

DOMINIQUE AZÉ

**Caractérisation de la convergence au sens de Mosco
en terme d'approximations inf-convolutives**

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 5^e série, tome 8, n° 3
(1986-1987), p. 293-314

http://www.numdam.org/item?id=AFST_1986-1987_5_8_3_293_0

© Université Paul Sabatier, 1986-1987, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Caractérisation de la convergence au sens de Mosco en terme d'approximations inf-convolutives

DOMINIQUE AZÉ⁽¹⁾

RÉSUMÉ. — On montre que la convergence au sens de Mosco d'une suite de fonctions convexes définies sur un espace de Banach réflexif est équivalente à la convergence simple d'une famille à un paramètre d'approximations inf-convolutives. Les noyaux admissibles d'inf-convolution recouvrent les noyaux du type $|\cdot|^\alpha$ avec $\alpha \geq 1$ où $|\cdot|$ désigne un renormage approprié de l'espace de base.

ABSTRACT. — The convergence in the sense of Mosco of a sequence of convex functions defined on a reflexive Banach space is shown to be equivalent to the pointwise convergence of a one parameter family of inf-convolutive approximations. Various kernels of approximation are studied involving kernels of the type $|\cdot|^\alpha$ with $\alpha \geq 1$ where $|\cdot|$ is a suitable renorming of the underlying space.

0. Introduction

Le but de ce travail est de caractériser la convergence variationnelle introduite par U. MOSCO et J.L. JOLY ([M1], [M2], [J]) par la convergence simple d'approximées inf-convolutives du type

$$F_\lambda(x) = \inf_{u \in X} \left\{ F(u) + \frac{1}{\lambda} k(|x - u|) \right\}$$

où X est un espace de Banach, $|\cdot|$, sa norme et k une fonction de \mathbf{R}^+ dans \mathbf{R}^+ .

⁽¹⁾ Mathématiques, Avenue de Villeneuve, Université de Perpignan - 66025 Perpignan Cedex

Des résultats de ce type ont été démontrés par H.ATTOUCH dans [A1] pour le noyau $k(t) = \frac{t^2}{2}$.

Dans la section 2., nous traitons le cas du noyau $k(t) = |t|$. Les approximations inf-convolutives définies par ce noyau semblent remonter à R.BAIRE, voir aussi E.J.Mc SHANE ([MS]).

Elles ont été étudiées entre autre par J-B.HIRIART-URRUTY ([H-U1], [H-U2]).

Dans la section 3., on s'intéresse à une classe de noyaux contenant les fonctions du type $k(t) = |t|^\alpha$ avec $\alpha > 1$, et on démontre également l'équivalence entre convergence au sens de Mosco et convergence simple des approximations.

Les résultats obtenus mettent à nouveau en lumière le lien entre épi (ou Γ) convergence et approximations de type inf-convolutif, citons par exemple [A1], [DG], [F-T], [W].

1. Approximation par inf-convolution avec la norme

On considère un espace de Banach $(X, |\cdot|)$ et on note classiquement $\Gamma_o(X)$ l'ensemble des fonctions convexes s.c.i. et propres définies sur X à valeurs dans $\mathbf{R} \cup \{+\infty\}$.

Pour $F \in \Gamma_o(X)$ et $\lambda > 0$, on pose

$$F_{[\lambda]}(x) = \inf_{u \in X} \left\{ F(u) + \frac{1}{\lambda} |x - u| \right\}. \quad (1)$$

LEMME 1.1. —

$$F_{[\lambda]} > -\infty \iff \text{dom } F^* \cap B_{\frac{1}{\lambda}}^* \neq \emptyset$$

où

$$B_{\frac{1}{\lambda}}^* = \{x^* \in X^*; |x^*| \leq \frac{1}{\lambda}\}.$$

Démonstration. — $F_{[\lambda]}$ est convexe et continue, on a donc

$$F_{[\lambda]} > -\infty \iff F_{[\lambda]}^* \not\equiv +\infty.$$

On remarque alors que

$$F_{[\lambda]} = F \nabla \frac{1}{\lambda} |\cdot| \text{ (inf-convolution)}$$

d'où

$$F_{[\lambda]}^* = F^* + I_{B_{\frac{1}{\lambda}}}^*$$

I_E désignant la fonction indicatrice de l'ensemble $E \subset X^*$.

On a donc bien

$$F_{[\lambda]} > -\infty \iff \text{dom } F^* \cap B_{\frac{1}{\lambda}}^* \neq \emptyset.$$

Remarque 1. — Quand $F_{[\lambda]} > -\infty$, on sait ([H-U1] Prop.2.1), que $F_{[\lambda]}$ est Lipschitzienne de constante de Lipschitz $\frac{1}{\lambda}$.

Remarque 2. — On déduit du lemme 1.1 que

$$\frac{1}{\lambda} > d(0, \text{dom } F^*) \implies F_{[\lambda]} > -\infty. \quad (2)$$

Dans le cas où $\frac{1}{\lambda} = d(0, \text{dom } F^*)$, diverses situations peuvent se présenter.

- $F_{[\lambda]} > -\infty$ et l'infimum est atteint dans la définition de $F_{[\lambda]}$.

Exemple. —

$$X = \mathbf{R}, F(u) = u, F^*(v) = I_{\{1\}}(v) \text{ donc } d(0, \text{dom } F^*) = 1.$$

Pour $\lambda = 1$, on a

$$F(u) + |x - u| = \begin{cases} x & \text{si } u \leq x \\ 2u - x & \text{si } u \geq x \end{cases}$$

- $F_{[\lambda]} > -\infty$ et l'infimum n'est pas atteint dans la définition de $F_{[\lambda]}$.

Exemple. —

$$X = \mathbf{R}, F(u) = e^u + u, F^*(v) = \begin{cases} (v-1)(\log(v-1)) - v + 1 & \text{si } v > 1 \\ +\infty & \text{si } v < 1 \end{cases}$$

On a $d(0, \text{dom } F^*) = 1$. Pour $\lambda = 1$, on a

$$F(u) + |x - u| = \begin{cases} e^u + x & \text{si } u \leq x \\ e^u + 2u - x & \text{si } u \geq x \end{cases}$$

- $F_{[\lambda]} \equiv -\infty$

Exemple.—

$$X = \mathbf{R}, \quad F(u) = \begin{cases} -\sqrt{u} - u & \text{si } u \geq 0 \\ +\infty & \text{si } u < 0 \end{cases}$$

On a

$$F^*(v) = \begin{cases} -\frac{1}{4(v+1)} & \text{si } v < -1 \\ +\infty & \text{si } v \geq -1 \end{cases}$$

Dans ce cas, $d(0, \text{dom } F^*) = 1$ et, pour $\lambda = 1$, on a clairement $F_{[\lambda]} \equiv -\infty$.
On suppose à partir de maintenant que

$$X \text{ est réflexif} \quad (3)$$

Dans ce cas on a le

LEMME 1.2. — Soit $F \in \Gamma_0(X)$ et $\lambda > 0$ tel que $1/\lambda > d(0, \text{dom } F^*)$.
Alors

(i) pour tout $x \in X$, la fonction $F(\cdot) + \frac{1}{\lambda} |x - \cdot|$ atteint son minimum sur X . Notons

$$J_{[\lambda]}(x) = \text{Argmin} \left(F(\cdot) + \frac{1}{\lambda} |x - \cdot| \right).$$

On a

(ii) $J_{[\lambda]}(x)$ est un ensemble convexe faiblement compact. De plus

(iii) $\partial F_{[\lambda]}(x) = \partial F(u) \cap \partial \left(\frac{1}{\lambda} |\cdot| \right)(x - u)$ pour tout $u \in J_{[\lambda]}(x)$.

Démonstration. — Posons $c = d(0, \text{dom } F^*)$ et choisissons $\epsilon > 0$ tel que $\frac{1}{\lambda} > c + \epsilon$. Il existe alors $u^* \in \text{dom } F^*$ tel que $\frac{1}{\lambda} > c + \epsilon > |u^*| \geq c$. Il vient alors, pour tout $u \in X$

$$\begin{aligned} F(u) &\geq \langle u^*, u \rangle - F^*(u^*) \\ F(u) &\geq -(c + \epsilon) |u| - F^*(u^*) \end{aligned}$$

et donc

$$F(u) + \frac{1}{\lambda} |x - u| \geq \left(\frac{1}{\lambda} - c - \epsilon \right) |u| - \frac{1}{\lambda} |x| - F^*(u^*). \quad (4)$$

Les conclusions (i) et (ii) du lemme découlent alors de (4). La conclusion (iii) n'est autre que le calcul classique du sous-différentiel d'une inf-convolution lorsque celle-ci est exacte (voir [L] par exemple).

Remarque 3. — Un résultat important est le suivant ([H-U1] Proposition 2.3)

$$F_{[\lambda]}(x) = F(x) \iff \partial F(x) \cap B_{\frac{1}{\lambda}}^* \neq \emptyset.$$

On a clairement

$$F_{[\lambda]}(x) = F(x) \iff x \in J_{[\lambda]}(x).$$

On remarque alors que

$$\partial F(x) \cap \overset{\circ}{B}_{\frac{1}{\lambda}}^* \neq \emptyset \implies J_{[\lambda]}(x) = \{x\} \quad (5)$$

où $\overset{\circ}{B}_{\frac{1}{\lambda}}^* = \{x^* \in X^*; |x^*| < \frac{1}{\lambda}\}$, en effet, pour tout $u \in X$ et $u^* \in \partial F(x)$ vérifiant $|u^*| < \frac{1}{\lambda}$, il vient

$$F(u) + \frac{1}{\lambda} |x - u| \geq F(x) + \left(\frac{1}{\lambda} - |u^*|\right) |x - u|.$$

Par contre l'implication réciproque est fausse dans (5) comme le montre l'exemple suivant

$$X = \mathbf{R}, \quad F(u) = \frac{u^2}{2} + u, \quad x = 0, \quad \lambda = 1.$$

On a

$$F(u) + |u| = \begin{cases} \frac{u^2}{2} + 2u & \text{pour } u \geq 0 \\ \frac{u^2}{2} & \text{pour } u \leq 0 \end{cases}$$

il s'ensuit que $J_{[1]}(0) = \emptyset$ alors que $\partial F(0) = \{1\}$.

2. Equivalence entre convergence au sens de Mosco et convergence simple des approximations

Commençons par donner la définition de la convergence introduite par U. Mosco (voir [M1], [M2], [J]).

On considère X espace de Banach réflexif et $\{F, F^n : X \rightarrow \mathbf{R} \cup \{+\infty\}, n \in \mathbf{N}\}$ des fonctions convexes, s.c.i. et propres.

On dit que $(F^n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge au sens de Mosco vers F et on note $F = M - \lim_e F^n$ si

$$\begin{cases} \forall x \in X, \forall x_n \xrightarrow{w} x, \liminf_n F^n(x_n) \geq F(x) \\ \forall x \in X, \exists \xi_n \xrightarrow{s} x, \limsup_n F^n(\xi_n) \leq F(x) \end{cases} \quad (6)$$

les lettres w et s dénotant respectivement les topologies faibles et fortes.

Dans le cas où les deux propriétés intervenant dans la définition (6) sont vérifiées pour une topologie τ , on note

$$F = \tau - \lim_e F^n. \quad (7)$$

Dans [A1], H. ATTOUCH a démontré l'équivalence entre la convergence au sens de Mosco de (F^n) vers F et la convergence simple, pour tout $\lambda > 0$, de F_λ^n vers F_λ , où pour $\Phi \in \Gamma_0(X)$,

$$\Phi_\lambda(x) := \inf_{u \in X} \left\{ \Phi(u) + \frac{1}{2\lambda} |x - u|^2 \right\}$$

est l'approximation Moreau-Yosida de Φ .

Dans cette section, on se propose de démontrer que le résultat précédent reste vrai quand on remplace les approximations de Moreau-Yosida par celles considérées dans la section 1.

PROPOSITION 2.1. — *Soit X un espace de Banach réflexif et $\{F, F^n : X \rightarrow R \cup \{+\infty\}, n \in \mathbb{N}\}$ des fonctions convexes, s.c.i. et propres, alors*

$$F = M - \lim_e F^n \implies \begin{cases} \text{pour tout } \lambda > 0 \text{ tel que } \frac{1}{\lambda} > d(0, \text{dom } F^*) \\ \text{on a } F_{[\lambda]}(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} F_{[\lambda]}^n(x) \text{ pour tout } x \in X. \end{cases}$$

Démonstration. — Posons $c = d(0, \text{dom } F^*)$ et considérons $\epsilon > 0$ tel que $\frac{1}{\lambda} > c + \epsilon$. Il existe $u^* \in \text{dom } F^*$ tel que $\frac{1}{\lambda} > c + \epsilon > |u^*|$.

On sait ([M1]) que $F = M - \lim_e F^n \iff F^* = M - \lim_e (F^n)^*$.

Il existe donc $u_n^* \xrightarrow{s} u^*$ tel que $(F^n)^*(u_n^*) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} F^*(u^*)$.

Pour n assez grand on a

$$\frac{1}{\lambda} > c + \epsilon > |u_n^*|.$$

Il vient alors, pour tout $u \in X$

$$F^n(u) \geq \langle u_n^*, u \rangle - F_n^*(u_n^*)$$

$$F^n(u) \geq -(c + \epsilon)|u| - M \quad \text{où} \quad M = \sup_{n \in \mathbb{N}} (F^n)^*(u_n^*) < +\infty.$$

Caractérisation de la convergence au sens de Mosco

D'où

$$F^n(u) + \frac{1}{\lambda} |x - u| \geq \left(\frac{1}{\lambda} - c - \epsilon \right) |u| - \frac{1}{\lambda} |x| - M.$$

La suite $F^n(\cdot) + \frac{1}{\lambda} |x - \cdot|$ converge au sens de Mosco vers $F(\cdot) + \frac{1}{\lambda} |x - \cdot|$ (la fonction $\frac{1}{\lambda} |x - \cdot|$ étant continue) et cette suite est équi-coercive, on sait donc que (voir par exemple [A1], Theorem 2.11)

$$\inf_{u \in X} \left\{ F^n(u) + \frac{1}{\lambda} |x - u| \right\} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \inf_{u \in X} \left\{ F(u) + \frac{1}{\lambda} |x - u| \right\}$$

$$F_{[\lambda]}^n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} F_{[\lambda]}(x).$$

Le point délicat est la réciproque. On suppose que les espaces X et X^* sont renormés par des normes strictement convexes, différentiables hors de l'origine et vérifiant

$$\left\{ \begin{array}{l} x_n \xrightarrow{w} x \\ |x_n| \rightarrow |x| \end{array} \right\} \implies x_n \xrightarrow{s} x \quad (8)$$

ce qui est toujours possible (voir par exemple E.ASPLUND [As], S.L.TROYANSKI [T] et aussi [S]).

THÉORÈME 2.2. — *Soit X un espace de Banach réflexif, tel que (8) soit vérifié. On considère $\{F, F^n : X \rightarrow \mathbf{R} \cup \{+\infty\}, n \in \mathbf{N}\}$ des fonctions convexes, s.c.i. et propres, on suppose que*

$$\text{pour tout } \lambda > 0 \text{ vérifiant } \frac{1}{\lambda} \geq d(0, \text{dom } F^*) \text{ et pour tout } x \in X$$

$$\text{on a } F_{[\lambda]}(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} F_{[\lambda]}^n(x), \quad (9)$$

alors

$$F = M - \lim_e F^n.$$

Démonstration. — Commençons par remarquer que si $J_{[\lambda]}(x) \neq \{x\}$, on a, grâce au point (iii) du lemme 1.2 et au fait que, pour $u \neq 0$, $|\partial| \cdot |(u)| = 1$

$$|\partial F_{[\lambda]}(x)| = \frac{1}{\lambda}. \quad (10)$$

(La norme dans le dual est la norme duale de celle de X).

1er point

Soit $x \in \text{dom } F$ on veut montrer qu'il existe $x_n \xrightarrow{s} x$ tel que

$$\limsup_n F^n(x_n) \leq F(x).$$

Posons $c = d(0, \text{dom } F^*)$ et considérons $\lambda_0 > 0$ tel que $\frac{1}{\lambda_0} > c$. On observe que, grâce à (9), $F_{[\lambda]}^n \in \Gamma_0(X)$ pour tout $\lambda \leq \lambda_0$ et $n \geq n_0(\lambda_0)$.

On a alors

$$F_{[\lambda_0]} = s - \lim_e F_{[\lambda_0]}^n \quad (\text{voir (7)})$$

car les fonctions $F_{[\lambda_0]}^n$ convergent simplement vers $F_{[\lambda_0]}$ et sont équi-Lipschitziennes.

Par ailleurs la suite $(F_{[\lambda_0]}^n)^*$ est équi-coercive, on a donc, utilisant le théorème 3.9 de [A1]

$$F^* + I_{B_{1/\lambda_0}^*} = w - \lim_e \left((F^n)^* + I_{B_{1/\lambda_0}^*} \right) \quad (\text{voir (7)}).$$

Il existe donc $u_0^* \in \text{dom } F^* \cap B_{1/\lambda_0}^*$ et $u_{0,n}^* \in B_{1/\lambda_0}^*$ tels que

$$F^*(u_0^*) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (F^n)^*(u_{0,n}^*). \quad (11)$$

On en déduit que, pour $\lambda < \lambda_0$ on a, pour n assez grand

$$\frac{1}{\lambda} > d(0, \text{dom } F^{n*}). \quad (12)$$

On a alors

$$\lim_{\lambda \downarrow 0} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{[\lambda]}^n(x) \right) = \lim_{\lambda \downarrow 0} F_{[\lambda]}(x) = F(x).$$

Utilisant un lemme de diagonalisation ([A1] Corollary 18.p 37), il existe $\lambda(n) \downarrow 0$ tel que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{[\lambda(n)]}^n(x) = F(x).$$

Grâce à (12) et à la conclusion (ii) du lemme 1.2, on a $J_{[\lambda(n)]}^{F^n}(x) \neq \emptyset$.

Considérons alors $u_{\lambda(n)}^n \in J_{[\lambda(n)]}^{F^n}(x)$ et posons

$$x_n = u_{\lambda(n)}^n.$$

D'après (11) on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $u \in X$

$$F^n(u) \geq -\frac{1}{\lambda_0} |u| - M \quad \text{où} \quad M = \sup_n (F^n)^*(u_{0,n}^*) < +\infty.$$

On a alors

$$\sup_n \left\{ -\frac{1}{\lambda_0} |x_n| - M + \frac{1}{\lambda(n)} |x - x_n| \right\} < +\infty.$$

Il s'ensuit que (x_n) est bornée puis que $x_n \xrightarrow{s} x$, de plus

$$\begin{aligned} \limsup_n F^n(x_n) &\leq \limsup_n F_{[\lambda(n)]}^n(x) \\ &\leq F(x) \end{aligned}$$

ce qui démontre bien le premier point.

2ème point

Soit $x \in X$ et $x_n \xrightarrow{w} x$, on veut montrer que

$$\liminf_n F^n(x_n) \geq F(x). \quad (14)$$

Pour ceci, on distingue deux cas :

- $d(0, \text{dom } F^*) = 0$.

Posons

$$\bar{\lambda} = \inf \{ \lambda > 0, F_{[\lambda]}(x) < F(x) \}.$$

Supposons $\bar{\lambda} < +\infty$, pour $\lambda > \bar{\lambda}$ on a donc $F_{[\lambda]}(x) < F(x)$, ce qui montre que $x \notin J_{[\lambda]}(x)$ et donc, d'après (10), que

$$|\partial F_{[\lambda]}(x)| = \frac{1}{\lambda}.$$

Choisissons alors $v_\lambda^n \in \partial F_{[\lambda]}^n(x)$, on a $|v_\lambda^n| \leq \frac{1}{\lambda}$ donc à une sous-suite près, v_λ^n converge faiblement vers $v_\lambda \in X^*$.

On observe que

$$\forall \xi \in X, \quad F_{[\lambda]}^n(\xi) - F_{[\lambda]}^n(x) \geq \langle v_\lambda^n, \xi - x \rangle$$

passant à la limite grâce à l'hypothèse (9) on en déduit que $v_\lambda \in \partial F_{[\lambda]}(x)$, on remarque alors que

$$\frac{1}{\lambda} = |v_\lambda| \leq \liminf_n |v_\lambda^n| \leq \limsup_n |v_\lambda^n| \leq \frac{1}{\lambda}$$

d'où

$$\begin{aligned} v_\lambda^n &\xrightarrow{w} v_\lambda \\ |v_\lambda^n| &\longrightarrow |v_\lambda| \end{aligned}$$

donc, utilisant (8), $v_\lambda^n \xrightarrow{s} v_\lambda$.

On sait que

$$\begin{aligned} F_{[\lambda]}^n(x_n) &\geq F_{[\lambda]}^n(x) + \langle v_\lambda^n, x_n - x \rangle \\ \liminf_n F^n(x_n) &\geq \liminf_n F_{[\lambda]}^n(x_n) \end{aligned}$$

il s'ensuit que

$$\liminf_n F^n(x_n) \geq F_{[\lambda]}(x). \quad (15)$$

Comme $\sup_{\lambda > \bar{\lambda}} F_{[\lambda]}(x) = F(x)$ on a bien

$$\liminf_n F^n(x_n) \geq F(x).$$

Supposons alors $\bar{\lambda} = +\infty$ cela signifie que $F_{[\lambda]}(x) = F(x)$, pour tout $\lambda > 0$. Il s'ensuit que

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{[\lambda]}^n(x) \right) = F(x)$$

Il existe donc $\lambda(n) \uparrow +\infty$ tel que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (F_{[\lambda(n)]}^n(x)) = F(x).$$

Choisissons $v_{\lambda(n)}^n \in \partial F_{[\lambda(n)]}^n(x)$, on a

$$|v_{\lambda(n)}^n| \leq \frac{1}{\lambda(n)}$$

d'où $v_{\lambda(n)}^n \xrightarrow{s} 0$ et on achève la démonstration comme en (15).

- $d(0, \text{dom } F^*) > 0$

Posons $c = d(0, \text{dom } F^*)$ et définissons

$$\bar{\lambda} = \inf \left\{ \lambda > 0; 0 < \lambda < \frac{1}{c}, F_{[\lambda]}(x) < F(x) \right\}.$$

Caractérisation de la convergence au sens de Mosco

Supposons $\bar{\lambda} < \frac{1}{c}$, pour $\lambda > \bar{\lambda}$ on a donc $F_{[\lambda]}(x) < F(x)$, d'où $x \notin J_{[\lambda]}(x)$ et $|\partial F_{[\lambda]}(x)| = \frac{1}{\lambda}$.

Choisissons $v_{\lambda}^n \in \partial F_{[\lambda]}^n(x)$, comme $|v_{\lambda}^n| \leq \frac{1}{\lambda}$, la suite (v_{λ}^n) converge à une sous-suite près vers $v_{\lambda} \in \partial F_{[\lambda]}(x)$, il s'ensuit que

$$\frac{1}{\lambda} = |v_{\lambda}| \leq \liminf_n |v_{\lambda}^n| \leq \limsup_n |v_{\lambda}^n| \leq \frac{1}{\lambda}$$

ce qui montre que v_{λ}^n converge fortement vers v_{λ} , on achève alors la démonstration comme en (15).

Il reste donc le cas où l'ensemble, dont $\bar{\lambda}$ est la borne inférieure, est vide, ce qui signifie que $F_{[\lambda]}(x) = F(x)$ pour tout $\lambda < \frac{1}{c}$.

Posons $\lambda^* = \frac{1}{c}$, on observe donc que, pour tout $\lambda < \lambda^*$, il existe $u_{\lambda} \in \partial F(x) \cap B_{1/\lambda}^*$, utilisant la remarque 3 qui suit le lemme 1.2.

Donc, à une sous-suite près on a $u_{\lambda} \xrightarrow{w} u_{\lambda^*}$ quand $\lambda \rightarrow \lambda^*$, où $u_{\lambda^*} \in \partial F(x)$. Il s'ensuit que

$$|u_{\lambda^*}| \leq \liminf_{\lambda \rightarrow \lambda^*} |u_{\lambda}| \leq \frac{1}{\lambda^*} = c.$$

Or $u_{\lambda^*} \in \partial F(x)$ donc $u_{\lambda^*} \in \text{dom } F^*$ et

$$|u_{\lambda^*}| \geq d(0, \text{dom } F^*) = c$$

d'où $|u_{\lambda^*}| = c$, on en déduit que $F_{[\lambda^*]}(x) = F(x)$.

Choisissons alors $v_{\lambda^*}^n \in \partial F_{[\lambda^*]}^n(x)$, à une sous-suite près, on a $v_{\lambda^*}^n \xrightarrow{w} v_{\lambda^*}$ avec $v_{\lambda^*} \in \partial F_{[\lambda^*]}(x)$. On a alors :

$$\begin{aligned} \liminf_n |v_{\lambda^*}^n| &\geq |v_{\lambda^*}| \\ |v_{\lambda^*}| &\geq c \text{ car } v_{\lambda^*} \in \text{dom } F^*, \text{ de plus} \\ c &\geq \limsup_n |v_{\lambda^*}^n| \text{ car } |v_{\lambda^*}^n| \leq \frac{1}{\lambda^*} = c. \end{aligned}$$

On en déduit que $v_{\lambda^*}^n$ converge fortement vers v_{λ^*} et on conclut comme en (15).

Remarque. — Quand $x \notin J_{[\lambda]}(x)$, on a $|\partial F_{[\lambda]}(x)| = \frac{1}{\lambda}$, il en résulte que $\partial F_{[\lambda]}(x)$ est réduit à un seul élément, grâce à la stricte convexité de la norme de X^* , et donc que $F_{[\lambda]}$ est Gâteaux-différentiable en x .

3. Etude d'une classe générale d'approximation inf-convolutives

On commence par rappeler que l'on définit dans un espace de Banach X (voir [Bro] par exemple), l'application de dualité

$$\begin{aligned} H : X &\longrightarrow X^* \\ x &\longmapsto \partial\left(\frac{1}{2} |\cdot|^2\right) \end{aligned} \quad (16)$$

$H(x)$ est caractérisée par

$$H(x) = \{x^* \in X^*, |x^*| = |x| \text{ et } \langle x^*, x \rangle = |x|^2\}. \quad (17)$$

Dans le cas où l'espace X est réflexif et renormé comme en (8), l'application de dualité est univoque, de plus, pour tout $x \neq 0$

$$\nabla(|\cdot|)(x) = \frac{H(x)}{|x|}. \quad (18)$$

On considère alors

$$k : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^+ \text{ une fonction convexe coercive paire nulle en } 0. \quad (19)$$

Pour $F \in \Gamma_0(X)$ et $\lambda > 0$, on pose

$$\begin{aligned} F_\lambda(x) &= \inf_{u \in X} \left\{ F(u) + \frac{1}{\lambda} k(|x - u|) \right\} \\ &= \left(F \nabla \frac{1}{\lambda} k(|\cdot|) \right)(x) \end{aligned} \quad (20)$$

$F_\lambda(x)$ est une fonction convexe continue.

Définissons

$$C = \{x^* \in X^*, |x^*| \in \text{dom } k^*\} \quad (21)$$

C est un convexe équilibré d'intérieur non vide, la jauge de C , notée $\|\cdot\|$, est alors une semi-norme continue sur X^*

$$\forall x^* \in X^*, \|x^*\| = \inf \{ \alpha > 0, |x^*| \in \alpha \text{ dom } k^* \}. \quad (22)$$

On a alors le

LEMME 3.1. — On suppose que $k(\cdot)$ vérifie (19), alors

- i) $F_\lambda > -\infty \iff \lambda \operatorname{dom} F^* \cap C \neq \emptyset$.
- ii) $\frac{1}{\lambda} > d(0, \operatorname{dom} F^*) \implies F_\lambda > -\infty$, de plus si on pose

$$J_\lambda(x) := \operatorname{Argmin} \left\{ F(\cdot) + \frac{1}{\lambda} k(|x - \cdot|) \right\},$$

$J_\lambda(x)$ est non vide, convexe et faiblement compact.

- iii) $\frac{1}{\lambda} < d(0, \operatorname{dom} F^*) \implies F_\lambda \equiv -\infty$.

Démonstration. — i) F_λ étant convexe et continue on a

$$F_\lambda > -\infty \iff (F_\lambda)^* \neq +\infty.$$

Or

$$(F_\lambda)^*(x^*) = F^*(x^*) + \frac{1}{\lambda} k^*(\lambda|x^*|) \text{ d'où i).}$$

ii) Supposons $\frac{1}{\lambda} > d(0, \operatorname{dom} F^*)$, il existe donc $x^* \in \operatorname{dom} F^*$ tel que $\|x^*\| < \frac{1}{\lambda}$. Utilisant la définition de $\|x^*\|$ et le fait que la semi-norme $\|\cdot\|$ est continue, il vient

$$\lambda|x^*| \in \operatorname{int}(\operatorname{dom} k^*).$$

Posons $z^* = \lambda x^*$, il s'ensuit que

$$z^* \in \operatorname{int}(\operatorname{dom} (k(|\cdot|))^*). \quad (23)$$

Il vient alors, pour tout $u \in X$

$$\begin{aligned} F(u) + \frac{1}{\lambda} k(|x - u|) &\geq \langle x^*, u \rangle - F^*(x^*) + \frac{1}{\lambda} k(|x - u|) \\ &\geq \frac{1}{\lambda} \left\{ \langle z^*, u \rangle + k(|x - u|) \right\} - F^*(x^*). \end{aligned} \quad (24)$$

Posons $\varphi(u) = \langle z^*, u \rangle - k(|x - u|)$, on observe que

$$\begin{aligned} \varphi^*(u^*) &= \langle u^* - z^*, x \rangle + k^*(|u^* - z^*|) \\ \varphi^*(0) &= \langle -z^*, x \rangle + k^*(|z^*|) \end{aligned} \quad (25)$$

d'où $\inf_X \varphi > -\infty$ et ii) est bien démontré.

De plus, grâce à (23) et (25). φ^* est continue en 0 donc φ est coercive ce qui montre que le minimum est atteint dans la définition de $F_\lambda(x)$ et que l'ensemble $J_\lambda(x)$ des points réalisant ce minimum est convexe faiblement compact.

iii) On suppose que $\frac{1}{\lambda} < d(0, \text{dom } F^*)$.

Soit $x^* \in \text{dom } F^*$, on a donc

$$\frac{1}{\lambda} < \inf\{\alpha > 0, |x^*| \in \alpha \text{ dom } k^*\}$$

d'où $\lambda|x^*| \notin \text{dom } k^*$, comme $(F_\lambda)^*(x^*) = F^*(x^*) + \frac{1}{\lambda} k^*(|\lambda x^*|)$ on a

$$(F_\lambda)^* \equiv +\infty, \text{ d'où } F_\lambda \equiv -\infty.$$

Remarques. — 1) Si $\frac{1}{\lambda} = d(0, \text{dom } F^*)$, on ne peut rien dire en général (voir les exemples suivant le lemme 1.1).

2) Si $k(\cdot)$ est fortement coercive, à savoir

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{k(t)}{t} = +\infty,$$

on a $\text{dom } k^* = \mathbf{R}$ d'où $\|\cdot\| \equiv 0$, la condition $\frac{1}{\lambda} > d(0, \text{dom } F^*)$ est donc vérifiée pour tout $\lambda > 0$.

On va s'intéresser maintenant à la régularité des approximées, pour ceci, on fait à partir de maintenant l'hypothèse

$k(\cdot)$ est strictement convexe, dérivable et $k'(0) = 0$

et on suppose que la norme de X vérifie (8). (26)

PROPOSITION 3.2. — *On suppose que $k(\cdot)$ vérifie (19) et (26), alors, pour tout $\lambda > 0$ vérifiant $\frac{1}{\lambda} > d(0, \text{dom } F^*)$*

i) $J_\lambda(x)$ est réduit à un élément

ii) F_λ est de classe C^1 et on a

$$A_\lambda(x) := \nabla F_\lambda(x) = \frac{1}{\lambda} k'(|x - J_\lambda(x)|) \frac{H(x - J_\lambda(x))}{|x - J_\lambda(x)|} \quad (27)$$

où l'on fait la convention $\frac{0}{|0|} = 0$ et où H est l'application de dualité de X dans X^* définie en (16).

Démonstration. — i) se déduit immédiatement de la stricte convexité de $k(\cdot)$.

Pour démontrer ii), on remarque, suivant P.J. LAURENT ([L]) que

$$\begin{aligned}\partial F_\lambda(x) &= \partial F(J_\lambda(x)) \cap \frac{1}{\lambda} \partial k(|\cdot|)(x - J_\lambda(x)) \\ &= \partial F(J_\lambda(x)) \cap \left\{ \frac{1}{\lambda} k'(|x - J_\lambda(x)|) \frac{H(x - J_\lambda(x))}{|x - J_\lambda(x)|} \right\}.\end{aligned}$$

On observe donc que $\partial F_\lambda(x)$ est réduit à un seul élément, la fonction F_λ est donc Gâteaux-différentiable et sa Gâteaux dérivée est donnée par (27). Il suffit alors de montrer que $\nabla F_\lambda(\cdot)$ est continue.

Pour ceci, on considère $x \in X$ et une suite $x_n \xrightarrow{s} x$. Posons

$$G_n(u) = F(u) + \frac{1}{\lambda} k(|x_n - u|),$$

il est clair que

$$G = M - \lim_e G_n$$

où

$$G(u) = F(u) + \frac{1}{\lambda} k(|x - u|).$$

Les fonctions F_n étant équi-coercives (voir (23), (24), et (25)) on obtient, utilisant les propriétés variationnelles de l'épi-convergence

$$\left\{ \begin{array}{l} J_\lambda(x_n) \xrightarrow{w} J_\lambda(x) \\ F(J_\lambda(x_n)) + \frac{1}{\lambda} k(|J_\lambda(x_n) - x_n|) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} F(J_\lambda(x)) \\ \quad + \frac{1}{\lambda} k(|J_\lambda(x) - x|) \end{array} \right. \quad (28)$$

on en déduit, utilisant la propriété

$$\left. \begin{array}{l} a_n + b_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a + b \\ \liminf_n a_n \geq a \\ \liminf_n b_n \geq b \end{array} \right\} \implies \begin{array}{l} a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a \\ \text{et} \\ b_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} b \end{array}$$

$$k(|J_\lambda(x_n) - x_n|) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} k(|J_\lambda(x) - x|)$$

et donc, utilisant la continuité de $k^{-1}(\cdot)$

$$|J_\lambda(x_n) - x_n| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} |J_\lambda(x) - x|.$$

On en déduit que

$$J_\lambda(x_n) \xrightarrow{s} J_\lambda(x). \quad (29)$$

La suite $(A_\lambda(x_n))$ est alors bornée et converge faiblement vers $A_\lambda(x)$ grâce à la semi-continuité supérieure de $\partial F_\lambda(\cdot)$ et au fait que $\partial F_\lambda(x) = \{\nabla F_\lambda(x)\}$.

De plus

$$|A_\lambda(x_n)| = k'(|J_\lambda(x_n) - x_n|).$$

donc

$$|A_\lambda(x_n)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} |A_\lambda(x)|$$

ce qui, joint au fait que $A_\lambda(x_n) \xrightarrow{w} A_\lambda(x)$ montre que $A_\lambda(x_n) \xrightarrow{s} A_\lambda(x)$.

On peut alors relier la convergence au sens de Mosco d'une suite de fonctions convexes, s.c.i. et propres à la convergence simple des approximations définies en (20).

THÉORÈME 3.3. — Soient $\{F^n, F : X \rightarrow \mathbf{R} \cup \{+\infty\}, n \in \mathbf{N}\}$ des fonctions de $\Gamma_0(X)$ où X est un espace de Banach réflexif vérifiant (8).

i) Si $F = M\text{-}\lim_e F_n$ alors, pour tout $\lambda > 0$ vérifiant $\frac{1}{\lambda} > d(0, \text{dom } F^*)$ et pour tout $x \in X$,

$$F_\lambda(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} F_\lambda^n(x). \quad (30)$$

ii) Réciproquement, si (30) a lieu pour tout $\lambda > 0$ assez petit, et pour tout $x \in X$, alors

$$F = M\text{-}\lim_e F^n. \quad (31)$$

Démonstration. — i) considérons $\lambda > 0$ tel que $\frac{1}{\lambda} > d(0, \text{dom } F^*)$, il existe donc $x^* \in \text{dom } F^*$ tel que

$$\frac{1}{\lambda} > \|x^*\|. \quad (32)$$

Caractérisation de la convergence au sens de Mosco

Par ailleurs, comme $F = M - \lim_e F^n$, on sait ([M2]) que $F^* = M - \lim_e (F^n)^*$. Il existe donc $x^* \in \text{dom } F^*$ et $x_n^* \xrightarrow{s} x^*$ telle que $F^*(x^*) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (F^n)^*(x_n^*)$.

Utilisant (32), il vient $\|\lambda x^*\| < 1$ donc $\lambda x^* \in \text{int}(C)$. Il existe donc $0 < r \leq R$ tel que

$$|\lambda x^*| < r \quad \text{et} \quad [-R, +R] \subset \text{dom } k^*. \quad (33)$$

Pour n assez grand, il s'ensuit que

$$|\lambda x_n^*| < r. \quad (34)$$

Posons $z_n^* = \lambda x_n^*$, il vient, pour tout $u \in X$

$$F^n(u) + \frac{1}{\lambda} k(|x - u|) \geq \frac{1}{\lambda} \{ \langle z_n^*, u \rangle + k(|x - u|) \} - (F^n)^*(x_n^*). \quad (35)$$

Définissons

$$\varphi^n(u) = \langle z_n^*, u \rangle + k(|x - u|)$$

on observe que

$$(\varphi^n)^*(u^*) = k^*(|z_n^* - u^*|) + \langle u^* - z_n^*, x \rangle$$

ce qui, joint à (33) et (34) montre que la suite (φ^n) est équi-coercive (la suite $(\varphi^n)^*$ étant équi-majorée sur $B_{R-r}(0)$).

La suite de fonctions

$$\tilde{F}^n(u) = F^n(u) + k(|x - u|)$$

converge au sens de Mosco vers

$$\tilde{F}(u) = F(u) + k(|x - u|).$$

Cette suite étant équicoercive, on a bien, utilisant les propriétés variationnelles de l'épi-convergence

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} (\inf_X \tilde{F}^n) &= \inf_X \tilde{F} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} F_\lambda^n(x) &= F_\lambda(x), \end{aligned}$$

ce qui démontre i).

ii) 1er point

Soit $x \in X$ et $x_n \xrightarrow{w} x$, on veut montrer

$$\liminf_n F^n(x_n) \geq F(x). \quad (36)$$

Pour ceci, on remarque que

$$\begin{aligned} F^n(x_n) &\geq F_\lambda^n(x_n) \\ F^n(x_n) &\geq F_\lambda^n(x) + \langle A_\lambda^n(x), x_n - x \rangle. \end{aligned} \quad (37)$$

Supposons que l'on ait, pour tout $\lambda > 0$ assez petit

$$A_\lambda^n(x) \xrightarrow{s} A_\lambda(x). \quad (38)$$

Passant à la limite inférieure dans (37) et utilisant l'hypothèse (30), il vient

$$\liminf_n F^n(x_n) \geq F_\lambda(x). \quad (39)$$

Comme $\sup_{\lambda > 0} F_\lambda(x) = F(x)$, on obtient

$$\liminf_n F^n(x_n) \geq F(x). \quad (40)$$

Il reste à démontrer (38).

Pour tout $x \in X$, $\xi \in X$ et $n \in \mathbb{N}$, on sait que

$$F_\lambda^n(x + \xi) - F_\lambda^n(x) \geq \langle A_\lambda^n(x), \xi \rangle. \quad (41)$$

Grâce à l'hypothèse (30), il s'ensuit que la suite $(\langle A_\lambda^n(x), \xi \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. D'après le théorème de Banach-Steinhaus, la suite $(A_\lambda^n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, elle converge donc faiblement, à une sous-suite près vers un certain $\eta \in X^*$. Passant à la limite dans (41), il vient

$$F_\lambda(x + \xi) - F_\lambda(x) \geq \langle \eta, \xi \rangle$$

d'où $\eta = \nabla F_\lambda(x) = A_\lambda(x)$, ce qui montre

$$A_\lambda^n(x) \xrightarrow{w} A_\lambda(x). \quad (42)$$

Il suffit alors de démontrer, utilisant (8) que

$$|A_\lambda^n(x)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} |A_\lambda(x)|. \quad (43)$$

Définissons alors

$$h^n(\lambda) := \lambda F_\lambda^n(x) = \inf_{u \in X} \{ \lambda F^n(u) + k(|x - u|) \} \quad (44)$$

$$h(\lambda) := \lambda F_\lambda(x) = \inf_{u \in X} \{ \lambda F(u) + k(|x - u|) \}. \quad (45)$$

La fonction $h^n(\cdot)$ est concave, elle est donc continue sur l'intérieur de son domaine effectif, qui contient $]0, \frac{1}{d(0, \text{dom}(F^n)^*)} [$.

De plus, utilisant le théorème 1 de [V]

$$\partial h^n(\lambda) = \{ F^n(J_\lambda^n(x)) \} \text{ pour tout } \lambda > 0, \lambda \in \text{int}(\text{dom } h^n).$$

ce qui montre que $h^n(\cdot)$ est de classe C^1 sur $\text{int}(\text{dom } h^n)$ et

$$(h^n)'(\lambda) = F^n(J_\lambda^n(x)). \quad (46)$$

Par hypothèse, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} h^n(\lambda) = h(\lambda) \text{ pour } \lambda \text{ assez petit.}$$

D'après le lemme 3.28 de [A1] on obtient donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (h^n)'(\lambda) = h'(\lambda). \quad (47)$$

Réunissant (30), (46) et (47), il vient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \{ F^n(J_\lambda^n(x)) + \frac{1}{\lambda} k(|x - J_\lambda^n(x)|) \} = F(J_\lambda(x)) + \frac{1}{\lambda} k(|x - J_\lambda(x)|)$$

et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F^n(J_\lambda^n(x)) = F(J_\lambda(x))$$

ce qui montre que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} k(|x - J_\lambda^n(x)|) = k(|x - J_\lambda(x)|)$$

et donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |x - J_\lambda^n(x)| = |x - J_\lambda(x)|.$$

Comme $|A_\lambda^n(x)| = k'(|x - J_\lambda^n(x)|)$ on obtient bien

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |A_\lambda^n(x)| = |A_\lambda(x)|$$

ce qui achève de démontrer (38) et le premier point de ii).

ii) 2ème point

Soit $x \in X$, il est clair que, pour tout $F \in \Gamma_0(X)$

$$\lim_{\lambda \downarrow 0} F_\lambda(x) = F(x). \quad (48)$$

Utilisant l'hypothèse (30), il vient

$$\lim_{\lambda \downarrow 0} \left[\lim_{n \rightarrow +\infty} (F_\lambda^n(x)) \right] = F(x)$$

par diagonalisation, il existe donc $\lambda(n) \downarrow 0$ telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{\lambda(n)}^n(x) = F(x). \quad (49)$$

Posons $x_n = J_{\lambda(n)}^n(x)$, il vient

$$\begin{aligned} \limsup_n F^n(x_n) &\leq \limsup_n F_{\lambda(n)}^n(x_n) \\ &\leq F(x). \end{aligned}$$

Reste à démontrer que $x_n \xrightarrow{s} x$.

Pour ceci on remarque que, pour $x_0 \in \text{dom } F$ et $\lambda_0 > 0$ fixé, on obtient, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in X$

$$\begin{aligned} F^n(x) &\geq F_{\lambda_0}^n(x) \\ F^n(x) &\geq F_{\lambda_0}^n(x_0) + \langle A_{\lambda_0}^n(x_0), x - x_0 \rangle \\ F^n(x) &\geq -C(|x| + 1). \end{aligned} \quad (50)$$

Par ailleurs, la fonction $k(\cdot)$ étant coercive, il existe des constantes $\alpha > 0$ et $\beta \geq 0$ telles que

$$k(t) \geq \alpha |t| - \beta \quad (51)$$

Choisissons $\lambda > 0$ tel que $\frac{\alpha}{\lambda} > C$ et combinons (50) et (51), il vient, pour tout $u \in X$

$$F^n(u) + \frac{1}{\lambda} k(|x - u|) \geq \left(\frac{\alpha}{\lambda} - C\right)|u| - C'.$$

On obtient donc, pour n assez grand

$$\left(\frac{\alpha}{\lambda} - C\right)|x_n| - C' \leq F_{\lambda(n)}^n(x) \leq M.$$

La suite (x_n) est alors bornée et vérifie donc

$$\frac{1}{\lambda(n)} k(|x_n - x|) \leq M$$

d'où

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} k(|x_n - x|) = 0$$

et on a bien $x_n \xrightarrow{s} x$, ce qui achève la démonstration.

Références

- [A] ALART (P.). — *Contribution à la résolution numérique des inclusions différentielles*. Thèse 3ème cycle, Montpellier, 1985.
- [As] ASPLUND (E.). — Averaged norms, *Israel Journ. of Math.*, t. 5, 1967, p. 227-233.
- [A1] ATTOUCH (H.). — *Variational convergence for functions and operators*. — Pitman applicable mathematics series, 1984.
- [A2] ATTOUCH (H.). — Famille d'opérateurs maximaux monotones et mesurabilité, *Ann. Mat. Pura ed Appl.*, t. 4, 120, 1979, p. 35-111.
- [A-Az-W] ATTOUCH (H.), AZE (D.), WETS (R.J.B.). — Continuity properties of the partial Legendre-Fenchel transform : convergence of sequences of augmented Lagrangian functions, Moreau-Yosida approximates and subdifferential operators, *Fermat days 85 Math. for Optimization*, J.B. Hiriart-Urruty editor, North-Holland Math. Studies, t. 129, 1986, p. 1-42.
- [A-W] ATTOUCH (H.), WETS (R.). — Isometries for the Legendre Fenchel transform, *Transactions of the A.M.S.*, t. 296, 1, 1986, p. 33-60.
- [B] BOUGEARD (M.). — Contribution à la théorie de Morse, *Cahiers du CEREMADE*, t. 7911, 1979.
- [B-P-P] BOUGEARD (M.), PENOT (J.P.) POMMELET (A.). — *Approximation and decomposition properties of some class of locally D.C. functions*. — A paraître 1986.
- [Br] BREZIS (H.). — *Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert*. — North-Holland, 1973.
- [Bro] BROWDER (F.). — *Problèmes non linéaires*. — Presses de l'Université de Montréal, 1966.
- [DG] DE GIORGI (E.). — *G-operators and Γ -convergence*. — Congrès international de Mathématiques Varsovie, 1983.
- [F-T] FOUGERES (A.), TRUFFERT (A.). — *Régularisation s.c.i. et Γ -convergence, approximations inf-convolutives associées à un référentiel*. — A paraître aux Ann. di Mat. Pura ed Appl., 1986.
- [H-U1] HIRIART-URRUTY (J.B.). — Lipschitz r -continuity of the approximate subdifferential of a convex function, *Math. Scand.*, t. 47, 1980, p. 123-134.
- [H-U2] HIRIART-URRUTY (J.B.). — Extension of Lipschitz functions, *Jour. of Math. Anal. and Appl.*, t. 77, 1980, p. 539-554.

- [H] HOLMES (R.B.). — A course on optimization and best approximation, *Lecture Notes in Mathematics*, Springer, t. 257, 1972.
- [J] JOLY (J.L.). — Une famille de topologies sur l'ensemble des fonctions convexes pour lesquelles la polarité est bicontinue, *Journ. Math. Pure et Appl.*, t. 52, 1973, p. 421-441.
- [L] LAURENT (P.J.). — *Approximation et Optimisation*. — Hermann, 1972.
- [MS] Mc SHANE (E.J.). — Extension of range of functions, *Bull. Amer. Math. Soc.*, t. 40, 1934, p. 837-842.
- [MO1] MOREAU (J.J.). — Proximité et dualité dans les espaces Hilbertiens, *Bull. Soc. Math. France*, t. 93, 1965, p. 273-299.
- [MO2] MOREAU (J.J.). — Inf-convolution, sous-additivité, convexité des fonctions numériques, *Journ. Math. Pures et Appl.*, t. 49, 1969, p. 510-585.
- [M1] MOSCO (U.). — Convergence of convex sets and of solutions of variational inequalities, *Adv. in Math. Vol.3*, t. 4, 1969, p. 510-585.
- [M2] MOSCO (U.). — On the continuity of the Young-Fenchel transformation, *Journ. Math. Anal. and Appl.*, t. 35, 1971, p. 518-535.
- [P] PENOT (J.P.). — *Towards minimal assumptions for the infimal convolution regularization*. — A paraître 1986.
- [Po] POMMELLET (A.). — *Analyse convexe et théorie de Morse*. — Thèse 3ème cycle, Univ. Paris IX, 1982.
- [R] ROCKAFELLAR (R.T.). — Monotone operators and the proximal point algorithm, *SIAM Journ. of Control*, t. 14, 1976, p. 877-898.
- [S-W] SALINETTI (G.), WETS (R.J.B.). — On the convergence of sequences of convex sets in finite dimensions, *SIAM rev.*, t. 21, 1979, p. 18-33.
- [S] SONNTAG (Y.). — *Convergence au sens de U. Mosco : Théorie et applications à l'approximation des solutions d'inéquations*. — Thèse de Doctorat d'Etat, Université de Provence, 1982.
- [T] TROYANSKI (S.L.). — On locally uniformly convex and differentiable norms in certain non separable Banach spaces, *Studia Math.*, t. 37, 1971, p. 173-180.
- [V] VALADIER (M.). — Sous-différentiels d'une borne supérieure et d'une somme continue de fonctions convexes, *C.R.A.S.*, p.268, t. A, 1969, p. 39-42.
- [W] WETS (R.). — *Convergence of convex functions, variational inequalities and convex optimization problems*. In "variational inequalities and complementarity problems" Eds : R. Cottle, F. Gianessi, J.L. Lions, J. Wiley, 1980 p. 375-403.

(Manuscrit reçu le 8 juillet 1986)