ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

JEAN-PIERRE BOREL

Sous-groupes de $\mathbb{R}$ liés à la répartition modulo 1 de suites

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 5^e série, tome 5, n^o 3-4 (1983), p. 217-235
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1983_5_5_3-4_217_0>

Annales Faculté des Sciences Toulouse
Vol V, 1983, P. 218 à 235

SOUS-GROUPES DE IR LIES A LA REPARTITION MODULO 1 DE SUITES

Jean-Pierre Borel *(1)*

(1) Département de Mathématiques, U.E.R. des Sciences, 123 avenue Albert Thomas, 87060 Limoges Cédex - France.

Résumé : Nous étudions les sous-groupes additifs $\mathcal{G}$ de IR tels qu'il existe une suite $\Lambda = \{\lambda_n\}$ de nombres réels telle que $\mathcal{G}$ soit l'ensemble des nombres réels x tels que $\| x \lambda_n \|$ tende vers 0 (resp. $\| x \lambda_n \|$ tende vers 0 en moyenne), où $\| y \|$ désigne la distance de y à l'entier le plus proche. Nous montrons qu'une telle suite Λ existe dès que $\mathcal{G}$ est dénombrable, ce qui donne une réciproque à un ancien résultat de Eggleston, [4] . Quelques autres résultats et exemples sont exposés.

Summary : Let $\mathcal{G}$ be an additive subgroup of IR. What can be said on $\mathcal{G}$, if there exists a sequence $\Lambda = \{\lambda_n\}$ of real numbers such that $\mathcal{G}$ is the set of real numbers x such that $\| x \lambda_n \|$ tends to zero (respectively such that the sequence $\{x \lambda_n\}$ has an asymptotic distribution modulo one following the Dirac-measure at zero). We prove that such a sequence Λ exists if $\mathcal{G}$ is numerable. This is a converse to an old result due to Eggleston, [4] . Some others results and examples are given.

1. - INTRODUCTION

Si x est un nombre réel, $e(x) = e^{2\pi i x}$, et $\| x \| = \inf_{n \in \mathbb{Z}} |x - n|$.

1.1 - Soit $\Lambda = (\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de modules réels. Etudier la distribution modulo 1 de la suite Λ revient à étudier le comportement asymptotique des quantités :

$$A(I,N,\Lambda) = \frac{1}{N} \sum_{n<N} \chi_I (\{\lambda_n\})$$

où I est un sous-intervalle de [0,1[identifié à $\mathbb{T} = \mathbb{R} / \mathbb{Z}$ et χ_I la fonction caractéristique de I. Si μ est une mesure positive sur $\mathbb{T}$, on dit que Λ est répartie modulo 1 suivant μ si la suite de mesures positives $\left(\frac{1}{N} \sum_{n<N} \delta_{\lambda_n} \right)_{N \in \mathbb{N}}$ converge étroitement vers μ, ce qui signifie que les deux propriétés équivalentes suivantes sont vérifiées :

- pour tout sous intervalle I de [0,1[: $\mu(\partial I) = 0 \Rightarrow \lim_{N \to \infty} A(I,N,\Lambda) = \mu(I)$

- toute fonction $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ continue vérifie :

$$(*) \qquad \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n<N} f(\{\lambda_n\}) = \int f \, d\mu.$$

Il est facile de montrer que Λ est répartie modulo 1 suivant μ si et seulement si (*) est vérifiée pour les fonctions $f(x) = e(n\,x)$, n décrivant $\mathbb{N}^*$. C'est le critère de Weyl, voir par exemple [7], p. 8.

1.2 - Le cas le plus fréquemment étudié est celui où $\mu = m$, mesure de Lebesgue. On parle alors d'équirépartition modulo 1. Je vais étudier ici les cas de très mauvaise répartition modulo 1, c'est-à-dire $\mu = \delta_0$ mesure de Dirac à l'origine.

Nous poserons :

$$G^*(\Lambda) = \{x \in \mathbb{R} / x\Lambda \text{ est répartie modulo 1 suivant } \delta_0\}$$

$$G(\Lambda) = \{x \in \mathbb{R} / \lim_{n \to \infty} \| x \lambda_n \| = 0\}.$$

Enfin, j'utiliserais la notion de dimension de Hausdorff. Le lecteur en trouvera la définition dans [2] , p. 136. Un certain nombre de méthodes de calcul de cette dimension se trouvent dans [4] et [9] .

2. - QUELQUES RESULTATS SIMPLES

2.1 - Il est facile de voir que Λ est répartie modulo 1 suivant δ_0 si et seulement si $f(x) = e(x)$ vérifie (*). Cela provient du résultat suivant :

PROPOSITION 1. *Soit* E *un espace vectoriel (sur* IR*),* C *un convexe fermé de* E *et* γ *un point extrémal de* C. *Si* $\Gamma = (\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *est une suite à valeurs dans* C, *il y a équivalence entre :*

(i) *il existe une partie* A *de* IN *de densité asymptotique* $dA = 1$ *telle que* $\lim_{\substack{n \to \infty \\ n \in A}} \gamma_n = \gamma$.

(ii) $\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n < N} \gamma_n = \gamma$.

(si $A = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décrit dans l'ordre croissant, la densité asymptotique de A est la limite $dA = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{a_n < N} 1$, si elle existe).

LEMME. *Soit* $(A_m)_{m \in \mathbb{N}}$ *une suite de parties de* IN, *décroissante* (i.e. $A_{m+1} \subset A_m$ *pour tout* m) *et telle que* $dA_m = 1$ *pour tout* m. *Alors il existe une partie* A *de* IN *de densité asymptotique* $dA = 1$ *et telle que :*

$$(**) \qquad \forall\, m \in \mathbb{N} \qquad \exists\, v_m \in \mathbb{N} \qquad (A \cap [v_m, +\infty[) \subset (A_m \cap [v_m, +\infty[).$$

A se définit par blocs, à l'aide de $[v_{m-1}, v_m[\cap A = [v_{m-1}, v_m[\cap A_{m-1}$, où la suite $(v_m) = V$ est une suite croissante d'entiers. La condition (**) est alors automatiquement vérifiée. Il reste à choisir V pour que l'on ait bien $dA = 1$.

Pour cela, on prend $v_1 = 0$, et si $m \geqslant 2$,

$$v_m = \inf \left\{ n > v_{m-1},\ \forall\, k \geqslant n \ \left\{ \text{card}\ p \leqslant k,\ p \in A_{m-2} \right\} \geqslant (1 - \frac{1}{m})k \right\}$$

v_m existe bien car $dA_{m-2} = 1$.

Soit $k \in [v_{m-1}, v_m[$. On a alors :

$$\text{card} \left\{ p \leqslant k,\ p \in A \right\} \geqslant \text{card} \left\{ p \leqslant k,\ p \in A_{m-1} \right\} \quad \text{car } [0, v_m[\cap A \text{ contient } [0, v_m[\cap A_{m-1}$$

$$\geqslant (1 - \frac{1}{m-1})\, k \qquad \text{car } k \geqslant v_{m-1},$$

ce qui entraîne bien $dA = 1$. ■

(La condition (A_m) décroissante n'est pas utile, car il suffit alors de remplacer A_m par $A'_m = \bigcap_{k=1}^{m} A_k$).

Démonstration de la proposition 1. L'implication (i) ⇒ (ii) est immédiate. Réciproquement, soit U_m la boule ouverte $B(\gamma, \frac{1}{m})$, et A_m la suite des entiers n tels que $\gamma_n \in B_m$. Alors $dA_m = 1$. En effet, soit d^+ la densité supérieure de $\mathbb{N} - A_m$, densité supérieure atteinte pour une suite $(N_i)_{i \in \mathbb{N}}$.

γ est extrêmal dans C, donc il existe un hyperplan H tel que $\{\gamma\} = C \cap H$. Soit $E = H \oplus F$, et π la projection sur F parallèlement à H. $\pi(B_m)$ est donc un voisinage ouvert de $\pi(\gamma)$, point extrêmal du convexe $\pi(C)$. Mais, comme γ est extrêmal dans C, il existe un voisinage ouvert B'_m de $\pi(\gamma)$ dans F tel que :

$$\beta \in C \text{ et } \beta \notin B_m \Rightarrow \pi(\beta) \notin B'_m .$$

En identifiant F et IR, on peut se ramener à la situation suivante : $\pi(\gamma) = 1$; $\pi(C) \subset]-\infty,1]$; $]1-\epsilon, 1+\epsilon[\subset B'_m$ avec $\epsilon > 0$. On a donc :

$$1 = \limsup_{i \to \infty} \pi(N_i^{-1} \sum_{n < N_i} \gamma_n) = \limsup_{i \to \infty} N_i^{-1} \sum_{n < N_i} \pi(\gamma_n) \leqslant d^+(1-\epsilon)+1-d^+ = 1 - \epsilon d^+$$

d'où $d^+ = 0$.

On peut donc utiliser le lemme, d'où la suite A du (i). ∎

La proposition 1 entraîne immédiatement que, si $\Lambda = (\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de nombres réels, il y a équivalence entre :

- il existe une partie A de IN de densité asymptotique $dA = 1$ telle que $\lim_{\substack{n \to \infty \\ n \in A}} \| \lambda_n \| = 0$

- $\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n < N} e(\lambda_n) = 1$

et donc Λ est répartie module 1 suivant δ_0 si et seulement si $f(x) = e(x)$ vérifie (*).

Donc :

$$x \in G^*(\Lambda) \iff f(y) = e(xy) \text{ vérifie } (*)$$

$$\iff \exists\, A \subset \mathbb{N},\ d\,A = 1 \text{ et } \lim_{\substack{n \to \infty \\ n \in A}} \| x \lambda_n \| = 0.$$

Cette dernière propriété entraîne que $G^*(\Lambda)$ est un sous-groupe de IR (l'intersection de deux suites de densité asymptotique 1 est encore de densité asymptotique 1), tandis que la première entraîne que $G^*(\Lambda)$ est un $F_{\sigma\delta}$ (intersection dénombrable de réunion dénombrable de fermés). Donc il est mesurable et, s'il est distinct de IR, il est de mesure nulle.

De même, $G(\Lambda)$ est un $F_{\sigma\delta}$, et c'est un sous-groupe de $G^*(\Lambda)$.

Ces groupes étant de mesure nulle, l'estimation de leur «taille» nécessite un instrument plus précis que la mesure de Lebesgue. C'est le cas de la dimension de Hausdorff, qui vérifie les propriétés suivantes :

Soit $E \subset \mathbb{R}$. Alors :

- $0 \leqslant \dim E \leqslant 1$; $m(E) > 0 \Rightarrow \dim(E) = 1$
- $E \subset E' \Rightarrow \dim E \leqslant \dim E'$
- $\dim \bigcup_{i \in I} E_i = \sup_{i \in I} (\dim E_i)$ (I dénombrable ou fini)
- Si E dénombrable, $\dim E = 0$.

2.2 - Dans toute la suite, $U = (u_n)_n \in \mathbb{N}$ désignera toujours une suite strictement croissante d'entiers naturels, et $V = (v_n)_n \in \mathbb{N}$ une suite d'entiers relatifs.

PROPOSITION 2. *Soit $\mathcal{G}$ un sous-groupe de* IR, *distinct de* $\{0\}$ *et de* IR. *Il y a équivalence entre :*

- *il existe une suite Λ telle que* $\mathcal{G} = G(\Lambda)$

- *il existe un nombre réel γ et une suite* U *tels que* $\gamma\,\mathcal{G} = G(U)$.

Soit $\gamma \in \mathcal{G}$, $\gamma \neq 0$, et $\mathcal{G} = G(\Lambda)$. On a donc :

$$\gamma\,\lambda_n = u'_n + \delta_n \quad \text{avec} \quad u'_n \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad \lim_{n \to \infty} \delta_n = 0.$$

Cela entraîne donc :

$$x \in G(\Lambda) \iff x\,\lambda_n = m_n + \epsilon_n \quad \text{avec } m_n \in \mathbb{Z} \text{ et } \lim_{n \to \infty} \epsilon_n = 0$$

$$\iff \frac{x}{\gamma}(u'_n + \delta_n) = m_n + \epsilon_n$$

$$\iff \frac{x}{\gamma} \in G(U') \quad \text{où} \quad U' = (u'_n)_n \in \mathbb{N}\,.$$

D'autre part, si u'_n prend une infinité de fois la valeur k, G(U') est contenu dans $k^{-1}\,\mathbb{Z}$, donc $G(U') = k'^{-1}\,\mathbb{Z}$ où k' est un diviseur de k. On a alors $G(U') = G(U)$, où U est la suite des multiples de k'.

Dans le cas contraire, on peut sans changer G(U') supprimer les répétitions d'une même valeur dans U', changer le signe des u'_n et réordonner U', ce qui permet de se ramener à une suite U.

Réciproquement, si $\gamma\,\mathcal{G} = G(U)$, alors $\gamma \neq 0$ car $1 \in G(U)$, et $\mathcal{G} = G(\frac{1}{\gamma}U)$. ∎

PROPOSITION 2'. *Soit* $\mathcal{G}$ *un sous-groupe de* IR *distinct de* $\{0\}$ *et de* IR. *Il y a alors équivalence entre :*

- *il existe une suite* Λ *telle que* $\mathcal{G} = G^*(\Lambda)$

- *il existe un nombre réel* γ *et une suite* V *tels que* $\gamma\mathcal{G} = G^*(V)$.

La démonstration est analogue à la précédente. Je n'étudierai donc dans la suite que les ensembles G(U) et G*(V). Le fait que v_n puisse prendre une infinité de fois la même valeur k joue un rôle important. En particulier :

PROPOSITION 3. *Soit* $U = (u_n)_n \in \mathbb{N}$ *donné, et soit* V *la suite définie par* $v_k = u_n$, $2^n \leqslant k < 2^{n+1}$. *Alors* $G^*(V) = G(U)$.

Ce résultat est immédiat. Je montrerai plus loin que sa réciproque est fausse, et qu'il existe des ensembles G*(V) qui ne sont pas de la forme G(U).

2.3 - Soit A une partie de IR. Dans ce qui suit, je désignerai par A, «adhérence de A», l'ensemble :

$$\overline{A} = \cap\, G(U)$$

intersection prise sur toutes les suites U telles que $A \subset G(U)$.

3. - CAS DES SOUS-GROUPES DENOMBRABLES DE IR

Esssentiellement deux résultats ont déjà été obtenus :

Si u_{n+1} / u_n tend vers $+\infty$, dim G(U) = 1, et donc dim G*(U) = 1. On sait aussi que, dans ce cas, ces ensembles sont de mesure nulle.

Si u_{n+1} / u_n est borné, G(U) est dénombrable. Ce résultat a été obtenu par Eggleston, [4] , et amélioré par Erdös et Taylor, [5] : si $(\alpha_n)_n \in \mathbb{N}$ est une suite quelconque de nombres réels, l'ensemble des x tel que $\| x\, u_n - \alpha_n \|$ tend vers 0 est au plus dénombrable.

Lorsque $\overline{\lim}_{n \to \infty} u_{n+1} / u_n = +\infty$ et $\underline{\lim}_{n \to \infty} u_{n+1} / u_n < +\infty$, il est bien plus difficile d'évaluer G(U). Par exemple, G(U) ne dépend pas que de la croissance de la suite U, comme le montre l'exemple suivant :

Soit $U = (u_n)_n \in \mathbb{N}$ telle que u_{n+1} / u_n croît vers $+\infty$. Alors G(U) est gros

(dim G(U) = 1). Soit A une partie infinie de IN, aussi petite que l'on veut (par exemple d A = 0), et U' la réunion de tous les entiers u_n, $n \in IN$, et $u_n + 1$, $n \in A$ et ordonnée de manière croissante. Alors G(U') = $\mathbb{Z}$, bien que u'_{n+1} / u'_n tende vers l'infini, lorsque n décrit une partie de IN de densité asymptotique 1.

J'ai obtenu les résultats suivants :

THEOREME. (Réciproque du résultat d'Eggleston). *Soit* $\mathscr{G}$ *un sous-groupe de* IR, *dénombrable et tel que* $1 \in \mathscr{G}$. *Alors il existe une suite* $U = (u_n)_{n \in IN}$ *strictement croissante d'entiers naturels telle que :*

$$\begin{cases} \mathscr{G} = G(U) \\ \lim\limits_{n \to \infty} u_{n+1} / u_n = 1. \end{cases}$$

La démonstration de ce résultat utilise le lemme suivant :

LEMME. *Soit* $A \subset IR$ *dénombrable. Alors* $\overline{A} = A_{\mathbb{Z}}$, *groupe additif engendré par* $A \cup \{1\}$.

• Soit A tel que $A_{\mathbb{Z}}$ admette une base (en tant que $\mathbb{Z}$-module) de la forme $1,\alpha_1,\ldots,\alpha_p$. Soit $q \in IN^*$. Montrons que $\frac{1}{q} \notin \overline{A}$.

D'après le théorème de Kronecker, pour tout $N > 0$, il existe $n > N$ tel que :

$$\| \alpha_i n - \alpha_i / q \| \leqslant \frac{1}{N} \qquad 1 \leqslant i \leqslant p.$$

La suite des (n q−1) vérifie bien $\| (n\,q-1)\alpha_i \|$ tend vers 0 ($1 \leqslant i \leqslant p$), et $\| (n\,q-1) / q \|$ ne tend pas vers 0.

• Montrons le lemme lorsque $A_{\mathbb{Z}}$ admet une base de la forme $1,\alpha_1,\ldots,\alpha_p$. Il suffit de montrer que, si $b \notin A_{\mathbb{Z}}$, il existe une suite U telle que $\alpha_i \in G(U)$, $1 \leqslant i \leqslant p$, et $b \notin G(U)$.

- si $1,\alpha_1,\ldots,\alpha_p$, b sont $\mathbb{Q}$ l.i., le théorème de Kronecker entraîne que pour tout $N > 0$, il existe $n > N$ tel que :

$$\begin{cases} \| \alpha_i n \| \leqslant 1/N \qquad 1 \leqslant i \leqslant p \\ \| b\, n - 1/2 \| \leqslant 1/N \end{cases}$$

d'où la suite U des valeurs de n.

- sinon, β, s'écrit $\beta = \frac{r_o}{q_o} + \sum_{i=1}^{p} \frac{r_i}{q_i} \alpha_i$, avec $(r_i,q_i) = 1$ et $q_{i_o} \neq 1$ pour un indice i_o au moins. Si $q_o \neq 1$, et d'après ce qui précède, $\frac{1}{q_o}$ n'appartient pas à $\overline{A'}$, où A' est le $\mathbb{Z}$-module libre de base $1, \frac{\alpha_1}{q_1}, \ldots, \frac{\alpha_p}{q_p}$. Donc $\beta \notin \overline{A'}$, et comme A' contient A, $\beta \notin \overline{A}$.

Supposons maintenant $q_o = 1$. D'après le théorème de Kronecker, pour tout $N > 0$ il existe $n > N$ tel que :

$$\begin{cases} \| (\alpha_i / q_i)n \| \leqslant 1/N & 1 \leqslant i \leqslant p \qquad i \neq i_o \\ \| (\alpha_{i_o} / q_{i_o})n-1 / q_{i_o} \| \leqslant 1/N \end{cases}$$

La suite U des valeurs de n vérifie bien $\alpha_i \in G(U)$, $1 \leqslant i \leqslant p$, et $\beta \notin G(U)$.

• Soit A fini ; $A_{\mathbb{Z}}$ est donc de type fini, donc est libre. Comme $\mathbb{Z}$ est un sous-module de $A_{\mathbb{Z}}$, il existe une base de $A_{\mathbb{Z}}$ de la forme $\frac{1}{q}, \alpha_1, \ldots, \alpha_p$. D'après le résultat précédent, on a donc $\overline{A'} = A'_{\mathbb{Z}}$ si A' = q A. Soit $b \notin A_{\mathbb{Z}}$. Alors, si b' = q b, $b' \notin A'_{\mathbb{Z}}$. Il existe donc $V = (v_n)$ telle que $\| v_n b' \|$ ne tend pas vers 0, et $\| v_n(q \alpha_i) \|$ tend vers 0, $1 \leqslant i \leqslant p$. La suite U = q V vérifie alors $A \subset G(U)$ et $b \notin G(U)$.

• Soit A dénombrable infini, $A = (a_i)_{i \in \mathbb{N}}$. Soit $b \notin A_{\mathbb{Z}}$. Pour tout entier n, il existe donc une suite $U^{(n)}$ telle que : $a_i \in G(U^{(n)}) \qquad 0 \leqslant i \leqslant n$ et $b \notin G(U^{(n)})$.

Donc $\ell = \overline{\lim_{k \to \infty}} \| b\, u_k^{(n)} \| > 0$. La suite $\tilde{U}^{(n)}$ de tous les entiers $m\, u_k^{(n)}$, k décrivant $\mathbb{N}$ et $1 \leqslant m \leqslant 1+1/4\ell$ vérifie donc :

$$\begin{cases} \lim_{k \to \infty} \| \tilde{u}_k^{(n)} a_i \| = 0 & 0 \leqslant i \leqslant n \\ \overline{\lim_{k \to \infty}} \| \tilde{u}_k^{(n)} b \| \geqslant \frac{1}{4} \end{cases}$$

En enlevant les premiers termes de cette suite, on obtient une suite notée encore $\tilde{U}^{(n)}$ qui vérifie de plus :

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \sup_{0 \leqslant i \leqslant n} \| u_k^{(n)} a_i \| \leqslant \frac{1}{n}.$$

On construit alors par récurrence une suite $(m_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $m_o = 1$ et $m_{n+1} > m_n$ tel qu'il existe k' tel que :

$$\begin{cases} m_n < \tilde{u}_k^{(n+1)} \leqslant m_{n+1} \\ \| b\tilde{u}_k^{(n+1)} \| \geqslant 1/8. \end{cases}$$

U est alors la suite de tous les $\tilde{u}_k^{(n+1)}$ tels que $m_n < \tilde{u}_k^{(m+1)} \leqslant m_{n+1}$. On a bien $A \subset G(U)$ et $b \notin G(U)$. ∎

Démonstration du théorème.

1er pas : Si A est une partie dénombrable de IR, il existe $\tilde{U} = (\tilde{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que :

$$A \subset G(\tilde{U}) \text{ et } \lim_{n \to \infty} \tilde{u}_{n+1} / \tilde{u}_n = 1.$$

• Si A est contenue dans le $\mathbb{Z}$-module ayant pour base $1, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$, ce résultat est vrai. En effet, soit $\epsilon > 0$ donné. D'après le théorème de Kronecker, et pour tout élément $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) \in \{-1,1\}^n$, il existe n+1 entiers $m_{i,\epsilon,\sigma}$, $0 \leqslant i \leqslant n$ (ou un point entier $P_{\epsilon,\sigma}$ de IR^{n+1}) tels que

$$| m_{i,\epsilon,\sigma} - m_{o,\epsilon,\sigma}\, \alpha_i - \sigma_i \frac{\epsilon}{2} | \leqslant \frac{\epsilon}{2} \qquad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

ce qui entraîne :

$$| m_{i,\epsilon,\sigma} - m_{o,\epsilon,\sigma}\, \alpha_i | \leqslant \epsilon \text{ et } \operatorname{sgn}(m_{i,\epsilon,\sigma} - m_{o,\epsilon,\sigma}\, \alpha_i) = \sigma_i \qquad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

On construit ainsi 2^n points entiers de IR^{n+1}.

Soit $M_\epsilon = \sup_\sigma (m_{o,\epsilon,\sigma})$. On construit alors par récurrence une suite $V^{(\epsilon)} = (v_k^{(\epsilon)})_{k \in \mathbb{N}}$, de la manière suivante :

$$v_o^{(\epsilon)} = M_\epsilon \quad \text{et} \quad v_{k+1}^{(\epsilon)} = v_k^{(\epsilon)} + m_{o,\epsilon,\sigma} \qquad (k \geqslant 1)$$

où $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ est déterminé par :

$$\sigma_i = -\operatorname{sgn} < v_k^{(\epsilon)}\, \alpha_i >, \quad 1 \leqslant i \leqslant n$$

où $< x > = x - m$, m étant l'entier le plus proche de m, est défini si $\| x \| \neq 1/2$. La suite $V^{(\epsilon)}$ vérifie donc :

$$\begin{cases} \forall\, k \in \mathbb{N} \qquad \forall\, i \in \{1,2,\ldots,n\} \qquad \| v_k^{(\epsilon)}\, \alpha_i \| \leqslant \epsilon \\ \forall\, k \in \mathbb{N} \qquad v_{k+1} - v_k \leqslant M_\epsilon . \end{cases}$$

Il suffit alors de prendre pour $\widetilde{U}$ la suite croissante de tous les $v_k^{(1/j)}$, (j,k) décrivant $\mathbb{N}^2$ avec la contrainte $v_{k-1}^{(1/j)} < M_{1/1+j}$.

• Si A est fini, comme dans la démonstration du lemme, il existe un entier q tel que q A est contenu dans un $\mathbb{Z}$-module ayant une base $1,\alpha_1,\ldots,\alpha_n$. Il existe donc une suite $\widetilde{U}'$ associée à q A, et la suite q $\widetilde{U}'$ convient.

• Soit $A = (a_n)_n \in \mathbb{N}$. On sait construire une suite $\widetilde{U}^{(n)} = (\widetilde{u}_k^{(n)})_k \in \mathbb{N}$ croissante d'entiers telle que :

$$\begin{cases} a_i \in G(\widetilde{U}^{(n)}) \qquad 0 \leqslant i \leqslant n \\ \lim\limits_{k \to \infty} \widetilde{u}_{k+1}^{(n)} / \widetilde{u}_k^{(n)} = 1. \end{cases}$$

Donc il existe $\kappa(n)$ tel que :

$$k \geqslant \kappa(n) \Rightarrow \forall\, i \in \{0,1,\ldots,n\} \quad , \quad \| a_i \widetilde{u}_k^{(n)} \| < 1/n.$$

Il suffit donc de choisir pour $\widetilde{U}$ la suite croissante de tous les $u_k^{(n)}$, où (k,n) décrit $\mathbb{N}^2$ avec les contraintes :

$$k \geqslant \kappa(n)$$

$$k > \kappa(n) \Rightarrow \widetilde{u}_{k-1}^{(n)} \leqslant \widetilde{u}_{\kappa(n+1)}^{(n+1)}.$$

2ème pas : Si A est une partie dénombrable de $\mathbb{R}$, il existe $U = (u_n)_n \in \mathbb{N}$ telle que

$$\overline{A} = G(U) \quad \text{et} \quad \lim_{n \to \infty} u_{n+1} / u_n = 1$$

$\overline{A} = \bigcap_{A \subset G(V)} G(V)$ est contenu dans $G(\widetilde{U})$, où $\widetilde{U}$ est la suite construite précédemment. Donc, d'après le résultat d'Eggleston, $\overline{A}$ est dénombrable ainsi que $G(\widetilde{U}) - \overline{A} = B$. Soit $\overline{A} = (a_n)_n \in \mathbb{N}$ et $B = (b_n)_n \in \mathbb{N}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ donné. b_n n'appartient pas à $\overline{A}$, donc il existe une suite $U^{(n)}$ telle que :

$$A \subset G(U^{(n)}) \text{ et } b_n \notin G(U^{(n)}).$$

En enlevant les premiers termes de $U^{(n)}$, on obtient une nouvelle suite, notée encore $U^{(n)}$, telle que :

$$\begin{cases} \lim\limits_{k\to\infty} \| u_k^{(n)} a_i \| = 0 \quad (i \in \mathbb{N}) \\ \sup\limits_{k\in\mathbb{N}} \sup\limits_{0\leqslant i\leqslant n} \| u_k^{(n)} a_i \| \leqslant \dfrac{1}{n} \\ \| u_k^{(n)} b_n \| \text{ ne tend pas vers 0 quand k tend vers } +\infty. \end{cases}$$

Soit U la suite croissante de tous les entiers $\tilde{u}_k$, k décrivant IN, et $u_k^{(n)}$, (k,n) décrivant $\mathbb{N}^2$. Alors $A \subset G(U)$, d'où $\overline{A} \subset G(U)$. D'autre part :

$$G(U) \subset G(\tilde{U}) \cap \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} G(U^{(n)}) \right) = \overline{A}.$$

D'où le second pas. Le théorème se déduit alors du fait que, d'après le lemme, si $\mathscr{G}$ est un sous-groupe dénombrable de IR, $\overline{\mathscr{G}} = \mathscr{G}$. ∎

COROLLAIRE. *Soit $\mathscr{G}$ un sous-groupe de* IR, *dénombrable et tel que* $1 \in \mathscr{G}$. *Alors il existe une suite* V *d'entiers telle que :*

$$\begin{cases} \mathscr{G} = G(V) = G^*(V) \\ V \textit{ strictement croissante.} \end{cases}$$

On a déjà vu que, quelle que soit la suite d'entiers U, il existe une suite V telle que G(U) = G*(V). Le fait que la valeur u_n soit prise par v_k pour un grand nombre d'indices k joue un rôle essentiel. Le problème se complique lorsque l'on cherche des solutions V strictement croissantes.

LEMME. *Soit* $K \in \mathbb{N}^*$, *ρ et θ deux nombres complexes de modulo 1. Alors :*

$$\left| \frac{\rho}{K} \cdot \frac{1-\theta^K}{1-\theta} - 1 \right| < \epsilon \Rightarrow |\rho - 1| < 6\sqrt{3\epsilon}.$$

Soit en effet $\alpha = \dfrac{\rho}{K} \cdot \dfrac{1-\theta^K}{1-\theta} = \dfrac{1}{K} \sum\limits_{k<K} \rho\theta^K$. On a alors : $0 = \sum\limits_{k<K} \mathrm{Re}(\alpha - \rho\theta^k)$.

Partageons alors l'ensemble $\{0,1,\ldots,K-1\}$ en $I \cup J$, suivant que $\mathrm{Re}(\rho\theta^k) > 1-3\epsilon$ ou non. Alors :

$$0 = \sum_{k\in I} \mathrm{Re}(\alpha - \rho\theta^k) + \sum_{k\in J} \mathrm{Re}(\alpha - \rho\theta^k) \leqslant \epsilon \,\mathrm{Card}\, I - 2\epsilon \,\mathrm{Card}\, J$$

d'où $\mathrm{Card}\, I \geqslant 2\,\mathrm{Card}\, J$, ce qui entraîne $\mathrm{Card}\, I \geqslant 2K/3$.

Si $0 \in I$, $\mathrm{Re}(\rho) > 1-3\epsilon$, ce qui entraîne $|\rho - 1| < 2\sqrt{3\epsilon}$ (en effet, si $\cos\phi = 1-3\epsilon$, l'identité $\cos\phi = \cos^2\phi/2 - \sin^2\phi/2$ entraîne $\sin\phi/2 < \sqrt{3\epsilon}$. Or $|e^{i\phi} - 1| = 2\sin\phi/2$).

Sinon, soit $k_o \in I$ minimal, et soit $I' = I - k_o$. I et I' ont donc un élément commun $k_1 = k'_1 - k_o$, avec $k'_1 \in I$. On a donc :

$$|\rho - 1| \leqslant |\rho - \rho\theta^{k_o}| + |\rho\theta^{k_o} - 1| = |\rho\theta^{k_1} - \rho\theta^{k'_1}| + |\rho\theta^{k_o} - 1|$$

$$\leqslant |\rho\theta^{k_1} - 1| + |\rho\theta^{k'_1}| + |\rho\theta^{k_o} - 1|$$

$$\leqslant 3 \cdot 2\sqrt{3\epsilon}$$

puisque k_o, k_1 et k'_1 appartiennent à I. ■

Démonstration du corollaire. Soit $\mathscr{G} = (a_n)_n \in \mathbb{N}$, et $U = (u_n)_n \in \mathbb{N}$ une suite vérifiant les conclusions du théorème. La suite V est construite à l'aide de blocs successifs $V_o, V_1, \ldots, V_n, \ldots$.

$$V_o = \{u_o\}.$$

Supposons $V_o, V_1, \ldots, V_{n-1}$ construits, et soit m_{n-1} le plus grand élément de V_{n-1} . D'après la définition de U, il existe deux entiers $k = k_n$ et $p = p_n$ tels que :

$$\begin{cases} u_k > m_{n-1} \text{ et } |e(u_k a_i) - 1| \leqslant \dfrac{1}{n} & 0 \leqslant i \leqslant n \\ |e(u_p - a_i) - 1| \leqslant \dfrac{1}{n\,2^n} . \end{cases}$$

V_n est alors l'ensemble de tous les entiers $u_k + r\,u_p$ et $u_k + u_n + r\,u_p$, $0 \leqslant r \leqslant 2^n$. D'où la suite strictement croissante V. Nous noterons $W_n = \bigcup_{i=0}^{n} V_i$.

Supposons $\alpha \in G^*(V)$. Alors, en particulier, on a :

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{v \in W_n} e(\alpha v) / \text{Card } W_n = 1.$$

Or les entiers de la forme $u_k + r\,u_p$, $0 \leqslant r \leqslant 2^p$, représentent au moins 1/3 des éléments de W_n. Cela entraîne donc :

$$\lim_{n \to \infty} \frac{e(\alpha u_k)}{\text{Card } W_n} \cdot \frac{1 - e(2^n \alpha u_p)}{1 - e(\alpha u_p)} = 1.$$

D'après le lemme, cela entraîne $\lim_{n \to \infty} e(\alpha u_k) = 1$. De la même manière, on obtient $\lim_{n \to \infty} e(\alpha(u_k + u_n)) = 1$. D'où :

$$\alpha \in G^*(V) \Rightarrow \alpha \in G(U) = \mathscr{G} .$$

Réciproquement, soit α un élément de $\mathscr{G}$. Donc $\alpha = a_i$, et pour $n \geqslant i$, on a pour tout élément v de V_n :

si v est de la forme $u_k + r\,u_p$: $|e(\alpha v) - 1| \leqslant |e(\alpha u_k) - 1| + r\,|e(\alpha u_p) - 1| \leqslant 2/n$

si v est de la forme $u_k + u_n + r\,u_p$: $|e(\alpha v) - 1| \leqslant |e(\alpha u_n) - 1| + 2/n$.

On a donc bien $\alpha \in G(V)$ et $\alpha \in G^*(V)$. ∎

4. - EXEMPLES LIES AU DEVELOPPEMENT EN SERIES DE CANTOR

Si $u_0 = 1$, et $u_{n+1} = a_n u_n$ pour tout entier n, a_n étant un entier $\geqslant 2$, on sait alors que :

- tout nombre réel x s'écrit $x = [x] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon_n}{u_n}$, $0 \leqslant \epsilon_n < a_n$, de manière unique en général ;
- tout nombre entier m s'écrit $m = \sum_{n=0}^{N} \rho_n u_n$, $0 \leqslant \rho_n < a_n$, de manière unique.

Les résultats qui suivent, et qui se placent dans le cas particulier $u_n = (n+1)!$, pourraient être adaptés dans ce cadre plus général : c'est le cas en particulier pour la proposition 5.

4.1 - PROPOSITION 4. *Soit $\theta \in [0,1]$. Alors il existe une suite strictement croissante d'entiers* U *telle que* dim $G(U) = \theta$.

En effet, si U est la suite de tous les entiers m n!, où $1 \leqslant m \leqslant n^{1-\theta}$ et n décrit IN, et si $x = [x] + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\epsilon_n}{n!}$, avec $0 \leqslant \epsilon_n < n$, ϵ_n entier, il est facile de voir que :

$$x \in G(U) \Longleftrightarrow y_n = o(n^{\theta}) \quad \text{où} \quad y_n = \inf(\epsilon_n, n - \epsilon_n)$$

et, d'après un résultat d'Erdös et Volkmann, [6], dim $G(U) = \theta$. ∎

4.2. Cette démonstration permet de construire une suite U explicite telle que $G(U) = \mathbb{Q}$: c'est la suite de tous les entiers m . n!, (m,n) décrivant $\mathbb{N}^2$ avec la contrainte $1 \leqslant m \leqslant n$. Par contre, déterminer une suite U telle que $G(U) = \overline{\mathbb{Q}}$ semble bien plus difficile.

4.3. Une propriété très commode des ensembles G(U) est que, si U' est une sous-suite infinie extraite de U, on a $G(U) \subset G(U')$. C'est cette idée qui est à la base du résultat suivant, ainsi que de la proposition 6.

PROPOSITION 5. *Soit* $\mathcal{G}_0 = G((n!)_{n \in \mathbb{N}^*})$. *Alors* G(U) *contient* $\mathcal{G}_0$ *si et seulement si il existe une suite bornée d'entiers* $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$, *et pour chaque* n *des entiers* $k_{1,n} \leqslant k_{2,n} \leqslant \ldots \leqslant k_{p_n,n}$, *tels que :*

$$\begin{cases} u_n = \sum_{i=1}^{p_n} k_{i,n}\,! \\ \lim_{n \to \infty} k_{1,n} = +\infty. \end{cases}$$

Il est immédiat que la propriété énoncée est suffisante.

Pour montrer qu'elle est nécessaire, il suffit de montrer que si u_n s'écrit $u_n = \sum_{m=1}^{M(n)} r_m(n)\, m!$, dans la base $(m!)_{m \in \mathbb{N}^*}$, avec $r_{M(n)}(n) \neq 0$, et si $\overline{\lim}_{n \to \infty} \sum_{m=1}^{M(n)} r_m(n) = +\infty$, alors il existe un élément $x \in \mathcal{G}_0$ tel que $\| x\, u_n \|$ ne tend pas vers 0.

On peut remplacer U par une sous-suite infinie (que je noterai encore U par abus). Cela permet donc de supposer que, pour tout entier n, $r_m(n) > 0$ ait au moins n solutions $m_i(n)$, $1 \leqslant i \leqslant n$ telles que :

$$\begin{cases} \forall\, i, \quad |m_{i+1} - m_i| \geqslant 3 \\ N(n-1) + 3 \leqslant m_1(n) \leqslant m_2(n) \leqslant \ldots \leqslant m_n(n) \leqslant N(n). \end{cases}$$

Soit $\sup \left\{ \inf (r_{m_i}(n),\ m_i - r_{m_i}(n)) \cdot m_i^{-1} \right\} = s_n$, atteint en $i = j$ (en fait, $m_i = m_i(n)$ et $j = j(n)$). Il est alors nécessaire de séparer deux cas :

. Si $\overline{\lim}_{n \to \infty} s_n = 2\epsilon > 0$, on peut encore extraire une sous-suite de telle sorte que $\lim_{n \to \infty} s_n = 2\epsilon$. Je poserai alors :

$$x_n = \sum_{q=1}^{n} \frac{\alpha_q}{(m_{j(q)}(q)+1)!}, \quad x = \sum_{q=1}^{\infty} \frac{\alpha_q}{(m_{j(q)}(q)+1)!}$$

avec $\alpha_q \in \{0,1\}$. Donc $x \in \mathcal{G}_0$. D'autre part, on a :

$$\| x_n\, u_n \| = \| x_{n-1} u_{n-1} + \frac{r_{m_j}(n)\alpha_n}{m_j+1} + 0_n\left(\frac{1}{m_j}\right) \|$$

où $m_j = m_{j(n)}(n)$.

Le terme $0_n\left(\frac{1}{m_j}\right)$ est plus petit que $\frac{\epsilon}{4}$ pour n assez grand, et donc si on choisit :

$$\begin{cases} \alpha_n = 1 & \text{si} \quad \| x_{n-1}u_{n-1} \| \leqslant \dfrac{\epsilon}{2} \\ \alpha_n = 0 & \text{si} \quad \| x_{n-1}u_{n-1} \| > \dfrac{\epsilon}{2} \end{cases}$$

on obtient $\| x_n u_n \| > \dfrac{\epsilon}{4}$ pour n assez grand. Alors :

$$\| x\, u_n \| = \| x_n u_n + u_n \sum_{q=n+1}^{\infty} \frac{\alpha_j}{(m_j+1)!} \| \geqslant \frac{\epsilon}{4} - \frac{(M(n)+1)!}{(M(n)+3)!}$$

car $m_j(n+1) \geqslant M(n) + 3$ et donc ne tend pas vers 0. D'où le résultat dans ce cas.

. Si $\lim_{n \to \infty} s_n = 0$, je poserai :

$$x_n = \sum_{q=1}^{n} \sum_{i=1}^{q} \frac{\alpha_{i,q}}{(m_i(q)+1)!} \quad \text{et} \quad x = \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{q} \frac{\alpha_{i,q}}{(m_i(q)+1)!}$$

où les coefficients $\alpha_{i,q}$ sont définis de proche en proche de la manière suivante : le début est arbitraire, et si $\epsilon > 0$ est fixé arbitraire, avec $\epsilon < \dfrac{1}{4}$:

si $\| x_{n-1}u_{n-1} \| \geqslant \dfrac{\epsilon}{2}$, $\alpha_{i,n} = 0 \quad (1 \leqslant i \leqslant n)$

si $\| x_{n-1}u_{n-1} \| < \dfrac{\epsilon}{2}$,
$\alpha_{i,n} = \left[\dfrac{2\epsilon}{N} \dfrac{m_i+1}{r_{m_i}(n)} \right]$ pour $1 \leqslant i \leqslant N = N(n) = \inf\left(n, \dfrac{1}{\sqrt{s_n}}\right)$
$(m_i = m_i(n))$.
$\alpha_{i,n} = 0$ sinon.

On a donc :

$$\| x_n u_n \| = \| x_{n-1}u_{n-1} + \sum_{i=1}^{n} \frac{r_{m_i}(n)\alpha_{i,n}}{m_i+1} + 0\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{m_i^2} \right) \| .$$

Le 0 étant absolu, et provenant de ce que deux α non nuls consécutifs sont séparés par au moins deux coefficients nuls. Ce terme tend vers 0, et donc est majoré par $\dfrac{\epsilon}{4}$ pour n assez grand.

Si $\| x_{n-1}u_{n-1} \| \geqslant \dfrac{\epsilon}{2}$, on a donc $\| x_n u_n \| \geqslant \dfrac{\epsilon}{4}$. Dans l'autre cas, on a :

$$\| \sum_{i=1}^{n} \frac{r_{m_i}(n)\alpha_{i,n}}{m_i+1} - 2\epsilon \| \leqslant N\, s_n \leqslant \sqrt{s_n} \qquad \text{qui tend vers 0.}$$

Donc pour n assez grand, $\| \sum_{i=1}^{n} \dfrac{r_{m_i}(n)\alpha_{i,n}}{m_i+1} \| > \epsilon$, d'où encore $\| x_n u_n \| > \dfrac{\epsilon}{4}$. Et on a encore :

$$\| x\, u_n \| = \| x\, u_n + u_n \sum_{m \geqslant N(n)+3} \frac{\alpha}{(m+1)!} \| \geqslant \frac{\epsilon}{4} - \frac{(M(n)+1)(n)!}{(M(n)+3)!},$$

et donc $\| x\, u_n \|$ ne tend pas vers 0.

Il reste à montrer que $x \in \mathcal{G}_0$, ce qui est immédiat car $\frac{\alpha_{i,q}}{m_i(q)}$ tend vers 0 quand $m_i(q)$ tend vers $+\infty$ (en effet, $r_{m_i}(n) \geqslant 1$ et N tend vers l'infini). ■

COROLLAIRE. *Il n'existe pas de suite* U *telle que* G(U) *contienne* $\mathcal{G}_0 \cup \{\lambda\}$, *où* $\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[\rho n]}{n!}$, *avec* ρ *irrationnel.*

En effet, sinon, $u_n = \sum_{i=1}^{p_n} (k_{i,n})!$ d'après la proposition 5. Mais d'autre part,

$$\lim_{n \to \infty} \| \lambda u_n \| = 0 \iff \lim_{n \to \infty} \| \sum_{i=1}^{p_n} \frac{[\rho(k_{i,n}+1)]}{k_{i,n}+1} \| = 0$$

$$\iff \lim_{n \to \infty} \| \sum_{i=1}^{p_n} \frac{\rho(k_{i,n}+1)}{k_{i,n}+1} \| = 0 \quad \text{car } p_n \text{ est borné et les } k_{i,n} \text{ tendent vers } +\infty \text{ avec n.}$$

$$\iff \lim_{n \to \infty} \| p_n \rho \| = 0 \text{ ce qui est impossible car les } p_n \rho \text{ prennent un nombre fini de valeurs non entières.} \quad ■$$

En fait, si $x = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\epsilon_n}{n!}$, avec $0 \leqslant \epsilon_n < n$, on peut par la même méthode obtenir : Si la suite $(\frac{\epsilon_n}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ a un nombre fini de points d'accumulations, tous rationnels, le sous-groupe engendré par $\mathcal{G}_0$ et x est de la forme G(U) ; si au contraire ce nombre est infini, ou si un de ces points d'accumulation est irrationnel, le sous-groupe engendré par $\mathcal{G}_0$ et x n'est contenu dans aucun G(U).

Il existe donc des sous-groupes de IR, $\mathcal{G}_1$ et $\mathcal{G}_2$, qui diffèrent par un nombre dénombrable, tels que l'un est un G(U) et l'autre non.

5. - EXEMPLE D'UN GROUPE G*(V) QUI N'EST PAS UN G(U)

PROPOSITION 6. *Soit* $A = (\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite de nombres réels, décroissante vers* 0, *et* f *une application de* IN *dans* IR. *Soit* A_f *l'ensemble des sommes des séries convergentes* $\Sigma\, m_n \alpha_n$, *où :*

$$\begin{cases} m_n \in \mathbb{Z}, \ m_n = 0(1) \\ \text{Card } \{ n < N, \ m_n \neq 0 \} = o(f(N)). \end{cases}$$

Alors A_f *est un sous-groupe additif de* IR, *et :*

$$A_f \subset G(U) \Rightarrow [\lim_{n\to\infty} \| u_n \alpha_k \| = 0 \text{ } \textit{uniformément en } k] \Rightarrow \overline{\lim_{n\to\infty}} \; \alpha_n/\alpha_{n+1} = +\infty.$$

Il est immédiat que A_f est un sous-groupe additif de IR. La première implication se montre par l'absurde : supposons qu'il existe $\epsilon > 0$ et une suite (n_k) infinie telle que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \| u_{n_k} \alpha_k \| \geqslant \epsilon$$

Il existe une suite $J \subset \mathbb{N}$ telle que $\sum_{n \in J} \alpha_k$ converge. On peut alors construire une sous-suite $I \subset J$, de proche en proche, telle que l'on ait simultanément :

$$\text{Car}\{n < N, n \in I\} = o(f(N))$$

$$\forall k \in I, \sum_{\substack{n \in I \\ n > k}} \alpha_n \leqslant \frac{\epsilon}{3u_{n_k}}.$$

On construit alors de proche en proche une suite $M = (m_k)_{k \in I}$ d'éléments de $\{0,1\}$, de la manière suivante :

$$m_{k(1)} = 0 \text{ et si } m_{k(1)},\ldots,m_{k(r)} \text{ sont connus, soit } x_r = \sum_{i=1}^{r} m_{k(i)}\alpha_{k(i)}.$$

On prend alors :

$$m_{k(r+1)} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \| u_{n_{k(r+1)}} x_r \| \geqslant \dfrac{\epsilon}{2} \\ 1 & \text{si} \quad \| u_{n_{k(r+1)}} x_r \| < \dfrac{\epsilon}{2} \end{cases}$$

Alors, si $x_{r+1} = x_r + m_{k(r+1)}\alpha_{k(r+1)}$, on a :

$$\| x_{r+1} u_{n_{k(r+1)}} \| \geqslant \frac{\epsilon}{2}.$$

Soit $y = \lim_{r\to\infty} x_r = \sum_{i=1}^{\infty} m_{k(i)}\alpha_{k(i)}$.

y existe, et d'après la construction de I, $y \in A_f$. Mais de plus, on a :

$$\| y u_{n_{k(r+1)}} \| = \| x_{r+1} u_{n_{k(r+1)}} + u_{n_{k(r+1)}} \sum_{i \geqslant r+2} m_{k(i)}\alpha_{k(i)} \| \geqslant \frac{\epsilon}{2} - \frac{\epsilon}{3}$$

Donc $y \notin G(U)$, et la contradiction cherchée.

La seconde implication est plus immédiate : $\epsilon > 0$ étant donné, il existe n_o tel que :

$$\forall k, \quad n > n_o \Rightarrow \| u_n \alpha_k \| < \epsilon$$

Soit k fixé quelconque. Il existe donc $n > n_o$ tel que $u_n \alpha_k > \frac{1}{2}$. On fixe alors cet n. Il existe k' maximal tel que $u_n \alpha_{k'} > \frac{1}{2}$, car α_m tend vers 0. On a donc $k' > k$, et :

$$\left.\begin{array}{l} u_n \alpha_{k'} > 1 - \epsilon \\ u_n \alpha_{k'+1} < \epsilon \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\alpha_{k'}}{\alpha_{k'+1}} > \frac{1-\epsilon}{\epsilon}. \quad \blacksquare$$

Exemple. Soit $U = (2^n)_{n \in \mathbb{N}}$. Alors si $x = [x] + \sum_{n=1}^{+\infty} \epsilon_n 2^{-n}$, ($\epsilon_n = 0$ ou 1), on a :

$$G(U) = \left\{ x \,/\, \epsilon_n = 0 \quad \text{pour n assez grand} \right\}$$

$$G^*(U) = \left\{ x \,/\, \lim_{N \to \infty} N^{-1} \operatorname{Card} \left\{ n < N \,/\, \epsilon_n \neq \epsilon_{n+1} \right\} = 0 \right\}.$$

Donc G(U) est dénombrable, tandis que $G^*(U) = A_f$, en prenant $\alpha_n = 2^{-n}$ et f(n) = 1. Donc d'après le résultat précédent, G*(U) n'est contenu dans aucun sous-groupe G(U'). D'autre part, d'après un résultat de Bésicovitch [1], dim G*(U) = 0.

6. - QUELQUES PROBLEMES OUVERTS

Le problème qui est à la base de ce travail, c'est-à-dire donner une caractérisation des sous-groupes de IR qui sont de la forme G(U) (resp. G*(U)), n'est bien entendu pas résolu. Ils peuvent être caractérisés d'une manière un peu analogue aux ensembles normaux (cf. Rauzy, [8]), à l'aide de suites de fonctions définies positives (une telle caractérisation se trouve dans [3]), mais c'est une caractérisation qui ne présente guère d'intérêt.

Est-il possible, par exemple, de trouver un groupe G(U) et un élément λ tel que $G(U) \cup \{ \lambda \}$ n'engendre pas un groupe de la forme G(U'), mais soit contenu dans un tel groupe ? Cela suppose bien entendu G(U) non dénombrable. Ce résultat permettrait de préciser, avec le théorème 1 et le corollaire de la proposition 5, le rôle des parties dénombrables.

REFERENCES

[1] A.S. BESICOVITCH. *«On the sum of digits of real numbers represented in the dyadic system»*. Math. Annalen 110 (1934) p. 321-330.

[2] P. BILLINGSLEY. *«Ergodic theory and information»*. John Wiley & Sons (1964).

[3] J.P. BOREL. *«Répartition modulo 1 suivant la mesure de Dirac à l'origine»*. Note C.R.A.S. Série I, t. 294 (1982), p. 5-8.

[4] H.G. EGGLESTON. *«Sets of fractional dimensions which occur in some problems of number theory»*. Proc. London Math. Soc. (2) 54 (1952), p. 42-93.

[5] P. ERDOS, S.J. TAYLOR. *«On the set of points of convergences of a lacunary trigonometric series and the equidistribution properties of related sequences»*. Proc. London Math. Soc. (3) 7 (1957), p. 598-615.

[6] P. ERDOS, B. VOLDMANN. *«Additive Gruppen mit vorgegebener Hausdorffsher Dimension»*. J. für die reine und angew. Math. 221 (1966), p. 203-208.

[7] L. KUIPERS, H. NIEDERREITER. *«Uniform distribution of sequences»*. John Wiley & Sons (1974).

[8] G. RAUZY. *«Caractérisation des ensembles normaux»*. Bull. S.M.F. 98 (1970), p. 401-414.

[9] A. THOMAS. *«Dimension de Hausdorff»*. Bull. S.M.F. mémoire 37 (1974),p. 161-167.

(Manuscrit reçu le 21 juin 1982)