MARTINE MARION

Étude mathématique d'un modèle de flamme laminaire sans température d'ignition : I - cas scalaire

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 5e série, tome 6, nº 3-4 (1984), p. 215-255
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1984_5_6_3-4_215_0>

Annales Faculté des Sciences Toulouse
Vol VI, 1984, P 215 à 255

ETUDE MATHEMATIQUE D'UN MODELE DE FLAMME LAMINAIRE SANS TEMPERATURE D'IGNITION : I - CAS SCALAIRE

Martine Marion *(1)*

(1) INRIA, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 Le Chesnay - (France)

Résumé : Ce travail étudie les propriétés qualitatives d'un modèle de flamme laminaire stationnaire, sans température d'ignition. Pour ce modèle, il existe une infinité d'ondes planes, solutions des équations de la combustion. On détermine le comportement asymptotique de ces solutions, lorsque l'énergie d'activation tend vers l'infini. Le lien entre le modèle considéré et celui de la température d'ignition est ensuite précisé. On étudie enfin le problème analogue sur des intervalles $I_a =]-a,+a[$, ainsi que le passage à la limite, lorsque $a \to +\infty$.

Summary : The aim of this paper is to discuss a model of laminar steady flame with no switch-on (or ignition) temperature. For this model there exist infinitely many solutions of the combustion equations having the form of planar travelling waves. We determine the asymptotic behaviour of these solutions for large activation energies. We further study the relationship between this model and the one with ignition temperature. Lastly, we study an analogous problem in a bounded interval $I_a =]-a,+a[$ and the convergence of solutions as $a \to +\infty$.

0. - INTRODUCTION

On étudie la structure d'une flamme laminaire, pré-mélangée, stationnaire, dans le cas d'une réaction simple du type : réactant $\to$ produit, sous l'hypothèse d'un nombre de Lewis égal à 1. Le problème se ramène alors à (voir Buckmaster et Ludford [5], Williams [9]) :

Déterminer une application $u : \mathbb{R} \to [0,1]$ et un réel c vérifiant

$$(0.1) \quad \begin{cases} -u'' + cu' = g(u) \\ u(-\infty) = 0 \qquad u(+\infty) = 1 \end{cases}$$

u représente une température réduite et l'on a : $u = 1-v$ où v est la concentration massique (réduite) du réactant. g(u) s'écrit $(1-u)f(u)$, où l'application f prend en compte le terme d'Arrhénius. c représente un flux massique, et, rappelons-le, est une *inconnue du problème.*

La nature des solutions de (0.1) dépend étroitement du comportement de g au voisinage de 0. Les lois de la cinétique chimique imposent que g vérifie en général : $g > 0$ sur $[0,1[$ $g(1) = 0$. Il est classique que, alors, comme $g(0) > 0$, (0.1) n'a pas de solution. Ce problème constitue la «difficulté de la frontière froide». On le contourne en modifiant le terme de réaction f. On suppose en général que :

$$\exists\, \theta \in]0,1[\qquad \forall\, x \in [0,\theta[\qquad g(x) = 0 \qquad \forall\, x \in]\theta,1[\qquad g(x) > 0$$

Le réel θ représente une température d'ignition et on démontre alors qu'il existe un unique couple (u,c) solution de (0.1) (à une translation de l'origine près pour u).

On va étudier ici, un second modèle où la fonction g vérifie :

$$g(0) = g(1) = 0\ , \qquad \forall\, x \in]0,1[\qquad g(x) > 0$$

On va donner pour ce modèle un résultat d'existence et d'unicité (très différent de celui obtenu pour le modèle de la température d'ignition). On précisera le lien entre les solutions obtenues dans ces deux modèles. On fera ensuite une étude asymptotique, pour un certain paramètre tendant vers 0. On étudiera enfin un problème analogue à (0.1) dans un intervalle borné $[-a,+a]$, ainsi que le passage à la limite $a \to +\infty$. Hormis le résultat d'existence et d'unicité déjà établi dans [6, 7, 10] (la démonstration ci-dessous est différente) et ceux relatifs au lien entre les deux modèles obtenus dans [7], tous ces résultats semblent nouveaux.

Principaux résultats

On considère en fait ici un problème plus général que (0.1). Plus précisément, on se donne une application g vérifiant :

$$(0.2)\quad \begin{cases} g : [0,1] \to \mathbb{R}\ , & g \text{ lipschitzienne sur } [0,1]\ , \\ g(0) = g(1) = 0\ , & \forall\, x \in\,]0,1[\quad g(x) > 0\ , \end{cases}$$

et une application k telle que :

$$(0.3)\qquad k \in \mathscr{C}^1([0,1], \mathbb{R}) \qquad \exists\, \alpha > 0 \qquad \forall\, x \in [0,1] \qquad k(x) \geqslant \alpha\ .$$

Pour $c \in \mathbb{R}$ fixé, on étudie le problème :

$$(0.4)\quad \begin{cases} \text{Trouver } u \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, [0,1]) \text{ telle que} \\ -(k(u)u')' + cu' = g(u) \text{ sur } \mathbb{R}, \\ u(-\infty) = 0 \qquad u(+\infty) = 1. \end{cases}$$

k représente un coefficient de diffusion non linéaire.

De nombreux auteurs (Aronson-Weinberger [1], Fife [6] , Johnson [7] , Uchiyama [10]) ont étudié le problème (0.4) avec $k \equiv 1$. Ils ont montré que $\exists\, c_0 > 0$ tel que (0.4) admet une solution u si et seulement si $c \geqslant c_0$. Fife [6] , Johnson [7] , Uchiyama [10] ont démontré l'unicité (à une translation de l'origine près) de u. Ces travaux utilisent (excepté celui de Johnson) des techniques de type plans de phase et imposent sur g des hypothèses plus restrictives que (0.2) et, de plus, non adaptées aux problèmes de combustion.

Dans la section 1, on propose une démonstration du résultat d'existence et d'unicité ci-dessus différente de celles dans [1, 6, 7, 10] . Elle utilise une méthode de «tir» et s'applique au problème (0.4) (avec un k général). Le résultat précis est le suivant :

THEOREME 1. *Il existe* $c_0 > 0$ *tel que le problème* (0.4) *admet une solution si et seulement si* $c \geqslant c_0$.

Pour tout $c \geqslant c_0$, *la solution du problème* (0.4) *est unique (à une translation de l'origine près). De plus,*

$$\sqrt{2\int_0^1 k(s)g(s)ds} < c_0 \leqslant 2\sqrt{\beta \sup_{x \in]0,1[} \frac{g(x)}{x}}\,,$$

où $\beta = \max\limits_{x \in [0,1]} k(x)$.

La section 2 fait le lien entre le modèle étudié et celui de la température d'ignition. Plus précisément, $\forall\, \theta \in]0,1[$, $\forall\, c \in \mathbb{R}$, on considère le problème :

$$(0.5)\quad \begin{cases} \text{Trouver } u : \mathbb{R} \to [0,1] & -(k(u)u')' + cu' = g(u)\chi_{[\theta,1]}(u) \\ & u(-\infty) = 0 \qquad u(+\infty) = 1 \end{cases}$$

où $\chi_{[\theta,1]}$ désigne la fonction caractéristique de l'intervalle $[\theta,1]$. Berestycki, Nicolaenko et Scheurer [3,4] , Johnson et Nachbar [8] ont montré que, $\forall\, \theta \in]0,1[$, il existe un unique $c(= c_\theta)$ tel que le problème (0.5) ait une solution. Cette solution est unique (à une translation de l'origine près) et l'on a : $c_\theta > 0$. $\forall\, \theta \in]0,1[$, $\forall\, z_o \in]0,1[$ fixé, on note u_θ l'unique solution de (0.5) telle que $u_\theta(0) = z_o$. On démontre le résultat suivant :

THEOREME 2. *(i)* *L'application :* $]0,1[\underset{\theta \to c_\theta}{\longrightarrow} \mathbb{R}^+$ *est strictement décroissante.*

(ii) $\lim\limits_{\theta \to 0} c_\theta = c_o$ (où $0 < c_o < +\infty$ *est défini dans le théorème 1).*

(iii) $u_\theta \underset{\theta \to 0}{\to} u_o$ *dans* $\mathscr{C}^o(\mathbb{R})$ (*et* $\mathscr{C}^1_{loc}(\mathbb{R})$) *où* u_o *est l'unique solution de (0.4) correspondant à* $c = c_o$ *et telle que* $u_o(0) = z_o$

Il est aisé de vérifier que les résultats (i) et (ii) peuvent être obtenus par la méthode de Johnson [7] . (iii) sera démontré dans la section 2.

Les section 3 et 4 sont consacrées à une étude asymptotique. La fonction g est supposée dépendre d'un paramètre $\epsilon > 0$, destiné à tendre vers 0 et qui représente l'inverse de l'énergie d'activation (réduite) de la réaction chimique. On note $g = g_\epsilon$ et on suppose que la famille $(g_\epsilon)_\epsilon$ vérifie les hypothèses suivantes :

- $\forall\, \epsilon > 0$, g_ϵ vérifie (0.2) .
- $\forall\, \epsilon > 0$, g_ϵ est dérivable en 0 et $g'_\epsilon(0) = 0$.
- il existe $(\theta_\epsilon)_\epsilon$ telle que : $\forall\, \epsilon \quad 0 < \theta_\epsilon < 1$, $\lim\limits_{\epsilon \to 0} \theta_\epsilon = 1$ et
$$\lim_{\epsilon \to 0} \left\{ \sup_{x \in]0,\theta_\epsilon]} \frac{g_\epsilon(x)}{x} \right\} = 0 .$$
- $$\lim_{\epsilon \to 0} \int_0^1 k(s)\, g_\epsilon(s) ds = m > 0 .$$

On sait (section 1) que $\forall\, \epsilon > 0$, $\exists\, c_o(\epsilon) > 0$ tel que l'équation :

$$(0.6)\quad \begin{cases} -(k(u_\epsilon)u'_\epsilon)' + cu'_\epsilon = g_\epsilon(u_\epsilon), \\ u_\epsilon \in \mathscr{C}^2(\mathrm{IR},[0,1]), \quad u_\epsilon(-\infty)=0, \quad u_\epsilon(+\infty)=1, \end{cases}$$

admet une solution si et seulement si $c \geqslant c_0(\epsilon)$. *Dans la section 3,* on s'intéresse au comportement asymptotique de $c_0(\epsilon)$ et de l'unique solution de (0.6) correspondant à $c = c_0(\epsilon)$ et telle que $u_\epsilon(0) = z_0$, où $z_0 \in]0,1[$ est fixé quelconque, que l'on note $u_{0,\epsilon}$. Notre résultat principal est le suivant :

THEOREME 3. $\lim\limits_{\epsilon\to 0} c_0(\epsilon) = \sqrt{2m} = c_0$.

De plus, $u_{0,\epsilon} \to u_{c_0}$ *dans* $\mathscr{C}^0(\mathrm{IR})$, *où* u_{c_0} *est déterminé de manière unique par :*

$$\begin{cases} u_{c_0} \in \mathscr{C}^0(\mathrm{IR},[0,1]) \\ u_{c_0}(x) = 1 \qquad \forall\, x \geqslant x_0 \\ u_{c_0} \in \mathscr{C}^1(]-\infty, x_0[, \mathrm{IR}) \quad -k(u_{c_0})u'_{c_0} + c_0 u_{c_0} = 0 \end{cases}$$

sur $]-\infty, x_0[$ *et* x_0 *est déterminé de manière unique par la condition* $u_{c_0}(0) = z_0$.

La démonstration rigoureuse du résultat précédent (section 3 ci-dessous) justifie donc les développements asymptotiques formels donnés dans[5,9] ; ce résultat est analogue à celui obtenu par Berestycki, Nicolaenko et Scheurer [3,4] dans l'étude asymptotique de l'(unique) solution du modèle de la température d'ignition.

Il est alors légitime d'étudier, pour $c > c_0$ fixé, le comportement asymptotique de l'unique solution de (0.6) telle que $u_\epsilon(0) = z_0$, où $z_0 \in]0,1[$ est fixé quelconque, que l'on note $u_{c,\epsilon}$. C'est ce qui fait l'objet de la *section 4* où on démontre le résultat suivant :

THEOREME 4. $u_{c,\epsilon} \xrightarrow[\epsilon\to 0]{} u_c$ *uniformément sur tout compact de* IR, *où* u_c *est déterminé de manière unique par :*

(i) *Si* $z_0 \in]0, 1 - \frac{c_0}{c}]$, $u_c \equiv z_0$ *sur* IR.

(ii) *Si* $z_0 \in]1 - \frac{c_0}{c}, 1[$,

$$\begin{cases} u_c \in \mathscr{C}^0(\mathrm{IR},[0,1]) \quad u_c(x) = 1 \qquad \forall\, x \geqslant x_c \\ u_c \in \mathscr{C}^1(]-\infty, x_c[, \mathrm{IR}) \end{cases}$$

et x_c est déterminé de manière unique par la condition $u_c(0) = z_0$ (donc $u_c(-\infty) = 1 - \frac{c_0}{c}$) ; dans ce cas, on a, de plus, $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$, $u_{c,\epsilon} \underset{\epsilon \to 0}{\to} u_c$ dans $\mathscr{C}^0([\alpha, +\infty[\,)$.

Ce résultat est une illustration des difficultés que l'on rencontre quand on n'introduit pas de température d'ignition, ainsi que du rôle très particulier que joue c_0, (qui est le plus petit c tel que le problème admette une solution, voir théorème 1) :

1) L'absence de température d'ignition entraîne l'existence d'une infinité de solutions. Le comportement asymptotique de ces solutions, excepté l'une d'entre elles, n'est pas «physique» : on peut l'interpréter en disant qu'on peut «remonter» jusqu'à $-\infty$ sans jamais rencontrer de gaz frais.

2) c_0 est la seule valeur telle que la solution correspondante (notée u_0) ait le comportement asymptotique attendu. De plus, (u_0 , c_0) peut être obtenu comme la limite, quand la température d'ignition tend vers 0, de la solution (unique) du modèle de la température d'ignition.

La valeur c_0 est également privilégiée du point de vue d'une approximation numérique éventuelle, comme le montre *la section 5,* qui est consacrée à l'étude d'un problème analogue à (0.4) dans un intervalle borné et de la convergence d'une solution de ce nouveau problème vers une solution de (0.4). Plus précisément, on se donne g et k vérifiant respectivement (0.2) et (0.3). Pour $a > 0$, soit $I_a = [-a,+a]$, on considère le problème :

$$(0.7)\quad \begin{cases} \text{Trouver } u \in \mathscr{C}^2(I_a, [0,1]) \text{ et } c > 0 \text{ tels que} \\ -(k(u)u')' + cu' = g(u) \text{ sur } I_a \\ -k(u(-a))u'(-a) + cu(-a) = 0 \qquad u(0) = \frac{1}{2}, \quad u(a) = 1. \end{cases}$$

Notre résultat principal est le suivant :

THEOREME 5. *Pour tout $a > 0$, il existe une unique solution (u_a, c_a) de (0.7) et l'on a : $0 < u_a < 1$ $\quad u_a$ est strictement croissante. De plus :*

$$\lim_{a \to +\infty} c_a = c_0$$

et

$$\lim_{a \to +\infty} u_a = u_0 \textit{ dans } \mathscr{C}^0(\mathbb{R}) \textit{ (et } \mathscr{C}^1_{loc}(\mathbb{R}))$$

où u_a a été prolongé à $\mathbb{R}$ en posant $u_a(x) = 1$, $\forall\, x \geqslant a$ et $u_a(x) = u_a(-a)$, $\forall\, x \leqslant -a$ et où u_0 est la solution de (0.4) correspondant à $c = c_0$ et telle que $u_0(0) = \frac{1}{2}$.

La valeur $\frac{1}{2}$ ne joue aucun rôle particulier dans ce résultat : on aurait pu choisir $u(0) = z_o$, $z_o \in]0,1[$ fixé quelconque. Insistons sur le fait que, ici, contrairement à ce qui se passe pour le problème posé sur IR, le fait d'imposer la condition $u(0) = \frac{1}{2}$ entraîne l'unicité d'une solution de (0.7).

Du point de vue numérique, la «seule» solution du problème sur IR est celle correspondant à c_o .

Remarque. L'étude de ce modèle de flamme dans le cas d'un nombre de Lewis quelconque fera l'objet d'une publication ultérieure.

1. - RESULTAT D'EXISTENCE ET D'UNICITE

Donnons-nous g et k vérifiant respectivement (0.2) et (0.3). Notre but, ici, est la démonstration du théorème 1 (voir l'introduction).

Commençons par établir quelques résultats préliminaires et des lemmes techniques qui seront utiles dans plusieurs sections.

LEMME 1.1. *Supposons que* c *est tel que (0.4) ait une solution* u. *Alors :*

$$c > 0 \ , \qquad 0 < u < 1 \ , \qquad u \textit{ est monotone croissante} ,$$

$$u' > 0 \ , \qquad \lim_{x \to \pm\infty} u'(x) = 0 \ .$$

Preuve. Ceci se démontre aisément (voir par exemple Berestycki, Nicolaenko et Scheurer [4]).

On supposera désormais $c > 0$.

LEMME 1.2. *On suppose qu'il existe* $-\infty \leqslant x_o < x_1 \leqslant +\infty$ *et* $u \in \mathscr{C}^2(]x_o,x_1[\,,[0,1])$ *tels que :*

$$\begin{cases} -(k(u)u')' + cu' = g(u) \quad \textit{sur }]x_o,x_1[\ , \\ \forall\, x \in]x_o,x_1[\quad u'(x) > 0 \ , \qquad u'(x_i) = \lim\limits_{x \to x_i} u'(x) \end{cases}$$

existe pour $i = 0,1$ $(\in \mathrm{IR})$ *notons* $u(x_i) = \lim\limits_{x \to x_i} u(x)$, $i = 0,1$.

Alors $\forall$ a, b , $x_0 \leqslant a < b \leqslant x_1$, *on a :*

(1.1) $$-k(u(b))u'(b) + k(u(a))u'(a) + c(u(b) - u(a)) = \int_a^b g(u)\,dx.$$

(1.2) $$-[k(u)uu']_{x=a}^{x=b} + \int_a^b k(u)u'^2\,dx + \frac{c}{2}\,[u^2]_{x=a}^{x=b} = \int_a^b g(u)u\,dx.$$

(1.3) $$-\frac{1}{2}\,[k(u)^2\,u'^2]_{x=a}^{x=b} + c\int_a^b k(u)u'^2\,dx = \int_{u(a)}^{u(b)} k(s)\,g(s)\,ds.$$

Remarquons que (1.1) et (1.2) ne nécessitent pas $u' > 0$.

Preuve. Pour $x_0 < a < b < x_1$, ces relations s'obtiennent en multipliant successivement l'équation satisfaite par u, par 1, u, $k(u)u'$ et en intégrant sur [a,b]. Il est alors possible de faire tendre a vers x_0 et b vers x_1 dans les relations ainsi obtenues. □

Remarque 1.3. Les trois relations du lemme 1.2 ((1.1), (1.2) et (1.3)) seront notamment utilisées de la manière suivante : sous les hypothèses du lemme 1.2, soient $x_0 \leqslant a < b \leqslant x_1$, remarquant que $\int_a^b g(u)u\,dx < \int_a^b g(u)dx$, (1.1) et (1.2) fournissent une majoration de $\int_a^b k(u)u'^2\,dx$ que l'on reportera dans (1.3). Sachant que $c > 0$, cela fournit une inégalité qui nous sera utile plusieurs fois.

COROLLAIRE 1.4. *Si* $c \leqslant \sqrt{2\int_0^1 k(s)g(s)ds}$, (0.4) *n'a pas de solution.*

Preuve. Supposons que c est tel que (0.4) admet une solution. On peut alors (lemme 1.1) écrire (1.1), (1.2) et (1.3) avec $a = -\infty$ et $b = +\infty$. La méthode de la remarque 1.3 fournit alors l'inégalité :

$$c > \sqrt{2\int_0^1 k(s)\,g(s)\,ds}$$ □

Soient c_1 et c_2 tels que $0 < c_1 \leqslant c_2$. Supposons que, pour i = 1,2, il existe a_i, b_i $-\infty < a_i < b_i \leqslant +\infty$ et une application $u_i \in \mathscr{C}^2([a_i,b_i[\,,[0,1])$ telle que

$$\begin{cases} -(k(u_i)u_i')' + c_iu_i' = g(u_i) \text{ sur } [a_i,b_i[, \\ \forall\, x \in [a_i,b_i[\quad u_i'(x) > 0\,, \qquad u_i'(b_i) = \lim\limits_{x \to b_i} u_i'(x) \in \mathbb{R} \text{ existe.} \end{cases}$$

Notons $u_i(b_i) = \lim\limits_{x \to b_i} u_i(x)$.

On peut alors définir $h_i \in \mathscr{C}([u_i(a_i),u_i(b_i)]) \cap \mathscr{C}^1([u_i(a_i),u_i(b_i)[)$ telle que :

$$(1.4)\quad \begin{cases} \forall\, s \in [u_i(a_i),u_i(b_i)[,\ h_i(s) = k(s)u_i'(u_i^{-1}(s)) \text{ et } \dfrac{d}{ds}h_i(s) = c_i - \dfrac{g(s)k(s)}{h_i(s)}, \\ h_i(u_i(b_i)) = u_i'(b_i)k(u_i(b_i)) . \end{cases}$$

On note $\underline{s} = \sup(u_1(a_1),u_2(a_2))$, $\bar{s} = \inf(u_1(b_1),u_2(b_2))$ et on suppose $\underline{s} < \bar{s}$. On se propose de «comparer» h_1 et h_2 sur $[\underline{s},\bar{s}]$.

LEMME 1.5. *Sous les hypothèses ci-dessus :*

(a) Supposons $c_1 = c_2$.

(i) *Si* $\exists\, s_0 \in [\underline{s},\bar{s}]$ $h_1(s_0) = h_2(s_0)$, *alors* $\forall\, s \in [\underline{s},\bar{s}]$ $h_1(s) = h_2(s)$

(ii) *Si* $\exists\, s_0 \in [\underline{s},s[$ $h_1(s_0) < h_2(s_0)$, *alors* $\forall\, s \in [s,s[$ $h_1(s) < h_2(s)$

(b) Supposons $c_1 < c_2$.

(i) *Si* $\exists\, s_0 \in]\underline{s},\bar{s}]$ $h_2(s_0) \leqslant h_1(s_0)$, *alors,* $\forall\, s \in [\underline{s},s_0[$, $h_2(s) < h_1(s)$

(ii) *Si* $\exists\, s_0 \in [\underline{s},\bar{s}[$ $h_2(s_0) \geqslant h_1(s_0)$, *alors,* $\forall\, s \in]s_0,\bar{s}[$, $h_1(s) < h_2(s)$

La démonstration du lemme 1.5 utilise uniquement le fait que

$$\begin{cases} h_i \in \mathscr{C}([\underline{s},\bar{s}]) \cap \mathscr{C}^1([\underline{s},\bar{s}[), \\ \forall\, s \in [\underline{s},\bar{s}[\quad h_i(s) > 0 \quad \dfrac{d}{ds}h_i(s) = c_i - \dfrac{g(s)k(s)}{h_i(s)} . \end{cases}$$

Le lemme 1.5 exprime donc en fait des «propriétés de monotonie par rapport aux c_i» d'applications h_i qui vérifient de telles hypothèses.

Preuve. Montrons à titre d'exemple (b). Remarquons que si $\exists\, s \in [\underline{s},\bar{s}[$ tel que $h_1(s) = h_2(s)$, alors $h_1'(s) < h_2'(s)$. Cette propriété permet de démontrer aisément (ii). Raisonnons par l'absurde pour montrer (i). Si $\exists\, s_1 \in [\underline{s},s_0[$ tel que $h_2(s_1) \geqslant h_1(s_1)$ alors (ii) $\Rightarrow \forall\, s \in]s_1,s_0[$, $h_1(s) < h_2(s)$. Donc $\forall\, s \in]s_1,s_0[$ $h_1'(s) < h_2'(s)$. D'où $h_1(s_0) < h_2(s_0)$. Ce qui est impossible. □

Il est commode, pour la suite, d'introduire $\overline{\mathbb{R}}$ muni de sa relation d'ordre et de sa topologie usuelles.

COROLLAIRE 1.6. *On fait les hypothèses du lemme 1.5. On suppose de plus que :*

$$u_1(a_1) = u_2(a_2),\ u_1(b_1) = u_2(b_2),$$

$$\sup(a_1,a_2) < \inf(b_1,b_2),$$

on suppose enfin que $\exists\ x_o \in]\sup(a_1,a_2),\ \inf(b_1,b_2)[$ *tel que* $u_1(x_o) = u_2(x_o)\ (= s_o)$. *Alors,*

(a) Si $c_1 = c_2$ *et* $u'_1(x_o) < u'_2(x_o)$. *Alors,*

$$b_2 \leqslant b_1 \quad et \quad \forall\ x \in]x_o,b_2[,\ u_1(x) < u_2(x),$$

$$a_1 < a_2 \quad et \quad \forall\ x \in [a_2,x_o[\ ,\ u_1(x) > u_2(x)\ ,$$

(b) Si $c_1 < c_2$,

(i) $u'_2(x_o) \geqslant u'_1(x_o) \Rightarrow b_2 \leqslant b_1 \quad et \quad \forall\ x \in]x_o,b_2[\quad u_2(x) > u_1(x).$

(ii) $u'_2(x_o) \leqslant u'_1(x_o) \Rightarrow a_2 < a_1 \quad et \quad \forall\ x \in [a_1,x_o[\quad u_2(x) > u_1(x).$

Preuve. Montrons à titre d'exemple (b) (i). D'après le lemme 1.5, $\forall\ s \in]s_o,\bar{s}[\ ,\ h_1(s) < h_2(s)$. Donc, vue la définition des h_i , $\forall\ s \in]s_o,\bar{s}[\ ,\ (u_2^{-1}(s))' < (u_1^{-1}(s))' \Rightarrow \forall\ s \in]s_o,\bar{s}[\ u_2^{-1}(s) < u_1^{-1}(s)$. Or $u_i^{-1} \in \mathscr{C}([s_o,\bar{s}]\ ,\ [x_o,b_i]\ )$. Donc : $u_2^{-1}(\bar{s}) \leqslant u_1^{-1}(\bar{s})$, soit $b_2 \leqslant b_1$. On montre enfin aisément que $\forall\ x \in]x_o,b_2[\ ,\ u_2(x) > u_1(x)$. □

Remarque 1.7. Dans le lemme 1.5 et le corollaire 1.6, on a fait sur les u_i des hypothèses pour des intervalles de la forme $[a_i,b_i[$. On obtiendrait évidemment des résultats analogues avec des intervalles de la forme $]a_i,b_i]$ ou $[a_i,b_i]$, sous les hypothèses appropriées à chaque cas. (On notera toutefois que, dans le cas $]a_i,b_i]$, faire des hypothèses en $s_o = \underline{s}$ ne permet pas de conclure).

Ces résultats préliminaires démontrés, la suite de la démonstration du théorème 1 comportera deux parties. Commençons par prolonger g et k à IR en posant :

$$g(x) = 0 \qquad \forall\ x \in \mathbb{R} \setminus [0,1]$$

$$k(x) = k(0) \qquad \forall\ x \leqslant 0 \quad k(x) = k(1) \qquad \forall\ x \geqslant 1.$$

Pour $c > 0$ et $\lambda > 0$, on considère l'équation différentielle (où on ne cherche plus u à valeurs dans $[0,1]$)

$$(1.5) \quad \begin{cases} -(k(u)u')' + cu' = g(u) \text{ sur } \mathbb{R} \\ u(0) = \dfrac{1}{2}\ , \\ u'(0) = \lambda\ . \end{cases}$$

On sait qu'il existe une unique solution de (1.5) définie sur un intervalle de temps maximal, notée u. *Dans une première étape, on s'intéresse à la restriction de* u *à* $\{x \geqslant 0 \mid u(x)$ *est défini* $\}$, que l'on note encore u, et on étudie, pour c fixé, s'il existe des valeurs de λ telles que la solution de (1.5) puisse être la restriction à $\mathbb{R}^+$ d'une solution de (0.4). Le résultat principal est le suivant :

PROPOSITION 1.8. *Soit* $c > 0$ *fixé. Pour tout* $\lambda > 0$, *la solution de (1.5) est définie sur* $\mathbb{R}_+$. *Il existe un unique* $\lambda = \lambda(c) > 0$ *tel que la solution de (1.5) vérifie* $u(+\infty) = 1$. *Notons* u_c *la solution correspondante. On a de plus :*

- $c_1 < c_2 \Rightarrow \lambda(c_2) < \lambda(c_1)$
- $\forall x \in \mathbb{R} \quad u_c'(x) > 0 \qquad \frac{1}{2} < u_c(x) < 1.$

La démonstration de la proposition 1.8 repose sur une méthode de «tir» analogue à celle de Berestycki, Lions et Peletier [2] et de Berestycki, Nicolaenko et Scheurer [3,4] et sur l'utilisation du lemme 1.5.

LEMME 1.9. *Pour* $c > 0$ *et* $\lambda > 0$ *fixés, soit* u *la solution de (1.5)*

(i) *Si* $\exists\, x_1 > 0$ *tel que* $u(x_1) = 1$, *alors* $u' > 0$ *pour* $x \geqslant x_1$

(ii) *Si* $\exists\, x_1 > 0$ *tel que* $u(x_1) = \frac{1}{2}$, *alors* $u' < 0$ *pour* $x \geqslant x_1$.

Preuve. Elle est aisée et utilise surtout (1.1). Voir [4].

COROLLAIRE 1.10. *(i)* $\forall \lambda > 0$, *la solution de (1.5) est définie sur* $\mathbb{R}_+$

(ii) *Supposons que* $\exists\, x_0 > 0$, $u'(x_0) = 0$ *pour un certain* (c,λ) *alors :*

$$\frac{1}{2} < u(x_0) < 1 \qquad \exists\, x_1 > x_0 \qquad u(x_1) = \frac{1}{2}$$

Preuve. Voir [4].

LEMME 1.11. *Pour tout* c, *il existe au plus un* $\lambda > 0$ *tel que la solution* u *de (1.5) vérifie* $u(+\infty) = 1$. *On le notera, quand il existe,* $\lambda(c)$ *et on notera* u_c *la solution correspondante de (1.5). Alors :*

$$\forall x > 0 \quad u_c'(x) > 0 \quad \frac{1}{2} < u_c(x) < 1.$$

De plus, si $c_1 < c_2$ *sont tels que* $\lambda(c_1)$ *et* $\lambda(c_2)$ *existent, on a :*

$$\lambda(c_2) < \lambda(c_1)$$

Preuve. Soient (c_i,λ_i), $i = 1,2$, tels que la solution u_i de (1.5) associée à (c_i,λ_i) vérifie $u_i(+\infty) = 1$. D'après le lemme 1.9 et le corollaire 1.10, on a :

$$\forall\, x > 0 \qquad u_i'(x) > 0 \qquad \frac{1}{2} < u_i(x) < 1.$$

De plus, en intégrant l'équation, il vient que $u_i'(+\infty) = 0$.

On définit alors h_i par (1.4) : $h_i \in \mathscr{C}([\frac{1}{2}, 1]) \cap \mathscr{C}^1([\frac{1}{2}, 1[) \quad h_i(1) = 0$.

. Supposons $c_1 = c_2 = c$. Comme $h_1(1) = h_2(1)$, le lemme 1.5 (a) entraîne que $\forall\, s \in [\frac{1}{2}, 1]$, $h_1(s) = h_2(s)$. En particulier $h_1(\frac{1}{2}) = \lambda_1 = h_1(\frac{1}{2}) = \lambda_2$, ce qui prouve qu'il existe au plus un $\lambda > 0$, tel que la solution u de (1.5) vérifie $u(+\infty) = 1$.

. Supposons $c_1 < c_2$. Utilisant à nouveau le lemme 1.5, on obtient :

$$\lambda(c_2) = h_2(\frac{1}{2}) < h_1(\frac{1}{2}) = \lambda(c_1)$$ □

Pour c fixé, définissons :

$$\text{(1.6)} \qquad \begin{aligned} \Gamma_+(c) &= \{\lambda > 0 \mid \exists\, x_1 > 0, \quad u_\lambda(x_1) = 1\} \\ \Gamma_-(c) &= \{\lambda > 0 \mid \exists\, x_1 > 0, \quad u_\lambda(x_1) = \frac{1}{2}\} \end{aligned}$$

où u_λ désigne la solution de (1.5) correspondant à λ.

LEMME 1.12. $\Gamma_+(c)$ *et* $\Gamma_-(c)$ *sont deux ouverts disjoints de* $\mathbb{R}^{+*}$.

Preuve. Elle est aisée et laissée au lecteur (voir par exemple [2]).

LEMME 1.13. *(i) Soit* c *tel que* $\Gamma_+(c) \neq \emptyset$ *et* $\Gamma_-(c) \neq \emptyset$. *Alors* $\exists\, \lambda > 0$ *tel que* $u_\lambda(+\infty) = 1$ ($\lambda = \lambda(c)$ *avec les notations introduites)*

(ii) Supposons que c *soit tel que* $\lambda(c)$ *existe. Alors :*

$$\Gamma_-(c) =]0,\lambda(c)[\quad \Gamma_+(c) =]\lambda(c), +\infty[\,.$$

Preuve. Démonstration de (i) : $\Gamma_+(c)$ et $\Gamma_-(c)$ étant deux ouverts disjoints non vides, $\exists\, \lambda > 0$ $\lambda \notin \Gamma_+(c) \cup \Gamma_-(c)$. On a alors : $\forall\, x > 0 \quad u_\lambda'(x) > 0 \quad \frac{1}{2} < u_\lambda(x) < 1$. Donc $\ell = \lim_{x \to +\infty} u_\lambda(x)$ existe et $\frac{1}{2} < \ell \leqslant 1$. En intégrant l'équation, il vient que $\lim_{x \to +\infty} u_\lambda'(x)$ existe et donc vaut 0. Donc, utilisant l'équation, $\lim_{x \to +\infty} u_\lambda''(x) = -\dfrac{g(\ell)}{k(\ell)} = 0 \Rightarrow \ell = 1$.

Démonstration de (ii) : On démontre aisément que $\Gamma_-(c) =]0,\lambda(c)[$ (resp. $\Gamma_+(c) =]\lambda(c),+\infty[$) en raisonnant par l'absurde et en utilisant le corollaire 1.6 (resp. le lemme 1.5). □

Le but dans ce qui suit est de montrer que $\forall$ c, $\Gamma_+(c) \neq \emptyset$ et $\Gamma_-(c) \neq \emptyset$. La proposition 1.8 sera alors démontrée.

LEMME 1.14. $\forall$ c, $\Gamma_+(c) \neq \emptyset$.

Plus précisément, $[\lambda_+, +\infty[\subset \Gamma_+(c)$, *où*

$$\lambda_+ = \frac{1}{k(\frac{1}{2})} \sqrt{2 \int_{\frac{1}{2}}^{1} k(s)g(s)ds}$$

Preuve. Soit $\lambda \geqslant \lambda_+$; supposons que $\lambda \notin \Gamma_+(c)$, c'est-à-dire : $\forall$ x > 0, $u_\lambda(x) < 1$. Alors soit $\exists x_0 > 0 \quad u'_\lambda(x_0) = 0$ et $\forall x \in [0,x_0[\ u'_\lambda(x) > 0$, soit $\forall x > 0 \quad u'_\lambda(x) > 0$.

Dans le premier cas, en faisant a = 0 et b = x_0 dans (1.3), on obtient

$$\frac{1}{2}\, k(\frac{1}{2})^2 \lambda^2 + c \int_0^{x_0} k(u_\lambda)u_\lambda'^2\, dx = \int_{\frac{1}{2}}^{u_\lambda(x_0)} k(s)g(s)ds$$

d'où $\lambda < \lambda_+$ ce qui est impossible.

Dans le deuxième cas, $\ell = \lim\limits_{x \to +\infty} u_\lambda(x)$ existe avec $\frac{1}{2} < \ell \leqslant 1$, $\lim\limits_{x \to +\infty} u'_\lambda(x) = 0$ et en prenant a = 0 et b = $+\infty$ dans (1.3) il vient :

$$\frac{1}{2} k(\frac{1}{2})^2 \lambda^2 + c \int_0^{+\infty} k(u_\lambda)u_\lambda'^2\, dx = \int_{\frac{1}{2}}^{\ell} k(s)g(s)ds,$$

d'où $\lambda < \lambda_+$. □

LEMME 1.15. *(i)* $\forall\, c < \sqrt{8 \int_{\frac{1}{2}}^{1} k(s)g(s)ds}$, $\Gamma_-(c) \neq \emptyset$

(ii) $c_2 > c_1 \Rightarrow \Gamma_-(c_2) \subset \Gamma_-(c_1)$

Preuve. (i) Notons $\delta = \int_{\frac{1}{2}}^{1} k(s)g(s)ds$. Soit $c < \sqrt{8\delta}$. Montrons que $\Gamma_-(c) \neq \emptyset$. Soit $\lambda \notin \Gamma_-(c)$.

Alors ou bien $\lambda \in \Gamma_+(c)$, c'est-à-dire $\exists\, \bar{x} \quad u_\lambda(\bar{x}) = 1$, ou bien $\lambda \notin \Gamma_+(c)$ et d'après le lemme 1.13 (i) en posant $\bar{x} = +\infty$, on a dans tous les cas : $\exists\, \bar{x} \in]0,+\infty] \quad u'_\lambda > 0$ sur $[0,\bar{x}[\quad u_\lambda(\bar{x}) = 1$ $u'_\lambda(x) \geqslant 0$.

On écrit (1.1), (1.2), (1.3) pour a = 0 et b = $\bar{x}$. Utilisant alors la méthode de la remarque 1.3, on obtient l'inégalité :

$$(\lambda\, k(\frac{1}{2}))^2 + c(\lambda k(\frac{1}{2})) + \frac{c^2}{4} - 2\delta > 0,$$

ce qui implique, puisque $\lambda k(\frac{1}{2}) > 0$, $\lambda > \frac{1}{k(\frac{1}{2})} \; \frac{-c+\sqrt{8\delta}}{2}$. Donc :

$$\left]0, \frac{1}{k(\frac{1}{2})} \; \frac{-c+\sqrt{8\delta}}{2}\right] \subset \Gamma\_(c).$$

Démonstration de (ii). Raisonnons par l'absurde : supposons que $\exists\ \lambda \in \Gamma\_(c_2)$ tel que $\lambda \notin \Gamma\_(c_1)$. Notons u_i , $i = 1,2$, la solution correspondant à (c_i,λ). On vient de voir ci-dessus que $\lambda \in \Gamma\_(c_1)$ entraîne :

$$\exists\ x_1 \in]0,+\infty] \qquad u'_1 > 0 \ \text{ sur } [0,x_1[\qquad u_1(x_1) = 1 \qquad u'_1(x_1) \geqslant 0.$$

D'autre part, $\lambda \in \Gamma\_(c_2) \Rightarrow \exists\ x_2, \quad \forall\ x \in [0,x_2[\ ,\ u'_2(x) > 0$ et $u'_2(x_2) = 0$; $\frac{1}{2} < u_2(x_2) < 1$.

Notons $s_2 = u_2(x_2)$. On fait alors correspondre à u_i, h_i par (1.4) pour $i = 1,2$ et $\underline{s} = \frac{1}{2}$ $\bar{s} = s_2$. On a $h_2(\frac{1}{2}) = h_1(\frac{1}{2})$ et $h_2(s_2) = 0 < h_1(s_2)$. Ce qui est impossible. □

LEMME 1.16. $\forall\ c \quad \Gamma\_(c) \neq \emptyset$.

Preuve. Raisonnons par l'absurde : supposons que $\exists\ c_1 > 0 \quad \Gamma\_(c_1) = \emptyset$. Considérons $E = \{c \mid \Gamma\_(c) \neq \emptyset\}$. C'est d'après le lemme 1.15 un intervalle de la forme $]0,c_2)$ avec $0 < c_2 < c_1$.

En utilisant la continuité d'une solution de (1.5) par rapport à c, il est aisé de voir que E est ouvert.

D'autre part pour tout $c < c_2$, le couple $(\lambda(c),u_c)$ est bien défini. En prenant $a = 0$ et $b = +\infty$ dans (1.3), il vient :

$$\frac{1}{2}k(\frac{1}{2})^2\ \lambda(c)^2 + c \int_0^{+\infty} k(u_c)u'^2_c\,dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 k(s)g(s)ds$$

donc, sachant que $\forall\ x \quad k(x) \geqslant \alpha > 0$, il en résulte que $\int_0^{+\infty} u'^2_c(x)dx$ est borné indépendamment de c, pourvu que $c \geqslant \epsilon > 0$. Donc, en tenant compte de l'équation, on a que u_c est borné indépendamment de $c \geqslant \epsilon$ dans $H^2_{loc}(IR)$. On en déduit aisément que :

$$\exists\, u_2 \in \mathscr{C}^2(\mathrm{IR},\mathrm{IR}) \quad \begin{cases} -(k(u_2)u_2')' + c_2u_2' = g(u_2) \text{ sur } \mathrm{IR}^+ \\ u_2(0) = \frac{1}{2}, \quad \forall\, x \in \mathrm{IR}^+ \quad u_2'(x) \geqslant 0 \\ \frac{1}{2} \leqslant u_2(x) \leqslant 1 \end{cases}$$

et on a alors :

$$\lim_{x \to +\infty} u_2(x) = 1, \quad \forall\, x \geqslant 0 \qquad u_2'(x) > 0.$$

c_2 est donc tel que $\lambda(c_2)$ existe, ce qui implique (lemme 1.13) $c_2 \in E$, or ceci est impossible car E est ouvert. □

La proposition 1.8 est démontrée. On va maintenant étudier pour quels c, l'application u_c (définie par la proposition 1.8) est solution de (0.4). Remarquons en effet qu'il est évident que, si (0,É) admet une solution u vérifiant $u(0) = \frac{1}{2}$, alors, nécessairement, $u_c = u$. On va achever la démonstration du théorème 1 en prouvant :

PROPOSITION 1.17. $\exists\, c_o > 0$ *tel que (0.4) a une solution si et seulement si* $c \geqslant c_o$. *De plus,*

$$c_o \leqslant 2\sqrt{\beta \sup_{x \in]0,1[} \frac{g(x)}{x}}$$

LEMME 1.18. $\forall\, x < 0 \qquad u_c'(x) > 0.$

Preuve. Commençons par montrer que $\forall\, x < 0 \quad u_c'(x) \geqslant 0$. Sinon, $\exists\, x < 0 \quad u_c'(x) < 0$ et $\exists\, x' \in]x,0[\quad u_c'(x') = 0$ et $u_c(x') < u_c(x)$. Ecrivant (1.1) avec a = x et b = x', il en résulte une contradiction. Supposons maintenant que $\exists\, x < 0 \quad u_c'(x) = 0$ alors ou bien $0 < u_c(x) < \frac{1}{2}$ ou bien $u_c(x) \leqslant 0$. Dans le premier cas, d'après l'équation, $u_c''(x) < 0$ donc $u_c' < 0$ dans un voisinage à droite de x, ce qui est impossible. Dans le deuxième cas, on aurait u_c = constante ce qui est impossible. □

Remarque 1.19. Le lemme 1.18 prouve que :

. soit $\forall\, x < 0 \quad u_c(x) > 0$. Il est alors aisé de montrer que u_c est solution de (0.4) et que $\lim_{x \to -\infty} u_c'(x) = 0$. Posons dans ce cas $\underline{x} = -\infty$.

. soit $\exists\, !\, \underline{x} < 0$ tel que $u_c(\underline{x}) = 0$.

Dans tous les cas, $\exists\, !\, \underline{x} \in [-\infty,0[$, $u_c(\underline{x}) = 0$ et u_c est une bijection continue de $[\underline{x},0]$ sur $[0,\frac{1}{2}]$. On a alors : u_c solution de (0.4) $\Longleftrightarrow u_c^{-1}(0) = -\infty$.

LEMME 1.20. *(i) Si c_1 est tel que l'équation (0.4) associée à c_1 a une solution, alors $\forall c_2 > c_1$, l'équation (0.4) associée à c_2 a une solution.*

(ii) $\forall c \geq 2\sqrt{\beta \sup_{x \in]0,1[} \frac{g(x)}{x}}$, *l'équation (0.4) a une solution.*

Preuve. Démonstration de (i) : On sait (proposition 1.8) que $u'_{c_2}(0) = \lambda(c_2) < u'_{c_1}(0) = \lambda(c_1)$. Le corollaire 1.6 prouve donc (vue la remarque 1.19) que :

$$u_{c_2}^{-1}(0) \leq u_{c_1}^{-1}(0) = -\infty$$

Démonstration de (ii) : Pour tout $c > 0$, on peut associer à u_c une application h_c par (1.4) qui vérifie donc :

$$(1.7) \quad \begin{cases} h_c \in \mathscr{C}([0,1]) \cap \mathscr{C}^1(]0,1[) \\ h_c(1) = 0 \qquad h_c(0) = k(0)u'_c(\underline{x}) \\ \forall s \in]0,1[\quad h_c(s) = k(s)\ u'_c(u_c^{-1}(s)) \ \text{et} \ \dfrac{d}{ds}\ h_c(s) = c - \dfrac{g(s)k(s)}{h_c(s)} \end{cases}$$

Soit maintenant $c \geq 2\sqrt{\beta \sup_{x \in]0,1[} \frac{g(x)}{x}}$. Notons $\sigma = \sup_{x \in]0,1[} \frac{g(x)}{x}$ et soit r une des deux racines > 0 de $X^2 - cX + \sigma\beta$. L'application $v(s) = rs$ vérifie l'équation différentielle : $\frac{d}{ds}\ v(s) = c - \frac{\sigma\beta s}{v(s)}$. D'autre part, h_c vérifie :

$$\forall s \in]0,1[\ \frac{d}{ds} h_c(s) \geq c - \frac{\sigma\beta s}{h_c(s)}.$$

Il en résulte que :

$$\text{si } \exists s_0 \in]0,1[\text{ tel que } h_c(s_0) > v(s_0) \text{ alors } \forall s \in [s_0,1] \quad h_c(s) > v(s).$$

Or $h_c(1) = 0 < v(1) = r$. Donc $\forall s \in]0,1[\ h_c(s) \leq v(s)$. C'est-à-dire :

$$\forall s \in]0,1[\ \ k(s)u'_c(u_c^{-1}(s)) \leq rs.$$

Ce qui est équivalent à, $\forall x \in]\underline{x}, +\infty[$, $k(u_c(x))u'_c(x) \leq r\, u_c(x)$. On a donc en particulier :

$$\forall x \in]\underline{x}, +\infty[\,, \ \ u'_c(x) \leq \frac{r}{\alpha}\, u_c(x).$$

Intégrant cette inégalité sur $[x,0]$, il vient : $\forall x \in]\underline{x},0]$ $u_c(x) \geq u_c(0)\, e^{rx/\alpha}$. Ceci entraîne que nécessairement, $\underline{x} = -\infty$.

□

LEMME 1.21. $\exists\, c_o > 0$ $\begin{cases} \forall\, c \geqslant c_o\,, & \textit{(0.4) a une solution} \\ \forall\, c < c_o\,, & \textit{(0.4) n'a pas de solution.} \end{cases}$

Preuve. D'après le lemme 1.20, $\exists\, c_o \geqslant 0$ tel que :

$$\begin{cases} \forall\, c > c_o & \text{(0.4) a une solution} \\ \forall\, c < c_o & \text{(0.4) n'a pas de solution.} \end{cases}$$

On a de plus $c_o > 0$ (corollaire 1.4). Reste à montrer que pour $c = c_o$, (0.4) a une solution. Ceci va être obtenu en considérant les applications u_c pour $c > c_o$. Le fait que l'on ait $c_o > 0$ permet d'obtenir pour u_c des estimations a priori indépendantes de $c > c_o$ dans $H^2_{loc}(\mathbb{R})$. On peut alors extraire de $(u_c)_{c > c_o}$ une suite convergeant dans $\mathscr{C}^1_{loc}(\mathbb{R})$ vers une solution de l'équation (0.4) correspondant à c_o . Voir le lemme 1.16 pour un raisonnement analogue. □

Remarque 1.22. La démonstration du théorème 1 est achevée. La valeur $\frac{1}{2}$ qui intervient dans la formulation du problème (1.5) n'a joué aucun rôle particulier dans cette démonstration. On aurait pu choisir $u(0) = \gamma$, $\gamma \in\,]0,1[$ fixé arbitrairement.

Remarque 1.23. Il résulte de la démonstration du théorème 1 que

$$c \text{ est tel que (0.4) a une solution} \iff h_c(0) = 0 \ (\iff c \geqslant c_o)$$

où h_c est défini par (1.7). On montre de plus facilement (voir le lemme 1.5) que h_c est l'unique solution du problème :

$$\begin{cases} \text{Trouver } h \in \mathscr{C}([0,1]) \cap \mathscr{C}^1(]0,1[) \text{ telle que} \\ \forall\, s \in\,]0,1[\quad h(s) > 0 \quad \text{et} \quad \dfrac{d}{ds} h(s) = c - \dfrac{g(s)k(s)}{h(s)} \qquad h(1) = 0 \end{cases}$$

et que si $0 < c_1 < c_2$, $\forall\, s \in\,]0,1[\quad h_{c_2}(s) < h_{c_1}(s)$.

La fin de la section 1 est consacrée à prouver un résultat qui sera utile pour l'analyse asymptotique.

On fait sur g *l'hypothèse supplémentaire*

(1.8) $$g \text{ est dérivable en } 0 \text{ et } g'(0) = 0.$$

PROPOSITION 1.24. $\forall\, c \geqslant c_0$, h_c *est dérivable en* 0 *(où* h_c *est définie par (1.7))* $h'_{c_0}(0) = c_0$
$\forall\, c > c_0$, $h'_c(0) = 0$.

Remarque 1.25. Ce type de résultats a été déjà obtenu par Fife [6], Johnson [7] et Uchiyama [10]. Il est d'ailleurs aisé de vérifier que les résultats de la proposition 1.24 peuvent être obtenus par la méthode de Johnson (alors que Fife [6] et Uchiyama [10], qui utilisent des techniques de type plans de phase, supposent $g'(0) \neq 0$).

Preuve. Raisonnons par l'absurde pour montrer que $\forall\, c \geqslant c_0$, $m = \lim\limits_{s\to 0} \dfrac{h_c(s)}{s}$ existe (et donc $\in \mathbb{R}$, car (1.7) $\Rightarrow m \leqslant c$). Soit $c \geqslant c_0$ fixé ; notons :

$$m^- = \underline{\lim}_{s\to 0} \frac{h_c(s)}{s} \quad \text{et} \quad m^+ = \overline{\lim}_{s\to 0} \frac{h_c(s)}{s}$$

et supposons $m^- < m^+$. Soit $\gamma \in\,]m^-, m^+[$. $m^- \geqslant 0 \Rightarrow \gamma > 0$. Le graphe de h_c traverse celui de $s \to \gamma s$ une infinité de fois dans tout voisinage de (0,0). Il existe donc deux suites $(s_{i_n})_n$, $i = 1,2$, telles que :

$$\begin{cases} \forall\, i,\ \forall\, n \quad 0 < s_{i_n} < 1 \qquad h_c(s_{i_n}) = \gamma s_{i_n} \\ \forall\, i, \quad \lim\limits_{n\to+\infty} s_{i_n} = 0 \\ \forall\, n,\ h'_c(s_{1_n}) \leqslant \gamma \leqslant h'_c(s_{2_n}) \end{cases}$$

h_c vérifie l'équation :

$$\forall\, s \in\,]0,1[\quad h'_c(s) = c - \frac{g(s)k(s)}{h_c(s)}$$

donc :

$$\forall\, n : c - \frac{g(s_{1_n})k(s_{1_n})}{\gamma s_{1_n}} \leqslant \gamma \leqslant c - \frac{g(s_{2_n})k(s_{2_n})}{\gamma s_{2_n}}$$

d'où, en passant à la limite quand $n \to +\infty$ dans les inégalités ci-dessus, on obtient que, nécessairement $\gamma = c$, ce qui est impossible. Montrons que

$$\forall\, c \geqslant c_0,\ h'_c(0) = 0 \quad \text{ou} \quad h'_c(0) = c.$$

Supposons que $h'_c(0) \neq 0$. En passant à la limite dans l'équation, quand $s \to 0$, il vient : $\lim\limits_{s\to 0^+} h'_c(s) = c$. Comme $h_c \in \mathscr{C}([0,1])$, $\lim\limits_{s\to 0^+} h'_c(s) = h'_c(0)$, d'où le résultat.

Utilisant un facteur intégrant dans l'équation satisfaite par h_c , on montre facilement que si $0<c<c'$, $\forall s \in]0,1[$

$$h_c(s)-h_{c'}(s)=(c'-c)\int_s^1 \exp\left(-\int_s^y \frac{gk}{h_c h_{c'}}\,ds\right)dy \leqslant c'-c$$

donc $\forall s \in]0,1[\ h_{c_o}(s)=\lim_{c \uparrow c_o} h_c(s)$. Cette remarque va nous permettre de montrer que $h'_{c_o}(0)=c_o$. En effet : $\forall c<c_o$, $h_c(0)>0$ et $h_c(1)=0$ donc $\exists !\ y_c \in]0,1[$ tel que :

$$\begin{cases} h_c(s)>\dfrac{c}{2}s & \forall s \in [0,y_c[\ , \\ h_c(y_c)=\dfrac{c}{2}y_c\ , \end{cases}$$

et, puisque, $\forall s \in]0,1[$, $h_c(s) \downarrow$ quand $c \uparrow$, y_c décroît quand $c \uparrow c_o$. Montrons par l'absurde que $\lim_{c \uparrow c_o} y_c \neq 0$. Supposons que $\lim_{c \uparrow c_o} y_c=0$.

$$\forall c<c_o \quad h'_c(y_c)=c-\frac{2g(y_c)k(y_c)}{cy_c} \quad \text{donc} \quad \lim_{c \uparrow c_o} h'_c(y_c)=c_o\,.$$

Ce qui est impossible puisque $\forall c$, $h'_c(y_c) \leqslant \frac{c}{2}$. Donc

$$\exists\, y_o \in]0,1[\qquad \forall c<c_o \qquad y_c \geqslant y_o\,.$$

$$\forall s \in [0,y_o[\quad \forall c<c_o \quad h_c(s)>\frac{c}{2}s$$

$$\Rightarrow \forall s \in [0,y_o[\quad h_{c_o}(s)=\lim_{c \uparrow c_o} h_c(s) \geqslant \frac{c_o}{2}s$$

$$\Rightarrow h'_{c_o}(0) \geqslant \frac{c_o}{2} \Rightarrow h'_{c_o}(0)=c_o\,.$$

Il reste à montrer que $\forall c>c_o$, $h'_c(0)=0$. Or $\forall c>c_o \quad \forall s \in]0,1[\quad h_c(s)<h_{c_o}(s)$ donc $h'_c(0) \leqslant h'_{c_o}(0)=c_o<c$. □

2. - COMPARAISON AVEC LE MODELE DE LA TEMPERATURE D'IGNITION

Soient $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ vérifiant (0.2) et $k : [0,1] \to \mathbb{R}$ vérifiant (0.3). Notons c_o le plus petit $c>0$ tel que l'équation :

$$(2.1)\quad \begin{cases} -(k(u)u')' + cu' = g(u) \text{ sur IR,} \\ u(-\infty) = 0 \qquad u(+\infty) = 1 \end{cases}$$

admette une solution et soit u_o l'unique solution de (2.1) correspondant à $c = c_o$ et telle que $u_o(0) = z_o$, où $z_o \in]0,1[$ est fixé arbitrairement (voir ci-dessus section 1, théorème 1).

Modifions le problème (2.1) en introduisant une température d'ignition θ ; pour $\theta \in]0,1[$ quelconque, considérons le problème :

$$(2.2)\quad \begin{cases} \text{Trouver } u \in \mathscr{C}^1(\mathrm{IR},[0,1]) \text{ et } c \in \mathrm{IR} \text{ tels que} \\ -(k(u)u')' + cu' = g(u)\chi_{[\theta,1]}(u) \\ u(-\infty) = 0 \qquad u(+\infty) = 1 \end{cases}$$

où g et k ont été définies ci-dessus. Berestycki, Nicolaenko et Scheurer [3,4] ont montré qu'il existe une solution (u,c) de (2.2). u est de classe $\mathscr{C}^2$ sur IR $- \{x_o\}$ pour un certain x_o. u est strictement croissante sur IR. x_o est déterminé de manière unique par la condition $u(x_o) = \theta$. On a alors $u'(x_o) = c\,\theta\, k(\theta)^{-1}$. u vérifie de plus, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} u'(x) = 0$ et on a $c > 0$. u et c sont déterminés de manière unique (à une translation de l'origine près). On notera désormais (u_θ, c_θ) la solution de (2.2) telle que $u_\theta(0) = z_o$. L'objet de cette section est de préciser les rapports entre (u_θ, c_θ) pour $\theta \in]0,1[$ et les solutions de (2.1) (pour $c \geq c_o$). Le résultat principal est le suivant

THEOREME 2. *(i) L'application :* $\begin{array}{l}]0,1[\to \mathrm{IR}^+ \\ \theta \to c_\theta \end{array}$ *est strictement décroissante.*

(ii) $\lim\limits_{\theta \downarrow 0} \uparrow c_\theta = c_o$

(iii) $u_\theta \underset{\theta \to 0}{\to} u_o$ *dans* $\mathscr{C}^o(\mathrm{IR})$ *et* $\mathscr{C}^1_{loc}(\mathrm{IR})$

Vues les propriétés de l'application u_θ, qui ont été rappelées ci-dessus, $\forall\, \theta \in]0,1[$, il existe une unique application h_θ vérifiant :

$$h_\theta \in \mathscr{C}([0,1]) \cap \mathscr{C}^1(]0,1[- \{\theta\})$$

$$\forall\, s \in]0,1[\quad h_\theta(s) = k(s)\, u'_\theta(u_\theta^{-1}(s)) \qquad h_\theta(\theta) = c_\theta\, \theta. \quad h_\theta(1) = h_\theta(0) = 0$$

$$\forall\, s \in [\theta,1[\quad \frac{d}{ds}\, h_\theta(s) = c_\theta - \frac{g(s)k(s)}{h_\theta(s)}$$

$$\forall\, s \in]0,\theta] \quad \frac{d}{ds}\, h_\theta(s) = c_\theta\,.$$

LEMME 2.1. *(i) L'application :* $]0,1[\ \to \mathrm{IR}^+$, $\theta \to c_\theta$ *est strictement décroissante*

(ii) $\forall\, \theta \in]0,1[\,,\ c_\theta \leqslant 2\sqrt{\beta \sup_{x \in]0,1[} \frac{g(x)}{x}}$*, où* $\beta = \sup_{x \in [0,1]} k(x)$

(iii) $\exists\, \gamma > 0,\ \lim_{\theta \to 0} c_\theta = \gamma$

Preuve. Démonstration de (i) : Soient θ_1, $\theta_2 \in]0,1[$, $\theta_1 < \theta_2$. Notons $h_{\theta_i} = h_i$ et $c_{\theta_i} = c_i$, $i = 1,2$ et montrons par l'absurde que $c_1 > c_2$. Supposons $c_2 \geqslant c_1$. $h_2(1) = h_1(1) = 0$; donc (lemme 1.5) $\forall\, s \in [\theta_2,1[\ \ h_1(s) \geqslant h_2(s)$. En particulier $h_1(\theta_2) \geqslant h_2(\theta_2)$. Or

$$\forall\, s \in [\theta_1,\theta_2]\ \frac{d}{ds} h_1(s) < c_1 \Rightarrow h_1(\theta_2) < c_1(\theta_2 - \theta_1) + h_1(\theta_1) = c_1\theta_2$$

On a donc l'inégalité : $c_2\theta_2 < c_1\theta_2$. Ce qui est impossible.

Démonstration de (ii) : Soit $\theta \in]0,1[$. Notons $c_\theta = c$ et $h_\theta = h$. On a : $h(\theta) = c\theta$ et $h(1) = 0$. Donc $\exists\, \theta_1 \in]\theta,1[$ tel que : $\forall\, s \in]\theta,\theta_1[\,,\ h(s) > \frac{c}{2} s$ et $h(\theta_1) = \frac{c}{2}\theta_1$. Ce qui entraîne $h'(\theta_1) \leqslant \frac{c}{2}$. Ecrivant l'équation satisfaite par h au point $s = \theta_1$, il vient : $c^2\theta_1 - 2g(\theta_1)k(\theta_1) \leqslant \frac{c}{2}$. D'où (ii).
(iii) est une conséquence triviale de (i) et (ii). □

LEMME 2.2. $\lim_{\theta \to 0} c_\theta \leqslant c_o$

Preuve. Il s'agit de montrer que $\forall\, c < \gamma = \lim_{\theta \to 0} c_\theta$, (2.1) n'a pas de solution ou encore, vue la remarque 1.23, section 1, que $\forall\, c < \gamma$, h_c défini par (1.7) vérifie $h_c(0) > 0$. Soit $c < \gamma$. $\theta \in]0,1[\,,\ c < c_\theta < \gamma$. On a alors $h_c(0) \geqslant h_{c_\theta}(0)$. Il suffit donc de montrer que $h_{c_\theta}(0) > 0$. Or, puisque $h_{c_\theta}(1) = h_\theta(1)$, on a (lemme 1.5(a)) $\forall s \in [\theta,1]\ h_\theta(s) = h_{c_\theta}(s)$. Donc : $h_{c_\theta}(\theta) = c_\theta\, \theta$.
$\forall\, s \in]0,\theta[\,,\ h'_{c_\theta}(s) < c_\theta \Rightarrow h_{c_\theta}(0) > h_{c_\theta}(\theta) - c_\theta\theta = 0.$ □

LEMME 2.3. *Le problème (2.1), a, pour* $c = \gamma$*, une solution. De plus, si on note u la solution de (2.1) correspondant à* $c = \gamma$ *et telle que* $u(0) = z_o$*, alors* $u_\theta \to u$ ($\theta \to 0$) *dans* $\mathscr{C}^0(\mathrm{IR},\mathrm{IR})$ *et* $\mathscr{C}^1_{loc}(\mathrm{IR},\mathrm{IR})$.

Le théorème 2 est une conséquence immédiate du lemme 2.3.

Preuve. $\forall\, \theta \in]0,1[$, u_θ est déterminée de manière unique par :

$$\begin{cases} -(k(u_\theta)u'_\theta)' + c_\theta\, u'_\theta = g(u_\theta)\chi_{[\theta,1]}(u_\theta) \\[2ex] u_\theta(-\infty) = 0 \qquad u_\theta(+\infty) = 1 \qquad u_\theta(0) = z_o \end{cases}$$

et $\exists\,!\ x_\theta$ tel que $u_\theta(x_\theta)=\theta$.

Commençons par remarquer que, en multipliant l'équation par $k(u_\theta)\ u'_\theta$ et en intégrant de $-\infty$ à x_θ et de x_θ à $+\infty$, il vient :

$$c_\theta \int_{-\infty}^{+\infty} k(u_\theta(x))u'^2_\theta(x)dx = \int_\theta^1 g(s)k(s)ds.$$

D'autre part :

$$\forall\, \theta \in]0,\frac{1}{2}[,\ c_\theta \geqslant c_{\frac{1}{2}} > 0.$$

Donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} u'^2_\theta\, dx$ est borné indépendamment de $\theta \in]0,\frac{1}{2}[$. Il en résulte en utilisant l'équation que :

(2.3) $\qquad u_\theta$ est borné indépendamment de $\theta \in]0,\frac{1}{2}[$, dans $H^2_{loc}(IR)$

Montrons par l'absurde que :

(2.4) $$\lim_{\theta\to 0} x_\theta = -\infty.$$

Supposons qu'il existe une suite $(\theta_k)_k$ telle que :

$$\forall\, k \quad \theta_k \in]0,\frac{1}{2}[\ ,\ \lim_{k\to+\infty} \theta_k = 0,\ \ \lim_{k\to+\infty} x_{\theta_k} = \underline{x} > -\infty.$$

Utilisant (2.3), on peut extraire de la suite $(u_{\theta_k})_k$ une sous suite encore notée $(u_{\theta_k})_k$ telle que $\exists\ \underline{u} \in \mathscr{C}^1(IR,[0,1])$ et $u_{\theta_k} \to \underline{u}$ dans $\mathscr{C}^1_{loc}(IR)$.
On a alors :

$$\begin{cases} u(x) = 0 \qquad \forall\, x \in]-\infty,\underline{x}[\\ -(k(\underline{u})\underline{u}')' + \gamma\underline{u}' = g(\underline{u}) \text{ sur } IR \ \ (\text{on utilise } \underline{u} \in \mathscr{C}^1\ (IR,IR)\ )\ , \\ \underline{u}(0) = z_o\,. \end{cases}$$

Les deux premières égalités entraînent que $\underline{u} \equiv 0$ sur IR, ce qui est impossible. Remarquons enfin que, puisque $u'_\theta(0) = \dfrac{h_\theta(z_o)}{k(z_o)}$ décroît, quand $\theta \downarrow 0$, on a :

(2.5) $$\exists\ \mu \geqslant 0\,, \qquad \mu = \lim_{\theta\to 0} u'_\theta\,(0).$$

Il est alors aisé de déduire de (2.3), (2.4) et (2.5) que $\exists\, u \in \mathscr{C}^1(\mathrm{IR},\mathrm{IR})$ et $u_\theta \underset{\theta \to 0}{\to} u$ dans $\mathscr{C}^1_{loc}(\mathrm{IR},\mathrm{IR})$; u vérifie :

$$\begin{cases} -(k(u)u')' + \gamma u' = g(u) \text{ sur IR}, \\ u(0) = z_0, \quad u'(0) = \mu, \quad \forall\, x \in \mathrm{IR} \quad u'(x) \geqslant 0 \quad \text{et} \quad 0 \leqslant u(x) \leqslant 1. \end{cases}$$

On montre alors facilement que $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = 1$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} u(x) = 0$.

De plus, les applications u_θ et u étant croissantes et ayant mêmes limites en $\pm\infty$, il est immédiat de vérifier que :

$$u_\theta \underset{\theta \to 0}{\to} u \quad \text{dans } \mathscr{C}^0(\mathrm{IR},\mathrm{IR}). \qquad \square$$

3. - ETUDE ASYMPTOTIQUE : PREMIERE PARTIE

Dans cette section, ainsi que dans la suivante, g est supposée dépendre d'un paramètre $\epsilon > 0$ et est notée g_ϵ. On se donne toujours k vérifiant (0.3) et on suppose que la famille $(g_\epsilon)_\epsilon$ vérifie les hypothèses suivantes :

(3.1) $\quad \forall\, \epsilon > 0, \quad g_\epsilon$ vérifie (0.2) .

(3.2) $\quad \forall\, \epsilon > 0, \quad g_\epsilon$ vérifie (1.8) .

(3.3) $\quad \forall\, \epsilon > 0, \quad \exists\, \theta_\epsilon \in]0,1[\,, \quad \lim\limits_{\epsilon \downarrow 0} \uparrow \theta_\epsilon = 1 \quad \text{et} \quad \lim\limits_{\epsilon \downarrow 0} \left\{ \sup\limits_{x \in]0,\theta_\epsilon]} \frac{g_\epsilon(x)}{x} \right\} = 0.$

(3.4) $\quad \lim\limits_{\epsilon \to 0} \displaystyle\int_0^1 k(s)\; g_\epsilon(s)\, ds = m, \quad 0 < m < +\infty.$

D'après ce qui précède, on sait que, $\forall\, \epsilon > 0$, $\exists\, c_0(\epsilon)$ tel que le problème

$$(3.5) \qquad \begin{cases} u_\epsilon \in \mathscr{C}^2(\mathrm{IR}, [0,1]), \\ -(k(u_\epsilon)u'_\epsilon)' + cu'_\epsilon = g_\epsilon(u_\epsilon), \\ u_\epsilon(-\infty) = 0, \quad u_\epsilon(+\infty) = 1, \end{cases}$$

ait une solution si et seulement si $c \geqslant c_0(\epsilon)$. On va préciser, dans les sections 3 et 4, le comportement asymptotique de $c_0(\epsilon)$ et des différentes solutions de (3.5), quand $\epsilon \to 0$. Ce type d'étude est très important sur le plan chimique (voir [5] où elle est la base d'une analyse rationnelle des équations de la combustion). ϵ représente l'inverse de l'énergie d'activation (réduite) de la réaction chimique. L'exemple typique de fonction g_ϵ est $g_\epsilon(x) = (1-x)\,\frac{1}{\epsilon^2}\,\exp\left(\frac{1}{\epsilon}\,\frac{x-1}{x}\right)$.

On s'intéresse, dans cette section, au comportement asymptotique de $c_o(\epsilon)$ et de l'unique solution de (3.5), notée $u_{o,\epsilon}$, correspondant à $c = c_o(\epsilon)$ et telle que $u_{o,\epsilon}(0) = z_o$, où $z_o \in]0,1[$ est fixé quelconque. Notre résultat principal est le suivant :

THEOREME 3. *Sous les hypothèses ci-dessus,*

$$\lim_{\epsilon\to 0} c_o(\epsilon) = \sqrt{2m} = c_o .$$

De plus, $u_{o,\epsilon} \underset{\epsilon\to 0}{\to} u_{c_o}$ *dans* $\mathscr{C}^o(\mathrm{IR})$, *où* u_{c_o} *est déterminé de manière unique par :*

$$\begin{cases} u_{c_o} \in \mathscr{C}^o(\mathrm{IR},\mathrm{IR}) \\ u_{c_o}(x) = 1 \quad \forall\, x \geqslant x_o \\ u_{c_o} \in \mathscr{C}^1(]-\infty,x_o[) \\ \forall\, x < x_o \quad -k(u_{c_o}(x))u'_{c_o}(x) + c_o\, u_{c_o}(x) = 0 \end{cases}$$

et x_o *est déterminé de manière unique par la condition* $u_{c_o}(0) = z_o$.

Remarque 3.1. Ce résultat est analogue à celui obtenu par Berestycki, Nicolaenko et Scheurer [3,4] pour le modèle de la température d'ignition, que l'on va rappeler précisément : ils se donnent $k \in \mathscr{C}^1([0,1], \mathrm{IR}^{+*})$ et une famille $(g_\epsilon)_\epsilon$ vérifiant :

. $\exists\, \theta \in]0,1[,\ \forall\, \epsilon > 0,\ \ g_\epsilon \equiv 0$ sur $[0,\theta)$ $g_\epsilon > 0$ sur $(\theta,1[$,

$g_\epsilon(1) = 0$, $\qquad g_\epsilon$ lipschitzienne sur $[\theta,1]$.

. $\exists\, \theta_\epsilon,\ \ \theta \leqslant \theta_\epsilon < 1 \quad \lim_{\epsilon\to 0} \theta_\epsilon = 1 \quad \lim_{\epsilon\to 0} \left\{ \max_{x\in[\theta,\theta_\epsilon]} g_\epsilon(x) \right\} = 0$.

. $\lim_{\epsilon\to 0} \int_0^1 k(s)g_\epsilon(s)ds = m,\quad 0 < m < +\infty$.

Notons (u_ϵ,c_ϵ) l'unique solution de

$$\begin{cases} -(k(u_\epsilon)u'_\epsilon)' + c_\epsilon\, u'_\epsilon = g_\epsilon(u_\epsilon), \\ u_\epsilon(-\infty) = 0\,,\quad u_\epsilon(0) = \theta\,,\quad u_\epsilon(+\infty) = 1\,. \end{cases}$$

Alors $\lim\limits_{\epsilon \to 0} c_\epsilon = \sqrt{2m} = c_o$ et $\lim\limits_{\epsilon \to 0} u_\epsilon = u_o$ dans $\mathscr{C}^o(\mathrm{IR},\mathrm{IR})$, où u_o est déterminé de manière unique par $u_o(x) = 1 \quad \forall\, x \geqslant \bar{x}, \quad -k(u_o)u'_o + c_o u_o = 0 \quad \forall\, x \leqslant \bar{x}$ et $\bar{x}$ est déterminé de manière unique par la condition $u_o(0) = \theta$.

Remarque 3.2. Les hypothèses (3.1), (3.2), (3.3) et (3.4) ne sont probablement pas optimales. Remarquons toutefois que le résultat est faux si on fait des hypothèses plus faibles analogues à celles de la remarque 3.1, c'est-à-dire (3.1), (3.4) et (3.3) bis

$$\text{(3.3)bis} \qquad \exists\, \theta_\epsilon \quad 0 < \theta_\epsilon < 1 \quad \lim_{\epsilon \to 0} \theta_\epsilon = 1 \text{ et } \lim_{\epsilon \to 0} \left\{ \max_{x \in [0,\theta_\epsilon]} g_\epsilon(x) \right\} = 0$$

En effet, on peut montrer facilement que $\forall\, \epsilon$, $c_o(\epsilon) \geqslant 2\sqrt{k(0)\, g'_\epsilon(0)}$. Il existe donc des familles $(g_\epsilon)_\epsilon$ vérifiant (3.1), (3.3)bis et (3.4) et telles que $\lim\limits_{\epsilon \to 0} c_o(\epsilon) = +\infty$.

La preuve du théorème 3 va faire l'objet de plusieurs lemmes. A $u_{o,\epsilon}$ on associe $h_{o,\epsilon}$ par (1.7). Rappelons que :

$$\begin{cases} h_{o,\epsilon} \in \mathscr{C}([0,1]) \cap \mathscr{C}^1(]0,1[) \qquad h_{o,\epsilon}(0) = h_{o,\epsilon}(1) = 0 \\ \forall\, s \in]0,1[\quad h_{o,\epsilon}(s) = k(s)\ u'_{o,\epsilon}(u_{o,\epsilon}^{-1}(s)) > 0 \quad \text{et} \\ \qquad \dfrac{d}{ds} h_{o,\epsilon}(s) = c_o(\epsilon) - \dfrac{g_\epsilon(s)k(s)}{h_{o,\epsilon}(s)} . \end{cases}$$

Le lemme suivant établit des propriétés de $(h_{o,\epsilon})_\epsilon$ qui joueront dans la suite un rôle essentiel.

LEMME 3.3. *(i)* $\lim\limits_{\epsilon \to 0} (h_{o,\epsilon}(\theta_\epsilon) - c_o(\epsilon)\theta_\epsilon) = 0$, *où* θ_ϵ *est défini dans (3.3).*

(ii) $\forall\, s \in [0,1[\quad \lim\limits_{\epsilon \to 0} (h_{o,\epsilon}(s) - c_o(\epsilon)s) = 0.$

Preuve. Notons $\sigma(\epsilon) = \sup\limits_{s \in]0,\theta_\epsilon]} \dfrac{g_\epsilon(s)}{s}$. Montrons les inégalités suivantes :

$$\text{(3.6)} \qquad \begin{gathered} \exists\, \epsilon_o \quad \forall\, \epsilon \leqslant \epsilon_o, \quad \forall\, s \in [0,\theta_\epsilon], \\ 0 \geqslant h_{o,\epsilon}(s) - c_o(\epsilon)s \geqslant \frac{-c_o(\epsilon) + \sqrt{c_o(\epsilon)^2 - 4\beta\sigma(\epsilon)}}{2}\ s . \end{gathered}$$

$\forall\, \epsilon > 0$, on a :

$$\forall\, s \in]0,1[\quad \frac{ds}{ds}\, h_{o,\epsilon}(s) \leqslant c_o(\epsilon) \Rightarrow \forall s \in [0,1]\ h_{o,\epsilon}(s) \leqslant c_o(\epsilon)s$$

$$\forall\, s \in]0,\theta_\epsilon] \quad \frac{ds}{ds}\, h_{o,\epsilon}(s) \geqslant c_o(\epsilon) - \frac{\sigma(\epsilon)\beta s}{h_{o,\epsilon}(s)} \quad \text{où } \beta = \sup_{s \in [0,1]} k(s)$$

Le théorème 1 (section 1) entraîne que :

$$\forall\, \epsilon > 0,\ c_o(\epsilon) > \sqrt{2 \int_o^1 k(s) g_\epsilon(s) ds},$$

donc :

(3.7) $$\varliminf_{\epsilon \to 0} c_o(\epsilon) \geqslant \sqrt{2m}.$$

Il résulte de (3.7) et de (3.3) que $\exists\, \epsilon_o$, $\forall\, \epsilon \leqslant \epsilon_o$, le polynôme $X^2 - c_o(\epsilon)\ X + \beta\sigma(\epsilon)$ a un discriminant > 0. On supposera dans la suite de la démonstration : $\epsilon \leqslant \epsilon_o$.

L'application : $v_\epsilon(s) = \dfrac{c_o(\epsilon) + \sqrt{c_o(\epsilon)^2 - 4\beta\sigma(\epsilon)}}{2}$ s vérifie alors :

$$\forall\, s \in]0,1] \quad \frac{ds}{ds}\, v_\epsilon(s) = c_o(\epsilon) - \frac{\sigma(\epsilon)\beta s}{v_\epsilon(s)}$$

donc :

Si $\exists\, s_1 \in]0,\theta_\epsilon]$ $h_{o,\epsilon}(s_1) > v_\epsilon(s_1)$, alors $\forall\, s \in [s_1,\theta_\epsilon]$

$$h_{o,\epsilon}(s) > v_\epsilon(s).$$

Or (proposition 1.24) $\forall\, \epsilon$ $h'_{o,\epsilon}(0) = c_o(\epsilon) > v'_\epsilon(0)$ donc $\forall\, s \in [0,\theta_\epsilon]$ $h_{o,\epsilon}(s) \geqslant v_\epsilon(s)$ et (3.6) est prouvé. Ecrivant (3.6) pour $s = \theta_\epsilon$, on obtient :

$$\forall\, \epsilon \leqslant \epsilon_o \quad 0 \geqslant h_{o,\epsilon}(\theta_\epsilon) - c_o(\epsilon)\ \theta_\epsilon \geqslant \frac{-c_o(\epsilon) + \sqrt{c_o(\epsilon)^2 - 4\beta\sigma(\epsilon)}}{2}\ \theta_\epsilon$$

vu (3.7),

$$\epsilon_1 \quad \forall\, \epsilon \leqslant \epsilon_1 \quad c_o(\epsilon) \geqslant \frac{c_o}{2} \text{ et } \sigma(\epsilon) \leqslant \frac{c_o^2}{16\beta}$$

$$\forall\, \epsilon \leqslant \inf(\epsilon_o,\epsilon_1),\ 0 \geqslant h_{o,\epsilon}(\theta_\epsilon) - c_o(\epsilon)\,\theta_\epsilon \geqslant \frac{-\frac{c_o}{2} + \sqrt{(\frac{c_o}{2})^2 - 4\beta\sigma(\epsilon)}}{2}\ \theta_\epsilon$$

d'où (i). On prouve de même aisément (ii) □

LEMME 3.4. $\lim\limits_{\epsilon \to 0} c_o(\epsilon) = \sqrt{2m}$

Il résulte trivialement des lemmes 3.3 et 3.4 que

$$\forall s \in [0,1[\,,\quad \lim_{\epsilon \to 0} h_{o,\epsilon}(s) = c_o\, s.$$

Preuve. $\forall\, \epsilon > 0$, $\exists\,!\; x_\epsilon$ tel que $u_{o,\epsilon}(x_\epsilon) = \theta_\epsilon$. Ecrivant (1.3) avec $a = x_\epsilon$ et $b = +\infty$, il vient $\frac{1}{2}k(\theta_\epsilon)^2\, u'_{o,\epsilon}(x_\epsilon)^2 \leqslant \int_{\theta_\epsilon}^{1} k(s) g_\epsilon(s) ds$. D'où, vu (3.3) et (3.4),

$$\overline{\lim_{\epsilon \to 0}}\; k(\theta_\epsilon)\, u'_{o,\epsilon}(x_\epsilon) \leqslant \sqrt{2m}.$$

Or, $\forall\, \epsilon$, $k(\theta_\epsilon)\, u'_{o,\epsilon}(x_\epsilon) = h_{o,\epsilon}(\theta_\epsilon)$.

Le lemme 3.3 (i) implique donc que $\overline{\lim\limits_{\epsilon \to 0}}\; c_o(\epsilon) \leqslant \sqrt{2m}$. Cette inégalité achève, vu (3.7), la preuve du lemme. □

Prouvons maintenant la convergence de $(u_{o,\epsilon})$, quand $\epsilon \to 0$. Commençons par remarquer que x_ϵ (défini dans la preuve du lemme 3.4) est borné supérieurement indépendamment de $\epsilon \leqslant \epsilon_1$. En effet, $\forall\, x \in [0,x_\epsilon]$, prenons $a = 0$ et $b = x$ dans (1.3). Il vient :

$$\frac{1}{2}\beta\, u'^2_{o,\epsilon}(x) \geqslant \frac{1}{2}k(z_o)^2\, u'^2_{o,\epsilon}(0) - \int_{z_o}^{\theta_\epsilon} k(s) g_\epsilon(s) ds$$

Or $k(z_o) u'_{o,\epsilon}(0) = h_{o,\epsilon}(z_o) \underset{\epsilon \to 0}{\to} c_o\, z_o$ et $\int_{z_o}^{\theta_\epsilon} k(s) g_\epsilon(s) ds \underset{\epsilon \to 0}{\to} 0$ donc :

$$\exists\, \epsilon_1 \quad \exists\, \eta > 0 \quad \forall\, \epsilon \leqslant \epsilon_1 \quad \forall\, x \in [0,x_\epsilon] \quad u'_\epsilon(x) \geqslant \eta$$

d'où :

$$1 - z_o \geqslant u_{o,\epsilon}(x_\epsilon) - u_{o,\epsilon}(0) = \int_0^{x_\epsilon} u'_{o,\epsilon}(x) dx \geqslant \eta\, x_\epsilon\,,\quad \forall\, \epsilon \leqslant \epsilon_1\,.$$

On a donc bien que $\exists\, \epsilon_1 \quad \exists\, \bar{x} > 0 \quad \forall\, \epsilon \leqslant \epsilon_1 \quad x_\epsilon \leqslant \bar{x}$.

On supposera dans la suite de la démonstration $\epsilon \leqslant \epsilon_1$.

. $\forall\, x \in [\bar{x},+\infty[\quad \forall\, \epsilon \quad u_\epsilon(x) \geqslant u_\epsilon(\bar{x}) \geqslant \theta_\epsilon$

donc $u_{o,\epsilon} \to 1$ quand $\epsilon \to 0$ dans $\mathscr{C}^o([x,+\infty[, \mathrm{IR})$.

. soit un intervalle $[-n,\bar{x}]$, pour $n \in \mathrm{IN}^*$. En prenant $a = -\infty$ et $b = +\infty$ dans (1.3), il vient :

$$c_0(\epsilon)\int_{-\infty}^{+\infty} k(u_{0,\epsilon}(x))u'^2_{0,\epsilon}(x)dx = \int_0^1 k(s)g_\epsilon(s)ds$$

donc $u_{0,\epsilon}$ est borné dans $H^1([-n,\bar{x}])$, indépendamment de ϵ.

Considérons une suite $(\epsilon_j)_j$ telle que $\lim\limits_{j\to\infty} \epsilon_j = 0$ $\lim\limits_{j\to+\infty} u_{0,\epsilon_j} = u_{c_0}$ dans $H^1([-n,\bar{x}])$ faible et dans $\mathscr{C}^0([-n,\bar{x}])$ fort et $\lim\limits_{j\to+\infty} x_{\epsilon_j} = x_0$. Alors, il est clair que $u_{c_0} \equiv 1$ sur $[x_0,\bar{x}]$ (donc en particulier $x_0 > 0$). D'autre part $\forall\, \delta \in]0,\frac{x_0}{2}[$, $\sup\limits_{x\in[-n,x_0-\delta} g_{\epsilon_j}(u_{0,\epsilon_j}(x)) \underset{j\to+\infty}{\to} 0.$

On en déduit que :

$$\begin{cases} u_{c_0} \in \mathscr{C}^1([-n,x_0[,\mathbb{R}) \quad -(k(u_{c_0}(x))u'_{c_0}(x))' + c_0\, u'_{c_0}(x) = 0 \quad \forall\, x\in[-n,x_0[\\ u_{c_0}(0) = z_0 \quad u'_{c_0}(0) = \lim\limits_{\epsilon\to 0} u'_\epsilon(0) = \dfrac{c_0\, z_0}{k(z_0)} \end{cases}$$

donc :

$$\forall\, x\in[-n,x_0[\,, -k(u_{c_0}(x))u'_{c_0}(x) + c_0\, u_{c_0}(x) =$$

$$-k(u_{c_0}(0))u'_{c_0}(0) + c_0\, u_{c_0}(0) = 0.$$

Il est maintenant aisé de voir que u_{c_0} et x_0 sont indépendants de la suite $(\epsilon_j)_j$; en effet, le problème (où on ne cherche pas v à valeurs dans [0,1])

$$\begin{cases} -k(v)v' + c_0\, v = 0 \\ v(0) = z_0 \end{cases}$$

admet une unique solution, qui vérifie, $\forall\, x > 0$ $v'(x) > 0$. Donc, puisque $u_{c_0} \in \mathscr{C}^0([-n,x_0],\mathbb{R})$ x_0 et u_{c_0} sont déterminés de manière unique.

. Le raisonnement ci-dessus étant vrai $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, il vient qu'il existe une unique application $u_{c_0} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et un unique réel $x_0 > 0$ vérifiant :

$$\begin{cases} u_{c_0} \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},[0,1]),\ u_{c_0}(x) = 1 \quad \forall\, x \geqslant x_0 \qquad u_{c_0}(0) = z_0 \\ u_{c_0} \in \mathscr{C}^1(]-\infty,x_0[\,,\mathbb{R}),\ -k(u_{c_0})u'_{c_0} + c_0\, u_{c_0} = 0 \text{ sur }]-\infty,x_0[\end{cases}$$

et $u_{o,\epsilon} \underset{\epsilon \to 0}{\to} u_{c_o}$ dans $\mathscr{C}^o([\underline{x},+\infty[)$ $\forall \underline{x} \in$ IR. La convergence dans $\mathscr{C}^o$(IR) est immédiate puisque les applications u_{c_o} et $u_{o,\epsilon}$ sont croissantes et ont même limite quand $x \to -\infty$. □

Remarque 3.5. La démonstration du théorème 3 justifie, d'un point de vue mathématique, les développements asymptotiques formels donnés dans [5,9].

4. - ETUDE ASYMPTOTIQUE : DEUXIEME PARTIE

On se donne k vérifiant (0.3) et on suppose encore que g dépend d'un paramètre $\epsilon > 0$ et que la famille $(g_\epsilon)_\epsilon$ vérifie (3.1), (3.2), (3.3) et (3.4) (voir la section 3 pour l'interprétation de ϵ et de l'étude asymptotique).

On sait (section 1) que $\forall \epsilon > 0$, $\exists c_o(\epsilon) > 0$ tel que le problème :

$$(4.1) \quad \begin{cases} u_\epsilon \in \mathscr{C}^2(\text{IR}, [0,1]) \\ -(k(u_\epsilon)u'_\epsilon)' + cu'_\epsilon = g(u_\epsilon) \quad \text{sur IR} \\ u_\epsilon(-\infty) = 0 \qquad u_\epsilon(+\infty) = 1 \end{cases}$$

a une solution si et seulement si $c \geq c_o(\epsilon)$. On a vu (section 3) que :

$$\lim_{\epsilon \to 0} c_o(\epsilon) = \sqrt{2m} = c_o \quad \text{où } m = \lim_{\epsilon \to 0} \int_0^1 k(s)g_\epsilon(s)ds.$$

Il en résulte que $\forall\ c > c_o$, $\exists\ \epsilon_o$ $\forall\ \epsilon \leq \epsilon_o$ le problème (4.1) admet une solution. Soit $z_o \in\ ]0,1[$ fixé quelconque. Pour $c > c_o$, notons $u_{c,\epsilon}$ l'unique solution de (4.1) telle que $u_{c,\epsilon}(0) = z_o$ (définie pour $\epsilon \leq \epsilon_o$).

On étudie, ici, le comportement asymptotique de $u_{c,\epsilon}$, quand $\epsilon \to 0$:

THEOREME 4. *Sous les hypothèses (3.1), (3.2), (3.3) et (3.4), soit* $c > c_o = \sqrt{2m}$ *fixé. Alors,* $u_{c,\epsilon} \underset{\epsilon \to 0}{\to} u_c$ *uniformément sur tout compact de* IR, *où* u_c *est déterminé de manière unique par :*

(i) *Si* $z_o \in\ ]0,1 - \frac{c_o}{c}]$ $u_c \equiv z_o$ *sur* IR

(ii) *Si* $z_o \in\ ]1 - \frac{c_o}{c}, 1[$

$$\begin{cases} u_c \in \mathscr{C}^0(\mathrm{IR}, [0,1]) \quad u_c(x) = 1 \qquad \forall\, x \geqslant x_c \\ u_c \in \mathscr{C}^1(]-\infty, x_c[\,, \mathrm{IR}) \\ \forall\, x \in\,]-\infty, x_c[\qquad -k(u_c(x))u_c'(x) + c\,u_c(x) = c - c_0 \end{cases}$$

et x_c *est déterminé de manière unique par la condition* $u_c(0) = z_0$ *, dans ce cas, on a, de plus :*

$$\forall\, x \in \mathrm{IR} \quad \| u_{c,\epsilon} - u_c \|_{\mathscr{C}^0([x,+\infty[\,, \mathrm{IR})} \underset{\epsilon \to 0}{\to} 0$$

Remarque 4.1. Pour $c > c_0$, $u_{c,\epsilon}$ admet donc une limite u_c , quand $\epsilon \to 0$; cette limite dépend de la position de z_0 , valeur imposée à l'origine, par rapport à $1 - \dfrac{c_0}{c}$. Elle est dans tous les cas très différente de celle obtenue dans la section 3 pour $u_{c_0(\epsilon),\epsilon}$ et vérifie $u_c(-\infty) > 0$. (Dans le cas (ii) $u_c(-\infty) = 1 - \dfrac{c_0}{c}$).

Soit $c > c_0$ fixé. On va supposer dans la démonstration du théorème 4 que $\epsilon \leqslant \epsilon_0$ de sorte que $u_{c,\epsilon}$ existe.

LEMME 4.2. *Soit* $\gamma \in\,]0,1[$ *fixé. Notons* u_ϵ *la solution de (4.1) telle que* $u_\epsilon(0) = \gamma$*. Alors :*

$$\underline{\lim}_{\epsilon \to 0} \; k(\gamma)\, u_\epsilon'(0) \geqslant \sup(0, c\gamma + c_0 - c)$$

Preuve. On écrit (1.1), (1.2), (1.3) (pour g_ϵ et u_ϵ) avec $a = 0$ et $b = +\infty$. Utilisant alors la méthode de la remarque 1.3, on obtient l'inégalité :

$$\frac{1}{2}(k(\gamma)u_\epsilon'(0))^2 + c(1-\gamma)k(\gamma)u_\epsilon'(0) + \frac{c^2}{2}\,(1-\gamma)^2 - \int_\gamma^1 k(s)\, g_\epsilon(s)\, ds \geqslant 0$$

On en déduit aisément l'inégalité :

$$k(\gamma)u_\epsilon'(0) \geqslant -c(1-\gamma) + \sqrt{2 \int_\gamma^1 k(s)\, g_\epsilon(s) ds}.$$

D'où le résultat, puisque

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_\gamma^1 k(s)\, g_\epsilon(s)\, ds = m. \qquad \square$$

De façon analogue à ce qui a été fait dans la preuve du théorème 3, où on a défini $h_{o,\epsilon}$, on associe à $u_{c,\epsilon}$, $h_{c,\epsilon}$ par (1.7). On ne rappellera pas les propriétés élémentaires de $h_{c,\epsilon}$. Le lemme suivant est la clef de la preuve du théorème 4.

LEMME 4.3. $\qquad \forall\, s \in [0,1[\,, \quad \lim_{\epsilon \to 0} h_{c,\epsilon}(s) = \sup(0, cs + c_0 - c)$.

Preuve. Commençons par remarquer que :

$$\forall \gamma \in]0,1[\quad h_{c,\epsilon}(\gamma) = k(\gamma)u'_\epsilon(0),$$

où u_ϵ a été définie dans le lemme 4.2. Il résulte donc du lemme 4.2 que :

$$(4.2) \qquad \forall s \in]0,1[\quad \underline{\lim}_{\epsilon \to 0} \quad h_{c,\epsilon}(s) \geqslant \sup(0, cs + c_0 - c).$$

. D'autre part, (voir la remarque 1.23),

$$\forall \epsilon \quad \forall s \in]0,1[\qquad h_{c,\epsilon}(s) \leqslant h_{0,\epsilon}(s)$$

Or (section 3), $\forall s \in [0,1[$, $\lim_{\epsilon \to 0} \quad h_{0,\epsilon}(s) = c_0 s$. D'où

$$(4.3) \qquad \forall s \in [0,1[\quad \overline{\lim}_{\epsilon \to 0} \quad h_{c,\epsilon}(s) \leqslant c_0 s.$$

. $\forall \epsilon$, notons H_ϵ l'application : $s \to h^2_{c,\epsilon}(s)$ alors

$$H_\epsilon \in \mathscr{C}([0,1]) \cap \mathscr{C}^1(]0,1[) \qquad H_\epsilon(0) = H_\epsilon(1) = 0$$

$$\forall s \in]0,1[\qquad H_\epsilon(s) > 0 \qquad \text{et} \qquad H'_\epsilon(s) = 2\,c\sqrt{H_\epsilon(s)} - 2g_\epsilon(s)\,k(s).$$

$$\forall s \in [0,1], \quad 0 \leqslant h_{c,\epsilon}(s) \leqslant cs \quad \text{donc} \quad \forall s \in [0,1] \quad |H_\epsilon(s)| \leqslant c^2.$$

Pour $\delta \in]0,1[$ fixé, considérons l'intervalle $[0,1-\delta]$ $\quad \exists\, \epsilon_1$, $\forall \epsilon \leqslant \epsilon_1 \quad \sup_{s \in [0,1-\delta]} \quad g_\epsilon(s) \leqslant 1$.
On supposera désormais $\epsilon \leqslant \epsilon_1$.

Utilisant l'équation, il vient que H_ϵ est borné indépendamment de ϵ dans $H^1([0,1-\delta]$. Soit une suite $(\epsilon_j)_j$ telle que $\lim_{j \to +\infty} \quad \epsilon_j = 0$ et $H_{\epsilon_j} \underset{j \to +\infty}{\to} H_0$ dans $H^1([0,1-\delta])$ faible et dans $\mathscr{C}^0([0,1-\delta])$ fort. En passant à la limite dans l'équation, il vient :

$$H'_0 = 2\,c\sqrt{H_0} \quad \text{sur } [0,1-\delta]$$

donc nécessairement $\exists\, s_0 \in [0,1-\delta]$ tel que :

$$H_0(s) = 0 \qquad \forall s \in [0,s_0]$$

$$H_0(s) = c^2(s-s_0)^2 \qquad \forall s \in [s_0,1-\delta]$$

(4.3) entraîne que s_o vérifie : $s_o \geqslant (1 - \frac{c_o}{c})(1-\delta)$. D'où

$$H_o(s) = 0 \qquad \forall\, s \in [0,(1 - \frac{c_o}{c})(1-\delta)]$$

$$H_o(s) \leqslant c^2 \,[s - (1 - \frac{c_o}{c})(1-\delta)]^2 \quad \forall\, s \in [(1 - \frac{c_o}{c})(1-\delta),1]$$

Il en résulte que :

$$\lim_{\epsilon \to 0} H_\epsilon(s) = 0 \qquad \forall\, s \in [0,(1 - \frac{c_o}{c})(1-\delta)]$$

$$\overline{\lim_{\epsilon \to 0}}\; H_\epsilon(s) \leqslant c^2[s - (1 - \frac{c_o}{c})(1-\delta)]^2 \quad \forall\, s \in [(1 - \frac{c_o}{c})(1-\delta),1]$$

on en déduit, vue la définition de H_ϵ que :

$$\forall\, s \in [0,1-\delta] \quad \overline{\lim_{\epsilon \to 0}}\; h_{c,\epsilon}(s) \leqslant \sup(0, c\, s - (c - c_o)(1-\delta)), \text{ et ceci } \forall\, \delta \in]0,1[.$$

Soit maintenant $s \in [0,1[$ fixé. $\exists\, \delta_o$, $\forall\, \delta \leqslant \delta_o$, $s \in [0,1-\delta]$. Donc

$$\forall\, \delta \leqslant \delta_o \quad \overline{\lim_{\epsilon \to 0}}\; h_{c,\epsilon}(s) \leqslant \sup(0, c\, s - (c-c_o)(1-\delta))$$

en passant à la limite, quand $\delta \to 0$, il vient :

$$\forall\, s \in [0,1[, \quad \overline{\lim_{\epsilon \to 0}}\; h_{c,\epsilon}(s) \leqslant \sup(0, c\, s - c + c_o).$$

D'où le résultat, vu (4.2) □

Montrons la convergence de $(u_{c,\epsilon})_\epsilon$, quand $\epsilon \to 0$. Supposons que : $z_o \in]1 - \frac{c_o}{c}, 1[$. Le lemme 4.3 montre que : $\lim_{\epsilon \to 0} u'_{c,\epsilon}(0) = \frac{cz_o + c_o - c}{k(z_o)} > 0$. Par une démonstration analogue à celle du théorème 3, on achève alors la preuve de (ii). Supposons que $z_o \in]0,1 - \frac{c_o}{c}]$. On a (lemme 4.3), $\lim_{\epsilon \to 0} u'_{c,\epsilon}(0) = 0$. Reprenons les notations de la démonstration du théorème 3 : $\forall\, \epsilon \quad \exists\,!\; x_\epsilon$ tel que $u_{c,\epsilon}(x_\epsilon) = \theta_\epsilon$. Montrons par l'absurde que $\lim_{\epsilon \to 0} x_\epsilon = +\infty$. Sinon, on montre aisément (voir théorème 3) qu'il existe une suite $(\epsilon_k)_k$ telle que $\lim_{k \to +\infty} \epsilon_k = 0$, $\lim_{k \to +\infty} x_{\epsilon_k} = \bar{x} < +\infty$ et $\forall\, \underline{x} \in IR$, $\| u_{c,\epsilon_k} - v_c \|_{\mathscr{C}^0([\underline{x}+\infty[,\, IR)} \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$, où v_c est déterminé de manière unique par :

$$\begin{cases} v_c \in \mathscr{C}^0(\mathrm{IR},\mathrm{IR}) \qquad v_c(x) = 1 \qquad \forall\, x \geqslant \bar{x}. \\ v_c \in \mathscr{C}^1(]-\infty,\bar{x}[,\ \mathrm{IR}) \qquad \forall\, x \in]-\infty,\bar{x}[\ -(k(v_c)v_c')'(x) + cv_c'(x) = 0 \\ v_c(0) = z_o \qquad v_c'(0) = 0 \end{cases}$$

ce qui est impossible, car il ne peut pas exister de telle application v_c.

On a donc bien : $\lim_{\epsilon \to 0} x_\epsilon = +\infty$. (i) en découle facilement. □

5. - ETUDE DU PROBLEME SUR UN INTERVALLE BORNE ET REMARQUES SUR L'APPROXIMATION NUMERIQUE

Il est important du point de vue de l'approximation numérique d'étudier un problème analogue à (1.3) dans un intervalle borné ainsi que la convergence d'une solution de ce nouveau problème vers une solution de (0.4). C'est ce qui fait l'objet de cette section. Plus précisément, pour $a > 0$, on pose $I_a = [-a,+a]$ et on considère le problème :

$$(5.1) \qquad \begin{cases} \text{Trouver } u \in \mathscr{C}^2(I_a,[0,1]) \text{ et } c > 0 \text{ tels que :} \\ -(k(u)u')' + cu' = g(u) \text{ sur } I_a \\ -k(u(-a))u'(-a) + cu(-a) = 0 \qquad u(0) = \frac{1}{2}\ u(a) = 1 \end{cases}$$

On suppose que g et k vérifient (0.2) et (0.3). Le théorème 1 (section 1) définit alors un certain $c_o > 0$ et une unique solution de (1.3) notée u_o correspondant à $c = c_o$ et telle que $u_o(0) = \frac{1}{2}$. Notre résultat principal est le suivant :

THEOREME 5. *Pour tout* $a > 0$, *il existe une unique solution* (u_a,c_a) *de (5.1) et l'on a :* $0 < u_a < 1$ u_a *est strictement croissante. De plus :*

$$\lim_{a \to +\infty} c_a = c_o \ \textit{et} \ \lim_{a \to +\infty} u_a = u_o \ \textit{dans} \ \mathscr{C}^0(\mathrm{IR}) \ (\textit{et} \ \mathscr{C}^1_{loc}(\mathrm{IR}))$$

où u_a *a été prolongée à* IR *en posant*

$$u_a(x) = 1,\ \forall\, x \geqslant a \ \textit{et} \ u_a(x) = u_a(-a), \quad \forall\, x \leqslant -a$$

Remarque 5.1. Berestycki, Nicolaenko et Scheurer ont étudié (voir [3,4]), pour le modèle de la température d'ignition, le problème sur un intervalle $I_a = [-a,+a]$ avec les mêmes conditions aux limites que dans (5.1) et en imposant $u(0) = \theta$ (où θ est la température d'ignition). Ils ont montré que le problème admet alors une unique solution, qui tend, quand $a \to +\infty$, vers l'unique solution du problème initial (posé sur IR) fournie par le modèle de la température d'ignition (voir la section 2). Il est intéressant de noter que, ici, contrairement à ce qui se passe pour le problème posé dans IR, l'absence de température d'ignition n'entraîne pas l'existence d'une infinité de solutions : les résultats d'existence et d'unicité sont en tous points analogues pour les deux modèles.

Rappelons quelques résultats de la section 1 qui seront utilisés dans la démonstration du théorème 5. On se servira souvent du lemme 1.5 et du corollaire 1.6. De plus, on a vu que si $\Gamma_+(c)$ est défini par (1.9), alors $\forall\ c > 0,\ \Gamma_+(c) =]\lambda(c),+\infty[$ (où $\lambda(c)$ est défini dans la proposition 1.8) et $\forall\ \lambda \in \Gamma_+(c)$, si on considère le problème (5.2), (où on ne cherche plus u à valeurs dans $[0,1]$), g et k ayant été prolongées à IR

$$(5.2) \qquad \begin{cases} -(k(u)u')' + cu' = g(u) \\ u(0) = \dfrac{1}{2} \\ u'(0) = \lambda \end{cases}$$

alors (5.2) admet une solution unique, notée u_λ, qui vérifie : $\forall\ x \in IR,\ u'_\lambda(x) > 0$ (la démonstration du lemme 1.18 prouve ce résultat pour les $x < 0$). Enfin :

$$\exists\,!\ x_\lambda \in]0,+\infty[\text{ tel que } u_\lambda(x_\lambda) = 1 \quad \text{et} \quad \exists\,!\ y_\lambda \in [-\infty,0[$$

tel que $u_\lambda(y_\lambda) = 0$.

Dans une première partie, démontrons l'existence d'une solution de (5.1). D'après les rappels faits ci-dessus, si (u_a,c_a) est une solution de (5.1), alors $u'_a(0) > 0$. On va donc utiliser une «méthode analogue» à celle du théorème 1. On commencera par montrer que :

$$(5.3) \qquad \forall\ c > 0 \qquad \forall\ a > 0 \qquad \exists\,!\ \lambda > 0 \text{ tel que } u_\lambda(a) = 1.$$

On étudiera ensuite s'il existe des c pour lesquels l'unique solution de (5.2) ainsi définie vérifie (5.1). Remarquons toutefois, que, contrairement à ce qui se passait pour le théorème 1, l'existence d'une solution de (5.1) n'implique pas (5.3).

LEMME 5.2. *Soit* $c > 0$ *fixé*.

(i) $\forall\ s \in]\frac{1}{2}, 1]$, *l'application* $\begin{array}{l}]\lambda(c), +\infty[\to IR^{+*} \\ \lambda \to u_\lambda^{-1}(s) \end{array}$ *est strictement décroissante.*

En particulier, $f_1(\lambda) = u_\lambda^{-1}(1) = x_\lambda$ *est strictement décroissante.*

(ii) $\forall\ s \in]0, \frac{1}{2}[$, *l'application :* $\begin{array}{l}]\lambda(c), +\infty[\to IR^{+*} \\ \lambda \to u_\lambda^{-1}(s) \end{array}$ *est strictement croissante.*

L'application $f_o(\lambda) = u_\lambda^{-1}(0) = y_\lambda$ *est croissante.*

Preuve. Ce sont des conséquences immédiates du corollaire 1.6 et de la remarque 1.7.

LEMME 5.3. $\forall\ a > 0$, $\forall\ c > 0$, $\exists\,!\ \lambda (= \lambda(c,a))$ *tel que* $u_\lambda(a) = 1$ *et* $\forall\ a > 0$, *l'application* $\begin{array}{l} IR^{+*} \to IR^{+*} \\ c \to \lambda(c,a) \end{array}$ *est continue. De plus :*

$$. \ a_1 < a_2 \Rightarrow \lambda(c,a_2) < \lambda(c,a_1)$$

$$. \ c_1 < c_2 \Rightarrow \lambda(c_2,a) < \lambda(c_1,a)$$

Preuve. Soit $c > 0$ fixé. Il s'agit de montrer, avec la notation du lemme 5.5, que : $\forall\ a > 0$ $\exists\,!\ \lambda \in]\lambda(c), +\infty[$ tel que $f_1(\lambda) = a$, ou que, vue que f_1 est strictement décroissante : f_1 est continue et

$$\lim_{\lambda \to +\infty} f_1(\lambda) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\lambda \to \lambda(c)} f_1(\lambda) = +\infty.$$

Montrons que f_1 est continue. Soit $\lambda_o \in]\lambda(c), +\infty[$ fixé. Notons $u_{\lambda_o} = u_o$ et $x_{\lambda_o} = x_o$. Soit $\epsilon > 0$. Soit $\lambda < \lambda_o$. Associons à u_λ, h_λ par (1.7) : $h_\lambda \in \mathscr{C}^1([\frac{1}{2}, 1])$ $h_\lambda(\frac{1}{2}) = k(\frac{1}{2})\,\lambda$ et $\forall\ 0 < \lambda_1 < \lambda < \lambda_o$ $\forall\ s \in [\frac{1}{2}, 1]$ $h_{\lambda_1}(s) < h_\lambda(s) < h_{\lambda_o}(s)$.

D'autre part, utilisant un facteur intégrant dans l'équation satisfaite par h, on obtient aisément la relation : $\forall\ 0 < \lambda_1 < \lambda < \lambda_o$, $\forall\ s \in [\frac{1}{2}, 1]$

$$0 < h_{\lambda_o}(s) - h_\lambda(s) < (h_{\lambda_o}(\tfrac{1}{2}) - h_\lambda(\tfrac{1}{2}))\ \exp\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{g(s)k(s)}{h_{\lambda_1}(s)h_{\lambda_o}(s)}\, ds\right).$$

Donc, $\forall\ s \in [\frac{1}{2}, 1]$, $h_\lambda(s) \underset{\lambda \to \lambda_o}{\to} h_{\lambda_o}$ et le théorème de Dini entraîne :

$$h_\lambda \underset{\lambda \to \lambda_o}{\to} h_{\lambda_o} \quad \text{dans } \mathscr{C}^o([\tfrac{1}{2}, 1]). \text{ Donc :}$$

$$\exists\,\gamma > 0 \quad \exists\,\eta_1 > 0, \quad \forall\,\lambda \quad 0 < \lambda_o - \lambda < \eta_1 \Rightarrow \sup_{s \in [\frac{1}{2}, 1]} h_\lambda(s) \geqslant \gamma$$

D'autre part :

$$\exists \eta_2 > 0 \quad \forall \lambda \quad 0 < \lambda_o - \lambda < \eta_2 \Rightarrow 0 < u_o(x_o) - u_\lambda(x_o) < \frac{\gamma\epsilon}{\beta} \text{ où } \beta = \sup_{x \in [0,1]} k(x)$$

Alors, $\forall \lambda \quad 0 < \lambda_o - \lambda < \inf(\eta_1, \eta_2)$.

$$0 < x_\lambda - x_o = \int_{u_\lambda(x_o)}^{1} (u_\lambda^{-1})'(s)ds \leqslant \int_{1-\frac{\gamma\epsilon}{\beta}}^{1} \frac{k(s)}{h_\lambda(s)} ds \leqslant \epsilon.$$

Traitons le cas $\lambda > \lambda_o$ en gardant les mêmes notations.

$$\forall x \in [x_\lambda, x_o], \ -k(u_\lambda(x))u'_\lambda(x) + cu_\lambda(x) = -k(1)u'_\lambda(x_\lambda) + c$$

donc :

$$\forall x \in [x_\lambda, x_o], \quad u'_\lambda(x) \geqslant \frac{1}{\beta} k(1)u'_\lambda(x_\lambda) = \frac{1}{\beta} h_\lambda(1) > \frac{1}{\beta} h_{\lambda_o}(1).$$

On conclue alors de la même façon que dans le cas $\lambda < \lambda_o$.

Il est aisé de voir que $\lim_{\lambda \to \lambda(c)} f_1(\lambda) = +\infty$. On montre que $\lim_{\lambda \to +\infty} f_1(\lambda) = 0$ en utilisant (1.6) pour prouver que

$$\exists \delta > 0 \quad \exists \lambda_o > 0 \quad \forall \lambda \geqslant \lambda_o \quad \forall x \in]0, x_\lambda] \quad u'_\lambda(x) \geqslant \delta\lambda$$

On montre aisément que $c \to \lambda(a,c)$ est continue. L'implication $a_1 < a_2 \Rightarrow \lambda(c,a_2) < \lambda(c,a_1)$ résulte trivialement de la stricte monotonie de f_1. Soient $c_1 < c_2$ et $a > 0$. On sait que :

$$\lambda(c_1,a) > \lambda(c_1) > \lambda(c_2) \ ; \text{ donc } \lambda(c_1,a) \in \Gamma_+(c_2)$$

Notons $u_i, i = 1,2$, la solution de :

$$\begin{cases} -(k(u_i)u'_i)' + c_i u'_i = g(u_i) \\ u_i(0) = \frac{1}{2} \quad u'_i(0) = \lambda(c_1,a). \end{cases}$$

Le corollaire 1.6 entraîne que : $u_2^{-1}(1) < u_1^{-1}(1) = a$, donc $\lambda(c_2,a) < \lambda(c_1,a)$.

LEMME 5.4. $\forall a > 0$, *le problème (5.1) admet (au moins) une solution* (u_a, c_a). *De plus,*

$$\forall a_o > 0, \ \exists c'(= c'(a_o)) \quad \forall a \geqslant a_o \quad c_a \leqslant c'.$$

Preuve. Soit $a > 0$ fixé. $\forall\, c > 0$, notons v_c la solution de (5.2) correspondant à $\lambda = \lambda(c,a)$. L'application $f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$, $c \to -k(v_c(-a))v_c'(-a) + cv_c(-a)$ est continue. On va montrer, grâce au théorème des valeurs intermédiaires, que $\exists\, c_a$ $f(c_a) = 0$. Pour un tel c_a, nécessairement $v_{c_a}(-a) > 0$, donc v_{c_a} est solution de (5.1).

Soit $c_1 > 0$ fixé. Alors $\forall\, c < c_1$, $\lambda(c,a) > \lambda(c_1,a)$, donc :

$$-k(v_c(0))v_c'(0) + cv_c(0) < -k(\frac{1}{2})\,\lambda(c_1,a) + \frac{c}{2}$$

Cette relation prouve que pour c suffisamment petit, on a :

$$-k(v_c(-a))v_c'(-a) + c\,v_c(-a) < -k(v_c(0))v_c'(0) + c\,v_c(0) < 0$$

Montrons maintenant que :

$$\text{(5.4)}\qquad \begin{array}{l} \forall\, a_o > 0 \quad \exists\, c'\ (= c'(a_o)) \quad \forall\, a > a_o \quad \forall\, c > c' \\ -k(v_c(-a))v_c'(-a) + c\,v_c(-a) > 0. \end{array}$$

Ce qui achèvera la preuve du lemme.

Soit $a_o > 0$ fixé. $\forall\, c > 2\sqrt{\beta\sigma} = c_2$, où $\sigma = \sup\limits_{x \in]0,1[} \dfrac{g(x)}{x}$, soit $r_c = \dfrac{c + \sqrt{c^2 - 4\beta\sigma}}{2}$ (racine de $X^2 - cX + \sigma\beta$). $\forall\, c$, associons à v_c, w_c par (1.7). Alors $w_c(\frac{1}{2}) = k(\frac{1}{2})\,\lambda(c,a)$.

$$\forall\, a > a_o \qquad \forall\, c > c_2 \qquad \lambda(c,a) < \lambda(c_2,a) < \lambda(c_2,a_o)$$

donc :

$$\exists\, c_3 \qquad \forall\, a > a_o \qquad \forall\, c > \sup(c_2,c_3) = c'$$

$$w_c(\frac{1}{2}) < k(\frac{1}{2})\,\lambda\,(c_2,a_o) < \frac{r_c}{2}$$

On en déduit alors (voir la preuve du lemme 1.20 (ii)) :

$$\forall\, a > a_o \qquad \forall\, c > c' \qquad v_c^{-1}(0) = -\infty.$$

D'où (5.4). □

LEMME 5.5. $\forall\, a > 0$, *le problème (5.1) a une unique solution notée* (u_a, c_a).

Preuve. Raisonnons par l'absurde et supposons que (5.1) admet deux solutions différentes (u_1, c_1) et (u_2, c_2). Alors nécessairement $c_1 \neq c_2$ et supposons par exemple $c_1 < c_2$. Associons à u_i, h_i par (1.7) pour $i = 1,2$.

$$h_2(\frac{1}{2}) = k(\frac{1}{2})\, \lambda\, (c_2, a) < k(\frac{1}{2})\, \lambda\, (c_1, a) = h_1(\frac{1}{2}).$$

Donc (lemme 1.5) $\forall\, s \in [0, \frac{1}{2}]$ $h_2(s) < h_1(s)$. Notons $\alpha_i = u_i(-a)$, $i = 1,2$. On a $0 < \alpha_i < \frac{1}{2}$.

Alors ou bien $\alpha_2 \leqslant \alpha_1$, ou bien $\alpha_1 < \alpha_2$. Montrons que chaque cas conduit à une contradiction. C'est évident si l'on suppose $\alpha_2 \leqslant \alpha_1$ (voir corollaire 1.6 (ii)). Supposons $\alpha_1 < \alpha_2$

$$\forall\, i = 1,2 \qquad h_i(\alpha_i) = k(\alpha_i)\, u_i'(u_i^{-1}(\alpha_i)) = c_i\, \alpha_i$$

$$\forall\, s \in\,]\alpha_1, 1] \quad h_1' < c_1 \Rightarrow h_1(\alpha_2) < c_1\, \alpha_2$$

$$h_2(\alpha_2) = c_2\, \alpha_2 < h_1(\alpha_2) < c_1\, \alpha_2 .$$

Ce qui est impossible. □

Dans le but de faire tendre a vers $+\infty$, établissons deux estimations a priori pour (u_a, c_a) (qui est, pour tout $a > 0$, l'unique solution de (5.1)).

LEMME 5.6. $$\forall\, a > 0, \quad c_a > \sqrt{2 \int_{\frac{1}{2}}^{1} k(s) g(s)\, ds}.$$

Preuve. On écrit les trois relations (1.1), (1.2) et (1.3) entre $-a$ et a. La méthode de la remarque 1.3 fournit l'inégalité :

$$c > \sqrt{2 \int_{u(-a)}^{1} k(s) g(s)\, ds}.$$

D'où le résultat puisque

$$u(-a) < u(0) = \frac{1}{2}.$$ □

LEMME 5.7. $$\forall\, x \in [-a, +a], \quad 0 < u_a'(x) \leqslant \frac{c_a}{\alpha}$$

où

$$\alpha = \inf_{x \in [0,1]} k(x).$$

Preuve. L'utilisation d'un facteur intégrant pour l'équation satisfaite par u_a conduit à la relation : $\forall x \in [-a,+a]$

$$k(u_a(x))u_a'(x) = \exp\left(-\int_x^a \frac{c_a}{k(u_a)}\,ds\right) k(u_a(a))\,u_a'(a) + \int_x^a g(u_a(y))\exp\left(-\int_x^y \frac{c_a}{k(u_a)}\,ds\right)dy$$

donc,

$$k(u_a(x))u_a'(x) \leqslant \exp\left(-\int_x^a \frac{c_a}{k(u_a)}\,ds\right) k(u_a(a))\,u_a'(a) + \int_{-a}^a g(u_a(y))dy$$

$$\text{or (1.1)} \Rightarrow \int_{-a}^a g(u_a(y))dy = -k(u_a(a))u_a'(a) + c_a$$

$$\Rightarrow \alpha u_a'(x) \leqslant c_a + k(u_a(a))u_a'(a)\left[\exp\left(-\int_x^a \frac{c_a}{k(u_a)}\,ds\right) - 1\right] \leqslant c_a. \qquad \square$$

LEMME 5.8. $\lim_{a \to +\infty} c_a = c_0$ *et* $\lim_{a \to +\infty} u_a = u_0$ *dans* $\mathscr{C}^0(\mathrm{IR})$ (*et* $\mathscr{C}^1_{loc}(\mathrm{IR})$), *où* u_a *a été prolongée à* IR *en posant* $u_a(x) = 1, \ \forall x \geqslant a$ *et* $u_a(x) = u_a(-a), \ \forall x \leqslant -a$.

Preuve. Soit $a_0 > 0$. D'après les lemmes 5.4 et 5.6, $\exists\, 0 < \underline{c} < \bar{c}, \ \forall a > a_0, \ \underline{c} \leqslant c_a \leqslant \bar{c}$. Soit c_1 valeur d'adhérence de c_a, quand $a \to +\infty$; $\exists (a_n)_n, \ \lim_{n \to +\infty} \uparrow a_n = +\infty$ et $c_1 = \lim_{n \to +\infty} c_{a_n}$.

Notons $c_{a_n} = c_n$, $u_{a_n} = u_n$. Il est aisé de voir (lemme 5.7) que $\forall$ K compact de IR, u_n est borné indépendamment de n dans $H^2(K)$. De plus montrons que

$$u_n'(0) = \lambda(c_n, a_n) \underset{n \to +\infty}{\to} \lambda(c_1). \tag{5.5}$$

On vérifie facilement que l'application $\ell : \begin{array}{l} \mathrm{IR}^{+*} \to \mathrm{IR}^{+*} \\ c \to \lambda(c) \end{array}$ est continue. $\forall n \in \mathrm{IN}$, notons ℓ_n l'application : $\begin{array}{l} \mathrm{IR}^{+*} \to \mathrm{IR}^{+*} \\ c \to \lambda(c, a_n) \end{array}$. Alors la suite $(\ell_n)_n$ est décroissante. Le théorème de Dini assure donc que $\ell_n \underset{n \to +\infty}{\to} \ell$ uniformément sur $[\underline{c}, \bar{c}]$. (5.5) s'en déduit immédiatement.

Il résulte de ce qui précède que $u_n \underset{n \to +\infty}{\to} u$ dans $\mathscr{C}^1_{loc}(\mathrm{IR})$, où u vérifie :

$$\begin{cases} u \in \mathscr{C}^1(\mathrm{IR},\mathrm{IR}) & -(k(u)u')' + c_1 u' = g(u) \text{ sur IR} \\ u(0) = \dfrac{1}{2} & u'(0) = \lambda(c_1) \\ \forall x \in \mathrm{IR} & 0 \leqslant u(x) \leqslant 1. \end{cases}$$

Donc, nécessairement, $u(-\infty) = 0$ et c_1 est tel que l'équation (1.3) associée à c_1 a une solution, d'où $c_1 \geqslant c_o$ (où c_o, rappelons-le, a été défini dans le théorème 1, section 1). Pour $c' > 0$ fixé, notons $(P_{c'})$ la propriété suivante :

$$\forall c \in]0,c'[, \quad \forall \lambda \in \Gamma_+(c), \ u_\lambda \text{ défini par (5.2) vérifie } -\infty < y_\lambda = u_\lambda^{-1}(0).$$

On va montrer que (P_{c_1}) est vérifiée et que $\forall c_2 > c_o$, (P_{c_2}) n'est pas vérifiée. Il en résultera que : $c_1 \leqslant c_o$ et donc $c_1 = c_o$. Soit $c \in]0,c_1[$. $\exists\, n_o \quad \forall n > n_o \quad c < c_n$.

L'application $f_o : \Gamma_+(c) \to \overline{\mathrm{IR}}$, $\lambda \to y_\lambda$ est croissante (lemme 5.2 (ii)) et $\lim\limits_{n \to +\infty} \lambda(c,a_n) = \lambda(c)$. Il suffit donc de montrer que : $\forall n > n_o \quad y_{\lambda(c,a_n)} > -\infty$. Soit $n > n_o$ fixé . Définissons v_n par

$$\begin{cases} -(k(v_n)v'_n)' + c_n \ v'_n = g(v_n) \text{ sur IR} \\ v_n(0) = \dfrac{1}{2} \quad v'_n(0) = \lambda(c_n,a_n) \end{cases}$$

v_n coïncide avec u_n sur $[-a,a]$; en particulier :

$$-k(v_n(-a))v'_n(-a) + c_n\, v_n(-a) = 0,$$

donc nécessairement $v_n^{-1}(0) > -\infty$. On a : $c < c_n$ et $u'_{\lambda(c,a_n)}(0) = \lambda(c,a_n) > \lambda(c_n,a_n) = v'_n(0)$ d'où (corollaire 1.6 (b), (ii)) : $v_n^{-1}(0) < u_{\lambda(c,a_n)}^{-1}(0)$. (P_{c_1}) est donc bien vérifié.

Soit maintenant $c_2 > c_o$. On montre facilement en utilisant le corollaire 1.6 que : $\forall c \in]c_o,c_2[$ $\forall \lambda \in]\lambda(c),\lambda(c_o)[\ u_\lambda^{-1}(0) = -\infty$. Ce qui entraîne que (P_{c_2}) n'est pas vérifiée.

On a donc prouvé que :

$$\lim_{a \to +\infty} c_a = c_o \quad \text{et} \quad \lim_{a \to +\infty} u_a = u_o \text{ dans } \mathscr{C}^1_{loc}(\mathrm{IR}).$$

On vérifie aisément que

$$c_a \underset{a \to +\infty}{\to} u_o \quad \text{dans } \mathscr{C}^0(\mathrm{IR}). \qquad \square$$

Remarque 5.9. L'étude numérique de (5.1), à l'aide d'une méthode d'éléments finis monodimensionnels, est en cours et fera l'objet d'une publication ultérieure.

REFERENCES

[1] ARONSON D.G. et WEINBERGER H.F. *«Nonlinear diffusion in population genetics, combustion and nerve propagation».* In Partial Differential Equations and Related Topics, Lecture Notes in Math. 446, Springer Verlag, New York (1975), 5-49.

[2] BERESTYCKI H., LIONS P.L. et PELETIER L.A. Indiana Univ. Math. J. 30 (1981), 141-157.

[3] BERESTYCKI H., NICOLAENKO B. et SCHEURER B. *«Sur quelques problèmes asymptotiques avec applications à la combustion»* C.R. Ac. Sc. Paris, Série I, 296 (1983), 105-108.

[4] BERESTYCKI H., NICOLAENKO B. et SCHEURER B. *«Mathematical analysis and singular limits of laminar flame fronts».* A paraître.

[5] BUCKMASTER J. et LUDFORD G.S.S. *«The laminar flame theory».* Cambridge Univ. Press (1982).

[6] FIFE P.C. *«Mathematical aspects of reacting and diffusing systems».* Lecture Notes in Biomathematics 28, Springer Verlag (1979).

[7] JOHNSON W.E. *«On a first order boundary value problem from laminar flame theory»* Arch. Rat. Mech. Anal., 13, (1963), 46-54.

[8] JOHNSON W.E. et NACHBAR W. *«Laminar flame theory and the steady linear burning of a monopropellant».* Arch. Rat. Mech. Anal., 12, (1963), 58-91.

[9] WILLIAMS F.A. *«Combustion theory».* Addison Wesley, Cambridge, Mass. (1965).

[10] UCHIYAMA K. *«The behavior of some non linear diffusion equations for large time».* J. Math. Kyoto Univ., 18, (1978), 453-508.

(Manuscrit reçu le 27 septembre 1983)