x, \mathcal{I}) d\mathcal{I}. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Donc φ est à support compact dans S ; de plus $\varphi_t \in L^1(S)$ et $\nabla \varphi \in L^p(S)$. Par conséquent on a :

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{B_R(x_o)} [V_i \varphi_t - |\nabla V_i|^{p-2} \nabla V_i \nabla \varphi] dx dt = 0, \quad (1.11)$$

Existence de la trace initiale

pour $i = 1, 2$.

En faisant la différence des deux équations, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \int_{B_R(x_o)} V \varphi_t dx dt = \\ \int_{t_1}^{t_2} \int_{B_R(x_o)} [|\nabla V_1|^{p-2} \nabla V_1 - |\nabla V_2|^{p-2} \nabla V_2] \nabla \varphi dx dt. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Vu la relation (1.8), on a

$$\lim_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ h \rightarrow 0}} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, s) = Z'_k(s) V^+(x, s) + Z_k(s) \frac{\partial}{\partial t}(V^+(x, s)). \quad (1.13)$$

En utilisant l'expression de Z_k , on obtient

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{t_1}^{t_2} \int_{B_R(x_o)} V(x, s) Z_k(s) \frac{\partial}{\partial t}(V^+(x, s)) dx dt = \\ = \int_{t_1}^t \int_{B_R(x_o)} V(x, s) \frac{\partial}{\partial t}(V^+(x, s)) dx dt = \frac{1}{2} \int_{B_R(x_o)} V^{+2}(x, t) dx \end{aligned} \quad (1.14)$$

(car $V^+ = 0$ sur $\partial_p S$).

De même, on a :

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{t_1}^{t_2} \int_{B_R(x_o)} V(x, s) Z'_k(s) V^+(x, s) ds = \\ = - \int_{B_R(x_o)} V(x, t) \cdot V^+(x, t) dx = - \int_{B_R(x_o)} V^{+2}(x, t) dx. \end{aligned} \quad (1.15)$$

En utilisant l'expression de $\nabla \varphi$, on a

$$\lim_{\substack{k \rightarrow +\infty \\ h \rightarrow 0}} \nabla \varphi(x, s) = \nabla f_n(|x - x_o|) V^+(x, s) + f_n(|x - x_o|) \nabla V^+(x, s). \quad (1.16)$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{n, k \rightarrow +\infty \\ h \rightarrow 0}} \int_{t_1}^{t_2} \int_{B_R(x_o)} [|\nabla V_1|^{p-2} \nabla V_1 - |\nabla V_2|^{p-2} \nabla V_2] \nabla \varphi dx dt = \\ = \int_{t_1}^{t_2} \int_{B_R(x_o)} [|\nabla V_1|^{p-2} \nabla V_1 - |\nabla V_2|^{p-2} \nabla V_2] \nabla V^+ dx ds \geq 0. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Par conséquent, en utilisant les relations (1.14), (1.15) et (1.17) et puis en passant à la limite sur n , k et h dans la relation (1.12), on obtient

$$\int_{B_R(x_o)} V^{+2}(x, t) dx \leq 0 \quad (1.18)$$

d'où on conclut que $V^+(x, t) = 0$, pour tout $x \in B_R(x_o)$ (car V est continue d'après [3]), c'est-à-dire

$$V_1(\cdot, t) \leq V_2(\cdot, t), \quad \text{sur } B_R(x_o). \quad (1.19)$$

Mais comme ceci est vrai pour tout $t \in]t_1, t_2[$, alors on obtient

$$V_1 \leq V_2 \text{ sur } B_R(x_o) \times]t_1, t_2[. \quad (1.20)$$

Du fait que $g_1 \leq g_2$ sur $\partial_p S$, alors on déduit que $V_1 \leq V_2$ sur \bar{S} .

PROPOSITION 1.2. — *Soit u une solution faible dans $\Omega_T = \mathbf{R}^N \times]0, T[$ de l'équation (1.1). Pour tout cylindre $S = B_R(x_o) \times]t_1, t_2[$ contenu dans Ω_T , u est une solution faible du problème (1.3) dont la donnée sur la frontière parabolique $\partial_p S$ est la restriction de u à $\partial_p S$.*

La démonstration de la proposition est évidente, en utilisant le fait que u est continue sur $B_R(x_o) \times]t_1, t_2[$ (d'après [3]).

Dans ce qui suit, on va donner une estimation du support de la solution de l'équation (1.3) quand la donnée sur la frontière $\partial_p S$ est à support compact; plus précisément on a la

PROPOSITION 1.3. — *Soit w une solution faible du problème*

$$\begin{cases} w_t = \operatorname{div} [|\nabla w|^{p-2} \nabla w] & \text{dans } \mathbf{R}^N \times]t_1, T[, \\ w(\cdot, t_1) = g & \text{dans } \mathbf{R}^N. \end{cases} \quad (1.21)$$

où $0 \leq t_1 < T$ et g étant une fonction continue. Si g est à support compact, alors il existe une constante $R > 0$ telle que

$$\operatorname{Supp} w(\cdot, t) \subset B_R, \text{ pour tout } t \in [t_1, T]. \quad (1.22)$$

Démonstration. — Soit $r_o > 0$ telle que $\operatorname{Supp} g \subset B_{r_o}$. On pose

$$B(x, t) = \frac{a}{R^N(t)} \left\{ \left[1 - \left(\frac{|x|}{R(t)} \right)^{\frac{p}{p-1}} \right]_+ \right\}^{\frac{p-1}{p-2}} \quad (1.23)$$

Existence de la trace initiale

où

$$R(t) = \alpha t^{1/k} ; \quad k = p + N(p - 2), \quad (1.24)$$

α et a étant fixés.

Pour tout $\lambda \in \mathbf{R}^+$, on considère la suite $(u_\lambda)_{\lambda \in \mathbf{N}^*}$ définie par

$$u_\lambda(x, t) = \lambda^{-\frac{p}{p-2}} B(\lambda x, t). \quad (1.25)$$

Il est évident que u_λ est une solution faible de l'équation (1.1). De plus on a les estimations suivantes

$$\text{Supp } u_\lambda(\cdot, t) \subset B_R(0), \quad (1.26)$$

$$R = \left(\frac{\alpha}{\lambda}\right) T^{1/k}. \quad (1.27)$$

On considère w_R la solution du problème (qui existe et qui est unique car g est continue) du problème :

$$\begin{cases} (W_R)_t = \text{div} [|\nabla W_R|^{p-2} \nabla W_R] & \text{dans } S_R = B_R \times]t_1, T[, \\ W_R = g & \text{sur } \partial_p S_R. \end{cases} \quad (1.28)$$

Comme pour tout $t > 0$, $u_\lambda(\cdot, t)$ tend vers l'infini quand t tend vers 0; et de plus $\text{Supp } u_\lambda(\cdot, t) \rightarrow \mathbf{R}^N$ quand, $t \rightarrow +\infty$. On peut supposer que λ assez petit, tel que

$$g \leq u_\lambda \text{ sur } \partial_p S_R. \quad (1.29)$$

Ainsi d'après la proposition 1.1, on a

$$W_R \leq u_\lambda \text{ sur } \overline{S}_R. \quad (1.30)$$

Du fait de l'unicité de la solution du problème (1.28), on déduit que W_R est à support compact et même $\text{Supp } W_R \subset B_R(0)$.

Mais comme g est continue, alors le problème (1.21) admet une unique solution; et en utilisant la proposition 1.2, on déduit que w est aussi à support compact; de plus

$$\text{Supp } w(\cdot, t) \subset B_R(0), \text{ pour tout } t \in [t_1, T[.$$

Le dernier résultat de ce paragraphe est un principe de comparaison globale; plus précisément :

PROPOSITION 1.4. — Soit u une solution faible non négative du problème (1.1) dans $\mathbf{R}^N \times (0, T)$. Pour chaque fonction $z \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$ à valeurs dans $[0, 1]$, et pour tout $\mathcal{I} \in (0, T)$, soit w la solution du problème

$$\begin{cases} w_t = \operatorname{div} [|\nabla w|^{p-2} \nabla w] & \text{dans } \mathbf{R}^N \times]\mathcal{I}, T), \\ w(x, \mathcal{I}) = z(x)u(x, \mathcal{I}) & \text{dans } \mathbf{R}^N. \end{cases} \quad (1.31)$$

Alors $u \geq w$ dans $\mathbf{R}^N \times [\mathcal{I}, T)$.

Démonstration. — Soit $z \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$, $w(\cdot, \mathcal{I})$ est à support compact dans \mathbf{R}^N ; d'après la proposition 1.3, il existe $R \in \mathbf{R}_*^+$ tel que pour tout $t \in [\mathcal{I}, T)$, $\operatorname{Supp} w(\cdot, t) \subset B_R(0)$. Et par conséquent le problème (1.31) est équivalent à :

$$\begin{cases} w_t = \operatorname{div} [|\nabla w|^{p-2} \nabla w] & \text{dans } S_R = B_R(0) \times]\mathcal{I}, T), \\ w(\cdot, \mathcal{I}) = zu(\cdot, \mathcal{I}) & \text{dans } B_R(0). \end{cases} \quad (1.32)$$

Comme $w(x, \mathcal{I}) = 0$ pour tout $|x| = R$, et $0 \leq z \leq 1$, alors $w \leq u$ sur ∂S_R . Ainsi d'après la proposition 1.1, $w \leq u$ dans $\mathbf{R}^N \times]\mathcal{I}, T) \setminus S_R$; par conséquent $w \leq u$ dans $\mathbf{R}^N \times [\mathcal{I}, T)$.

2. Le résultat principal

Dans ce paragraphe, on va montrer l'existence et l'unicité de la trace initiale. Pour cela, on prouve l'inégalité faible d'Harnack suivante :

PROPOSITION 2.1. — Soit u une solution faible dans $\overline{\Omega}_T$ de l'équation (1.1). Alors il existe une constante $C \in \mathbf{R}^+$ dépendant de N et p , telle que pour tout $x_o \in \mathbf{R}^N$ et pour tout $R \in \mathbf{R}_*^+$ on a :

$$\int_{B_R(x_o)} u(x, 0) dx \leq C \left\{ R^{\frac{k}{p-2}} T^{-\frac{1}{p-2}} + T^{\frac{N}{p}} u^{\frac{k}{p}}(x_o, T) \right\}, \quad (2.1)$$

où $k = p + N(p - 2)$.

Démonstration. — Soit $R \in \mathbf{R}_*^+$ fixé, on pose

$$V(x, t) = R^{\frac{-p}{p-2}} T^{\frac{1}{p-2}} u(Rx, Tt). \quad (2.2)$$

Pour montrer la relation (2.1), il suffit de prouver que

$$\int_{B_1(x_o)} V(x, 0) dx \leq C \{1 + V^{\frac{k}{p}}(x_o, 1)\}. \quad (2.3)$$

Existence de la trace initiale

Il est évident que V est une solution faible dans $\overline{\Omega}_1$ de l'équation (1.1). Ainsi l'inégalité (2.3) est une conséquence immédiate du Corollaire 1 de [2].

On donne le résultat principal suivant :

THÉOREME 2.2. — *Soit u une solution faible non négative de l'équation (1.1) dans Ω_T . Alors il existe une mesure μ non négative de Borel dans \mathbf{R}^N , telle que, pour toute fonction $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$, on a :*

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbf{R}^N} \varphi(x) u(xt) dx = \int_{\mathbf{R}^N} \varphi(x) \mu(dx). \quad (2.4)$$

De plus, il existe une constante C dépendant de N et p telle que, pour tout $R \in \mathbf{R}_*^+$ et pour tout $x_o \in \mathbf{R}^N$, on a :

$$\int_{B_R(x_o)} \mu(dx) \leq C \left\{ R^{\frac{k}{p-2}} T^{-\frac{1}{p-2}} + T^{\frac{N}{p}} u^{\frac{k}{p}}(x_o, T) \right\}. \quad (2.5)$$

Avant de donner la démonstration, on a besoin d'un certain nombre de résultats préliminaires. Pour cela, on prouve la

PROPOSITION 2.3. — *Soit u une solution faible non négative dans $\overline{\Omega}_T$ de l'équation (1.1). Soient a et b deux constantes telles que :*

$$0 < a < \int_{B_1(x_o)} u(x, 0) dx \leq b. \quad (2.6)$$

Alors pour chaque $\epsilon \in \mathbf{R}_*^+$, il existe une constante dépendant de N , p , b , ϵ et T telle que

$$\int_{B_{1+\epsilon}(x_o)} u(x, t) dx \geq a, \text{ pour tout } t \in [0, T]. \quad (2.7)$$

Avant de prouver la proposition, on donne le

LEMME 2.4. — *Soit u une solution faible non négative dans $\mathbf{R}^N \times [0, T]$ de l'équation (1.1); de plus on suppose que $\text{Supp } u(\cdot, 0) = H$ est compact. Soit π un hyperplan de \mathbf{R}^N ne rencontrant pas H . Alors pour tout $x \in \mathbf{R}^N$ tel que son symétrique y par rapport à π , appartient au même demi-espace que H , on a*

$$u(x, t) \geq u(y, t), \text{ pour tout } t \in [0, T]. \quad (2.8)$$

Démonstration. — Puisque l'équation (1.1) est invariante par rotation et translation, on peut prendre comme repère celui qui est constitué par l'hyperplan π et son orthogonal. Ainsi l'inéquation (2.8) devient :

$$u(x_1, \dots, x_N, t) \geq u(x_1, \dots, x_{N-1}, -x_N, t), \quad (2.9)$$

pour tout $t \in [0, T)$ avec $x_N > 0$.

Sans perdre la généralité, on peut supposer que $H \subset \{(y, x_N); y \in \mathbf{R}^{N-1} \text{ et } x_N > 0\}$. Soient $x = (x_1, \dots, x_N)$ et $y = (x_1, \dots, x_{N-1})$.

On pose $V(x, t) = u(y, -x_N, t)$. Alors

$$V(y, 0, t) = u(y, 0, t), \text{ pour tout } y \in \mathbf{R}^{N-1} \text{ et } t \in [0, T). \quad (2.10)$$

D'autre part

$$V(y, x_N, 0) = u(y, -x_N, 0) = 0 \leq u(y, x_N, 0). \quad (2.11)$$

Ainsi en utilisant la proposition 1.2, puisque $u(\cdot, t)$ et $V(\cdot, t)$ sont à support compact, on déduit

$$u(y, -x_N, t) = V(y, x_N, t) \leq u(y, x_N, t), \text{ pour tout } t \in [0, T) \quad (2.12)$$

c'est-à-dire que l'on a bien la relation (2.9).

LEMME 2.5. — Soit u une solution faible dans $\overline{\Omega}_T$, non négative de l'équation (1.1) qui est à support compact. Soit $K \in \mathbf{R}^+$ tel que

$$\int_{\mathbf{R}^N} u(x, 0) dx \leq K. \quad (2.13)$$

Si $\text{Supp } u(\cdot, 0) \subset B_1(x_o)$, alors il existe une constante C ne dépendant que de N telle que

$$u(x, t) \leq \frac{CK}{\epsilon^{2N-1}}, \text{ dans } \{\mathbf{R}^N \setminus B_{1+\epsilon}(x_o)\} \times [0, T], \quad (2.14)$$

pour tout $\epsilon \in \mathbf{R}_+^*$.

Démonstration. — On suppose que $x_o = 0$.

Soit $y_o \in \mathbf{R}^N \setminus B_{1+\epsilon}(0)$ fixé, on pose

$$S(y_o) = \left\{ x \in \mathbf{R}^N / |y_o - x| < \frac{\epsilon}{2} \text{ et } \cos \theta \geq \frac{1 + \epsilon/4}{1 + \epsilon} \right\}, \quad (2.15)$$

où θ est l'angle compris entre $y_o - x$ et y_o .

On note par $\pi(y_o, x)$ l'hyperplan formé par l'ensemble des points qui sont équidistants de y_o et de x . Ainsi la distance d de $\pi(y_o, x)$ à l'origine est donnée par :

$$\begin{cases} d = \min \|x\|, \text{ sous la contrainte} \\ |y_o - x| - c_1 = \epsilon/2. \\ \frac{\langle y_o - x, y_o \rangle}{\|y_o - x\| \|y_o\|} + C_2 = \frac{1 + \epsilon/4}{1 + \epsilon}, \\ c_2 > 0, c_1 > 0. \end{cases} \quad (2.16)$$

$$\text{D'où } d = |y_o| \cos \theta - \frac{1}{2} |y_o - x|.$$

Ainsi

$$d \geq \frac{1 + \epsilon/4}{1 + \epsilon} (1 + \epsilon) - \epsilon/4 = 1. \quad (2.17)$$

Par conséquent, si $x \in S(y_o)$, alors x et $B_1(0)$ sont dans le même demi-espace. D'après le lemme 2.4, $u(x, t) \geq u(y_o, t)$, pour tout $t \in [0, T]$. D'autre part

$$\begin{aligned} K &\geq \int_{\mathbf{R}^N} u(x, 0) dx = \int_{\mathbf{R}^N} u(x, t) dx \\ &\geq \int_{S(y_o)} u(x, t) dx \geq |S(y_o)| u(y_o, t). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Et du fait que $S(y_o) = C(N) \epsilon^{2N-1}$, alors on obtient bien la relation (2.14).

LEMME 2.6. — Soit u vérifiant les hypothèses du lemme 2.5. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe une constante \mathcal{I} dépendant de ϵ , N , p , K et T telle que l'on a la relation suivante :

$$\text{Supp } u(\cdot, t) \subset B_{1+\epsilon}(x_o), \text{ pour tout } t \in [0, T]. \quad (2.19)$$

Démonstration. — On considère la solution u_λ dont l'expression est donnée par (1.25). Soit $\epsilon \in \mathbf{R}_*^+$ donné, alors il existe deux constantes $t_o \in]0, 1[$ et $\lambda \in \mathbf{R}^+$ dépendantes de N , p , ϵ , K et T telles que l'on a :

$$\text{Supp } u_\lambda(\cdot, t_o) = \overline{B}_{1+\epsilon/2}(x_o) \quad (2.20)$$

et

$$\min_{\substack{t \in [0, T] \\ |x| = 1 + \epsilon/4}} u_\lambda(x, t + t_o) \geq \frac{CK}{\epsilon^{2N-1}} \quad (2.21)$$

où C est la constante qui intervient dans la formule (2.14). En utilisant le lemme 2.5, on obtient

$$u(x, t) \leq u_\lambda(x, t + t_o) \text{ sur } \partial B_{1+\epsilon}(x_o) \times [0, T]. \quad (2.22)$$

D'autre part, puisque $\text{Supp } u(\cdot, 0) \subset B_1(x_o)$, alors

$$u(x, 0) \leq u_\lambda(x, t_o) \text{ dans } \mathbf{R}^N \setminus B_{1+\epsilon/4}(x_o). \quad (2.23)$$

Par conséquent

$$u(x, t) \leq u_\lambda(x, t + t_o) \text{ dans } [\mathbf{R}^N \setminus B_{1+\epsilon/4}(x_o)] \times [0, T]. \quad (2.24)$$

Et pour déduire la formule (2.19), il suffit de choisir \mathcal{I} (qui existe) telle que

$$\text{Supp } u_\lambda(\cdot, \mathcal{I} + t_o) = \overline{B}_{1+\epsilon}(x_o). \quad (2.25)$$

Après les 3 lemmes, on est en mesure de donner la démonstration de la proposition 2.3.

Preuve de la Proposition 2.3. — On suppose que $x_o = 0$. Soit $\alpha \in \mathbf{R}^+$ fixé tel que

$$0 < a < \alpha < \int_{B_1(x_o)} u(x, 0) dx \leq b. \quad (2.26)$$

Il existe deux constantes d_1 et d_2 telles que :

$$\begin{cases} 0 < d_1 < d_2 < 1, \\ \int_{B_{d_1}(0)} u(x, 0) dx = a, \\ \int_{B_{d_2}(0)} u(x, 0) dx = \alpha. \end{cases} \quad (2.27)$$

Soit $v \in C^\infty(\mathbf{R}^+)$ décroissante définie par :

$$v(r) = \begin{cases} 1 & \text{pour } 0 \leq r \leq d_1, \\ 0 & \text{pour } r \geq d_2. \end{cases} \quad (2.28)$$

On considère la solution faible dans $\mathbf{R}^N \times [0, T]$ de l'équation (1.1), dont la donnée initiale est :

$$w(x, 0) = v(|x|)u(x, 0) \leq u(x, 0). \quad (2.29)$$

Existence de la trace initiale

D'après la proposition 1.1, $w(x, t) \leq u(x, t)$ dans $\overline{\Omega}_T$. D'autre part d'après le lemme 2.6 et du fait que

$$\int_{\mathbf{R}^N} w(x, 0) dx = \int_{B_{d_2}(0)} w(x, 0) dx \leq \int_{B_{d_2}(0)} u(x, 0) dx \leq \alpha; \quad (2.30)$$

pour tout $\epsilon \in \mathbf{R}^+$ il existe une constante \mathcal{I} telle que

$$\text{Supp } w(\cdot, t) \subset B_{1+\epsilon}(0), \text{ pour tout } t \in [0, \mathcal{I}]. \quad (2.31)$$

Ainsi d'après la relation (2.28), on obtient :

$$\int_{B_{d_2}(0)} w(x, 0) dx = \int_{\mathbf{R}^N} w(x, 0) dx = \int_{\mathbf{R}^N} w(x, t) dx = \int_{B_{1+\epsilon}(0)} w(x, t) dx. \quad (2.32)$$

Par conséquent, on a

$$\begin{aligned} \int_{B_{1+\epsilon}(0)} u(x, t) dx &\geq \int_{B_{1+\epsilon}(0)} w(x, t) dx = \int_{B_{d_2}(0)} w(x, 0) dx \\ &\geq \int_{B_{d_1}(0)} w(x, 0) dx = \int_{B_{d_1}(0)} u(x, 0) dx = a \end{aligned} \quad (2.33)$$

ceci pour tout $t \in [0, \mathcal{I}]$, ce qui prouve la relation (2.7).

Démonstration du théorème 2.2. — La démonstration du théorème va se faire en 2 étapes. Dans la 1ère étape, on prouve l'existence; quant à l'unicité, elle va se démontrer dans la 2ème partie.

1ère étape : l'existence.

D'après la proposition 2.1, pour tout $s \in]0, T[$ et pour tout $R \in \mathbf{R}^+$, on a :

$$\int_{B_R(x_o)} u(x, s) dx \leq C \{ R^{k/p-2} (T-s)^{-1/p-2} + (T-s)^{N/p} u^{k/p}(x_o, T) \} \quad (2.34)$$

où C est une constante indépendante de s .

Donc il existe une suite $(s_n)_{n \in \mathbf{N}}$ telle que $s_n \searrow 0$ et $u(\cdot, s_n)$ converge faiblement vers une mesure μ . Ainsi, pour toute fonction $\varphi \in C_o(\mathbf{R}^N)$ on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbf{R}^N} \varphi(x) u(x, s_n) dx = \int_{\mathbf{R}^N} \varphi(x) \mu(dx). \quad (2.35)$$

Par conséquent l'inégalité (2.4) est bien vérifiée. Et du fait que $u \geq 0$, alors μ est positive. A priori la mesure μ dépend de la suite $(s_n)_{n \in \mathbf{N}}$; mais en fait on va démontrer qu'il n'en est rien, dans l'étape suivante :

2ème étape : l'unicité.

Soit $t \in (0, T/2)$. D'après la proposition 2.1, on a :

$$\int_{B_1(x_o)} u(x, t) dx \leq C \left\{ \left(\frac{2}{T} \right)^{k/p-2} + T^{N/p} u^{k/p}(x_o, T) \right\}. \quad (2.36)$$

Puisque u est non identiquement nulle, on peut supposer que $\int_{B_1(x_o)} u(x, t) dx \neq 0$. Soient $\epsilon, d \in \mathbf{R}^+$ et $\alpha \in (0, T/4)$, en utilisant la proposition 2.3, il existe $\mathcal{I} \in \mathbf{R}_*^+$ telle que

$$\int_{B_{1+\epsilon}(x_o)} u(x, t + \alpha) dx + d \geq \int_{B_1(x_o)} u(x, \alpha) dx. \quad (2.37)$$

Ceci pour tout $t \in [0, \min(T/4, \mathcal{I})]$.

Supposons que l'on a deux suites $\{s_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ et $\{s'_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ telles que u converge faiblement vers une mesure μ_1 quand s_n tend vers 0 (respectivement vers μ_2 quand s'_n tend vers 0). Du fait que les deux mesures vérifient la relation (2.4), elles sont régulières. Pour t fixé, soit $s_n = \alpha$; en passant à la limite sur n dans la relation (2.37), on obtient :

$$\int_{B_{1+\epsilon}(x_o)} u(x, t) dx + d \geq \int_{B_1(x_o)} \mu_1(dx). \quad (2.38)$$

En prenant $t = s'_n$ et en passant à la limite sur n , on a

$$\int_{B_{1+\epsilon}(x_o)} \mu_2(dx + d) \geq \int_{B_1(x_o)} \mu_1(dx), \quad (2.39)$$

ceci pour tout $\epsilon, d \in \mathbf{R}^+$, par conséquent

$$\int_{B_1(x_o)} \mu_2(dx) \geq \int_{B_1(x_o)} \mu_1(dx). \quad (2.40)$$

En inversant les rôles de t et de α , on déduit

$$\int_{B_1(x_o)} \mu_2(dx) = \int_{B_1(x_o)} \mu_1(dx), \quad (2.41)$$

c'est-à-dire que $\mu_2(B_1(x_o)) = \mu_1(B_1(x_o))$.

Or pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$ et pour tout $x \in \mathbf{R}^N$, on a :

$$\mu_i(\lambda(x - x_o)) = |\lambda| \mu_i(x - x_o); i = 1, 2.$$

Par conséquent $\mu_1 = \mu_2$ dans \mathbf{R}^N .

Ce qui achève la démonstration du théorème.

Références

- [1] ARONSON (D.G.). — Widder's inversion theorem and the initial distribution problem, *S.I.A.M. J. Math. Anal.*, t. **12**, 1981, p. 639-651.
- [2] DIBENEDETTO (E.). — *Intrinsic Harnack type inequalities for solutions of certain degenerate parabolic equations*, to appear.
- [3] DIBENEDETTO (E.) and FRIEDMAN (A.). — Regularity of solutions of nonlinear degenerate parabolic systems, *J. Reine Angew. Math.*, t. **349**, 1984, p. 83-128.
- [4] LEE (S.V.) and AMES (W.F.). — Similarity solutions for non-Newtonian fluids, *A. T. Ch. E. Journal*, t. **12**, **4**, 1966, p. 700-708.

(Manuscrit reçu le 2 mars 1987)