

THIERRY GALLOUËT

OTARED KAVIAN

**Résultats d'existence et de non-existence pour certains  
problèmes demi-linéaires à l'infini**

*Annales de la faculté des sciences de Toulouse 5<sup>e</sup> série*, tome 3, n° 3-4 (1981), p. 201-246

[http://www.numdam.org/item?id=AFST\\_1981\\_5\\_3\\_3-4\\_201\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AFST_1981_5_3_3-4_201_0)

© Université Paul Sabatier, 1981, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## RESULTATS D'EXISTENCE ET DE NON-EXISTENCE POUR CERTAINS PROBLEMES DEMI-LINEAIRES A L'INFINI

Thierry Gallouët <sup>(1)</sup> et Otared Kavian <sup>(2)</sup>

(1)(2) *Laboratoire d'Analyse Numérique, Université P. et M. Curie, 4 place Jussieu 75005 Paris - France.*

**Résumé :** On donne des conditions d'existence et de non-existence de solution pour des problèmes du type  $Au = g(\cdot, u) + h$ , où  $A$  est un opérateur auto-adjoint à résolvante compacte dans  $L^2(\Omega)$  ;  $g(x, s)$  est une fonction de  $\Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que l'intervalle fermé de bornes  $g_+ = \lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{g(x, s)}{s}$  et  $g_- = \lim_{s \rightarrow -\infty} \frac{g(x, s)}{s}$ , contient au plus une valeur propre simple de  $A$ , et  $h \in L^2(\Omega)$  est donné. Le cas où  $A$  n'est pas à résolvante compacte peut être étudié de manière analogue.

**Summary :** We consider problems of the type  $Au = g(\cdot, u) + h$ , where  $A$  is a self-adjoint operator with compact resolvent in  $L^2(\Omega)$ ,  $g(\cdot, \cdot)$  maps  $\Omega \times \mathbb{R}$  into  $\mathbb{R}$  and is such that the closed interval with endpoints  $g_{\pm} = \lim_{s \rightarrow \pm\infty} \frac{g(x, s)}{s}$  contains at most one simple eigenvalue of  $A$  and  $h \in L^2(\Omega)$  is given. Conditions for existence and non-existence of solutions are given ; the case where  $A$  is not with compact resolvent can be studied in the same way.

### PLAN

1. - INTRODUCTION ET RESULTATS PRINCIPAUX
2. - L'EQUATION DES ESTIMATIONS A PRIORI ET RESULTATS POUR LE CAS LIPSCHITZ-  
ZIEN
3. - LE THEOREME PRINCIPAL
4. - ETUDE DETAILLEE D'UN EXEMPLE EN DIMENSION 1
5. - CAS OU  $A$  A UN NOYAU DE DIMENSION INFINIE : UN THEOREME DU TYPE AMBRO-  
SETTI-PRODI POUR L'EQUATION DES ONDES NON LINEAIRES

## 1. - INTRODUCTION, NOTATIONS ET RESULTATS PRINCIPAUX

On s'intéresse à la résolution de problèmes du type

$$-\Delta u = g(u) + h, u \in H^2 \cap H_0^1(\Omega)$$

pour  $h \in L^2(\Omega)$  donné, en supposant que l'intervalle  $[g'(-\infty), g'(+\infty)]$  contient une valeur propre simple  $\lambda_k$  de  $-\Delta$ .

De façon plus générale, pour  $h \in L^2(\Omega)$ , on cherche à donner des conditions sur  $h$  pour l'existence, ou la non-existence, de solution pour le problème : Trouver  $u \in D(A)$  tel que

$$(1) \quad Au = g(\cdot, u) + h$$

1.1. On fait sur  $\Omega$  et  $A$  les hypothèses suivantes :

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Omega \text{ est un ouvert de } \mathbb{R}^N \text{ (} N \geq 1 \text{)} \\ A : D(A) \subset L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega) \\ A \text{ est un opérateur auto-adjoint à résolvante compacte (i.e. } \exists \gamma \in \mathbb{R} \text{ tel que } (A - \gamma I)^{-1} \\ \text{soit compact de } L^2(\Omega) \text{ dans } L^2(\Omega)). \end{array} \right.$$

Ceci signifie en particulier que  $D(A)$  est dense dans  $L^2(\Omega)$ ,  $A$  est un opérateur fermé et l'injection de  $D(A)$ , muni de la norme du graphe, dans  $L^2(\Omega)$  est compacte.

On sait que dans ces conditions  $A$  possède une famille dénombrable de valeurs propres  $(\lambda_i)_{i \in I}$  - que l'on compte avec leur multiplicité -, et on désigne par  $(\varphi_i)_{i \in I}$  une famille orthonormée de vecteurs propres qui constituent une base hilbertienne de  $L^2(\Omega)$ .

Nous verrons par la suite, au § 5 qu'il est possible d'appliquer les méthodes utilisées en supposant seulement que l'injection de  $D(A) \cap R(A)$ , muni de la norme du graphe, dans  $L^2(\Omega)$  est compacte (i.e.  $A$  peut avoir un noyau de dimension infinie, ce qui est le cas pour l'opérateur des ondes étudié au § 5).

On note  $\lambda$  une valeur propre simple de  $A$  et on désigne par  $\underline{\lambda}$  (resp.  $\bar{\lambda}$ ) la plus grande (resp. la plus petite) valeur propre de  $A$  inférieure (resp. supérieure) à  $\lambda$  ; si  $\lambda$  est la plus petite (resp. la plus grande) valeur propre de  $A$ , on pose  $\underline{\lambda} = -\infty$  (resp.  $\bar{\lambda} = +\infty$ ).

La fonction  $g$  vérifie

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} g : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ est une fonction mesurable en } x \in \Omega, \text{ continue en } s \in \mathbb{R} \text{ et :} \\ \text{i) } \lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{g(x,s)}{s} = g_+, \quad \lim_{s \rightarrow -\infty} \frac{g(x,s)}{s} = g_- \text{ p.p. en } x \in \Omega ; \\ \text{ii) l'intervalle fermé } [g_-, g_+] \text{ (ou } [g_+, g_-] \text{) contient au plus une valeur propre simple} \\ \text{(notée } \lambda \text{) de } A. \\ \text{iii) } \sup_{s \in \mathbb{R}} \left| \frac{g(x,s)}{s} \right| \in L^\infty(\Omega) \end{array} \right.$$

On peut supposer dans i) que  $g_+$  et  $g_-$  dépendent de  $x$  ; mais dans ce cas les résultats sont moins explicites, nous supposerons dans la suite que  $g_+$  et  $g_-$  sont des constantes.

Les problèmes linéaires et demi-linéaires à l'infini ont fait l'objet de nombreuses études. Lorsque l'intervalle  $[g_-, g_+]$  (ou  $[g_+, g_-]$ ) ne contient aucune valeur propre de  $A$ , il est connu que (1) a au moins une solution : voir par exemple Kazdan-Warner [11], Brézis-Nirenberg [6] et les bibliographies correspondantes.

Si  $\Omega$  est un domaine borné de  $\mathbb{R}^N$ ,  $A$  un opérateur elliptique du second ordre et  $0 < g_- < \lambda_1 < g_+ < \lambda_2$  ( $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  : 1ère et 2nde valeur propre de  $A$ ), de nombreux auteurs ont caractérisé l'ensemble des  $h \in L^2(\Omega)$  (ou  $C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$ ) tels que (1) à zéro, une ou deux solutions, avec diverses hypothèses sur la fonction  $g$  : voir Ambrosetti-Prodi [2], Kazdan-Warner [12], Berger-Podolak [5], Berestycki [3].

Les cas  $g_+ = g_- = \lambda$  conduisent à des problèmes dits résonnants et ont été étudiés notamment par Landesman-Lazer [13].

## 1.2. Résultats principaux

Notations :

. Pour  $z \in \mathbb{R}$  on pose  $z^+ = \text{Max}(z, 0)$ ,  $z^- = \text{Max}(-z, 0)$ , de sorte que

$$z = z^+ - z^-.$$

.  $(\cdot | \cdot)$  est le produit scalaire dans  $L^2(\Omega)$  et  $\|\cdot\|$  la norme associée.

.  $\|u\|_{D(A)} = (\|u\|^2 + \|Au\|^2)^{1/2}$  est la norme du graphe de  $A$ .

.  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  désigne le crochet de dualité entre un espace de Banach et son dual.

.  $\varphi$  est un vecteur propre normalisé correspondant à  $\lambda$  (i.e.  $A\varphi = \lambda\varphi$  et  $\|\varphi\| = 1$ ) et  $P$  désigne la projection orthogonale de  $L^2(\Omega)$  sur  $\varphi^\perp$ , ( $1'$  orthogonal de  $\varphi$  dans  $L^2(\Omega)$ ).

Au § 2 on étudie, pour  $\alpha, \beta \in ]\underline{\lambda}, \bar{\lambda}[$  donné le problème suivant :  
Trouver  $u \in D(A)$  et  $C \in \mathbb{R}$  tels que

$$(4) \quad \begin{cases} Au = \alpha u^+ - \beta u^- + C\varphi, \\ (u | \varphi) = 1 \end{cases}$$

On montre la proposition suivante :

PROPOSITION 2.2.  $\forall (\alpha, \beta) \in (]\underline{\lambda}, \bar{\lambda}[)^2$  il existe un couple unique  $(u, C) \in D(A) \times \mathbb{R}$  vérifiant (4).

On définit ainsi une fonction  $C(\cdot, \cdot)$  sur le carré  $\Lambda = ]\underline{\lambda}, \bar{\lambda}[ \times ]\underline{\lambda}, \bar{\lambda}[$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}$  et continue. On montre que pour  $\alpha \in ]\underline{\lambda}, \bar{\lambda}[$ ,  $C(\alpha, \alpha) = \lambda - \alpha$  ; si  $\varphi$  est de signe constant sur  $\Omega$ , par exemple

$$\varphi \geq 0, \text{ on a } \forall (\alpha, \beta) \in \Lambda, C(\alpha, \beta) = \lambda - \alpha,$$

et si  $\varphi$  n'est pas de signe constant sur  $\Omega$ , alors  $C(\cdot, \cdot)$  est strictement décroissante par rapport à chacune des variables. En particulier

$$\Gamma = \{ (\alpha, \beta) \in \Lambda ; C(\alpha, \beta) = 0 \}$$

est une courbe continue passant par  $(\lambda, \lambda)$  et partage  $\Lambda$  en deux composantes connexes  $\Lambda_+$  (où  $C(\alpha, \beta) > 0$ ), et  $\Lambda_-$  (où  $C(\alpha, \beta) < 0$ ).

En notant  $C_+ = C(g_+, g_-)$  et  $C_- = C(g_-, g_+)$ , on trouve, grâce à l'équation (4), lorsque  $C_+ C_- \neq 0$  des estimations a priori sur les solutions éventuelles de (1) et, par une méthode reposant sur l'invariance par homotopie du degré topologique de Leray-Schauder, on montre le théorème suivant au § 3 :

**THEOREME.** *Sous les hypothèses (2) et (3), en notant*

$$C_+ = C(g_+, g_-) \quad \text{et} \quad C_- = C(g_-, g_+)$$

*on a*

i) *Si  $C_+ C_- > 0$ , pour tout  $h \in L^2(\Omega)$  (1) admet au moins une solution.*

ii) *Si  $C_+ < 0$  et  $C_- > 0$ , pour tout  $h_0 \in \varphi^\perp$ , il existe  $a_0, a_2 \in \mathbb{R}$  tels que si  $h = h_0 + t\varphi$  ( $t \in \mathbb{R}$ )*

*.  $t > a_0 \Rightarrow$  (1) n'admet pas de solution*

*.  $t < a_2 \Rightarrow$  (1) admet au moins deux solutions*

*(Résultat analogue si  $C_- < 0$  et  $C_+ > 0$ , en changeant le sens de toutes les inégalités).*

iii) *Si  $C_- = 0$  et  $C_+ < 0$  [resp.  $C_- > 0$  et  $C_+ = 0$ ], pour tout  $h_0 \in \varphi^\perp$  il existe  $a_1 \in \mathbb{R}$  tel que  $h = h_0 + t\varphi$  ( $t \in \mathbb{R}$ )*

*$t < a_1 \Rightarrow$  (1) admet au moins une solution.*

*(De même si  $C_- = 0$  et  $C_+ > 0$  [resp.  $C_- < 0$  et  $C_+ = 0$ ]  $\exists a_1 \in \mathbb{R}$  tel que :*

*$t > a_1 \Rightarrow$  (1) admet au moins une solution).*

**Remarque 1.1.** - Dans le cas ii) du théorème, en ajoutant l'hypothèse :

$$\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} / \underline{\lambda} < \alpha \leq \frac{g(x, s) - g(x, t)}{s - t} \leq \beta < \bar{\lambda} \quad \forall s, t \in \mathbb{R}, \text{ p.p. en } x \in \Omega,$$

on peut montrer que  $a_0 = a_2$ , et que pour  $h = h_0 + a_2 \varphi(1)$  admet au moins une solution.

- Si  $\Omega$  est un domaine borné de  $\mathbb{R}^N$ ,  $D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ ,  $Au = -\Delta u$  (pour  $u \in D(A)$ ),  $\lambda$  est la première valeur propre de  $A$ ,  $\varphi \geq 0$  et  $g_- < \lambda < g_+$ , on a alors, en ajoutant une hypothèse de stricte convexité et de croissance de  $g(x, \cdot)$ , pour tout  $x \in \Omega$ ,  $a_0 = a_2$  et pour  $h = h_0 + t\varphi$ ,

$t < a_2 \Rightarrow (1)$  a exactement deux solutions

$t = a_2 \Rightarrow (1)$  a exactement une solution

(noter que  $C_+ = \lambda - g_+$  et  $C_- = \lambda - g_-$ ). On retrouve ainsi un résultat bien connu (cf [2], [3], [6]).

**Remarque 1.2.** Lorsque  $C_- = C_+ = 0$ , ce qui est notamment le cas si  $g_- = g_+ = \lambda$ , le problème  $Au = g_+ u^+ - g_- u^- + t\varphi$  ( $t \in \mathbb{R}$  donné) n'a pas de solution pour  $t \neq 0$ . On pourra dire dans ce cas que le problème (1) est «résonnant».

Si  $C_- \neq 0$  (resp.  $C_+ \neq 0$ ) et  $C_- C_+ = 0$ , on peut parler de problème «semi-résonnant».

Lorsque la fonction propre  $\varphi$  relative à  $\lambda$  est de signe constant sur  $\Omega$ , par exemple  $\varphi \geq 0$ , alors  $C_+ = C(g_+, g_-) = \lambda - g_+$  et  $C_- = \lambda - g_-$  : le problème est résonnant seulement lorsque  $g_- = g_+ = \lambda$  ; il est semi-résonnant lorsque  $g_- \neq \lambda$  et  $g_+ = \lambda$ , ou  $g_- = \lambda$  et  $g_+ \neq \lambda$ .

Lorsque la fonction propre  $\varphi$  change de signe sur  $\Omega$ , les problèmes résonnants et semi-résonnant ne peuvent se présenter que si  $g_- = g_+ = \lambda$  ou si  $g_- < \lambda < g_+$  (ou  $g_+ < \lambda < g_-$ ).

Pour étudier les problèmes résonnants et semi-résonnants il faut connaître le comportement de  $g(t) - g_+ t^+ + g_- t^-$  lorsque  $t \rightarrow \pm \infty$ , et dans certains cas on trouve des conditions de type Landesman-Lazer pour l'existence de solution de (1). Ces questions seront abordées dans un travail ultérieur (Gallouët-Kavian [11]).

Au § 4 on étudie le cas particulier de  $\Omega = ]0,1[$  ( $N = 1$ )  $D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ ,  $Au = -u''$  et on calcule explicitement en fonction de  $g_+$  et  $g_-$  le signe de  $C_+$  et  $C_-$ .

Au § 2 on précise également, dans certains cas, le nombre minimal de solutions de (1). On suppose que  $h \equiv 0$ ,  $g \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ,  $g(0) = 0$ ,  $g'(0)$  existe,  $\lim_{s \rightarrow \pm \infty} g(x, s)/s = g_{\pm}$  et  $g$  vérifie la condition de Lipschitz suivante :  $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\underline{\lambda} < \alpha \leq \frac{g(s) - g(t)}{s - t} \leq \beta < \bar{\lambda} \quad \forall s, t \in \mathbb{R}.$$

On a alors

1./ Si  $C_+ > 0$ ,  $C_- > 0$ ,  $\lambda < g'(0)$ , (1) admet au moins 3 solutions (i.e. (1) admet au moins 2 solutions non triviales).

2./ Si  $C_+ < 0$ ,  $C_- < 0$ ,  $\lambda > g'(0)$ , (1) admet au moins 3 solutions.

3./ Si  $C_+C_- < 0$  et  $\lambda \neq g'(0)$ , (1) admet au moins 2 solutions.

Ce résultat est à rapprocher de ceux de Castro-Lazer [8] où  $g$  est supposée de classe  $C^2$ ,  $tg''(t) \geq 0$ ,  $g_+$  et  $g_-$  étant dans l'intervalle  $]\lambda, \bar{\lambda}]$  et  $g'(0) < \lambda$  (Ceci est une conséquence du cas 2./ ci-dessus). Amann-Zehnder [1] obtiennent également des résultats dans cette direction avec d'autres conditions sur  $g$  (en particulier  $g_+ = g_-$ ).

Au § 5 nous montrerons sur un exemple qu'il est possible de se passer de la compacité de la résolvante de  $A$ , en admettant un noyau de dimension infinie pour  $A$  et en prenant pour  $g$  des fonctions monotones.

Plus précisément soit, par exemple,

$$\Omega = ]0, \pi[ \times ]0, 2\pi[ ,$$

et considérons sur  $L^2(\Omega)$  l'opérateur  $A = \underline{A}^*$  avec

$$D(\underline{A}) = \{ u \in C^2(\bar{\Omega}) / u(0, \cdot) = u(\pi, \cdot) = 0, u(\cdot, 0) = u(\cdot, 2\pi), u_t(\cdot, 0) = u_t(\cdot, 2\pi) \}$$

et pour  $u \in D(\underline{A})$ ,  $\underline{A}u(x, t) = u_{tt}(x, t) - u_{xx}(x, t)$ ,  $(x, t) \in \Omega$ .

On sait (cf. par exemple Brézis-Nirenberg [7]) que  $\lambda_1 = 1$  et  $\lambda_2 = 3$  sont respectivement la première et seconde valeur propre positive de  $A$ . La fonction  $\varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x$  engendre le sous-espace propre correspondant à  $\lambda_1 = 1$ .

Si  $0 < g_- < 1 < g_+$  (ou  $0 < g_+ < 1 < g_-$ ), on trouve alors un résultat du type Ambrosetti-Prodi :

**PROPOSITION 5.1.** Soit  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , une fonction telle que :

- .  $g$  vérifie (3) ;
- . Pour presque tout  $(x, t) \in \Omega$ ,  $s \rightarrow g(x, t, s)$  est croissante ;
- . Il existe  $\epsilon > 0$  et une fonction  $k \in L^1(\Omega)$  tels que

$$\forall s \in \mathbb{R} \quad g(\cdot, \cdot, s) \cdot s \geq \epsilon s^2 - k(\cdot, \cdot) .$$

Alors  $\forall h_0 \in \varphi_1^\perp$ , si  $h = h_0 + \theta \varphi_1$  on a :

- i) Si  $g_- < 1 < g_+$  [resp.  $g_+ < 1 < g_-$ ],  $\exists a_0, a_2 \in \mathbb{R}$  tels que
  - .  $\theta > a_0$  [resp.  $<$ ]  $\Rightarrow$  (1) n'admet pas de solution ;
  - .  $\theta < a_2$  [resp.  $>$ ]  $\Rightarrow$  (1) admet au moins 2 solutions.

ii) Si  $g_- = 1 < g_+$  ou  $g_- < 1 = g_+$  [resp.  $g_- = 1 > g_+$  ou  $g_+ = 1 > g_-$ ] il existe  $a_1 \in \mathbb{R}$  tel que

$\theta < a_1$  [resp.  $>$ ]  $\Rightarrow$  (1) admet au moins 1 solution.

((1) étant pris avec l'opérateur  $A = \underline{A}^*$  défini ci-dessus).

## 2. - L'EQUATION DES ESTIMATIONS A PRIORI ET QUELQUES RESULTATS POUR LE CAS LIPSCHITZIEN

2.1. Dans cette partie nous étudions le problème : trouver  $u \in D(A)$  et  $C \in \mathbb{R}$  tels que

$$(4) \quad \begin{cases} Au = \alpha u^+ - \beta u^- + C\varphi \\ (u | \varphi) = 1 \end{cases}$$

pour  $\alpha, \beta \in ]\underline{\lambda}, \bar{\lambda}[$  fixés (nous conservons les notations introduites au § 1).

Nous allons étudier ce problème comme conséquence d'un problème plus général.

Soit  $\tilde{g}$  une fonction vérifiant les conditions (L) :

$$(L) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{g} : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ est mesurable en } x \in \Omega, \text{ continue en } s \in \mathbb{R} \text{ et} \\ \text{i) } \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} / \\ \underline{\lambda} < \alpha \leq \frac{\tilde{g}(x,s) - \tilde{g}(x,t)}{s-t} \leq \beta < \bar{\lambda} \\ \forall s, t \in \mathbb{R}, \text{ p.p. en } x \in \Omega \\ \text{ii) } \lim_{s \rightarrow \pm\infty} \frac{\tilde{g}(x,s)}{s} = \tilde{g}_{\pm} \text{ p.p. en } x \in \Omega \\ \text{iii) } \tilde{g}(x,0) = 0 \text{ p.p. en } x \in \Omega \end{array} \right.$$

Nous allons montrer la proposition suivante :

PROPOSITION 2.1. Sous les hypothèses (2) et (L) on a

$$(2.1.0) \quad \forall s \in \mathbb{R}, \forall h_0 \in \varphi^\perp, \exists ! v \in D(A) \cap \varphi^\perp / \\ Av = P\tilde{g}(\cdot, v+s\varphi) + h_0.$$

(on rappelle que P est la projection orthogonale de  $L^2(\Omega)$  sur  $\varphi^\perp$ ).



De cette proposition on va déduire aisément le résultat suivant :

PROPOSITION 2.2. *Sous les hypothèses (2) on a*

$$(4) \quad \begin{aligned} & \forall \alpha, \beta \in ]\underline{\lambda}, \overline{\lambda}[ \quad \exists ! C(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}, \quad \exists ! u \in D(A) / \\ & \left\{ \begin{array}{l} Au = \alpha u^+ - \beta u^- + C(\alpha, \beta) \varphi \\ (u \mid \varphi) = 1 \end{array} \right. \end{aligned}$$

*Démonstration de la proposition 2.2.* On pose  $u = v + \varphi$ ,  $v \in \varphi^\perp \cap D(A)$  ; en projetant sur  $\varphi^\perp$ , (4) s'écrit :

$$Av = \widetilde{Pg}(v + \varphi)$$

où  $\widetilde{g}(z) = \alpha z^+ - \beta z^-$  vérifie (L) et  $\widetilde{g}_+ = \alpha$ ,  $\widetilde{g}_- = \beta$ . D'après la proposition 2.1. (avec  $s = 1$  et  $h_0 = 0$ ),  $v$  est unique et  $C = C(\alpha, \beta) = \lambda - (\widetilde{g}(v + \varphi) \mid \varphi)$ . ■

Avant de démontrer la proposition 2.1. nous allons introduire quelques notations.  $\varphi^\perp$  étant l'orthogonal de  $\varphi$  dans  $L^2(\Omega)$ , on pose

$$H = D(A) \cap \varphi^\perp.$$

On munit cet espace de la norme du graphe de  $A$ , de sorte que  $H$  soit un espace de Hilbert (noter que  $D(A) = H \oplus \mathbb{R} \varphi$ ).

$(\lambda_i)_{i \in I}$  étant la famille des valeurs propres de  $A$  et  $(\varphi_i)_{i \in I}$  une base hilbertienne de  $L^2(\Omega)$  formée des vecteurs propres correspondants, on note :

$$I_1 = \{i \in I ; \lambda_i \leq \underline{\lambda}\}, \quad I_2 = \{i \in I ; \lambda_i \geq \overline{\lambda}\}$$

$$H_1 = \left( \bigoplus_{i \in I_1} \mathbb{R} \varphi_i \right) \cap H, \quad H_2 = \left( \bigoplus_{i \in I_2} \mathbb{R} \varphi_i \right) \cap H.$$

On pose enfin  $G(x, t) = \int_0^t \widetilde{g}(x, s) ds$ , et on considère l'application  $J$  :

$$J : D(A) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$Z \mapsto J(Z) = \frac{1}{2} (AZ \mid Z) - \int_{\Omega} G(x, Z) dx - (h_0 \mid Z).$$

On a le lemme suivant :

LEMME 2.3. *i)  $D(A)$  étant muni de la norme du graphe, la fonctionnelle  $J : D(A) \rightarrow \mathbb{R}$  est continue*

Gâteaux-différentiable et

$$\forall u, v \in D(A) \quad \langle J'(u), v \rangle = (Au \mid v) - \int \tilde{g}(x, u) v \, dx - \int h_0 v \, dx.$$

ii) On pose, pour  $(u_1, u_2) \in H_1 \times H_2$

$$K(u_1, u_2) = J(u_1 + u_2 + s\varphi).$$

On a alors :

. pour tout  $u_2 \in H_2$ , l'application  $u_1 \mapsto K(u_1, u_2)$  est strictement concave de  $H_1$  dans  $\mathbb{R}$ .

. pour tout  $u_1 \in H_1$ , l'application  $u_2 \mapsto K(u_1, u_2)$  est strictement convexe de  $H_2$  dans  $\mathbb{R}$ .

*Démonstration du lemme 2.3.* La démonstration de i) est immédiate. Pour ii) on établit les inégalités

$$\langle \partial_1 K(u_1, u_2) - \partial_1 K(v_1, u_2), u_1 - v_1 \rangle \leq (\underline{\lambda} - \alpha) \|u_1 - v_1\|^2.$$

et

$$\langle \partial_2 K(u_1, u_2) - \partial_2 K(u_1, v_2), u_2 - v_2 \rangle \geq (\bar{\lambda} - \beta) \|u_2 - v_2\|^2.$$

On peut maintenant démontrer la proposition 2.1.

*Démonstration de la proposition 2.1.*

*Unicité :* Si  $v$  vérifie (2.1.0), en posant  $v = v_1 + v_2$ , où  $v_1 \in H_1$  et  $v_2 \in H_2$ ,  $(v_1, v_2)$  est un point-selle de  $K(\cdot, \cdot)$  sur  $H_1 \times H_2$ . Or d'après le lemme 2.3,  $K$  est strictement concave-strictement convexe :  $K$  admet donc au plus un point-selle, et  $v$  est unique.

*Existence :* pour  $R > 0$  soient  $B_{1R}$  et  $B_{2R}$  les boules fermées de rayon  $R$  de  $H_1$  et de  $H_2$ . D'après le théorème de Ky-Fan (voir par exemple Ekeland-Temam [10]), il existe

$$(v_{1R}, v_{2R}) \in B_{1R} \times B_{2R} \quad \text{t.q.} \quad (v_R = v_{1R} + v_{2R})$$

$$\begin{aligned} K(v_{1R}, v_{2R}) &= \max_{Z_1 \in B_{1R}} \inf_{Z_2 \in B_{2R}} K(Z_1, Z_2) = \min_{Z_2 \in B_{2R}} \sup_{Z_1 \in B_{1R}} K(Z_1, Z_2) \\ &= J(v_R + s\varphi). \end{aligned}$$

On sait que  $(v_{1R}, v_{2R})$  est caractérisé par :

$$\begin{cases} \forall Z_1 \in B_{1R} \quad \langle \partial_1 K(v_{1R}, v_{2R}), Z_1 - v_{1R} \rangle \leq 0 \\ \forall Z_2 \in B_{2R} \quad \langle \partial_2 K(v_{1R}, v_{2R}), Z_2 - v_{2R} \rangle \geq 0, \end{cases}$$

C'est-à-dire

$$(2.1.1) \quad \begin{cases} \forall Z_1 \in B_{1R} < J'(v_R + s\varphi), Z_1 - v_{1R} > \leq 0 \\ \forall Z_2 \in B_{2R} < J'(v_R + s\varphi), Z_2 - v_{2R} > \geq 0 \end{cases}$$

Si on montre qu'il existe  $R > 0$  tel que  $\|v_{1R}\|_{D(A)} < R$  et  $\|v_{2R}\|_{D(A)} < R$  alors (2.1.1) s'écrit :

$$\begin{cases} \forall w_1 \in H_1 < J'(v_R + s\varphi), w_1 > = 0, \\ \forall w_2 \in H_2 < J'(v_R + s\varphi), w_2 > = 0. \end{cases}$$

(Pour  $i = 1, 2$ , remplacer  $Z_i$  par  $v_{iR} + \epsilon w_i$  pour  $\epsilon > 0$  assez petit et changer  $w_i$  en  $-w_i$ ). Ceci signifie

$$\forall w \in H_1 \oplus H_2, < J'(v_R + s\varphi), w > = 0$$

et par densité de  $H_1 \oplus H_2$  dans  $\varphi^\perp$  on déduit

$$Av_R - P\tilde{g}(x, v_R + s\varphi) - h_0 = 0$$

c'est-à-dire que  $v_R$  est solution de (2.1.0).

Montrons maintenant qu'il existe  $R > 0$  tel que

$$\|v_{iR}\|_{D(A)} < R \quad (i = 1, 2).$$

Pour cela nous allons montrer

$$(2.1.2) \quad \exists C > 0 / \forall R > 0 \quad \|v_R\| \leq C(\|s\| + \|h_0\|)$$

puis

$$(2.1.3) \quad \exists C > 0 / \forall R > 0 \quad \|Av_R\| \leq C(\|s\| + \|h_0\|)$$

il suffira alors de choisir  $R$  assez grand.

*Preuve de (2.1.2).* Par définition de  $K(\cdot, \cdot)$  et de  $v_R$  on a :

$$J(v_R + s\varphi) \geq \inf_{Z_2 \in B_{2R}} J(Z_2 + s\varphi)$$

Or pour  $Z_2 \in B_{2R}$  on a

$$(AZ_2 | Z_2) \geq \bar{\lambda} \|Z_2\|^2,$$

d'où

$$\begin{aligned} J(Z_2 + s\varphi) &\geq \frac{(\bar{\lambda}-\beta)}{2} \|Z_2\|^2 + \frac{(\lambda-\beta)}{2} s^2 - \|h_0\| \|Z_2\| \\ &\geq \frac{(\lambda-\beta)}{2} s^2 - \frac{\|h_0\|^2}{2(\bar{\lambda}-\beta)}. \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} \frac{\lambda-\beta}{2} s^2 - \frac{\|h_0\|^2}{2(\bar{\lambda}-\beta)} &\leq J(v_R + s\varphi) = \inf_{Z_{2R} \in B_{2R}} J(v_{1R} + Z_{2R} + s\varphi) \\ &\leq J(v_{1R} + s\varphi) \leq \frac{\lambda-\alpha}{2} \|v_{1R}\|^2 + \frac{\lambda-\alpha}{2} s^2 + \|v_{1R}\| \|h_0\| \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{\alpha-\lambda}{2} \|v_{1R}\|^2 - \|v_{1R}\| \|h_0\| \leq \frac{\beta-\alpha}{2} s^2 + \frac{\|h_0\|^2}{2(\bar{\lambda}-\beta)}.$$

On en déduit qu'il existe C (dépendant de  $\beta-\alpha$ ,  $\alpha-\lambda$  et  $\bar{\lambda}-\beta$ ) telle que

$$\|v_{1R}\| \leq C(|s| + \|h_0\|).$$

Par un procédé analogue on démontre qu'il existe C telle que

$$\|v_{2R}\| \leq C(|s| + \|h_0\|).$$

Ce qui prouve (2.1.2).

*Preuve de 2.1.3.* Montrons par exemple que  $\|Av_{2R}\| \leq C(|s| + \|h_0\|)$ . Pour  $Z_2 \in B_{2R}$  on a

$$\langle J'(v_{1R} + v_{2R} + s\varphi), Z_2 - v_{2R} \rangle \geq 0.$$

Soit  $i \in I_2$  tel que

$$(\varphi_i | v_{2R}) = a_i,$$

en posant  $Z_2 = v_{2R} - a_i \varphi_i$  il vient :

$$-a_i \langle J'(v_R + s\varphi), \varphi_i \rangle \geq 0$$

c'est-à-dire  $\forall i \in I_2$

$$\lambda_i a_i^2 - \int \tilde{g}(x, v_R + s\varphi) a_i \varphi_i dx - \int h_0 a_i \varphi_i dx \leq 0$$

et donc

$$(\lambda_i - \lambda)^2 a_i^2 - \int \tilde{g}(x, v_R + s\varphi)(\lambda_i - \lambda) a_i \varphi_i dx \\ - \int h_0(\lambda_i - \lambda) a_i \varphi_i dx + \lambda(\lambda_i - \lambda) a_i^2 \leq 0$$

En faisant la somme pour  $i \in I_2$  on obtient :

$$\|Av_{2R} - \lambda v_{2R}\|^2 - (\tilde{g}(\cdot, v_R + s\varphi) + h_0 - \lambda v_{2R} | Av_{2R} - \lambda v_{2R}) \leq 0$$

d'où l'on déduit (en utilisant (2.1.2) et en remarquant que  $|\tilde{g}(x, s)| \leq \beta |s|$ ) qu'il existe  $C$  (dépendant de  $\alpha, \beta, \lambda, \bar{\lambda}$ ) tel que

$$\|Av_{2R}\| \leq C(|s| + \|h_0\|).$$

En procédant de manière analogue pour majorer  $\|Av_{1R}\|$  on obtient (2.1.3). ■

*Remarques 2.1.* : a) Si  $v$  est solution de (2.1.0) on a

$$J(v + s\varphi) = \max_{Z_1 \in H_1} \min_{Z_2 \in H_2} J(Z_1 + Z_2 + s\varphi) \\ = \min_{Z_2 \in H_2} \max_{Z_1 \in H_1} J(Z_1 + Z_2 + s\varphi)$$

et en particulier  $u$  solution de (4) vérifie  $[J_0$  étant la fonctionnelle  $J$  où on a remplacé  $G(x, t)$  par  $\frac{1}{2}(g_+ t^2 + g_- t^2)]$

$$J_0(u) = \max_{Z_1 \in H_1} \min_{Z_2 \in H_2} J_0(Z_1 + Z_2 + \varphi) = \min_{Z_2 \in H_2} \max_{Z_1 \in H_1} J_0(Z_1 + Z_2 + \varphi)$$

b) Lorsque la fonction  $\tilde{g}$  vérifie (L) et l'intervalle  $[\alpha, \beta]$  ne contient aucune valeur propre de  $A$  on retrouve par cette méthode l'existence et l'unicité de solution pour  $Au = \tilde{g}(\cdot, u) + h$ , pour chaque  $h \in L^2(\Omega)$  donné.

c) Noter que la remarque ci-dessus et la proposition 2.1 restent valables pour certains opérateurs qui ne sont pas à résolvante compacte, comme par exemple, l'opérateur  $A$  considéré au § 5.

## 2.2. Le cas lipschitzien

Nous appelons ainsi le problème. Trouver  $u \in D(A)$  tel que

$$(2.2.0) \quad Au = \tilde{g}(x, u) + h,$$

lorsque  $\tilde{g}$  satisfait les conditions (L).

Nous venons de voir à la remarque 2.1 b) que si  $[\alpha, \beta]$  ne contient aucune valeur propre (2.2.0) a une, et une seule solution. Nous allons supposer maintenant que  $\lambda \in [\alpha, \beta]$ .

On pose

$$h = h_0 + t\varphi \quad h_0 \in \varphi^\perp, \quad t \in \mathbb{R},$$

$$u = v + s\varphi \quad v \in \varphi^\perp, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Alors l'équation (2.2.0) équivaut au système :

$$(2.2.1) \quad \begin{cases} Av = P\tilde{g}(\cdot, v + s\varphi) + h_0 & v \in \varphi^\perp \cap D(A) \end{cases}$$

$$(2.2.2) \quad \begin{cases} \lambda s - \int \tilde{g}(x, v + s\varphi)\varphi \, dx = t. \end{cases}$$

Pour  $s \in \mathbb{R}$  fixé, on sait d'après la proposition 2.1 qu'il existe un seul  $v(s) \in \varphi^\perp$  vérifiant (2.2.1).

LEMME 2.4. L'application  $s \mapsto v(s)$  est continue de  $\mathbb{R} \rightarrow D(A)$  (muni de  $\|\cdot\|_{D(A)}$ ).

Démonstration. D'après (2.1.2) et (2.1.3) on a :

$$(2.2.3) \quad \|v(s)\|_{D(A)} \leq Cte(|s| + \|h_0\|)$$

Soit une suite  $s_n \rightarrow s$ . L'injection de  $D(A)$  dans  $L^2$  étant compacte il existe une sous-suite  $(v_n)_n$  de  $(v(s_n))_n$  telle que  $v_n \xrightarrow{L^2} v$ . Alors comme  $u \mapsto \tilde{g}(\cdot, u)$  est continue de  $L^2 \rightarrow L^2$  on a :

$$P\tilde{g}(\cdot, v_n + s_n\varphi) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^2} P\tilde{g}(\cdot, v + s\varphi)$$

d'où

$$Av_n \xrightarrow{L^2} P\tilde{g}(\cdot, v + s\varphi) + h_0$$

A étant un opérateur fermé on a  $v \in D(A)$  et

$$Av = P\tilde{g}(\cdot, v + s\varphi) + h_0$$

i.e.  $v = v(s)$  et c'est toute la suite  $(v(s_n))_n$  qui doit tendre vers  $v(s)$ . ■

Ainsi on peut définir une fonction continue de  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  par :

$$f(s) = \lambda s - \int \tilde{g}(x, v(s) + s\varphi)\varphi \, dx.$$

Et pour résoudre (2.2.1) il suffit de trouver  $s \in \mathbb{R}$  tel que

$$f(s) = t.$$

Pour cela étudions  $\lim_{s \rightarrow \pm \infty} \frac{f(s)}{s}$  lorsque  $s \rightarrow \pm \infty$ . Montrons d'abord un lemme technique.

LEMME 2.5. Soient  $g(\cdot, \cdot)$  une fonction vérifiant les conditions (3),  $(u_n)_n$  une suite de fonctions de  $L^2$  et  $(\alpha_n)_n$  une suite réelle telles que :  $u_n \rightarrow u$  dans  $L^2$ ,  $\alpha_n \rightarrow +\infty$ .

Alors

$$\frac{g(\cdot, \alpha_n u_n)}{\alpha_n} \xrightarrow{L^2} g_+ u^+ - g_- u^-.$$

Démonstration. On peut supposer que  $u_n \rightarrow u$  p.p. Posons

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_n(x) = \frac{g(x, \alpha_n u_n(x))}{\alpha_n u_n(x)} \text{ si } u_n(x) \neq 0, \\ \rho_n(x) = 0 \text{ si } u_n(x) = 0. \end{array} \right.$$

D'après (3) iii)  $(\rho_n)_n$  est bornée dans  $L^\infty(\Omega)$  ; alors

$$\rho_n(u_n - u) \xrightarrow{L^2} 0$$

$$\rho_n u \rightarrow g_+ u^+ - g_- u^- \text{ p.p. en } x \in \Omega$$

et d'après le théorème de la convergence dominée  $\rho_n u \xrightarrow{L^2} g_+ u^+ - g_- u^-$ , ce qui prouve que

$$\rho_n u_n \xrightarrow{L^2} g_+ u^+ - g_- u^- \quad \blacksquare$$

$$\text{LEMME 2.6. } i) \quad \lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{f(s)}{s} = C(\tilde{g}_+, \tilde{g}_-) \equiv C_+$$

$$ii) \quad \lim_{s \rightarrow -\infty} \frac{f(s)}{s} = C(\tilde{g}_-, \tilde{g}_+) \equiv C_-$$

Démonstration. i) D'après (2.2.3) lorsque  $|s| \rightarrow +\infty$ ,  $\|\frac{v(s)}{s}\|_{D(A)}$  est borné. Soit  $s_n \rightarrow +\infty$  une

suite ; on peut extraire une suite  $Z_n$  de  $\left(\frac{v(s_n)}{s_n}\right)_n$  telle que  $Z_n \xrightarrow{L^2} Z$  ; on a :

$$AZ_n = P \frac{\tilde{g}(\cdot, s_n(Z_n + \varphi))}{s_n} + \frac{h_0}{s_n}.$$

D'après le lemme 2.5, le second membre tend, dans  $L^2$ , vers

$$P[\tilde{g}_+(Z + \varphi)^+ - \tilde{g}_-(Z + \varphi)^-]$$

d'où

$$AZ_n \xrightarrow{L^2} P[\tilde{g}_+(Z + \varphi)^+ - \tilde{g}_-(Z + \varphi)^-] = AZ$$

i.e.  $w = Z + \varphi$  vérifie

$$Aw = \tilde{g}_+ w^+ - \tilde{g}_- w^- + \left( \lambda - \int (\tilde{g}_+ w^+ - \tilde{g}_- w^-) \varphi \, dx \right) \varphi$$

i.e.

$$C(\tilde{g}_+, \tilde{g}_-) = \lambda - \int (\tilde{g}_+ w^+ - \tilde{g}_- w^-) \varphi \, dx$$

(cf. proposition 2.2) et  $w$  est solution de (4) avec  $\alpha = \tilde{g}_+$ ,  $\beta = \tilde{g}_-$ . On a donc :

$$\frac{v(s)}{s} \xrightarrow{L^2} Z = w - \varphi \text{ lorsque } s \rightarrow +\infty$$

et

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{f(s)}{s} = \lambda - \int (\tilde{g}_+ w^+ - \tilde{g}_- w^-) \varphi \, dx = C(\tilde{g}_+, \tilde{g}_-)$$

La démonstration est identique pour ii).

PROPOSITION 2.7. Soient  $C_+ = C(\tilde{g}_+, \tilde{g}_-)$  et  $C_- = C(\tilde{g}_-, \tilde{g}_+)$

i) Si  $C_+ C_- > 0$  alors  $\forall h \in L^2$  l'équation (2.2.0)  $Au = \tilde{g}(x, u) + h$  admet au moins une solution dans  $D(A)$ .

ii) Si  $C_- > 0$  et  $C_+ < 0$ , alors il existe  $a \in \mathbb{R}$ , dépendant de  $h_0 = Ph$ , tel que :

- .  $t = (h | \varphi) > a \Rightarrow (2.2.0)$  n'a pas de solution
- .  $t = (h | \varphi) = a \Rightarrow (2.2.0)$  a au moins 1 solution
- .  $t = (h | \varphi) < a \Rightarrow (2.2.0)$  a au moins 2 solutions

(même chose en changeant toutes les inégalités, lorsque  $C_- < 0$  et  $C_+ > 0$ )

iii) Si  $C_- = 0$  et  $C_+ < 0$ , ou  $C_- > 0$  et  $C_+ = 0$  il existe  $a \in \mathbb{R}$  dépendant de  $h_0 = Ph$  tel que

$$(h | \varphi) \leq a \Rightarrow (2.2.0) \text{ a au moins une solution.}$$

(même chose si  $C_- = 0$  et  $C_+ > 0$ , ou  $C_- < 0$  et  $C_+ = 0$  :  $(h | \varphi) \geq a \Rightarrow (2.2.0)$  a au moins une solution).

*Démonstration.* La proposition résulte du lemme 2.6 ; le cas iii) est un cas semi-résonnant et pour connaître le comportement de  $f(s)$  lorsque  $s \rightarrow -\infty$ , il faut tenir compte de  $\tilde{g}(\cdot, s) - (g_+ s^+ - g_- s^-)$  lorsque  $s \rightarrow \pm \infty$ . ■

*Remarque 2.2.* Le théorème principal démontré au § 3 est en fait une généralisation de la proposition 2.7 à des fonctions vérifiant (3) au lieu de (L). ■

Nous allons préciser maintenant le nombre minimal de solutions dans certains cas.



PROPOSITION 2.8. Soit  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue, dérivable en 0 et telle que  $g(0) = 0$ ,

$$\lim_{s \rightarrow \pm\infty} \frac{g(s)}{s} = g_{\pm},$$

$$\underline{\lambda} < \alpha \leq \frac{g(s) - g(\sigma)}{s - \sigma} \leq \beta < \bar{\lambda} \quad \forall s, \sigma \in \mathbb{R}.$$

On a alors

i) Si  $C(g_+, g_-) > 0$ ,  $C(g_-, g_+) > 0$  et  $\lambda < g'(0)$  l'équation  $Au = g(u)$  admet au moins 3 solutions (i.e. au moins 2 solutions non triviales).

ii) Si  $C(g_+, g_-) < 0$ ,  $C(g_-, g_+) < 0$  et  $\lambda > g'(0)$  l'équation  $Au = g(u)$  admet au moins 3 solutions.

iii) Si  $C(g_+, g_-) \cdot C(g_-, g_+) < 0$  et  $\lambda \neq g'(0)$ , l'équation  $Au = g(u)$  admet au moins 2 solutions.

*Démonstration.*  $g$  vérifie les conditions (L), on sait (cf. proposition 2.1) qu'il existe un seul  $v = v(s) \in \varphi^\perp \cap D(A)$  solution de  $Av = Pg(\cdot, v + s\varphi)$ .

En posant  $u = v + s\varphi$ , résoudre  $Au = g(u)$  équivaut à trouver  $s$  tel que

$$f(s) = \lambda s - \int g(v(s) + s\varphi)\varphi = 0.$$

On sait que  $v(0) = 0$  et  $f(0) = 0$ . D'autre part rappelons que

$$\|v(s)\|_{D(A)} \leq Cte |s| \quad (\text{cf. (2.2.3), } h_0 = 0).$$

Soit une suite  $s_n \rightarrow 0$ ; on peut extraire une suite  $(Z_n)_n$  de  $\left(\frac{v(s_n)}{s_n}\right)_n$  telle que  $Z_n \xrightarrow{L^2} Z$  ( $Z \in \varphi^\perp$ ).

Alors

$$\begin{aligned} \frac{g(s_n(Z_n + \varphi))}{s_n} &\xrightarrow{L^2} g'(0)(Z + \varphi), \\ AZ_n &\xrightarrow{L^2} P[g'(0)(Z + \varphi)] = g'(0)Z \end{aligned}$$

c'est-à-dire  $AZ = g'(0)Z$ . Comme  $g'(0) \neq \lambda$  et l'intervalle  $[\alpha, \beta]$  ne contient pas d'autre valeur propre, on a  $Z = 0$ . Ainsi donc quand  $s \rightarrow 0$

$$\frac{v(s)}{s} \xrightarrow{L^2} 0$$

et

$$\frac{g(v(s) + s\varphi)}{s} \xrightarrow{L^2} g'(0)\varphi.$$

Finalement

$$\lim_{s \rightarrow 0} f(s) / s = \lambda - g'(0)$$

i.e.  $f'(0) = \lambda - g'(0)$ .

Si on suppose  $C(g_-, g_+) > 0$ ,  $C(g_+, g_-) > 0$  et  $f'(0) < 0$ , comme  $f(0) = 0$ , il existe  $s_1 < 0$  et  $s_2 > 0$  tels que

$$f(s_1) = 0 = f(s_2)$$

On a donc 3 solutions  $u_1 = v(s_1) + s_1 \varphi$ ,  $0$ ,  $u_2 = v(s_2) + s_2 \varphi$ . On fait de même dans les cas ii) et iii).

*Remarque 2.3.* Dans Castro-Lazer [8], où  $g$  est supposée de classe  $C^2$  et  $sg''(s) \geq 0$ , un résultat analogue est obtenu pour  $A = -\Delta$ ,  $D(A) = H^2 \cap H_0^1(\Omega)$  et  $\lambda_{n-1} < g'(0) < \lambda_n < g'(+\infty)$ ,  $g'(-\infty) < \lambda_{n+1}$ . Comme nous allons le voir par la suite, avec ces hypothèses c'est la condition ii) de la proposition 2.8 qui est vérifiée ; par ailleurs ici on peut admettre que  $g_+$  et  $g_-$  (i.e.  $g'(+\infty)$  et  $g'(-\infty)$ ) soient de part et d'autre de  $\lambda_n$  à condition que ii) soit encore vraie (lorsque  $\lambda_{n-1} < g_+, g_- < \lambda_n < g'(0) < \lambda_{n+1}$  c'est la condition i) qui est satisfaite). Amann & Zehnder [1] obtiennent des résultats semblables avec  $g_+ = g_-$  et en supposant qu'il existe au moins une valeur propre entre  $g'(0)$  et  $g_+$ .

### 2.3. Etude de $C(\alpha, \beta)$

Pour  $\alpha, \beta \in ]\underline{\lambda}, \overline{\lambda}[$  on a donc  $C(\alpha, \beta)$  qui est déterminée de façon unique par l'équation (4). Remarquons que dans certains cas  $C(\alpha, \beta)$  est calculé de manière fort simple.

PROPOSITION 2.9.

i) Si  $\varphi$  est de signe constant  $\geq 0$  (par exemple) alors

$$C(\alpha, \beta) = \lambda - \alpha, \quad \forall \alpha, \beta \in ]\underline{\lambda}, \overline{\lambda}[.$$

ii) Si  $\alpha \in ]\underline{\lambda}, \overline{\lambda}[$ ,  $C(\alpha, \alpha) = \lambda - \alpha$ .

*Démonstration.*

i) Comme  $\varphi \geq 0$ , (4) s'écrit (en prenant  $u = \varphi$ )

$$\lambda \varphi = A\varphi = \alpha \varphi^+ - \beta \varphi^- + C(\alpha, \beta) \varphi = \alpha \varphi + C(\alpha, \beta) \varphi$$

i.e.  $C(\alpha, \beta) = \lambda - \alpha$ .

ii) De même si  $\alpha = \beta$ , (4) s'écrit (avec  $u = \varphi$ )

$$\lambda\varphi = A\varphi = \alpha\varphi^+ - \beta\varphi^- + C(\alpha, \beta)\varphi = \alpha\varphi + C(\alpha, \beta)\varphi$$

i.e.  $C(\alpha, \beta) = \lambda - \alpha = C(\alpha, \alpha)$ .

PROPOSITION 2.10. L'application  $(\alpha, \beta) \mapsto C(\alpha, \beta)$  de

$$]\underline{\lambda}, \bar{\lambda}[ \times ]\underline{\lambda}, \bar{\lambda}[ \rightarrow \mathbb{R} \text{ est continue.}$$

*Démonstration.* Soient  $\alpha_n \rightarrow \alpha$  et  $\beta_n \rightarrow \beta$  ; comme les estimations (2.1.2) et (2.1.3) ne dépendent que de la distance de  $\alpha$  et de  $\beta$  au spectre  $\{\lambda_i, i \in I, \lambda_i \neq \lambda\}$  on a :

$$Av_n = P(\alpha_n(v_n + \varphi)^+ - \beta_n(v_n + \varphi)^-), v_n \in \varphi^\perp,$$

il existe une constante  $> 0$  telle que

$$\forall n \geq 1, \|v_n\|_{D(A)} \leq \text{Cte}$$

On extrait de  $(v_n)$  une suite (notée encore)  $v_n \xrightarrow{L^2} v$  ; alors

$$\alpha_n(v_n + \varphi)^+ - \beta_n(v_n + \varphi)^- \xrightarrow{L^2} \alpha(v + \varphi)^+ - \beta(v + \varphi)^-,$$

d'où

$$Av_n \xrightarrow{L^2} P(\alpha(v + \varphi)^+ - \beta(v + \varphi)^-),$$

et

$$Av = P(\alpha(v + \varphi)^+ - \beta(v + \varphi)^-)$$

Comme

$$C(\alpha_n, \beta_n) = \lambda - \int [\alpha_n(v_n + \varphi)^+ - \beta_n(v_n + \varphi)^-] \varphi$$

on voit que  $C(\alpha_n, \beta_n) \rightarrow C(\alpha, \beta)$ .

PROPOSITION 2.11. On suppose que  $\varphi$  n'est pas de signe constant. Alors  $(\alpha, \beta) \mapsto C(\alpha, \beta)$  est strictement décroissante par rapport à chacune des variables (l'autre étant fixée).

*Démonstration.* Soit  $u$  l'unique solution de :

$$(4) \quad \begin{cases} (u \mid \varphi) = 1 \\ Au = \alpha u^+ - \beta u^- + C(\alpha, \beta)\varphi \end{cases}$$

D'après la remarque 2.1 a) on a

$$J_0(u) = \max_{Z_1 \in H_1} \min_{Z_2 \in H_2} J_0(Z_1 + Z_2 + \varphi).$$

Pour  $w \in D(A)$  fixé et  $t \in \mathbb{R}_+$  on a

$$J_0(tw) = t^2 J_0(w);$$

en dérivant par rapport à  $t$  :

$$\langle J'_0(tw), w \rangle = 2t J_0(w)$$

Mais

$$\begin{aligned} \langle J'_0(u), u \rangle &= (Au | u) - \int (\alpha u^+ - \beta u^-) u = C(\alpha, \beta) (\varphi | u) \\ \langle J'_0(u), u \rangle &= C(\alpha, \beta) \end{aligned}$$

i.e.

$$(2.3.1) \quad C(\alpha, \beta) = 2J_0(u).$$

Soient  $\alpha, \beta_1, \beta_2 \in ]\underline{\lambda}, \bar{\lambda}[$ ,  $\beta_1 > \beta_2$ ,

$$u_1 = v + \varphi \text{ solution de (4) avec } (\alpha, \beta_1), v \in \varphi^\perp \cap D(A) = H,$$

$$u_2 = w + \varphi \text{ solution de (4) avec } (\alpha, \beta_2), w \in H$$

et, pour  $k = 1, 2$ , on pose

$$J_k(Z) = (AZ, Z) - \int \alpha(Z^+)^2 + \beta_k(Z^-)^2, \text{ pour } Z \in D(A).$$

• Tout d'abord  $u_1$  n'est pas de signe constant sur  $\Omega$  : en effet si on a par exemple  $u_1 \geq 0$ , alors (4) s'écrit

$$Au_1 = \alpha u_1 + C(\alpha, \beta_1) \varphi$$

D'où

$$Av = \alpha v$$

mais comme  $\alpha$  n'est pas valeur propre de  $A$  sur  $H$ , on a  $v = 0$  et  $u_1 = \varphi$ . Mais  $\varphi$  n'est pas de signe constant.

• On a nécessairement  $v \neq w$  : sinon on aurait  $u_1 = u_2$ , et

$$Au_1 = \alpha u_1^+ - \beta_1 u_1^- + C(\alpha, \beta_1)\varphi$$

$$Au_2 = Au_1 = \alpha u_1^+ - \beta_2 u_1^- + C(\alpha, \beta_2)\varphi$$

d'où

$$-(\beta_1 - \beta_2)u_1^- = [C(\alpha, \beta_2) - C(\alpha, \beta_1)]\varphi$$

mais  $u_1^- \neq 0$  est de signe constant, alors que  $\varphi$  ne l'est pas.

• On a donc, par exemple,  $v_1 \neq w_1$  (on écrit  $Z = Z_1 + Z_2$  pour  $Z \in H$ , avec  $Z_1 \in H_1$ ,  $Z_2 \in H_2$ ). On en déduit :

$$C(\alpha, \beta_1) = J_1(v_1 + v_2 + \varphi) > J_1(w_1 + v_2 + \varphi)$$

puisque  $J_1$  est strictement concave sur  $H_1$  et  $v_1 \neq w_1$ .

$$C(\alpha, \beta_2) = J_2(w_1 + w_2 + \varphi) \leq J_2(w_1 + v_2 + \varphi)$$

puisque  $J_2$  est convexe sur  $H_2$ .

Comme par ailleurs  $\beta_2 > \beta_1$  on a  $\forall Z \in D(A)$

$$J_1(Z) \geq J_2(Z)$$

d'où

$$C(\alpha, \beta_1) > C(\alpha, \beta_2).$$

La décroissance par rapport à  $\alpha$  est démontrée de manière analogue.

*Remarques 2.4* a) L'étude que nous venons de faire montre que l'ensemble des couples  $(\alpha, \beta)$  tels que  $C(\alpha, \beta) = 0$ , est une courbe continue  $\Gamma$  dans le carré  $\Lambda = ([\underline{\lambda}, \bar{\lambda}])^2$ , telle que à chaque  $\alpha$  (resp.  $\beta$ ) correspond *au plus* un  $\beta \in [\underline{\lambda}, \bar{\lambda}]$  (resp.  $\alpha$ ) tel que  $C(\alpha, \beta) = 0$  et cette courbe passe par  $(\lambda, \lambda)$ .  $\Lambda - \Gamma$  a exactement 2 composantes connexes  $\Lambda_+$  (où  $C(\cdot, \cdot) > 0$ ) et  $\Lambda_-$  (où  $C(\cdot, \cdot) < 0$ ).

Soit  $\Lambda_\sigma$  la partie symétrique de  $\Lambda - \Gamma$  i.e.

$$\Lambda_\sigma = \{ (\alpha, \beta) \in \Lambda ; (\alpha, \beta) \in \Lambda_+ \text{ et } (\beta, \alpha) \in \Lambda_+ \text{ ou bien } (\alpha, \beta) \in \Lambda_- \text{ et } (\beta, \alpha) \in \Lambda_- \}$$

En notant

$$C_+ = C(g_+, g_-) \text{ et } C_- = C(g_-, g_+)$$

on a alors

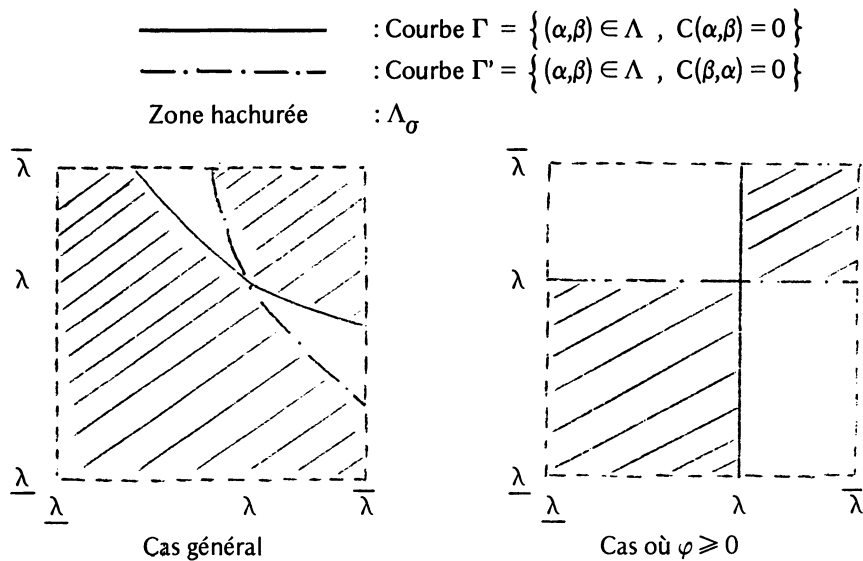
$$C_+ C_- > 0 \iff (g_+, g_-) \in \Lambda_\sigma$$

de même

$$C_+ C_- < 0 \iff (g_+, g_-) \notin \Lambda_\sigma \cup \Gamma.$$

Dans certains cas on peut montrer que  $C(\alpha, \beta) = C(\beta, \alpha)$  (par exemple lorsque les ensembles  $[\varphi > 0]$  et  $[\varphi < 0]$  se déduisent l'un de l'autre par une translation) et alors  $\Lambda_\sigma = \Lambda_+ \cup \Lambda_- :$  (1) a une solution dès que  $C(g_+, g_-) \neq 0$  i.e.  $(g_+, g_-) \notin \Gamma$ .

Par ailleurs on peut noter que  $\Lambda_\sigma$  contient toujours  $(\underline{\lambda}, \lambda[)^2$  et  $(\lambda, \bar{\lambda}[)^2$ . On peut schématiser ce qui précède de la manière suivante :



b) H. Berestycki [4] pose la question de savoir pour quelles valeurs de  $\mu \in \mathbb{R}$  le problème  $-\Delta u = \mu u + |u| = (\mu + 1)u^+ - (\mu - 1)u^-$  admet des solutions non triviales et il appelle de telles valeurs  $\mu$  des «demi-valeurs propres».

Plus généralement soit  $a \in \mathbb{R}$  donné, et considérons le problème aux «demi-valeurs propres» ( $u \in D(A)$ ,  $\mu \in \mathbb{R}$ )

$$(2.3.2) \quad Au = \mu u + a |u| = (\mu + a)u^+ - (\mu - a)u^-.$$

(Il est clair que si l'intervalle fermé de bornes  $\mu - a$ ,  $\mu + a$  ne contient aucune valeur propre de  $A$ , alors (2.3.2) n'a pas de solution non triviale et  $\mu$  n'est pas «demi-valeur propre»).

Supposons que toutes les valeurs propres de  $A$  sont simples et pour  $i \in I$ , soit  $C_i(\cdot, \cdot)$  la fonction définie sur le carré  $\Lambda_i = (\underline{\lambda}_i, \bar{\lambda}_i[)^2$  et correspondant à  $\lambda = \lambda_i$  et  $\varphi = \varphi_i$ , supposons également que  $a \in \mathbb{R}$  est tel que

$$|a| < \frac{1}{2} \inf_{i,j \in I, i \neq j} |\lambda_i - \lambda_j|,$$

de sorte que l'intervalle fermé de bornes  $\mu - a$ ,  $\mu + a$  contient au plus une valeur propre de  $A$ . On

déduit alors aisément des propositions 2.1, 2.9 & 2.11 l'existence de deux familles  $\{\mu_{i+}\}_{i \in I}$ ,  $\{\mu_{i-}\}_{i \in I}$  de «demi-valeurs propres». (En fait, remarquer que le problème (2.3.2) admet des solutions non triviales si et seulement si il existe  $i \in I$  tel que  $C_i(\mu_{i-}, \mu_{i+}) = 0$  ou  $C_i(\mu_{i+}, \mu_{i-}) = 0$ ).

### 3. - LE THEOREME PRINCIPAL

3.1. Nous allons montrer dans cette partie que lorsque  $C_+C_- \neq 0$  (on conserve les notations introduites aux § 1 et 2) on peut obtenir des estimations a priori sur les solutions de

$$(1) \quad u \in D(A), Au = g(\cdot, u) + h,$$

puis, par une méthode reposant sur un argument de degré topologique, nous montrerons le théorème principal annoncé dans l'introduction.

Soit  $B = (A - \gamma I)^{-1}$  ; on pose, pour simplifier l'écriture,  $g(x, u) = g(u)$ . Pour  $v \in L^2(\Omega)$  soit

$$Tv = Bg(v) - \gamma Bv$$

alors (1) équivaut à

$$u \in L^2(\Omega), u = Tu + Bh.$$

On sait que  $T$  est continu de  $L^2 \rightarrow L^2$  et transforme les bornés de  $L^2$  en ensembles relativement compacts :  $Id - T$  est une perturbation compacte de l'identité. De même il est clair que si  $g$  et  $\bar{g}$  sont deux fonctions satisfaisant (3), l'opérateur

$$T(t, u) = tBg(u) + (1-t)B\bar{g}(u) - \gamma Bu$$

est un opérateur compact de  $[0, 1] \times L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ .

Dans toute la suite de cette partie on suppose que  $A$  et  $g$  vérifient les conditions (2) et (3) et on se propose de montrer le théorème annoncé en introduction. On étudie d'abord le cas i) du théorème :

**PROPOSITION 3.1.** *Si  $C_+C_- > 0$ , le problème (1) a au moins une solution (pour tout  $h \in L^2(\Omega)$ ).*

Supposons par exemple  $C_- > 0$ ,  $C_+ > 0$  et  $g_+ \geq g_-$  pour  $t \in [0, 1]$  on considère l'équation

$$(3.1.1) \quad u \in D(A), Au = tg(u) + (1-t)g_-u + h$$

Ce qui équivaut à

$$(3.1.2) \quad u \in L^2(\Omega), u - T(t,u) = Bh$$

avec

$$T(t,u) = tBg(u) + (1-t)g_-Bu - \gamma Bu.$$

(noter que  $Id - T(t, \cdot)$  est une perturbation compacte de l'identité).

On montre tout d'abord des estimations a priori sur les solutions de (3.1.1).

LEMME 3.2. *Il existe  $R > 0$  tel que si  $(t,u) \in [0,1] \times D(A)$  vérifie (3.1.1) on a*

$$\|u\|_{D(A)} < R$$

*Démonstration du lemme 3.2.* S'il existe  $(t_n, u_n)_n$  suite telle que

$$t_n \in [0,1] \text{ et } u_n \in D(A)$$

est solution de (3.1.1) et

$$\|u_n\|_{D(A)} = \alpha_n \rightarrow +\infty$$

on a, en posant

$$Z_n = \frac{u_n}{\alpha_n}, \quad \|Z_n\|_{D(A)} = 1$$

et

$$AZ_n = t_n \frac{g(Z_n \alpha_n)}{\alpha_n} + (1-t_n)g_-Z_n + \frac{h}{\alpha_n}$$

L'injection de  $D(A)$  dans  $L^2(\Omega)$  étant compacte, il existe une sous-suite, encore notée  $(t_n, u_n)_n$ , telle que

$$Z_n \rightarrow Z \text{ dans } L^2(\Omega) \quad t_n \rightarrow t.$$

On a alors, d'après le lemme 2.5

$$\frac{g(\alpha_n Z_n)}{\alpha_n} \rightarrow g_+ Z^+ - g_- Z^- \text{ dans } L^2(\Omega)$$

i.e.



$$AZ_n \rightarrow (tg_+ + (1-t)g_-)Z^+ - g_-Z^- \text{ dans } L^2(\Omega).$$

A étant fermé, on a  $Z \in D(A)$  et

$$AZ = (tg_+ + (1-t)g_-)Z^+ - g_-Z^-,$$

$$Z_n \rightarrow Z \text{ dans } D(A).$$

Or ceci est impossible, en effet :

- si  $(Z | \varphi) = 0$ , en projetant sur  $\varphi^\perp$  on a

$$AZ = P[(tg_+ + (1-t)g_-)Z^+ - g_-Z^-]$$

et d'après la proposition 2.1 ( $s=0$ ,  $h_0=0$ ) on a  $Z=0$  ; or  $\|Z\|_{D(A)}=1$ .

- si  $(Z | \varphi) = \theta > 0$ ,  $w = \frac{Z}{\theta}$  vérifie

$$(w | \varphi) = 1, Aw = (tg_+ + (1-t)g_-)w^+ - g_-w^-$$

et d'après la proposition 2.2

$$C(tg_+ + (1-t)g_-, g_-) = 0 ;$$

or d'après la décroissance de  $C(\cdot, \cdot)$

$$C(tg_+ + (1-t)g_-, g_-) \geq C(g_+, g_-) = C_+ > 0$$

- si  $(Z | \varphi) = \theta < 0$ , alors  $w = \frac{Z}{\theta}$  vérifie :

$$(w | \varphi) = 1, Aw = g_-w^+ - (tg_+ + (1-t)g_-)w^-$$

et d'après la proposition 2.2,

$$C(g_-, tg_+ + (1-t)g_-) = 0,$$

ce qui est impossible puisque

$$C(g_-, tg_+ + (1-t)g_-) \geq C(g_-, g_+) = C_- > 0.$$

*Démonstration de la proposition 3.1.* Soient  $R$  comme au lemme 3.2 et  $B_R$  la boule ouverte de rayon  $R$  de  $L^2$ . On sait donc que

$$t \in [0,1] \text{ et } u \text{ solution de (3.1.2)} \Rightarrow u \notin \partial B_R \text{ (frontière de } B_R)$$

alors  $d(\phi_t, B_R, Bh)$  désignant le degré de Leray-Schauder pour  $\phi_t = \text{Id} - T(t, \cdot)$  on a par invariance du degré :

$$d(\phi_1, B_R, Bh) = d(\phi_0, B_R, Bh)$$

où  $\phi_0$  correspond au problème  $Au = g_- u + h$  (noter que  $g_-$  n'est pas valeur propre de  $A$ , sinon  $g_- = \lambda \leq g_+$  et alors  $C(g_+, g_-) \leq 0$ ).

Comme

$$(A - g_- I)^{-1} h \in B_R$$

on a

$$d(\phi_0, B_R, Bh) = \pm 1$$

et l'équation (1) a donc au moins une solution. ■

**PROPOSITION 3.3.** *On suppose  $C_+ > 0$  (resp.  $C_- < 0$ ). Alors  $\forall h_0 \in \varphi^\perp$ ,  $\exists a \geq 0$  tel que*

$$Ph = h_0 \text{ et } (h | \varphi) > a \Rightarrow (1) \text{ a au moins}$$

*une solution  $u$  vérifiant  $(u | \varphi) > 0$  (resp.  $(u | \varphi) < 0$ ).*

Soit  $C_+ > 0$ , on suppose, par exemple,  $g_+ \geq g_-$  ; on a donc nécessairement  $g_- < \lambda$  (sinon  $C(g_+, g_-) \leq C(g_-, g_-) \leq 0$ ). On reprend les formulations

$$(3.1.1) \quad Au = tg(u) + (1-t)g_- u + h$$

$$(3.1.2) \quad \phi_t(u) \equiv u - T(t, u) = Bh$$

(Si  $g_- > g_+$  on écrit (3.1.1) & (3.1.2) avec  $g_+$  au lieu de  $g_-$ ).

**LEMME 3.4.** *Soit  $C_+ > 0$ ,  $h_0 \in \varphi^\perp$  donné. Il existe  $a \geq 0$  tel que*

$$\forall h \in L^2, Ph = h_0$$

$$(h | \varphi) > a \Rightarrow \forall t \in [0, 1],$$

*(3.1.1) n'a pas de solution  $u \in D(A)$  avec  $(u | \varphi) = 0$ .*

*Démonstration.* Sinon  $\exists h_n \in L^2$   $Ph_n = h_0$ ,  $(h_n | \varphi) \geq n$  et

$$\exists t_n \in [0, 1], \exists u_n \in D(A)$$

vérifiant

$$Au_n = t_n g(u_n) + (1-t_n)g_- u_n + h_n$$

et  $(u_n | \varphi) = 0$ .

En multipliant l'équation par  $\varphi$  il vient

$$t_n \int g(u_n) \varphi + \int h_n \varphi = 0$$

i.e.

$$-t_n \int g(u_n) \varphi \geq \int h_n \varphi$$

mais d'après l'hypothèse (3) iii)

$$\|g(u_n)\| \leq C^{te} \|u_n\|.$$

D'où

$$\|u_n\| \geq \frac{C^{te} \int h_n \varphi}{t_n}$$

On a donc

$$\alpha_n = \|u_n\|_{D(A)} \rightarrow +\infty.$$

Soit  $v_n = \frac{u_n}{\alpha_n}$ . On peut supposer (en extrayant éventuellement une sous-suite) que  $v_n \rightarrow v$  dans  $L^2$

et  $t_n \rightarrow t$  (Noter que  $v \in \varphi^\perp$  car  $u_n \in \varphi^\perp$ ). On a :

$$Av_n = t_n \frac{g(\alpha_n v_n)}{\alpha_n} + (1-t_n)g_- v_n + \frac{h_n}{\alpha_n}$$

i.e.

$$Av_n = t_n P \frac{g(\alpha_n v_n)}{\alpha_n} + (1-t_n)g_- v_n + \frac{h_0}{\alpha_n}.$$

D'après le lemme 2.5

$$\frac{g(\alpha_n v_n)}{\alpha_n} \xrightarrow{L^2} g_+ v^+ - g_- v^-,$$

d'où

$$Av_n \xrightarrow{L^2} t P(g_+ v^+ - g_- v^-) + (1-t)g_- v$$

i.e.

$$v_n \xrightarrow{D(A)} v \text{ solution de } Av = P[(tg_+ + (1-t)g_-)v^+ - g_- v^-],$$

d'après la proposition 2.1  $v = 0$ . Or  $\|v\|_{D(A)} = 1$ .

LEMME 3.5. (*estimations a priori*) : Supposons  $C_+ > 0$ . Alors  $\forall h \in L^2(\Omega) \quad \exists R > 0$  t.q.  
 $\forall t \in [0,1]$  si  $u$  vérifie (3.1.1) et  $(u \mid \varphi) > 0$ , alors

$$\|u\|_{D(A)} < R.$$

*Démonstration.* Sinon il existe une suite  $(t_n, u_n)_n$ ,  $t_n \in [0,1]$ ,  $u_n \in D(A)$   $(u_n \mid \varphi) > 0$ , telle que

$$\alpha_n = \|u_n\|_{D(A)} \rightarrow +\infty.$$

En posant

$$Z_n = \frac{u_n}{\alpha_n}, \quad \|Z_n\|_{D(A)} = 1,$$

on peut extraire une sous-suite  $(t_n, Z_n)_n$  telle que

$$t_n \rightarrow t \quad \text{et} \quad Z_n \xrightarrow{L^2} Z.$$

On a :

$$AZ_n = t_n \frac{g(\alpha_n Z_n)}{\alpha_n} + (1-t_n)g_- Z_n + \frac{h}{\alpha_n}.$$

D'après le lemme 2.5

$$\frac{g(\alpha_n Z_n)}{\alpha_n} \xrightarrow{L^2} g_+ Z^+ - g_- Z^-$$

et

$$AZ_n \xrightarrow{L^2} (tg_+ + (1-t)g_-)Z^+ - g_- Z^-,$$

d'où  $AZ = (tg_+ + (1-t)g_-)Z^+ + g_- Z^-$ , et  $Z_n \rightarrow Z$  dans  $D(A)$ .

On a donc

$$\|Z\|_{D(A)} = 1 \quad \text{et} \quad (Z \mid \varphi) \geq 0.$$

Or ceci est impossible puisque

• Si  $(Z \mid \varphi) = 0$ , alors  $PZ = Z$

$$AZ = P[(tg_+ + (1-t)g_-)Z^+ - g_- Z^-]$$

et d'après la proposition 2.1,  $Z = 0$ . Mais  $\|Z\|_{D(A)} = 1$ .

$$\begin{aligned} & \bullet \text{ Si } (Z \mid \varphi) = \theta > 0 \text{ alors } w = \frac{Z}{\theta} \text{ vérifie} \\ & \quad \begin{cases} (w \mid \varphi) = 1 \\ Aw = (tg_+ + (1-t)g_-)w^+ - g_-w^- \end{cases} \end{aligned}$$

ce qui signifie, d'après la proposition 2.2.

$$C(tg_+ + (1-t)g_-, g_-) = 0.$$

Mais on a (on rappelle que l'on a supposé  $g_+ \geq g_-$ )

$$C(tg_+ + (1-t)g_-, g_-) \geq C(g_+, g_-) = C_+ > 0. \quad \blacksquare$$

*Démonstration de la proposition 3.3.* Supposons  $C_+ > 0$  ; on suppose toujours, par exemple,  $g_+ \geq g_-$  (d'où  $g_- < \lambda$ ) ; soit

$$K = \{u \in L^2(\Omega) ; (u \mid \varphi) > 0 \text{ et } \|u\| < R\}$$

( $R$  étant donné par le lemme 3.5,  $h \in L^2$  avec  $Ph = h_0$  donné et  $(h \mid \varphi) > a$ ,  $a$  est donné par le lemme 3.4).  $\partial K$  étant la frontière de  $K$  on sait que  $\forall t \in [0, 1]$ , si  $u$  vérifie

$$\phi_t(u) = u - T(t, u) = Bh, \text{ alors } u \notin \partial K. \text{ (cf. Lemme 3.4 \& 3.5).}$$

Alors le degré  $d(\phi_t, K, Bh) = \text{Cte} \quad \forall t \in [0, 1]$ . En particulier

$$d(\phi_1, K, Bh) = d(\phi_0, K, Bh) = \pm 1$$

car  $\phi_0$  correspond au problème  $Au = g_-u + h$  où  $g_- < \lambda$  et la solution  $u_*$  de ce problème vérifie

$$(u_* \mid \varphi) = \frac{(h \mid \varphi)}{\lambda - g_-} > 0, \text{ d'où } u_* \in K.$$

On a donc  $d(\phi_1, K, Bh) = \pm 1$ , c'est-à-dire que le problème  $Au = g(u) + h$  admet au moins une solution avec  $(u \mid \varphi) > 0$ .

La démonstration de la proposition en partant de l'hypothèse  $C_- < 0$  est identique.

De façon analogue, on démontre la proposition suivante :

**PROPOSITION 3.6.** *On suppose  $C_+ < 0$  (resp.  $C_- > 0$ ). Alors  $\forall h_0 \in \varphi^\perp$ ,  $\exists b \leq 0$  tel que*

$$Ph = h_0 \quad \text{et} \quad (h \mid \varphi) < b \Rightarrow (1) \text{ a au moins}$$

*une solution  $u$  vérifiant  $(u \mid \varphi) > 0$  (resp.  $(u \mid \varphi) < 0$ ).*

Pour terminer la démonstration du théorème principal, il nous reste à montrer le résultat suivant :

**PROPOSITION 3.7.** *On suppose que  $C_- < 0$  et  $C_+ > 0$  (resp.  $C_- > 0$  et  $C_+ < 0$ ). Alors  $\forall h_0 \in \varphi^\perp$ , il existe  $a_0 \in \mathbb{R}$  t.q.  $\forall h \in L^2$ ,  $Ph = h_0$ ,  $(h | \varphi) < a_0$  (resp.  $(h | \varphi_0) > a_0$ ) alors (1) n'a pas de solution.*

*Démonstration.* Soient  $C_+ > 0$ ,  $C_- < 0$ . Si la proposition n'est pas vraie  $\forall h \geq 1$ ,  $\exists h_n \in L^2$ ,  $Ph_n = h_0$ ,

$$(h_n | \varphi) < -n, \quad \exists u_n \in D(A) \text{ t.q.}$$

$$Au_n = g(u_n) + h_n = g(u_n) + h_0 + (h_n | \varphi) \varphi$$

Comme

$$\|g(u_n)\| \leq Cte \|u_n\|,$$

on a

$$\|h_0\| + |(h_n | \varphi)| \leq \|Au_n\| + Cte \|u_n\|$$

i.e.  $\alpha_n = \|u_n\|_{D(A)} \rightarrow +\infty$  quand  $n \rightarrow +\infty$  et

$$\frac{|(h_n | \varphi)|}{\alpha_n} \leq Cte.$$

Soit

$$Z_n = \frac{u_n}{\alpha_n}; \|Z_n\|_{D(A)} = 1.$$

On peut extraire des sous-suites notées encore  $(Z_n)_n$  et  $(h_n)_n$  telles que

$$Z_n \xrightarrow{L^2} Z$$

$$\frac{(h_n | \varphi)}{\alpha_n} \rightarrow C \leq 0$$

alors  $AZ_n \rightarrow g_+ Z^+ - g_- Z^- + C\varphi$  dans  $L^2(\Omega)$ . C'est-à-dire :  $Z_n \xrightarrow{D(A)} Z$  où  $Z$  est solution de

$$(3.13) \quad AZ = g_+ Z^+ - g_- Z^- + C\varphi$$

et de plus  $\|Z\|_{D(A)} = 1$ . On démontre que ceci est impossible comme dans les lemmes 3.2 et 3.5.

*Remarque 3.1.* Pour  $h_0 \in \varphi^\perp$  donné, si  $h \in L^2(\Omega)$  et  $Ph = h_0$  d'après la proposition 3.3, on sait

que si  $C_+ > 0$  et  $C_- < 0$ , il existe  $a_2 \geq 0$  tel que si

$$(h | \varphi) > a_2$$

Trouver  $u \in D(A)$  tel que

$$Au = g(u) + h$$

admet deux solutions  $u_1$  et  $u_2$  avec

$$(u_1 | \varphi) < 0 \quad \text{et} \quad (u_2 | \varphi) > 0.$$

Le théorème principal annoncé dans l'introduction est donc démontré.

*Remarque 3.2.* Lorsque l'intervalle  $[g_-, g_+]$  (ou  $[g_+, g_-]$ ) ne contient pas de valeur propre de  $A$ , supposons par exemple  $\lambda < g_+, g_- < \bar{\lambda}$ , on a alors  $C(g_+, g_-) < C(\lambda, \lambda) = 0$  et  $C(g_-, g_+) < C(\lambda; \lambda) = 0$  et le théorème nous montre que pour tout  $h \in L^2(\Omega)$  (1) admet au moins 1 solution (cf. par exemple Kazdan-Warner [12]). Ce résultat peut être amélioré :

Soit  $\Omega$  un domaine borné régulier de  $\mathbb{R}^N$ ,  $D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$  et pour  $u \in D(A)$ ,  $Au = -\Delta u$ . On note  $(\lambda_n)_{n \geq 1}$  la suite croissante des valeurs propres de  $A$ . Soit  $g$  une fonction vérifiant les conditions (3), on suppose qu'il existe  $k \neq 1$  tel que

- 1)  $\lambda_k \leq g_+, g_- \leq \lambda_{k+1}$
- 2)  $(g_+, g_-) \neq (\lambda_k, \lambda_k)$  et  $(\lambda_{k+1}, \lambda_{k+1})$ ,

alors, pour tout  $h \in L^2(\Omega)$ , (1) admet au moins une solution.

Ceci se démontre simplement en remarquant que l'on a des estimations a priori sur les solutions

de  $Au = tg(\cdot, u) + (1-t) \left( \frac{\lambda_k + \lambda_{k+1}}{2} \right) u + h$ , et en utilisant l'invariance par homotopie du degré de Leray-Schauder. Ce résultat est à rapprocher des résultats de Berestycki-De-Figueiredo [5].

Ce résultat est faux pour  $k = 1$ , en effet si  $g_+$  ou  $g_- = \lambda_1$ , on a  $C_+$  ou  $C_- = 0$ , on est alors dans un cas semi-résonnant (si  $g_+ \neq g_-$ ) ou résonnant (si  $g_+ = g_- = \lambda_1$ ) et on peut ne pas avoir de solution pour certains  $h \in L^2(\Omega)$  (cf. Gallouët-Kavian [11]).

#### 4. - ETUDE D'UN EXEMPLE EN DIMENSION 1

Nous allons étudier dans cette partie un exemple pour lequel on donne explicitement le signe de  $C_+$  et  $C_-$  suivant les valeurs de  $g_+$  et  $g_-$ .

Soient

$$\Omega = ]0,1[ , Au = -u'' = -\frac{d^2u}{dx^2}$$

pour

$$u \in D(A) = H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1).$$

Les valeurs propres de  $A$  sont les  $\lambda_k = k^2\pi^2$  ( $k \geq 1$ ) ; elles sont toutes simples et une fonction propre correspondant à  $\lambda_k = k^2\pi^2$  est

$$\varphi_k(x) = \sqrt{2} \sin k\pi x.$$

Soit enfin  $g : ]0,1[ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction vérifiant les conditions (3). Pour  $h \in L^2(0,1)$  donné on s'intéresse au problème :

$$(4.1) \quad \begin{cases} -u'' = g(\cdot, u) + h \\ u \in H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1) \end{cases}$$

On suppose qu'il existe  $k \geq 1$  tel que

$$\lambda_{k-1} < g_-, g_+ < \lambda_{k+1}$$

Si  $k = 1$ , on suppose simplement  $g_-, g_+ < \lambda_2$ . Pour pouvoir utiliser le théorème principal il faut donc étudier la fonction  $C(\alpha, \beta)$  pour  $\alpha, \beta \in ]\lambda_{k-1}, \lambda_{k+1}[$  (la fonction  $C$  étant celle correspondant à  $\lambda = \lambda_k$  et  $\varphi = \varphi_k$ ). Nous allons décrire la courbe  $\Gamma_k = \{(\alpha, \beta) ; \alpha, \beta \in ]\lambda_{k-1}, \lambda_{k+1}[ \text{ et } C(\alpha, \beta) = 0\}$ .

Soient

$$\alpha, \beta \in ]\lambda_{k-1}, \lambda_{k+1}[$$

tels que

$$C(\alpha, \beta) = 0.$$

Ceci signifie qu'il existe  $v \in H^2 \cap H_0^1$  tel que

$$(4.2) \quad \sqrt{2} \int_0^1 v(x) \sin k\pi x dx = 1 \quad \text{et} \quad -v'' = \alpha v^+ - \beta v^-$$



Soit

$$\rho(x) = \alpha \text{ sur } \{x \in ]0,1[ ; v(x) \geq 0\} = [v \geq 0]$$

$$\rho(x) = \beta \text{ sur } \{x \in ]0,1[ ; v(x) < 0\} = [v < 0].$$

On a  $-v'' = \rho v$  c'est-à-dire que 1 est valeur propre du problème :

$$-u'' = \mu \cdot \rho \cdot u, \quad u \in H_0^1$$

et comme  $\lambda_{k-1} < \rho < \lambda_{k+1}$ , 1 est la  $k$ -ème valeur propre de ce problème et donc  $v$  s'annule  $(k-1)$  fois sur  $]0,1[$  (cf. COURANT-HILBERT [9]).

Chacun des intervalles où  $v$  est positif doit avoir une longueur  $\omega$  telle que  $\alpha = \frac{\pi^2}{\omega^2}$  ; de même chacun des intervalles où  $v$  est négatif a une longueur  $\omega'$  telle que  $\beta = \frac{\pi^2}{\omega'^2}$ . La somme totale de ces intervalles doit être égale à 1 et ceci va nous donner une relation entre  $g_+$  et  $g_-$  suivant la parité de  $k$ .

Cas où  $k = 2P$ ,  $P \geq 1$ .

Dans ce cas il y a  $P$  intervalles  $v > 0$  et  $P$  intervalles  $v < 0$ . On a donc

$$P\omega + P\omega' = 1,$$

c'est-à-dire

$$\frac{P\pi}{\sqrt{\alpha}} + \frac{P\pi}{\sqrt{\beta}} = 1.$$

On montre alors que cette condition est nécessaire et suffisante pour l'existence d'une solution non nulle de (4.2).  $C(\cdot, \cdot)$  et  $(\alpha, \beta) \mapsto \frac{P\pi}{\sqrt{\alpha}} + \frac{P\pi}{\sqrt{\beta}} - 1$  étant toutes deux des fonctions strictement décroissantes par rapport à chaque variable, on en déduit :

**PROPOSITION 4.1.** Soit  $P \geq 1$  ; pour  $\alpha, \beta \in ]\lambda_{2P-1}, \lambda_{2P+1}[$  et  $\varphi_{2P}(x) = \sqrt{2} \sin 2P\pi x$  on a :

$$i) \quad C(\alpha, \beta) = 0 \quad \text{ssi} \quad \frac{P\pi}{\sqrt{\alpha}} + \frac{P\pi}{\sqrt{\beta}} - 1 = 0$$

$$ii) \quad \text{Signe } C(\alpha, \beta) = \text{signe} \left( \frac{P\pi}{\sqrt{\alpha}} + \frac{P\pi}{\sqrt{\beta}} - 1 \right) = \text{signe } C(\beta, \alpha)$$

*Remarque 4.1.* En fait on peut même montrer, dans ce cas, que  $C(\alpha, \beta) = C(\beta, \alpha)$ .

On voit que (4.1) a une solution dès que  $\frac{P\pi}{\sqrt{g_+}} + \frac{P\pi}{\sqrt{g_-}} - 1 \neq 0$ . L'ensemble  $\Gamma_{2P}$  tel que  $C(\alpha, \beta) = 0$ , est une courbe strictement monotone et continue, entièrement déterminée.

Cas où  $k = 2P+1$ ,  $P \geq 1$ .

Deux possibilités peuvent se présenter pour la solution de

$$-v'' = \alpha v^+ - \beta v^-; v \equiv 0.$$

a) Ou bien  $v > 0$  sur  $(P+1)$  intervalles de longueur  $\omega$ , et  $v < 0$  sur  $P$  autres intervalles de longueur  $\omega'$  ;

b) Ou bien  $v > 0$  sur  $P$  intervalles de longueur  $\omega$  et  $v < 0$  sur  $(P+1)$  autres intervalles de longueur  $\omega'$ .

On montre que si on impose la condition

$$(v | \varphi_{2P+1}) = \int_0^1 v(x) \varphi_{2P+1}(x) dx > 0$$

la possibilité b) ne se présente pas, et alors l'équation (4.2) admet une solution non nulle si et seulement si

$$\frac{(P+1)\pi}{\sqrt{\alpha}} + \frac{P\pi}{\sqrt{\beta}} - 1 = 0,$$

on en déduit :

PROPOSITION 4.2. Soit  $P \geq 1$  ; pour  $\alpha, \beta \in ]\lambda_{2P}, \lambda_{2P+2}[$  et  $\varphi_{2P+1}(x) = \sqrt{2} \sin (2P+1)\pi x$  on a :

$$i) \quad C(\alpha, \beta) = 0 \quad \text{ssi} \quad \frac{(P+1)\pi}{\sqrt{\alpha}} + \frac{P\pi}{\sqrt{\beta}} - 1 = 0.$$

$$ii) \quad \text{Signe } C(\alpha, \beta) = \text{signe} \left( \frac{(P+1)\pi}{\sqrt{\alpha}} + \frac{P\pi}{\sqrt{\beta}} - 1 \right).$$

Remarque 4.2. Si  $k = 1$  on sait que  $C(\alpha, \beta) = \lambda - \alpha$ , le signe de  $C(\alpha, \beta)$  est donc là aussi entièrement déterminé.

Remarque 4.3.

a) Dans le cas  $k = 2P+1$  ( $P \geq 1$ ) on voit que toutes les situations du théorème peuvent se présenter.

b) On rappelle que les cas  $C(g_+, g_-) = 0$  et / ou  $C(g_-, g_+) = 0$  sont des cas «résonnants» ou «semi-résonnants». Il faut dans ces cas tenir compte du comportement de  $g(t) - g_+ t^+ + g_- t^-$  quand  $t \rightarrow \pm \infty$ .

### 5. - CAS OU A A UN NOYAU DE DIMENSION INFINIE : UN THEOREME DU TYPE AMBROSETTI-PRODI POUR L'EQUATION DES ONDES NON LINEAIRES AVEC CONDITIONS PERIODIQUES

Soit  $\Omega = ]0, \pi[ \times ]0, 2\pi[$  ; on considère sur  $L^2(\Omega)$  l'opérateur  $A = \underline{A}^*$  avec

$$D(\underline{A}) = \{u \in C^2(\overline{\Omega}) / u(0, \cdot) = u(\pi, \cdot) = 0, u(\cdot, 0) = u(\cdot, 2\pi),$$

$$u_t(\cdot, 0) = u_t(\cdot, 2\pi)\},$$

et pour  $u \in D(\underline{A})$

$$\underline{A}u(x, t) = u_{tt}(x, t) - u_{xx}(x, t), \quad \forall (x, t) \in \Omega.$$

A est un opérateur autoadjoint, mais A n'est pas à résolvante compacte : on ne peut donc pas lui appliquer directement le théorème du § 3. Toutefois la compacité de la résolvante de A n'était pas nécessaire pour le § 2, et on peut aisément montrer que l'ensemble du § 2 reste vrai pour l'opérateur défini ici.

Pour retrouver le théorème du § 3 on va être amené à ajouter une hypothèse de monotonie sur g, ce qui permettra de surmonter la difficulté due ici au fait que la dimension du noyau de A est infinie.

On rappelle quelques propriétés de A :

- A est autoadjoint, d'image  $R(A)$  fermée et si  $f \in R(A)$ , il existe un unique

$$u \in R(A) \cap D(A) \text{ tel que } Au = f,$$

on note  $u = A^{-1}f$  ;  $A^{-1}$  est compact de  $R(A)$  dans  $R(A)$  ( $R(A)$  étant muni de la topologie de  $L^2$ ). Le noyau de A est  $N(A) = R(A)^\perp$  et  $L^2(\Omega) = R(A) \oplus N(A)$ .

- Les valeurs propres de A sont les  $p^2 - q^2$  ( $p \geq 1, q \geq 0$ ), les sous-espaces propres correspondant à des valeurs propres non nulles sont de dimension finie, supérieure ou égale à 2, sauf pour  $p = 1$  et  $q = 0$  où le sous-espace propre correspondant est de dimension 1 et engendré par

$$\varphi_1(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x.$$

La première valeur propre positive de A ( $\lambda_1 = 1$ ) est la seule valeur propre simple de A.

On va dans la suite considérer des fonctions g vérifiant les conditions (3) avec  $\lambda = \lambda_1 = 1$ , (noter alors que  $\underline{\lambda} = 0$  et  $\overline{\lambda} = 3$ ), et telles que  $s \mapsto g(x, t, s)$  est croissante pour presque tout  $(x, t) \in \Omega$ .

Remarquons tout d'abord que la proposition 2.2 reste vraie pour l'opérateur A défini ici, on a

$$\forall \alpha, \beta \in ]0, 3[ \quad \exists ! \quad (C, u) \in \mathbb{R} \times D(A)$$

tel que

$$(4) \quad \begin{cases} Au = \alpha u^+ - \beta u^- + C\varphi_1 \\ (u | \varphi_1) = 1. \end{cases}$$

On sait également (cf. § 2) que la solution de ce problème est  $u = \varphi_1$  et  $C = C(\alpha, \beta) = 1 - \alpha$ .  
Pour  $h \in L^2(\Omega)$  donné on considère l'équation (1) qui s'écrit ici :

$$(1) \quad \begin{cases} u \in D(A) \\ u_{tt} - u_{xx} = Au = g(\cdot, \cdot, u) + h. \end{cases}$$

Les méthodes développées au § 3 permettent alors de montrer le résultat suivant qui est du «type Ambrosetti-Prodi».

**PROPOSITION 5.1.** Soit  $g : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction telle que :

- .  $g$  vérifie (3) ;
- . pour presque tout  $(x, t) \in \Omega$ ,  $s \mapsto g(x, t, s)$  est croissante ;
- . il existe  $\epsilon > 0$  et une fonction  $k \in L^1(\Omega)$  tels que  $\forall s \in \mathbb{R}$

$$g(\cdot, \cdot, s) \cdot s \geq \epsilon s^2 - k(\cdot, \cdot).$$

Alors  $\forall h_0 \in \varphi_1^\perp$  si  $h = h_0 + \theta \varphi_1$  on a :

i) Si  $g_- < 1 < g_+$  (resp.  $g_+ < 1 < g_-$ ),  $\exists a_0, a_2 \in \mathbb{R}$  tels que

- .  $\theta > a_0$  (resp.  $<$ )  $\Rightarrow$  (1) n'admet pas de solution ;
- .  $\theta < a_2$  (resp.  $>$ )  $\Rightarrow$  (1) admet au moins 2 solutions.

ii) Si  $g_- = 1 < g_+$  ou  $g_- < 1 = g_+$  (resp.  $g_- = 1 > g_+$  ou  $g_+ = 1 > g_-$ ) il existe  $a_1 \in \mathbb{R}$  tel que

$$\theta < a_1 \text{ (resp. } >) \Rightarrow (1) \text{ admet au moins 1 solution.}$$

**Remarques 5.1.**

- a) En ajoutant l'hypothèse  $\alpha \leq \frac{g(\cdot, \cdot, s) - g(\cdot, \cdot, \sigma)}{s - \sigma} \leq \beta$  pour un certain couple  $(\alpha, \beta) \in ]0, 3[$ , on peut montrer, dans le cas i) de la proposition 5.1, que  $a_0 = a_2$  et (1) a au moins une solution pour  $h = h_0 + a_0 \varphi_1$ .

b) Le cas ii) de la proposition 5.1 est un cas «semi-résonnant», il peut être précisé suivant le comportement en  $(\pm \infty)$  de  $g(t) - g_+ t^+ + g_- t^-$  (cf. Gallouët-Kavian [11]).

Pour démontrer cette proposition on utilise la même technique topologique que dans le § 3. La difficulté étant ici que, pour  $\gamma$  valeur régulière de  $A$ , on n'a pas  $(A - \gamma I)^{-1}$  compact de  $L^2(\Omega)$  dans  $L^2(\Omega)$  ; toutefois la restriction de  $(A - \gamma I)^{-1}$  à  $R(A)$  est compacte.

Soit  $\gamma$  une valeur régulière de  $A$ , on pose  $B = (A - \gamma I)^{-1}$ . On note  $Q$  la projection (orthogonale) sur  $N(A)$ . Soit  $g$  une fonction vérifiant les conditions (3), pour simplifier l'écriture on pose

$$g(u) = g(\cdot, \cdot, u).$$

On a

$$(1) \quad Au = g(u) + h$$

$$\Leftrightarrow \quad u = Bg(u) + Bh - \gamma Bu$$

$$\Leftrightarrow \quad u - BQg(u) + \gamma BQu = B(I - Q)g(u) - \gamma B(I - Q)u + Bh$$

Le problème : trouver  $u \in D(A)$  vérifiant (1) est donc équivalent au problème : trouver  $u \in L^2(\Omega)$  tel que

$$(5.1) \quad Du = Su + Bh$$

avec  $Su = B(I - Q)g(u) - \gamma B(I - Q)u$

$$Du = (I - Q)u + Q \frac{g(u)}{\gamma}$$

(on remarque en effet que pour  $f \in N(A)$  on a  $Bf = -\frac{f}{\gamma}$ ).

$u \mapsto Su$  est un opérateur compact de  $L^2(\Omega)$  dans  $L^2(\Omega)$  (car la restriction de  $B$  à  $R(A)$  est compacte). Pour mettre (5.1) sous la forme  $u = Tu + D^{-1} Bh$  on va avoir besoin d'une hypothèse de forte monotonie sur  $g$ , i.e.

$$(5.2) \quad \exists \alpha > 0 / (g(x, t, s) - g(x, t, \sigma))(s - \sigma) \geq \alpha(s - \sigma)^2,$$

$$\forall s, \sigma \in \mathbb{R} \quad \text{p.p. en } (x, t) \in \Omega.$$

On obtient alors le lemme suivant :

LEMME 5.2. Soit  $g$  vérifiant les conditions (3) et (5.2). L'opérateur  $D : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$  est alors inversible,  $D^{-1}$  est continu et transforme les bornés de  $L^2$  en bornés de  $L^2$ .

*Démonstration du Lemme 5.2.* Soit  $f \in L^2(\Omega)$ , on a

$$Du = f \iff \begin{cases} (I-Q)u = (I-Q)f \\ Qg(u) = \gamma Qf \end{cases}$$

On a donc nécessairement  $u = u_1 + u_2$  avec  $u_1 = (I-Q)f$  et  $u_2 \in N(A)$  solution de

$$(5.3) \quad Qg(u_1 + u_2) = \gamma Qf$$

Pour  $u \in L^2(\Omega)$  posons

$$J(u) = \int G(u_1 + u) - \gamma \int fu$$

(où on convient que  $G(s) = G(\cdot, \cdot, s) = \int_0^s g(\cdot, \cdot, \sigma) d\sigma$ ), la fonctionnelle  $J$  est strictement convexe,

$J(u) \rightarrow +\infty$  quand  $\|u\| \rightarrow +\infty$ ,  $J$  est continue et Gâteaux-différentiable et sa G-dérivée vérifie

$$\langle J'(u), v \rangle = \int g(u_1 + u)v - \gamma \int fv.$$

En considérant la restriction de  $J$  à  $N(A)$ , ceci montre que, pour tous  $u_1$  et  $f$  fixés, l'équation (5.3) admet une et une seule solution  $u_2 \in N(A)$  (cette solution minimise  $J$  sur  $N(A)$ ).

Pour tout  $f \in L^2(\Omega)$  il existe donc une et une seule, solution  $u \in L^2(\Omega)$  de  $Du = f$ , i.e.  $D$  est inversible. Pour montrer que  $D^{-1}$  transforme les bornés en bornés, on remarque que si  $Du = f$

$$\begin{aligned} \alpha \|u\|^2 &\leq (g(u) | u) \leq ((I-Q)g(u) | f) + (\gamma f | Qu) \\ &\leq C \|u\| \|f\|. \end{aligned}$$

(où  $C$  est une constante donnée par (3) iii)).

On a également  $D^{-1}$  continue, car pour tout  $M > 0$ , on a, si  $D\bar{u} = \bar{f}$ ,  $Du = f$  avec  $\|\bar{f}\|, \|f\| \leq M$ ,

$$\begin{aligned} \alpha \|u - \bar{u}\|^2 &\leq (g(u) - g(\bar{u}) | u - \bar{u}) \leq ((I-Q)(g(u) - g(\bar{u})) | f - \bar{f}) \\ &\quad + (\gamma(f - \bar{f}) | Qu - Q\bar{u}), \end{aligned}$$

d'où  $\alpha \|u - \bar{u}\|^2 \leq C \|f - \bar{f}\|$ , (avec  $C$  constante dépendant de  $M$ ). ■

Le lemme 5.2 nous montre que (5.1) (et donc (1)) est équivalent à

$$(5.3) \quad u = Tu$$

avec  $Tu = D^{-1}Su + D^{-1}Bh$ .  $T$  est un opérateur compact de  $L^2(\Omega)$  dans  $L^2(\Omega)$ .

De même, supposons que  $g$  et  $\bar{g}$  vérifient les hypothèses du Lemme 5.2, on a alors pour tout  $t \in [0,1]$

$$(5.4) \quad Au = tg(u) + (1-t)\bar{g}(u) + h \iff$$

$$(5.5) \quad u = T(t,u),$$

avec  $T(t,u) = D_t^{-1} S(t,u) + D_t^{-1} Bh$ , et

$$S(t,u) = B(I-Q) (tg(u) + (1-t)\bar{g}(u)) - \gamma B(I-Q)u$$

$$D_t u = (I-Q)u + \frac{1}{\gamma} Q (tg + (1-t)\bar{g})(u).$$

Il est clair que  $S(\cdot, \cdot)$  est un opérateur compact de  $[0,1] \times L^2(\Omega)$  dans  $L^2(\Omega)$ . Un raisonnement analogue à celui du Lemme 5.2 montre alors que  $T(\cdot, \cdot)$  est aussi un opérateur compact de  $[0,1] \times L^2(\Omega)$  dans  $L^2(\Omega)$  (remarquer que si  $t_n \rightarrow t$  et  $f \in L^2(\Omega)$ , on a  $D_{t_n}^{-1} f \xrightarrow{L^2} D_t^{-1} f$ ).

*Démonstration de la proposition 5.1.*

1./ On montre tout d'abord l'existence de  $a_0$  ((cas i) de la proposition). Supposons, par exemple,  $g_- < 1 < g_+$  (on a alors  $0 < g_- < 1 < g_+ < 3$ ).

On raisonne par l'absurde de manière analogue à la proposition 3.7 (on a ici  $C_+ = 1 - g_+ < 0$  et  $C_- = 1 - g_- > 0$  où la fonction  $C(\cdot, \cdot)$  est celle qui correspond à  $\lambda_1 = 1$ ).

S'il existe  $(h_n, u_n)_n$  telle que

$$h_n = h_0 + \theta_n \varphi_1, \quad \theta_n > n,$$

$$Au_n = g(u_n) + h_n.$$

On a  $\alpha_n = \|u_n\|_{D(A)} \rightarrow +\infty$  et  $\frac{\theta_n}{\alpha_n}$  bornée (cf. proposition 3.7). On pose

$$v_n = \frac{u_n}{\alpha_n}$$

et on extrait une sous-suite telle que

$$\left\{ \begin{array}{l} v_n \rightarrow v \quad \text{dans } D(A)\text{-faible} \\ \frac{\theta_n}{\alpha_n} \rightarrow C \geq 0. \end{array} \right.$$

On a donc

$$(I-Q)v_n \rightarrow (I-Q)v \text{ dans } L^2$$

$$(Av_n | v_n) \rightarrow (Av | v).$$

De  $Av_n = \frac{g(u_n)}{\alpha_n} + \frac{h_n}{\alpha_n}$ , et de la monotonie de  $g(x, t, \cdot)$  on déduit

$$(5.6) \quad \left( Av_n - \frac{h_n}{\alpha_n} - \frac{g(\alpha_n w)}{\alpha_n} \mid v_n - w \right) \geq 0 \quad \forall w \in L^2(\Omega),$$

d'où, quand  $n \rightarrow +\infty$ ,

$$(Av - C\varphi_1 - g_+ w^+ + g_- w^- \mid v - w) \geq 0 \quad \forall w \in L^2(\Omega).$$

On a donc par l'astuce de Minty (changer  $w$  en  $v + \mu w$  et faire  $\mu \rightarrow 0$ ) :

$$Av = g_+ v^+ - g_- v^- + C\varphi_1.$$

En procédant comme dans la démonstration de la proposition 3.7, on voit que  $(v | \varphi_1) = 0$  et de là  $v = 0$ ,  $C = 0$ .

On note  $v_{1n} = (I-Q)v_n$  et  $v_{2n} = Qv_n$  ; on sait que  $v_{1n} \rightarrow 0$  dans  $L^2$  et  $v_{2n} \rightarrow 0$  dans  $L^2$  faible. En faisant  $w = \frac{1}{2}v_{2n}$  dans (5.6) on obtient

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( -\frac{g(\frac{1}{2}\alpha_n v_{2n})}{\alpha_n} \mid \frac{v_{2n}}{2} \right) \geq 0$$

d'où en utilisant le fait que  $g(s)s \geq \epsilon s^{2-k}$  avec  $k \in L^1(\Omega)$

$$\epsilon \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|v_{2n}\|^2 \leq 0.$$

On a donc  $v_{2n} \rightarrow 0$  dans  $L^2$  et on en déduit  $v_n \xrightarrow{L^2} 0$ , et par le lemme 2.5,  $Av_n \rightarrow 0$  dans  $L^2$ , ce qui est impossible car  $\|v_n\|_{D(A)} = 1$ .

2./ Pour démontrer l'existence de  $a_2$  et  $a_1$  (cas i) et ii) de la proposition 5.1), il suffit de montrer les mêmes résultats que dans les propositions 3.3 et 3.6 (avec  $C_+ = 1 - g_+$  et  $C_- = 1 - g_-$ ). On va supposer dans une première étape que  $g$  est fortement monotone (condition (5.2)).

**Etape 1.** Soit  $g$  vérifiant les conditions (3) et (5.2). On suppose, par exemple,  $1 < g_+$ . Il est clair que, pour tout  $t \in [0, 1]$ , les problèmes suivants sont équivalents.

$$(5.7) \quad Au = tg(u) + (1-t)g_+ u + h$$



$$(5.8) \quad u = T(t, u),$$

où  $T(\cdot, \cdot)$  est l'opérateur de (5.5) avec  $\bar{g}(u) = g_+ u$ .  $T(\cdot, \cdot)$  est un opérateur compact de  $[0, 1] \times L^2(\Omega)$  dans  $L^2(\Omega)$ .

On montre de manière analogue au Lemme 3.4 que

$$(5.9) \quad \begin{cases} \forall h_0 \in \varphi_1^\perp, \exists a \leq 0 \text{ tel que si } h = h_0 + \theta \varphi_1 \\ \theta < a \Rightarrow (5.7) \text{ n'a pas de solution avec } (u | \varphi_1) = 0 \end{cases}$$

En effet on a sinon une suite  $(t_n, h_n, u_n)_n$  telle que

$$h_n = h_0 + t_n \varphi_1, \quad t_n < -n$$

$$A u_n = t_n g(u_n) + (1 - t_n) g_+ u_n + h_n,$$

$$(u_n | \varphi_1) = 0$$

On montre  $\alpha_n = \|u_n\|_{D(A)} \rightarrow +\infty$  (cf. Lemme 3.4). On pose  $v_n = \frac{u_n}{\alpha_n}$  et on extrait une sous-suite telle que

$$\begin{cases} v_n \rightarrow v & \text{dans } D(A)\text{-faible} \\ t_n \rightarrow t. \end{cases}$$

On a  $A v_n = t_n P \frac{g(v_n \alpha_n)}{\alpha_n} + (1 - t_n) g_+ v_n + \frac{h_0}{\alpha_n}$ , (on rappelle que  $P$  est la projection sur  $\varphi_1^\perp$ , remarquer que  $v_n, v \in \varphi_1^\perp$ ).

De la monotonie de  $g$  on déduit

$$(5.10) \quad \left( A v_n - \frac{h_0}{\alpha_n} - t_n \frac{g(w \alpha_n)}{\alpha_n} - (1 - t_n) g_+ w \mid v_n - w \right) \geq 0 \quad \forall w \in \varphi_1^\perp.$$

On obtient, quand  $n \rightarrow +\infty$ ,

$$(A v - g_+ w^+ + (t g_- + (1 - t) g_+) w^- \mid v - w) \geq 0 \quad \forall w \in \varphi_1^\perp.$$

On a donc, par l'astuce de Minty,

$$A v = P(g_+ v^+ - (t g_- + (1 - t) g_+) v^-),$$

d'où  $v = 0$  (cf. proposition 2.1).

On sait que  $(I - Q)v_n \rightarrow 0$  dans  $L^2$ , on montre que  $v_{2n} = Q v_n \rightarrow 0$  dans  $L^2$  en faisant  $w = \frac{1}{2} v_{2n}$  dans

(5.10), puis  $n \rightarrow +\infty$  (remarquer que  $g(s).s \geq \alpha s^2$ ). On a donc  $v_n \rightarrow 0$  dans  $L^2$  et, par le Lemme 2.5,  $Av_n \rightarrow 0$  dans  $L^2$  ce qui est en contradiction avec  $\|v_n\|_{D(A)} = 1$ .

On a maintenant, de manière analogue au Lemme 3.5,

$$(5.11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall h \in L^2(\Omega), \quad \exists R > 0 / \forall t \in [0,1], \\ u \text{ vérifie (5.7) et } (u | \varphi_1) > 0 \Rightarrow \|u\|_{D(A)} < R. \end{array} \right.$$

On montre (5.11) en raisonnant par l'absurde : soit  $(t_n, u_n)_n$  telle que

$$t_n \in [0,1], \alpha_n = \|u_n\|_{D(A)} \rightarrow +\infty, (u_n | \varphi_1) > 0,$$

$$Au_n = t_n g(u_n) + (1-t_n)g_+ u_n + h.$$

On pose  $v_n = \frac{u_n}{\alpha_n}$  et on extrait une sous-suite telle que

$$v_n \rightarrow v \quad \text{dans } D(A)\text{-faible}$$

$$t_n \rightarrow t.$$

On montre, comme précédemment, en utilisant la monotonie de  $g$  et l'astuce de Minty, que

$$Av = g_+ v^+ - (tg_+ + (1-t)g_-)v^-.$$

Ceci est impossible si  $(v | \varphi_1) > 0$  (cf. proposition 2.2), on a donc  $(v | \varphi_1) = 0$ , d'où en projetant sur  $\varphi_1^\perp$ ,  $v = 0$  (cf. proposition 2.1).

Comme précédemment on montre également que  $v_n \rightarrow 0$  dans  $L^2(\Omega)$ , et donc  $Av_n \rightarrow 0$  dans  $L^2(\Omega)$  (d'après le lemme 2.5), ce qui est en contradiction avec  $\|v_n\|_{D(A)} = 1$ .

On déduit de (5.9) et (5.11), par la même méthode topologique que dans la proposition 3.3, que si  $h = h_0 + \theta \varphi_1$ ,  $\theta < a$  ( $a$  donné par (5.9)), il existe  $u$  tel que  $u = T(1, u)$  (et donc  $u$  solution de (1)) et  $(u | \varphi_1) > 0$ .

Il est clair que l'on peut ainsi démontrer les mêmes résultats que dans les propositions 3.3 et 3.6. Ceci démontre l'existence de  $a_2$  et  $a_1$  dans la proposition 5.1 pour des fonctions  $g$  vérifiant (3) et (5.2).

**Etape 2.** Soit  $g$  une fonction vérifiant les hypothèses de la proposition 5.1. On va montrer, par exemple, le résultat suivant :

$$(5.12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Si } 1 < g_+, \quad \forall h_0 \in \varphi_1^\perp \quad \exists a \in \mathbb{R} / \text{Si } h = h_0 + \theta \varphi_1 \\ \theta < a \Rightarrow (1) \text{ a au moins une solution avec } (u | \varphi_1) > 0. \end{array} \right.$$

Des résultats analogues pour  $g_+ < 1$  et  $g_-$  au lieu de  $g_+$  permettent de conclure à l'existence de  $a_2$  et  $a_1$  dans la proposition 5.1.

Pour démontrer (5.12) on va ajouter  $\eta u$  à (1) et passer à la limite quand  $\eta \rightarrow 0$ . Plus précisément, on considère l'équation

$$(5.13) \quad Au = g_\eta(u) + h,$$

où  $g_\eta(u) = g(u) + \eta u$ ,  $\eta > 0$ , (on convient toujours de noter  $g(\cdot, \cdot, u) = g(u)$  et  $g_\eta(\cdot, \cdot, u) = g_\eta(u)$ ).

Soit  $\eta_0 < \text{dist}(\{g_+, g_-\}, \{0, 3\})$ , on montre alors

$$(5.14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall h_0 \in \varphi_1^\perp, \exists a \leq 0 / \text{Si } h = h_0 + \theta \varphi_1, \\ \theta < a \Rightarrow (5.13) \text{ n'a pas de solution avec} \\ (u | \varphi_1) = 0 \text{ et } 0 \leq \eta \leq \eta_0, \end{array} \right.$$

et

$$(5.15) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall h \in L^2(\Omega), \exists R > 0 / \forall \eta \in [0, \eta_0], \\ u \text{ vérifie (5.13) et } (u | \varphi_1) > 0 \Rightarrow \|u\|_{D(A)} < R. \end{array} \right.$$

On démontre (5.14) et (5.15) de manière analogue à (5.9) et (5.11) (remarquer que pour démontrer (5.9) et (5.11) la forte monotonie de  $g(x, t, \cdot)$  n'était pas nécessaire. Il suffit ici de noter que  $g_\eta(s) \cdot s \geq \epsilon s^2 - k$  avec  $k \in L^1(\Omega)$ ).

Soit  $h_0 \in \varphi_1^\perp$  et  $h = h_0 + \theta \varphi_1$  avec  $\theta < a$  ( $a$  donné par (5.14)), la fonction  $g_\eta$  vérifie (5.2) (avec  $\alpha = \eta > 0$ ), on déduit donc de (5.14) et (5.11) (cf. Etape 1) que, pour tout  $\eta \in ]0, \eta_0[$ , il existe  $u_\eta$  solution de (5.13) avec  $(u_\eta | \varphi_1) > 0$ .

D'autre part, par (5.15), on a  $\|u_\eta\|_{D(A)} < R$ . Il existe donc une suite  $(\eta_k)_k$  telle que, en notant  $u_{\eta_k} = u_k$ , quand  $k \rightarrow +\infty$ ,

$$\eta_k \rightarrow 0$$

$$u_k \rightarrow u \text{ dans } D(A)\text{-faible.}$$

On a donc

$$(I-Q)u_k \rightarrow (I-Q)u \text{ dans } L^2,$$

et  $(Au_k, u_k) \rightarrow (Au, u)$ .

De la monotonie de  $g(x, t, \cdot)$  on déduit

$$(Au_k - \eta_k u_k - h - g(w) \mid u_k - w) \geq 0,$$

d'où, quand  $k \rightarrow +\infty$ ,

$$(Au - h - g(w) \mid u - w) \geq 0,$$

et donc

$$Au = g(u) + h.$$

On remarque aussi que, comme  $(u_k \mid \varphi_1) > 0$ , on a  $(u \mid \varphi_1) \geq 0$ , d'où, d'après (5.14),

$$(u \mid \varphi_1) > 0.$$

On a ainsi démontré (5.12). La proposition 5.1 en découle.

*Remarque 5.2.* Sous les hypothèses de la proposition 5.1, on peut montrer que si l'intervalle  $[g_+, g_-]$  (ou  $[g_-, g_+]$ ) ne contient aucune valeur propre de  $A$  l'équation (1) admet au moins une solution pour tout  $h \in L^2(\Omega)$ , ce résultat est connu (cf. Mawhin [15]).

En notant  $(\lambda_k)_{k \geq 1}$  la suite croissante des valeurs propres positives de  $A$  on a également que si  $g$  vérifie les hypothèses de la proposition 5.1 et si il existe  $k \neq 1$  tel que

- i)  $\lambda_k \leq g_+, g_- \leq \lambda_{k+1}$ ,
- ii)  $(g_+, g_-) \neq (\lambda_k, \lambda_k)$  et  $(\lambda_{k+1}, \lambda_{k+1})$ ,

alors (1) admet une solution pour tout  $h \in L^2(\Omega)$ . Si  $k = 1$  on a le même résultat en remplaçant i) par  $\lambda_1 < g_+, g_- \leq \lambda_2$  (noter que, en fait, si  $g_+ = \lambda_1$ , ou  $g_- = \lambda_1$ , on est dans un cas «semi-résonnant»).

De même en notant  $(\lambda_{-k})_{k \geq 1}$  la suite décroissante des valeurs propres négatives de  $A$  on a que si  $g$  vérifie les hypothèses de la proposition 5.1 et si il existe  $k \geq 1$  tel que

- i)  $-\lambda_{-k} \leq g_+, g_- \leq -\lambda_{-k-1}$ ,
- ii)  $(g_+, g_-) \neq (\lambda_{-k}, \lambda_{-k})$  et  $(\lambda_{-k-1}, \lambda_{-k-1})$ ,

alors l'équation  $Au + g(u) = h$  admet une solution pour tout  $h \in L^2(\Omega)$ . Ces résultats sont à rapprocher de ceux de Willem [16].

*Remarque 5.3.* Nous n'avons pas utilisé dans ce § la structure particulière du noyau de  $A$ . En fait,

on peut démontrer le résultat abstrait suivant :

Soit  $A$  un opérateur autoadjoint d'image,  $R(A)$ , fermée et tel que l'injection de  $D(A) \cap R(A)$  (muni de la norme du graphe de  $A$ ) dans  $L^2(\Omega)$  est compacte ;

Soit  $g$  une fonction vérifiant (3) et telle que  $\text{sgn}(g_+) = \text{sgn}(g_-)$  et

.  $u \rightarrow \text{sgn}(g_+) \cdot g(x, u)$  est croissante, pp en  $x \in \Omega$ ,

.  $\exists \epsilon > 0, k(\cdot) \in L^1(\Omega)$  tels que  $\forall u \in \mathbb{R}, \text{sgn}(g_+) \cdot g(\cdot, u) \cdot u \geq \epsilon u^2 - k(\cdot)$  ;

alors les conclusions du théorème principal et l'ensemble du § 2 restent vrais.

## REFERENCES

- [1] H. AMANN ; E. ZEHNDER. «*Non trivial solutions for a class of non-resonance, problems & Applications to non-linear Differential Equations*» (A paraître).
- [2] A. AMBROSETTI ; G. PRODI. «*On the inversion of some differentiable mappings with singularities between Banach spaces*». Ann. Mat. Pura i Appl. 93 (1972), pp. 231-246.
- [3] H. BERESTYCKI. «*Le nombre de solutions de certains problèmes semi-linaire elliptiques*». (A paraître)
- [4] H. BERESTYCKI. «*On some nonlinear Sturm-Liouville problems*». J. of Diff. Equ. vol. 26, n° 3, (1977), pp. 375-390.
- [5] H. BERESTYCKI ; D.J. DE FIGUEIREDO. «*Double resonance in semi-linear elliptic problems*».
- [6] M.S. BERGER ; E. PODOLACK. «*On the solutions of a nonlinear Dirichlet problem*». Indiana Univ. Math. J. 24, 9, (1975), pp. 837-846.
- [7] H. BREZIS ; L. NIRENBERG. «*Characterizations of the ranges of some non-linear operators & applications to boundary value problems*». Ann. Sc. Nor. Sup., Pisa, IV, vol. V, n° 2 (1978), pp. 225-326.
- [8] A. CASTRO ; A.C. LAZER. «*Critical point theory & the number of solutions of a non-linear Dirichlet problem*». Ann. di Mat. Pura ed Applicata, vol. 120, 1979, pp. 113-137.
- [9] R.C. COURANT ; D. HILBERT. «*Methods of mathematical physics*». Vol. I, New-York (1953).
- [10] I. EKELAND ; R. TEMAM. «*Analyse convexe et problèmes variationnels*». Dunod, Gauthiers-Villars Ed., Paris 1974.
- [11] T. GALLOUET ; O. KAVIAN. A paraître dans Comm. in P.D.E.
- [12] KAZDAN ; WARNER. «*Remarks on some quasilinear elliptic equations*». Comm. Pure Appl. Math., 28 (1975), pp. 567-597.
- [13] E.M. LANDESMAN ; A.C. LAZER. «*Non-linear perturbations of linear elliptic boundary value problems at resonance*». J. Math. Mech., vol. 19, (1970), pp. 609-623.

- [14] E.M. LANDESMAN ; A.C. LAZER. «*Linear eigenvalues & a non-linear boundary value problem*». Pacific J., vol. 33, (1970), pp. 311-328.
- [15] J. MAWHIN. «*Periodic solutions of non-linear dispersive wave equations ; in constructive methods for boundary value problems & non-linear oscillation*». Basel (1979).
- [16] M. WILLEM. «*Periodic solutions of wave equation with jumping non-linearities*». Preprint.

(Manuscrit reçu le 6 juillet 1980)