ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

A. HARAUX
M. KIRANE

Estimations $C1$ pour des problèmes paraboliques semi-linéaires

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 5e série, tome 5, nº 3-4 (1983), p. 265-280
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1983_5_5_3-4_265_0>

Annales Faculté des Sciences Toulouse
Vol V, 1983, P. 265 à 280

ESTIMATIONS C^1 POUR DES PROBLEMES PARABOLIQUES SEMI-LINEAIRES

A. Haraux *(1)* **et M. Kirane** *(2)*

(1)(2) Université Pierre et Marie Curie, Laboratoire d'Analyse Numérique (LA 189), Tour 55-65 5e étage, 4 place Jussieu, 75230 Paris Cédex 05 - France.

Résumé : On donne une méthode générale, indépendante de la dimension de Ω, pour estimer dans $C^1(\overline{\Omega})$ les solutions d'équations d'évolution semi-linéaires de la forme

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f(t,x,u(t,x)) \quad , \quad t \geqslant 0 \quad , \quad x \in \Omega.$$

Cette méthode est également applicable à certains systèmes de réaction-diffusion et permet alors d'étudier simplement le comportement des solutions lorsque $t \to +\infty$.

Summary : We lay down a general method, independant of the dimension of Ω, to estimate the C^1-norm of $u(t,\cdot)$, where u satisfies a semilinear evolution equation of the form

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f(t,x,u(t,x)) \quad , \quad t \geqslant 0 \quad , \quad x \in \Omega.$$

The same principle can be applied to some reaction-diffusion systems, then allowing a simple treatment of asymptotics of solutions as $t \to +\infty$.

INTRODUCTION

Dans toute la suite, Ω désignera un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, à frontière $\Gamma = \partial\Omega$ de classe C^2, et Δ l'opérateur Laplacien dans Ω.

Il est bien connu que les équations semi-linéaires de la forme

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f(t,u(t,x)) \quad , \quad t \geqslant 0 \quad , \quad x \in \Omega$$

avec divers types de conditions aux limites, possèdent un *effet régularisant* sur la donnée initiale, qui en général persiste jusqu'à l'explosion éventuelle de la solution lorsque $t \to T\max$.

Si la solution est globale (dans $C(\overline{\Omega})$ par exemple), il peut néanmoins être délicat du point de vue technique de démontrer que la solution reste très régulière pour $t > 0$, et encore plus d'obtenir des *estimations uniformes* dans $C^r(\overline{\Omega})$ pour $t \to +\infty$.

Si on se limite aux méthodes faisant intervenir les espaces de Hilbert $H^m(\Omega)$, lorsque n est grand on n'arrive à estimer la solution dans $C^1(\overline{\Omega})$ qu'au prix de complications techniques considérables, et aussi (ce qui est plus grave) d'hypothèses de régularité supplémentaires sur Γ et f.

Dans ce travail, nous élaborons une méthode INDEPENDANTE DE LA DIMENSION pour estimer la solution dans les classes $C(\overline{\Omega})$ et $C^1(\overline{\Omega})$.

Les seules *hypothèses de régularité* nécessaires sur f sont celles qui assurent l'existence locale d'une solution dans $C(\overline{\Omega})$.

On montre alors que si u(t) est bornée pour $t \geqslant 0$ dans $C(\overline{\Omega})$ alors u est bornée : $[1,+\infty[\to C^1(\overline{\Omega})$ et donc $\bigcup_{t \geqslant 0} \{u(t)\}$ est précompact dans $C^0(\overline{\Omega})$.

Dans la pratique, le bornage de u(t) dans $C(\overline{\Omega})$ peut s'obtenir par l'utilisation combinée de propriétés particulières de f, et d'un procédé itératif dont l'ingrédient de base est exposé dans la section 2 (Théorème 2.1).

Le champ d'application naturel de ces méthodes est celui des systèmes paraboliques du type réaction-diffusion qu'on rencontre en Chimie ou en Biologie.

Dans la dernière partie de ce travail, nous examinons en détail un système de deux équations paraboliques couplées qui généralise en dimension > 1 un modèle de propagation des épidémies traité dans [23] par G.F. Webb.

Grâce au résultat de bornage des trajectoires dans $C^1(\overline{\Omega}) \times C^1(\overline{\Omega})$, le *comportement à l'infini* des solutions peut être analysé par une application *élémentaire* du «principe d'invariance» de La Salle.

Bien que l'inégalité de base (Théorème 1.1) repose sur la *théorie des semi-groupes analytiques* dans $L^p(\Omega)$ et les inégalités de Nirenberg-Gagliardo, nous pensons que la méthode, relativement simple sur le plan conceptuel, devrait s'appliquer à la plupart des systèmes paraboliques usuels.

0. - QUELQUES NOTATIONS ET RAPPELS

Soit Ω comme dans l'introduction, et A un opérateur linéaire positif, supposé maximal monotone, dans $L^2(\Omega)$.

Pour $p \in [1,+\infty[$, on définit un opérateur A_p dans $L^p(\Omega)$ par son graphe $G(A_p)$ dans $L^p(\Omega) \times L^p(\Omega)$

$$G(A_p) = \begin{cases} \text{fermeture du graphe de A dans } L^p(\Omega) \times L^p(\Omega) \text{ si } p \leqslant 2 \\ G(A) \cap [L^p(\Omega) \times L^p(\Omega)] \quad \text{si } p \geqslant 2 \end{cases}$$

On dira (par abus de langage) que A est m-accrétif dans tous les L^p (pour $p \in [1,+\infty[$) si A_p est m-accrétif dans L^p pour $1 \leqslant p < +\infty$.

On peut alors vérifier que pour tout $p \geqslant 1$, on a

$$G(A_p) = G(A_1) \cap [L^p(\Omega) \times L^p(\Omega)] .$$

On définit les sous-espaces vectoriels suivants de $L^1(\Omega)$

$$D_p(A) = D(A_p)$$

$$D_\infty(A) = \bigcap_{1 \leqslant p < +\infty} D(A_p)$$

Dans toute la suite, on supposera que A est tel que

$$D_p(A) \hookrightarrow W^{2,p}(\Omega), \quad \forall\, p \in [2,+\infty[\quad (0,1)$$

Dans ce cas, il est clair que $D_\infty(A) \subset C^1(\overline{\Omega})$, ceci quelle que soit la dimension de Ω. On pose

$$X = \text{fermeture de } D_\infty(A) \text{ dans } C(\overline{\Omega})$$

$$Y = \text{fermeture de } D_\infty(A) \text{ dans } C^1(\overline{\Omega})$$

Les espaces X et Y, respectivement fermés dans $C(\overline{\Omega})$ et $C^1(\overline{\Omega})$ seront munis de la norme-trace qui en font des espaces de Banach réel. On utilisera de plus les notations suivantes

- Si $u \in L^p(\Omega)$, la norme de u dans L^p est notée $\| u \|_p$ pour $p \in [1,+\infty[$

- Si $u \in W^{m,p}(\Omega)$, la norme de u dans $W^{m,p}$ est notée $\| u \|_{m,p}$ pour $p \in [1,+\infty]$ et $m \in \mathbb{N}$.

- Les normes dans $C(\overline{\Omega})$ et $C^1(\overline{\Omega})$ seront notées $\| \quad \|_\infty$ et $\| \quad \|_{1,\infty}$ respectivement.

Si Z est un espace de Banach quelconque et $a \in IR$, on notera par $C_B([a,+\infty[\,,Z)$ l'espace des fonctions continues $\varphi : [a,+\infty[\to Z$ telles que $\varphi(t)$ reste bornée dans Z pour $t \geqslant a$.

Enfin, une fonction mesurable $f : IR^+ \to Z$ est dite appartenir à la classe $S^p(IR^+,Z)$ (avec $1 \leqslant p < +\infty$) si $f \in L^p_{loc}(R^+,Z)$ et $\sup\limits_{t \geqslant 0} \| f \|_{L^p(t,t+1;Z)} < +\infty$.

1. - UNE ESTIMATION LINEAIRE INDEPENDANTE DE LA DIMENSION

Soit A comme dans la section 0, un opérateur m-accrétif dans tous les $L^p(\Omega)$, et e^{-tA} le semi-groupe de contractions engendré par $-A$ dans $L^2(\Omega)$.

THEOREME 1.1. *On suppose que* A *vérifie* (0.1) *et que* e^{-tA} *est un semi-groupe analytique dans* $L^p(\Omega)$ *pour tout* $p \in [2,+\infty[$.

Alors, pour tout $u_o \in L^\infty(\Omega)$ *et tout* $t > 0$, *on a* $e^{-tA} u_o \in Y$, *et les estimations suivantes sont satisfaites*

(1.1)
$$\forall \epsilon > 0, \ \exists C(\epsilon) \in IR^+ \quad \textit{telle que}$$
$$\| e^{-tA} u_o \|_\infty \leqslant C(\epsilon)\, t^{-\frac{n}{n+\epsilon}} \| u_o \|_{\frac{n}{2}+\epsilon} \ ; \ \forall t \in]0,1]$$
$$[\text{en dimension 1, il faut supposer } \epsilon \geqslant \tfrac{1}{2}]$$

(1.2)
$$\forall \epsilon \in]0,\tfrac{1}{2}[\ , \ \exists D(\epsilon) \in IR^+ \quad \textit{telle que}$$
$$\| e^{-tA} u_o \|_{1,\infty} \leqslant D(\epsilon)\, t^{-\frac{1}{2}-\epsilon} \| u_o \|_\infty, \ \forall t \in]0,1]$$

Démonstration. Il est classique que $e^{-tA} u_o \in D_\infty(A)$ pour tout $t > 0$. Pour démontrer les estimations, on remarque d'abord que pour tout $p \geqslant 2$, on a

$$\| A e^{-tA} u_o \|_p \leqslant \frac{C(p)}{t} \| u_o \|_p \ , \quad \forall t > 0$$

et comme $D_p(A) \hookrightarrow W^{2,p}(\Omega)$, il en résulte

(1.3)
$$\| e^{-tA} u_o \|_{2,p} \leqslant \frac{C_1(p)}{t} \| u_o \|_p \ , \quad \forall t \in]0,1] \ .$$

D'autre part, rappelons une version récente (cf. [14], p. 37) des inégalités de Nirenberg-Gagliardo.

Soit $m \in \mathbb{N}$ et p, r deux réels $\geqslant 1$.

Si $u \in W^{m,p}(\Omega)$, on a $u \in C^{\nu}(\overline{\Omega})$ pour tous les $\nu \in \mathbb{N}$ tels que $\nu < m - n/p$. En outre, si $\theta \in [0,1]$ est tel que

$$\nu < \theta(m-n/p) - (1-\theta)n/r, \quad \text{on a}$$

(1.4) $$\| u \|_{\nu,\infty} \leqslant C(\theta) \| u \|^{\theta}_{m,p} \| u \|^{1-\theta}_{r}$$

Appliquons d'abord cette formule avec $\nu = 0$, $m = 2$, $p = r = \frac{n}{2} + \epsilon$. Si on pose $\theta = \frac{n}{n+\epsilon}$, alors

$$\nu = 0 < \theta(m-n/p) - (1-\theta)n/r = 2\theta - n/r = \frac{2n}{n+\epsilon} - \frac{2n}{n+2\epsilon}\ .$$

En combinant (1.3) et (1.4) appliquée à $u = e^{-t\,A}\,u_o$, puisque $\| u \|_r \leqslant \| u_o \|_r$ on obtient immédiatement (1.1).

Si on prend d'autre part $\nu = 1$, $m = 2$, les conditions d'application de (1.4) se réduisent à $p > n$, et dès que $\frac{1}{2-n/p} < \theta \leqslant 1$, on peut trouver $r \in R^+$ pour lequel (1.4) est satisfaite.

En combinant (1.3) et (1.4) comme précédemment, on obtient cette fois

$$\| e^{-t\,A} u_o \|_{1,\infty} \leqslant K(p,\theta) \| u_o \|^{1-\theta}_r \left[\frac{\| u_o \|_p}{t} \right]^{\theta} \leqslant L(p,\theta) t^{-\theta} \| u_o \|_{\infty},$$

pour tout $\theta \in \left[\frac{1}{2-n/p}, 1 \right]$ et $t \in]0,1]$.

Il suffit donc de choisir p assez grand pour obtenir (1.2) avec ϵ arbitrairement petit.

2. - EQUATIONS LINEAIRES AVEC SECOND MEMBRE

Le résultat le plus remarquable de la section 1 est que le semi-groupe $e^{-t\,A}$ envoie X dans Y pour tout $t > 0$, avec une norme dans $\mathcal{L}(X,Y)$ qui est INTEGRABLE au voisinage de $t = 0$.

Ce résultat, indépendant de la dimension n de Ω, va nous permettre de démontrer des estimations dans la classe $C^1(\overline{\Omega})$ pour certaines équations d'évolution semi-linéaires du type «diffusion».

Un deuxième outil fondamental pour établir ce type de résultats est l'obtention d'un résultat pour les équations linéaires avec second membre.

Dans cette section, on désigne par E et F deux espaces de Banach réels, munis de normes respectivement représentées par les symboles $| \quad |$ et $\| \quad \|$, et tels que

$$F \hookrightarrow E.$$

On considère un opérateur linéaire L dans E, qui engendre un semi-groupe T(t) fortement continu dans E tel que

- Pour tout $t > 0$, $T(t)\, E \subset F$.

- Il existe α, $0 \leqslant \alpha < 1$ tel que

$$\forall\, t \in]0,1]\,,\ \forall\, x \in E, \quad \| T(t)x \| \leqslant C\, t^{-\alpha}\, |x| \tag{2.1}$$

THEOREME 2.1. *Soit* $p > 1/_{1-\alpha}$, $f \in S^p(\mathbb{R}^+,E)$ *et* u *une solution (faible) sur* $\mathbb{R}^+$ *de*

$$\frac{du}{dt} = L\, u(t) + f(t) \tag{2.2}$$

Alors, si u *est bornée :* $[0,+\infty[\to E$, *on a en fait* $u(t) \in F$ *pour tout* $t > 0$, *et*

$$u \in C_B(\delta,+\infty;F) \quad \textit{pour tout}\ \ \delta > 0.$$

Démonstration. De l'inégalité (2.1) et de la propriété de semi-groupe linéaire de T(t), on déduit aisément que pour tout $\varphi \in E$, $T(t)\, \varphi \in C(]0,+\infty[\,;F)$.

D'autre part, quitte à remplacer t par δt et (2.2) par une équation analogue, il suffit de vérifier que $u(t) \in F$ pour $t \geqslant 1$ et $u \in C_B(1,+\infty;F)$. Pour tout $t \geqslant 0$, on peut écrire

$$u(t+1) = T(1)\, u(t) + \int_0^1 T(\sigma)\, f(t+1-\sigma) d\sigma, \tag{2.3}$$

l'intégrale étant absolument convergente dans E. La démonstration du théorème 2.1 s'appuie sur un lemme.

LEMME 2.2. *Pour* $\varphi \in E$ *et* $g \in L^p(0,1;E)$, *posons*

$$\mathcal{T}(\varphi,g) = T(1)\varphi + \int_0^1 T(\sigma)\, g(1-\sigma) d\sigma$$

Alors :

$$\forall\, [\varphi,g] \in E \times L^p(0,1;E), \quad \mathcal{T}(\varphi,g) \in F.$$

De plus $\mathcal{T} : E \times L^p(0,1;E) \to F$ *est continue.*

Démonstration du lemme 2.2.

- Si g est en escaliers sur $[0,1]$ avec $g = 0$ sur $[1-\eta,1]$ et $\eta > 0$, il est clair que la fonction : $[0,1] \to F$ définie par $\sigma \to T(\sigma)\, g(1-\sigma)$ est fortement mesurable et, presque partout sur $[0,1]$ on a

$$\| T(\sigma)\, g(1-\sigma) \| \leqslant C\, \sigma^{-\alpha}\, | g(1-\sigma) | .$$

La fonction $\sigma \to T(\sigma)\, g(1-\sigma)$ est donc intégrable sur $]0,1]$ comme fonction vectorielle à valeurs dans F. On en déduit que dans ce cas $\mathscr{T}(\varphi,g) \in F$, avec

$$\| \mathscr{T}(\varphi,g) \| \leqslant C\, |\varphi| + C \int_0^1 \sigma^{-\alpha}\, | g(1-\sigma) | \, d\sigma$$

d'où finalement puisque $\sigma^{-\alpha} \in L^{p/p-1}(0,1)$,

$$\| \mathscr{T}(\varphi,g) \| \leqslant C\, |\varphi| + C_1\, \| g \|_{L^p(0,1,E)} \tag{2.4}$$

- Dans le cas général, il suffit d'approcher g dans $L^p(0,1;E)$ par une suite de fonctions en escaliers

$$g_n : [0,1] \to E \quad \text{telles que} \quad g_n = 0 \quad \text{sur } [1-{}^1/_n ,1] .$$

Comme $\mathscr{T}$ dépend linéairement de φ et g, grâce à (2.4), on obtient

$$\| \mathscr{T}(\varphi,g_n) - \mathscr{T}(\varphi,g_m) \| \leqslant C_1\, \| g_n - g_m \|_{L^p(0,1;E)} .$$

Donc lorsque $n \to +\infty$, $\mathscr{T}(\varphi,g_n)$ converge *dans F* vers un certain $y \in F$. D'autre part il est clair que $\mathscr{T} : E \times L^1(0,1;E) \to E$ est continue.

Donc lorsque $n \to +\infty$, $\mathscr{T}(\varphi,g_n)$ convergne dans E vers $\mathscr{T}(\varphi,g)$. Puisque $F \hookrightarrow E$, on en déduit que $\mathscr{T}(\varphi,g) = y \in F$.

Finalement, l'estimation (2.4) reste valable pour g quelconque dans $L^p(0,1;E)$, et puisque $\mathscr{T}$ est linéaire, on en déduit que $\mathscr{T} : E \times L^p(0,1;E) \to F$ est *continue.*

Fin de la démonstration du théorème 2.1. La formule (2.3) et le lemme 2.2 appliqué avec $\varphi = u(t)$ et $g(\sigma) = f(t+\sigma)$ montrent que $u(t) \in F$ pour tout $t \geqslant 1$.

Si $u \in L^\infty(\mathbb{R}^+,E)$ et $f \in S^p(\mathbb{R}^+,E)$, $p > {}^1/1-\alpha$ l'estimation (2.4) montre de plus que u(t) est borné dans F pour $t \geqslant 1$.

Finalement, l'application $\tau \to f(\,.\, + \tau\,)$ étant continue : $\mathbb{R}^+ \to S^p(\mathbb{R}^+,E)$ dès que $f \in S^p(\mathbb{R}^+,E)$ et $p > 1$, on déduit facilement la continuité de l'application $u(t) : [1,+\infty[\to F$ de celles de $u(t) : [0,+\infty[\to E$ et $\mathscr{T} : E \times L^p(0,1;E) \to F$.

3. - APPLICATION A CERTAINS PROBLEMES PARABOLIQUES SEMI-LINEAIRES

- Soit $c > 0$ et $L = c\Delta = c \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ avec pour domaine dans $L^2(\Omega)$, soit

$$D_2(L) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \quad \text{(condition de Dirichlet)}$$

ou bien

$$D_2(L) = \left\{ u \in H^2(\Omega), \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ sur } \Gamma \right\} \quad \text{(condition de Neumann)}$$

Il est connu (cf. [4] , [6]) que dans les deux cas $-L$ est m-accrétif dans $L^p(\Omega)$ pour $1 \leqslant p < +\infty$, et e^{tL} est analytique dans $L^p(\Omega)$ pour $1 < p < +\infty$.

De plus, la restriction de $-L$ à X est un opérateur m-accrétif. On a

$$X = \begin{cases} \{ u \in C(\overline{\Omega}), \quad u = 0 \text{ sur } \Gamma \} & \text{dans le 1er cas} \\ C(\overline{\Omega}) & \text{dans le 2ème cas} \end{cases}$$

- Considérons d'autre part une fonction f continue :

$$\mathbb{R}^+ \times \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad \text{telle que}$$

$$|f(t,x,u) - f(t,x,v)| \leqslant k(t)\, C(|u|, |v|)\ |u-v| \tag{3.1}$$

pour tous $[t,x;u,v] \in \mathbb{R}^+ \times \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^2$, où C est bornée sur les bornées de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, et $k \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+)$.

Il est alors bien connu que pour tout $u_o \in X$, l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} = L\,u + f(t,x,u(t,x)) \tag{3.2}$$

admet une (unique) solution locale $u \in C([0,\delta[\,; X)$ telle que $u(0,x) = u_o(x)$, qui vérifie l'équation en un sens classique pour $0 < t < \delta$ et les conditions aux limites choisies sur $]0,\delta[\times \Gamma$.

- Le but de cette section est d'établir que, moyennant des hypothèses simples sur f, la solution $u(t,x)$ reste bornée dans $C^1(\overline{\Omega})$ pour $t \geqslant 1$ (par exemple).

Pour établir ce résultat, on utilisera uniquement les théorèmes 1.1 et 2.1 en conjonction avec des méthodes standard en théorie des problèmes paraboliques.

THEOREME 3.1. *Supposons que* f *vérifie les conditions*

$$(3.3)\quad \begin{cases} \exists\,\delta>0,\ \exists\,\ell\in S^{2+\delta}(\mathrm{IR}^+),\ \forall\,(t,x,u)\in \mathrm{IR}^+\times\overline{\Omega}\times \mathrm{IR},\quad |f(t,x,u)|\leqslant \ell(t)\,C(|u|) \\ \exists\,C\in\mathrm{IR}^+,\ |u|\geqslant C\Rightarrow \forall\,[t,x]\in\mathrm{IR}^+\times\overline{\Omega},\ f(t,x,u)u\leqslant 0 \end{cases}$$

Alors, pour tout $\delta>0$ *on a* $u(t)\in C_B(\delta,+\infty,C^1(\overline{\Omega}))$.

Démonstration. Vérifions d'abord que u est solution globale dans X et $u\in C_B(0,+\infty,\mathring{X})$.

Pour cela, posons $M=\|u_0\|_\infty$ et $D=\mathrm{Sup}\,\{C,M\}$.

Si $\beta^+(u)=(u-D)^+$ et $u\in D_2(L)$, on sait que

$$\int_\Omega Lu\cdot\beta^+(u)dx\leqslant 0$$

D'autre part, d'après la théorie hilbertienne, il est bien connu que $u(t,\cdot)\in D_2(L)$ pour presque tout $t\in\,]0,T\max[$. En multipliant (3.2) par $\beta^+(u)$ et intégrant sur Ω, on voit donc que pour presque tout $t\in\,]0,T\max[$,

$$\frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}\left(\int_\Omega [(u-D)^+]^2dx\right)\leqslant\int_\Omega f(t,x,u)\,(u-D)^+dx.$$

Or la condition (3.3) implique en particulier

$$\forall\,t\geqslant 0,\quad \forall\,[x,u]\in\overline{\Omega}\times\mathrm{IR},\ f(t,x,u)\,(u-D)^+\leqslant 0.$$

On voit donc que la fonction $t\to\int_\Omega |(u(t,x)-D)^+|^2dx$ est décroissante au sens large. Comme (par construction) on a $(u(0,x)-D)^+=0$, on en déduit

$$u(t,x)\leqslant D,\quad \forall\,t\in\,]0,T\max[$$

En répétant ce raisonnement avec $(u+D)^-=\beta^-(u)$, on conclut que

$$\forall\,t\in\,]0,T\max[\,,\quad \|u(t)\|_\infty\leqslant D$$

$$\Rightarrow\ T\max=+\infty\ \text{ et }\ \|u(t)\|_\infty\leqslant D\ \text{ pour } t\geqslant 0.$$

On applique ensuite les théorèmes 1.1 et 2.1 avec E = X, F = Y et $f(t)(x)=f(t,x,u(t,x))\in S^{2+\delta}(\mathrm{IR}^+,E)$.

Ceci termine la démonstration du théorème 3.1.

Remarque 3.2. Le théorème 3.1 est commode dans les applications car il montre que $\bigcup_{t \geq 0} \{u(t)\}$ est précompact dans X, sous des hypothèses de régularité très raisonnables sur f. Ces hypothèses pourraient d'ailleurs être encore affaiblies, notamment en ce qui concerne la dépendance en t.

La proposition suivante, dans le même esprit que le théorème 3.1, nous sera utile dans la section 4.

PROPOSITION 3.3. *Au lieu de* (3.3), *on suppose*

$$\exists C \in \mathrm{IR}^+, \quad \forall [t,x,u] \in \mathrm{IR}^+ \times \Omega \times \mathrm{IR}, \quad |f(t,x,u)| \leq C(1+|u|) \tag{3.4}$$

Si u *est une solution globale de* (3.2) *telle que*

$$u \in L^\infty(\mathrm{IR}^+, L^1(\Omega)), \textit{ alors en fait}$$

$$u \in C_B(\mathrm{IR}^+, X) \cap C_B(1,+\infty, C^1(\bar{\Omega})).$$

Démonstration. Il suffit de vérifier que $u \in C_B(\mathrm{IR}^+,X)$, car alors la propriété (3.4) et les théorèmes 1.1 et 2.1 permettent de conclure comme pour la démonstration du théorème 3.1. On sait d'autre part (cf. [4]) que pour tous (p,q) tels que $1 \leq p < q < +\infty$, et $\varphi \in L^p(\Omega)$, on a $e^{tL}\varphi \in L^q(\Omega)$ pour tout $t > 0$, et

$$\| e^{tL} \varphi \|_q \leq C(p,q)\, t^{-\frac{n}{2}(1/p - 1/q)} \| \varphi \|_p \tag{3.5}$$

inégalité valable $\forall\, t \in]0,1]$.

Pour la suite de la démonstration, distinguons deux cas

1er cas : n = 1. Il suffit d'appliquer le théorème 2.1 avec $E = L^1(\Omega)$, F = X et $f(t)(x) = f(t,x,u(t,x)) \in L^\infty(\mathrm{IR}^+, L^1(\Omega))$.

En effet, l'inégalité (1.1) appliquée avec $\epsilon = \frac{1}{2}$ montre que (2.1) est vérifiée avec $\alpha = 2/3$.

On obtient donc $u \in C_B(1,+\infty,X)$, et puisque la solution u(t) est *globale* dans X, $u \in C_B(\mathrm{IR}^+,X)$.

2ème cas : $n \geq 2$. On définit la suite finie $\{q_r\}_{0 \leq r \leq n-1}$ par

$$q_o = 1\,, \quad q_r = \frac{n}{n-r} \quad \text{si} \quad 1 \leq r \leq n-1.$$

Par applications successives du théorème 2.1 avec

$$E = L^{q_r}(\Omega)\,, \quad F = L^{q_{r+1}}(\Omega) \quad \text{pour } r \in \{0,1,\dots,n-2\}$$

et $f(t)(x) = f(t,x,u(t,x))$, on obtient au bout de n–1 itérations que $u \in C_B(IR^+, L^n(\Omega))$.

[Grâce à (3.5), à chaque pas (2.1) est vérifiée avec $\alpha = 1/2$, et grâce à (3.4) on a $f(t,x,u(t,x)) \in L^\infty(IR^+, E)$] .

Ensuite, grâce à l'estimation (1.1) appliquée avec $\epsilon = \frac{n}{2}$, on peut utiliser une dernière fois le théorème 2.1 avec $E = L^n(\Omega)$, $F = X$ et $f(t)(x) = f(t,x,u(t,x)) \in L^\infty(IR^+, L^n(\Omega))$. (ici $\alpha = 2/3$). On en conclut que $u \in C_B(IR^+, X)$, ce qui achève la preuve.

Remarque 3.4. La technique ci-dessus pourrait également être utilisée pour démontrer *l'existence globale* de solutions (respectivement, de solutions régulières) pour certains problèmes paraboliques semi-linéaires.

Des idées analogues à la proposition 3.3 sont développées dans [2] dans un cadre plus général.

4. - ETUDE D'UN SYSTEME PARABOLIQUE INTERVENANT EN BIOLOGIE

Soit Ω comme précédemment et $h \in C^1(IR, IR^+)$, $\lambda > 0$: Le système d'équations aux dérivées partielles

$$(4.1) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - a\,\Delta\, u + u\, v\, h(u) = 0 & \text{sur } IR^+ \times \Omega \\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial t} - b\,\Delta\, v - u\, v\, h(u) + \lambda\, v = 0 & \text{sur } IR^+ \times \Omega \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial n} = \dfrac{\partial v}{\partial n} = 0 & \text{sur } IR^+ \times \Gamma \end{cases}$$

où a, b > 0 sont des coefficients de diffusion, généralise entre autres un modèle proposé dans [23] pour l'étude de la propagation des épidémies.

Il est tout-à-fait classique de vérifier, par des méthodes standard, que pour toutes $u_0 \geqslant 0$, $v_0 \geqslant 0$ données initiales dans $X = C(\overline{\Omega})$, le système (4.1) possède une solution globale unique $u(t) \in C(IR^+, X)$, $v(t) \in C(IR^+, X)$ telle que $u(t,x) \geqslant 0$, $v(t,x) \geqslant 0$, et que la solution vérifie les conditions aux limites pour $t > 0$.

Deux questions naturelles, et dont la résolution en dimension $\geqslant 2$ demande davantage d'effort, sont l'existence d'estimations uniformes dans $C(\overline{\Omega})$ pour $t \geqslant 0$, et le comportement des solutions lorsque $t \to +\infty$.

Ces deux questions sont résolues par le théorème suivant.

THEOREME 4.1. *Pour tous* $[u_0,v_0] \in X \times X$ *tels que* $u_0 \geq 0$, $v_0 \geq 0$, *l'unique solution* $[u,v]$ *de* (4.1) *telle que* $u(0) = u_0$ *et* $v(0) = v_0$ *est telle que*

(4.2) $$u \in C_B(\delta,+\infty; C^1(\overline{\Omega})) \qquad \textit{pour tout} \qquad \delta > 0$$

(4.3) $$v \in C_B(\delta,+\infty; C^1(\overline{\Omega})) \qquad \textit{pour tout} \qquad \delta > 0$$

(4.4) $$\lim_{t \to +\infty} \| v(t) \|_\infty = 0$$

De plus, il existe une constante $\overline{u} \geq 0$ *telle que*

(4.5) $$\lim_{t \to +\infty} \| u(t,x) - \overline{u} \|_\infty = 0$$

et si $u_0 \neq 0$, *on a* $\overline{u} > 0$.

Démonstration. Pour $x \in \overline{\Omega}$ et $t \geq 0$, posons $f(t,x,u) = - u\, v(t,x)\, h(u)$, $\forall\, u \in IR$. Il est clair que f vérifie (3.1) et (3.3) avec $C = 0$.

D'après la première partie de la démonstration du théorème 3.1, on a donc

$$u \in C_B(IR^+, X)$$

En intégrant la première équation de (4.1) sur Ω, on voit aussi que la fonction : $t \to \int_\Omega u(t,x)dx$ est décroissante, et tend donc vers une limite lorsque $t \to +\infty$:

(4.6) $$\lim_{t \to +\infty} \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega u(t,x)dx = \overline{u}$$

De même, en additionnant les deux équations de (4.1) et en tenant compte des conditions aux limites, après intégration sur Ω on obtient :

(4.6bis) $$\frac{d}{dt}\left(\int_\Omega (u+v)dx\right) + \lambda \int_\Omega v\, dx = 0$$

On en déduit que $t \to \int_\Omega (u+v)(t,x)dx$ étant décroissante, tend également vers une limite lorsque $t \to +\infty$. En combinant ce résultat avec (4.6), on obtient

(4.7) $$\lim_{t \to +\infty} \int_\Omega v(t,x)dx = \ell \geq 0$$

En intégrant (4.6bis) sur [0,t], on trouve

$$\lambda \int_0^t \int_\Omega v(t,x)dx\,dt \leqslant \int_\Omega (u_0+v_0)dx, \qquad \forall\, t \geqslant 0 \tag{4.8}$$

De (4.7) et (4.8) on déduit $\ell = 0$, donc

$$\lim_{t \to +\infty} \int_\Omega v(t,x)dx = 0 \tag{4.9}$$

Puisque $u \in C_B(IR^+,X)$ et $v \in L^\infty(IR^+,L^1(\Omega))$, on peut appliquer la proposition 3.3 à la deuxième équation de (4.1). On en déduit

$$v \in C_B(IR^+,X) \cap C_B(1,+\infty,C^1(\overline{\Omega})) \Rightarrow u \in C_B(1,+\infty,C^1(\overline{\Omega}))$$

En particulier, $\bigcup_{t \geqslant 0} \{v(t)\}$ est précompact dans X, et en combinant avec (4.9), puisque $v \geqslant 0$ on en déduit

$$\lim_{t \to +\infty} \| v(t) \|_\infty = 0 \tag{4.10}$$

Puisque $\bigcup_{t \geqslant 0} \{u(t)\}$ est précompact dans X, soit $\tau_n \to +\infty$ une suite telle que

$$\lim_{n \to +\infty} u(\tau_n) = u^* \quad \text{dans} \quad C(\overline{\Omega}) \tag{4.11}$$

En désignant par T(t) le semi-groupe engendré par $L = a\,\Delta$ avec conditions aux limites de Neumann dans $X = C(\overline{\Omega})$, on peut écrire pour tout $t \geqslant 0$

$$\| u(\tau_n+t) - T(t)u^* \|_\infty \leqslant \| u(\tau_n)-u^* \|_\infty + t \sup_{s \geqslant 0} \| u(s)\,h(u(s)) \|_\infty \sup_{0 \leqslant \sigma \leqslant t} \| v(\tau_n+\sigma) \|_\infty$$

En tenant compte de (4.10) et (4.11), on en déduit :

$$\forall\, t \geqslant 0 \;, \quad \lim_{n \to +\infty} u(\tau_n+t) = T(t)u^* \quad \text{dans X} \tag{4.12}$$

D'autre part, grâce à l'effet régularisant, on peut multiplier la 1ère équation par u(t) pour $t > 0$, et on obtient que $t \to \| u(t) \|_2^2$ est décroissant. En combinant avec (4.12), il vient

$$\forall\, t \geqslant 0 \;, \quad \| T(t)u^* \|_2^2 = \lim_{\tau \to +\infty} \| u(\tau) \|_2^2 \tag{4.13}$$

Pour $t > 0$, la fonction $T(t)u^* = \varphi(t,x)$ vérifie

$$(4.14)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial t} = a\,\Delta\varphi & \text{sur } \mathrm{IR}^+ \times \Omega \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 & \text{sur } \mathrm{IR}^+ \times \Gamma \end{cases}$$

et

$$\varphi(t) \in W^{1,2}_{loc}\,(]0,+\infty[\,;L^2(\Omega)) \cap C(]0,+\infty[\,,Y)$$

En multipliant (4.14) par $\varphi(t,x)$ et en intégrant sur $]\alpha,\beta[\times \Omega$ avec $0<\alpha<\beta$, on obtient :

$$a\int_\alpha^\beta \|\nabla\varphi\|_2^2\,dt = \frac{1}{2}\,[\,\|\varphi(\alpha)\|_2^2 - \|\varphi(\beta)\|_2^2\,]$$

ce qui, en combinant avec (4.13), donne

$$\nabla\varphi \equiv 0 \Rightarrow \Delta\varphi = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0$$

Finalement, on conclut $\varphi(t,x) = T(t)u^* \equiv u^*$, indépendant de x. En comparant avec (4.12) et (4.6), on voit alors que $u^* = \bar{u}$.

D'après (4.11), cela signifie que *pour toute suite* $\tau_n \to +\infty$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} u(\tau_n) = \bar{u} \qquad \text{fortement dans } C(\bar{\Omega})$$

et ceci achève la démonstration de (4.5).

Montrons enfin que si $u_o \neq 0$, alors $\bar{u} > 0$. En effet, si $\bar{u} = 0$, il existe $t_o \in \mathrm{IR}^+$ tel que

$$t \geqslant t_o \Rightarrow \|u\,h(u)\|_\infty \leqslant \frac{\lambda}{2}.$$

En utilisant la 2ème équation, on en déduit facilement

$$\|v(t)\|_\infty \leqslant e^{-(t-t_o)\frac{\lambda}{2}}\,\|v(t_o)\|_\infty \quad \text{pour } t \geqslant t_o.$$

Donc $v \in L^1(\mathrm{IR}^+,X)$, et comme $u \in L^\infty(\mathrm{IR}^+,X)$ la 1ère équation montre alors que

$$\frac{d}{dt}\left(\int_\Omega u(t,x)dx\right) \geqslant -C\,\|v(t)\|_\infty \int_\Omega u(t,x)dx \qquad \text{pour } t \geqslant 0$$

$$\Rightarrow \bar{u} \geqslant \int_\Omega u(0,x)dx \;\; \exp\left(-C\int_o^{+\infty} \|v(t)\|_\infty dt\right)$$

Donc $\bar{u} = 0 \;\Rightarrow \displaystyle\int_\Omega u_o\,dx = 0 \Rightarrow u_o \equiv 0.$

REFERENCES

[1] S. AGMON. *«On the eigenfunctions and on the eigenvalues of general boundary value problems».* Comm. Pure Appl. Math. 15 (1962), 116-147.

[2] N.D. ALIKAKOS. *«L^p bounds of solutions of reaction - diffusion equations».* Comm. P. Diff. Eq. 4 (1979), 827-868.

[3] H. BREZIS. *«Propriétés régularisantes de certains semi-groupes non linéaires».* Israël J. Math. 9 (1971), 513-534.

[4] H. BREZIS. Cours de 3ème cycle Paris VI (1977).

[5] H. BREZIS et J.A. GOLDSTEIN. *«Liouville theorems for some improperly posed problems».* Dans *Improperly posed boundary value problems.* Carasso-Stone ed., Pitman (1975), 65-75.

[6] M.G. CRANDALL, A. PAZY et L.TARTAR. *«Remarks on generators of analytic semi-groups».* Israël J. Math. 32, 4 (1979), 363-374.

[7] C.M. DAFERMOS. *«Asymptotic behavior of solutions of evolution equations».* dans *Nonlinear Evolution Equations,* M.G. Crandall ed., Academic Press, New-York (1978) 103-123.

[8] G. DA PRATO et P. GRISVARD. *«Equations d'évolution abstraites non linéaires de type parabolique».* C.R.A.S. Paris t. 283 (1976), 709-711.

[9] J.P. DIAS ET A. HARAUX. *«Smoothing effect and asymptotic behavior for the solutions of a nonlinear time dependent system».* Proc. Roy. Soc. Edinburgh 87 A (1981), 289-303.

[10] L.C. EVANS. *«Application of nonlinear semi-group theory to certain partial differential equations, Nonlinear Evolution Equations* , M.G. Crandall ed., Academic Press, New-York (1978).

[11] A. FRIEDMAN. *«Partial differential equations».* Halt, Rinehart and Winston, New-York (1969).

[12] J.K. HALE. *«Ordinary differential equations».* Wiley-Interscience, New-York (1969).

[13] J.K. HALE and P. MASSATT. *«Asymptotic behavior of gradient-like systems».* To appear.

[14] D. HENRY. *«Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations».* Lecture Notes in Math. N° 842, Springer (1981).

[15] T. KATO. *«Abstract evolution equations of parabolic type in Banach and Hilbert spaces».* Nagoya Math. J. 19 (1961), 93-125.

[16] J.P. LA SALLE. *«Stability theory and invariance principles». Dynamical Systems, An International Symposium* . ed. L. Cesari, J.K. Hale and J.P. La Salle, Academic Press, New-York (1976), Vol. I, 211-222.

[17] P.L. LIONS. *«Structure of the set of steady-state solutions and asymptotic behavior of semilinear heat equations»*. A paraître.

[18] H. MATANO. *«Convergence of solutions of one-dimensional semilinear parabolic equations»*. J. Math. Kyoto Univ., 18 (1978), 221-227.

[19] A. PAZY. *«Semi-groups of operators and applications to partial differential equations»*. Univ. of Maryland Press (1974).

[20] I. SEGAL. *«Non-linear semi-groups»*. Ann. Math. 78 (1963), 339-364.

[21] E.M. STEIN. *«Topics in harmonic analysis»*. Annals of Math. Studies, Princeton Univ. Press.

[22] H.B. STEWART. *«Generation of analytic semi-groups by strongly elliptic operators»*. Trans. Amer. Math. Soc. 199 (1974), 141-162.

[23] G.F. WEBB. *«A reaction-diffusion model for a deterministic diffusive epidemic»*. J. of Math. Anal. and Appl. 84, 1 (1981), 150-161.

[24] F.B. WEISSLER. *«Semilinear evolution equations in Banach spaces»*. J. Funct. Anal. 32 (1979), 277-296.

(Manuscrit reçu le 1er août 1982)