ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

HÉLÈNE RIOS

Une étude d'existence sur certains problèmes paraboliques

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 5e série, tome 1, nº 3 (1979), p. 235-255
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1979_5_1_3_235_0>

Annales Faculté des Sciences Toulouse
Vol I, 1979, P. 235 à 255

UNE ETUDE D'EXISTENCE SUR CERTAINS PROBLEMES PARABOLIQUES

Hélène Rios [1]

(1) Institut de Mathématiques, Université des Sciences et Techniques du Languedoc - 34060 Montpellier.

Résumé : Etant donnés X, Y espaces vectoriels réels en dualité, $S : Y \to X$ linéaire monotone faiblement continue, $F : X \to]-\infty , +\infty]$ convexe s.c.i. propre, on établit une condition suffisante pour l'existence de $v \in Y$ tel que $v \in \partial F(-Sv)$, puis pour celle de $(c,v) \in X \times Y$ tel que $v \in \partial F(c - Sv)$, $v \in \ker(S + S^*)$ et $c \in \mathrm{im}(S + S^*)$. On propose une méthode de recherche de (c,v) par approximations successives. Enfin on applique les résultats d'existence à des problèmes d'évolution paraboliques issus de la mécanique.

Summary : Let X, Y be a dual pair of real vector spaces, $S : Y \to X$ a weakly continuous monotone linear operator, $F : X \to]-\infty , +\infty]$ a l.s.c. proper convex function ; we establish sufficient conditions for the existence of $v \in Y$ such that $v \in \partial F(-Sv)$ and for the existence of $(c,v) \in X \times Y$ such that $v \in \partial F(c - Sv)$, $v \in \ker(S + S^*)$ and $c \in \mathrm{im}(S + S^*)$. We propose an iterative method for approximating (c,v). Finally we apply our existence results to some parabolic evolution problems arising from mechanics.

I - INTRODUCTION

Soit H un espace hilbertien réel séparable et, pour tout t de l'intervalle réel [0,T], f(t,.) une fonction convexe s.c.i. propre de H dans $]-\infty , +\infty]$. Soient les deux espaces vectoriels réels traditionnellement en dualité $X = L^p(0,T;H)$ et $Y = L^q(0,T;H)$ avec $1 \leqslant p < +\infty$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Pour tout $x \in X$ on définit

$$F(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^T f(t,x(t))dt & \text{si} \quad t \to f(t,x(t)) \text{ est Lebesgue-intégrable} \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

et pour tout $y \in Y$, on note Sy la fonction

$$t \to Sy(t) = \int_0^t y(s)ds$$

Soit $\mathscr{Q}_q$ l'ensemble des applications absolument continues de [0,T] dans H à dérivée (définie presque partout sur [0,T]) dans $\mathcal{L}^q(0,T;H)$; alors u est dans $\mathscr{Q}_q$ si et seulement s'il existe v dans Y vérifiant

$$u = u(0) - Sv \tag{1}$$

Le problème d'évolution d'inconnue $u \in \mathscr{Q}_q$

$$\begin{cases} -\dfrac{du}{dt} \in \partial f(t,u(t)) \text{ pour presque tout t de } [0,T] \\ u(0) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

équivaut, sous des conditions qu'on précisera, à l'«équation intégrale»

$$v \in \partial F(-Sv)$$

où l'inconnue v est dans Y et où ∂F désigne le sous-différentiel de F dans la dualité de X et Y. On établira (§ IV, Prop. 6) que le problème d'évolution périodique d'inconnue $u \in \mathscr{Q}_q$

$$\begin{cases} -\dfrac{du}{dt} \in \partial f(t,u(t)) \text{ pour presque tout t de } [0,T] \\ u(0) = u(T) \end{cases} \tag{3}$$

se prête à une transformation semblable. En effet S, comme opérateur linéaire de Y dans X, admet pour la dualité précitée un transposé S^* ; le calcul $(S+S^*)y = Sy(T)$ pour y dans Y permet d'identifier H à l'image de $S + S^*$ et d'écrire la condition de périodicité $u(0) = u(T)$ sous la forme $(S + S^*)v = 0$ où v est défini en (1). Le problème (3) peut se ramener ainsi à chercher v dans Y et c dans X vérifiant

$$\begin{cases} v \in \partial F(c - Sv) \\ v \in \ker(S + S^*) \\ c \in \operatorname{im}(S + S^*) \end{cases}$$

Ces remarques suggèrent le développement d'un cadre formel dépassant celui des deux exemples ci-dessus : c'est l'objet des paragraphes II et III, où deux résultats d'existence sont obtenus (prop. 1 et 2) ; la section III propose en outre une technique d'approximations successives pour la résolution du problème périodique en cas d'unicité de la solution ; enfin au paragraphe IV nos résultats sont appliqués à des problèmes mécaniques : on étudie le mouvement d'un point sur une table à secousses, puis des problèmes paraboliques posés par B. Nayroles dans [16] ou [17] . Signalons qu'on les utilise encore dans [19] pour résoudre numériquement, sous des hypothèses convenables, les problèmes (2) et (3).

II - LE PROBLEME (Q)

2.1. - Formulation

Soient X et Y deux espaces vectoriels réels mis en dualité séparante par une forme bilinéaire notée $< . , . >$; tous les sous-différentiels utilisés dans ce paragraphe sont relatifs à cette dualité. La terminologie de théorie de la convexité est celle de [8] , [10] ou [14] . Soient $F : X \to]-\infty, +\infty]$ et $G : Y \to]-\infty, +\infty]$ deux fonctions convexes mutuellement polaires dans la dualité (X,Y) et soit S une application linéaire monotone (i.e $< Sy,y > \geqslant 0$ pour tout y de Y) faiblement continue de Y dans X.
On pose le problème (Q) de savoir s'il existe v dans Y vérifiant les conditions équivalentes

$$v \in \partial F(-Sv) \tag{4}$$

$$0 \in (S + \partial G)(v) \tag{5}$$

Un tel v est appelé «solution» de (Q).
Nous ramènerons (Q) à un problème de minimisation de fonctionnelle convexe. Pour des problèmes d'évolution du type signalé dans l'Introduction, qui prennent la forme (4) si S est l'opérateur d'intégration par rapport au temps, cette voie a déjà été suggérée par H. Brézis et I. Ekeland dans [3] et [4] , ainsi que par B. Nayrolles dans [16] et [17] qui y a vu un accès aux résultats d'existence. C'est ce que nous obtiendrons pour (Q), dans un théorème de minimum déduit de la théorie des perturbations au sens de [8] , [10] ou [20] .

2.2. - Formulation équivalente

Nous introduisons ici deux problèmes de minimisation équivalents à (Q). Si S^* désigne le transposé de S, on note K la forme quadratique positive ou nulle définie, pour tout y de Y, par

$$K(y) = < Sy,y > = < S^*y,y > = \frac{1}{2} < (S + S^*)y,y > .$$

Cette fonction convexe admet, pour la dualité (X,Y), une dérivée de Gâteaux en tout point y de Y égale à $(S + S^*)(y)$; elle est donc faiblement s.c.i. sur X. Définissons, pour tout y de Y, les fonctions convexes J_1 et J_2 par

$$J_1(y) = F(-Sy) + G(y) + < Sy,y >$$

$$J_2(y) = G(y) + (G + K)^*(S^*y)$$

où $(G + K)^*$ désigne la fonction polaire de G + K au sens de la dualité (X,Y).

LEMME 1. *J_1 et J_2 sont à valeurs positives ou nulles ; v est solution de (Q) si et seulement si J_1, resp. J_2, atteint en v un minimum de valeur zéro.*

Preuve. $(\forall y \in Y)(J_2(y) = (G + K)(y) + (G + K)^*(S^*y) - < S^*y,y >)$.

J_1 et J_2 sont à valeurs dans $[0,+\infty]$ d'après *l'inégalité de Fenchel.* Par définition même de ∂F, vérifier (4) équivaut à annuler $J_1(v)$. De même $J_2(v)$ est nul si et seulement si $S^*v \in \partial(G+K)(v)$; le sous-différentiel de la somme de deux fonctions convexes dont l'une est Gâteaux-différentiable est égal à la somme des sous-différentiels d'après [15] . Par suite

$$\partial(G+K)(v) = \partial G(v) + \partial K(v) = \partial G(v) + (S+S^*)v$$

et $S^*v \in \partial(G+K)(v)$ si et seulement si v vérifie (5). D'où la conclusion.

2.3. - Résultat d'existence

Soit $\mathcal{T}$ une topologie sur X compatible avec la dualité (X,Y). La proposition suivante fixe, d'après le lemme 1, une condition suffisante d'existence de solution pour (Q).

PROPOSITION 1. *S'il existe α dans* Y *tel que* $G(\alpha)$ *soit fini et* F *finie et continue en* $-S\alpha$ *pour* $\mathcal{T}$, J_2 *admet sur* Y *un minimum nul.*

Preuve. Nous nous référons ici à la théorie des perturbations exposée dans [8] ou [20] . Soit Φ la fonction convexe définie sur $Y \times X$ par

$$\Phi(y,x) = F(x-Sy) + G(y) + \langle Sy,y \rangle \ .$$

L'égalité $\Phi(y,0) = J_1(y)$ fait de Φ une fonction de perturbations pour le problème (π) consistant à minimiser J_1 sur Y, l'espace des perturbations étant X muni de $\mathcal{T}$; pour la dualité (X,Y) et les perturbations introduites, le problème dual (π^*) de (π) consiste à maximiser $-J_2$ sur Y. Par hypothèse $x \to \Phi(\alpha,x)$ est finie et continue pour $\mathcal{T}$ à l'origine de X. Alors, d'après [20] (p.41) ou [8] (p.51), (π^*) possède une solution et

$$\inf_{y\in Y} J_1(y) = \max_{y \in Y} (-J_2(y)).$$

J_1 et J_2 étant à valeurs dans $[0,+\infty]$, J_2 admet sur Y un minimum nul.

Remarque 1. Relativement aux perturbations considérées, le lagrangien L du problème (π) est défini sur $Y \times Y$ par

$$-L(y,z) = \sup_{x \in X} [\langle x,z \rangle - \Phi(y,x)] = G(z) - G(y) + \langle Sy,z-y \rangle$$

Les égalités $\sup_{z\in Y} L(y,z) = J_1(y)$ et $\inf_{y \in Y} L(y,z) = -J_2(z)$ prouvent que $v \in Y$ est solution de (Q) si et seulement si (v,v) est point selle pour la fonction selle L. Ainsi (Q) peut se voir encore comme un problème de point selle où intervient explicitement G et non F. On établit dans [19] qu'il se formule aussi sous certaines conditions comme problème de point selle où intervient explicitement F et non G.

Remarque 2. [18] et [19] offrent des démonstrations du même résultat d'existence qui se passent de référence à la théorie des perturbations.
Citons enfin une conséquence de ce résultat utile dans les applications :

COROLLAIRE. *Soit* c *un élément de* X *; s'il existe* α *dans* Y *tel que* $G(\alpha)$ *soit fini et* F *finie et continue en* $-S\alpha$ *pour* $\mathcal{T}$, *il existe* v *dans* Y *vérifiant*

$$v \in \partial F(c - Sv)$$

Preuve. Pour $(x,y) \in X \times Y$ on définit

$$F_1(x) = F(c + x) \text{ et } G_1(y) = G(y) - \langle c,y \rangle$$

F_1 et G_1 sont deux fonctions convexes mutuellement polaires dans la dualité (X,Y). Par hypothèse $G_1(\alpha)$ est fini, F_1 finie et continue en $-S\alpha$ pour $\mathcal{T}$: la proposition 1 appliquée à F_1 donne l'existence d'un élément v de Y tel que $F_1(-Sv) + G_1(v) + \langle Sv,v \rangle$ soit nul. D'où la conclusion.

III - LE PROBLEME (P)

3.1. - Présentation du problème

Soient $X, Y, \langle .\,,.\rangle$, F, G, S, $\mathcal{T}$ et K les données du paragraphe précédent. On cherche un couple (c,v) de $X \times Y$ vérifiant

$$(6) \qquad \begin{cases} v \in \partial F(c - Sv) \\ v \in \ker(S + S^*) \\ c \in \operatorname{im}(S + S^*) \end{cases}$$

Un tel couple est appelé «solution» du problème (**P**). Dans l'exemple de l'Introduction, l'image de l'opérateur auto-adjoint $B = S + S^*$ est le sous-hilbertien H de X de noyau B au sens de L. Schwartz [22]. Cette observation conduit, dans notre nouveau cadre, au

LEMME 2. *a)* $\ker B = \{ y \in Y \mid \langle Sy,y \rangle = 0 \}$

b) Si $u = B\alpha$ *et* $v = B\beta$ *décrivent* im B, *le produit scalaire*

$$(u,v) \mapsto (u \mid v) = \langle u,\beta \rangle = \langle v,\alpha \rangle$$

fait de im B *un sous-préhilbertien séparé* $\mathcal{H}$ *de* X

c) Si $\mathcal{H}$ *est hilbertien, alors*

(i) *une partie de* $\mathcal{H}$ *y est bornée si et seulement si elle l'est dans* X ;

(ii) *une suite de* $\mathcal{H}$ *converge faiblement vers* h *dans* $\mathcal{H}$ *si et seulement si elle converge faiblement vers* h *dans* X ;

(iii) im B *est faiblement fermé dans* X.

Preuve. a) K étant positive ou nulle, sa dérivée de Gâteaux Grad K(y) en y est nulle si et seulement si K atteint en y son minimum nul. Alors l'équivalence

$$y \in \ker B \Leftrightarrow \operatorname{grad} K(y) = 0 \Leftrightarrow K(y) = 0$$

permet de conclure (argumentation empruntée à S. Maury [12]).

b) Si $B\beta = B\beta'$, pour tout antécédent α de u, $B = B^*$ donne

$$< u,\beta > - < u,\beta' > = < B\alpha,\beta-\beta' > = < B\beta - B\beta',\alpha > = 0.$$

Ainsi $< u,\beta >$ (égal à $< v,\alpha >$) est fixé dès que u et v le sont : $(u,v) \mapsto (u \mid v)$ est une application, bilinéaire et symétrique. De plus

$$(B\alpha \mid B\alpha) = < B\alpha,\alpha > = 2\, K(\alpha)$$

prouve avec a) que $u \mapsto \sqrt{(u \mid u)}$ définit une norme sur imB ; l'injection continue de $\mathcal{H}$ dans X est alors fournie par l'égalité

$$< u,\beta > = (u \mid B\beta).$$

c) L'égalité ci-dessus donne (i) et (ii). Soit I un ensemble ordonné filtrant à droite et $\{Bz_i\}_{i\in I}$ une famille dans imB qui converge faiblement vers $\ell \in X$ dans X : d'après (i) elle est bornée dans $\mathcal{H}$ et admet donc une sous-famille faiblement convergente dans X (d'après (ii)) vers un élément de $\mathcal{H}$ qui ne peut être que ℓ. C.Q.F.D.

Notation. $|u|$ désigne désormais la norme préhilbertienne $\sqrt{(u \mid u)}$ de u dans $\mathcal{H}$.

3.2. - Résultat d'existence

Soit J la fonction non convexe de $X \times Y$ dans $[0,+\infty]$ définie par

$$J(x,y) = F(x - Sy) + G(y) - < x - Sy,y >$$

PROPOSITION 2. *On suppose* F *finie et continue sur* X *pour* $\mathcal{T}$. *Alors :*

a) Si G *est finie en un point d'un sous-espace vectoriel fermé* V *de* Y, *il existe* v *dans* V *tel que*

$$\inf_{(x,y)\in V^\perp \times V} J(x,y) = \inf_{x \in V^\perp} J(x,v) = 0$$

b) Si $\mathcal{H}$ *est hilbertien et* G *finie en un point de* ker B, *il existe une suite* $\{(c_n,v_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ *d'éléments de* imB × Y *vérifiant*

$$v_n \in \partial F(c_n - Sv_n) \ \textit{et} \ \lim_{n\to+\infty} |Bv_n| = 0$$

c) Sous les hypothèses b), si G *est finie sur une partie* $\mathcal{B}$ *de* Y *engendrant positivement un supplémentaire algébrique de* ker B, (**P**) *admet une solution.*

Preuve. a) Soit $W = X \mid V^{\perp}$ et Φ la surjection canonique de X sur W. On définit la forme bilinéaire $< . \mid . >$ mettant en dualité V et W par

$$\forall (x,y) \in X \times V \qquad < \Phi(x) \mid y > = < x,y >$$

V étant fermé dans Y, la topologie quotient $\mathcal{T}'$ et $\mathcal{T}$ par $V^{\perp}$ est compatible avec la dualité (W,V)(cf [2]). Soit Λ l'application linéaire Φ o S de V dans W et soit $(v,v') \in V^2$:

$$(7) \qquad < \Lambda v \mid v > = < Sv,v > \text{ et } < \Lambda v \mid v' > = < \Phi(S^*v') \mid v > .$$

Ainsi Λ est monotone, de transposé Φ o S^* dans la dualité (W,V), donc faiblement continu de V dans W. Soit alors G_1 la restriction de G à V ; sa polaire F_1 dans la dualité (W,V) est à valeurs dans $]-\infty, +\infty]$ et, pour tout $\Phi(x)$ de W,

$$F_1(\Phi(x)) = \sup_{v \in V} (< \Phi(x) \mid v > - G_1(v)) = \sup_{y \in Y} (< x,y > - (G + \psi_V)(y)).$$

V est fermé dans Y, F finie et continue sur X pour $\mathcal{T}$: d'après [14]

$$F_1(\Phi(x)) = (G + \psi_V)^*(x) = (F^* + \psi^*_{V^{\perp}})^*(x) = F \nabla \psi_{V^{\perp}} (x)$$

i.e.

$$(8) \qquad F_1(\Phi(x)) = \inf_{u \in X} (F(x-u) + \psi_{V^{\perp}} (u)) = \inf_{u \in V^{\perp}} F(x+u).$$

Par hypothèse F (et donc F_1 o Φ) est majorée au voisinage (pour $\mathcal{T}$) de tout point de X ; ainsi F_1 est convexe et majorée au voisinage (pour $\mathcal{T}'$) de tout point de W : elle est finie et continue pour $\mathcal{T}'$ sur W ; G_1 étant finie en un point de V, la proposition 1 s'applique avec les données suivantes : W et V sont les espaces en dualité, F_1 et G_1 les fonctions mutuellement polaires et Λ l'application linéaire monotone faiblement continue de V dans W ; soit donc $v \in V$ vérifiant $v \in \partial F_1(-\Lambda v)$; d'après (7) et (8),

$$G(v) + \inf_{u \in V^{\perp}} F(u-Sv) + < Sv,v > = 0.$$

J étant à valeurs dans $[0,+\infty]$ et $< u,v >$ nul pour tout u de $V^{\perp}$, le résultat cherché est obtenu.

b) On prend ici ker B comme sous-espace fermé V de Y ; vu le lemme 2,

$$V = \{ y \in Y \mid < Sy,y > = 0 \} \text{ et } V^{\perp} = \overline{\text{imB}^*} = \text{imB}$$

D'après a), on peut trouver v dans ker B et une suite $\{ c_n \}_{n \in \mathbb{N}}$ dans ImB tels que $\{ J(c_n,v) \}_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers zéro dans $\mathbb{R}$. Les hypothèses sur F et G donnent, avec le corollaire de la proposition 1, l'existence, pour tout n, de v_n dans Y vérifiant $v_n \in \partial F(c_n - Sv_n)$, i.e

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ (A_n = F(c_n - Sv_n) + G(v_n) - < c_n - Sv_n, v_n > = 0).$$

Le couple (c_n,v) étant dans $V^\perp \times V$, (c_n,v) et $< Sv,v_n > + < Sv_n,v >$ sont nuls. Alors $A_n + J(c_n,v)$ s'écrit

$$[F(c_n - Sv_n) + G(v) - < c_n - Sv_n, v >] + [F(c_n - Sv) + G(v_n) - < c_n - Sv, v_n >] + < Sv_n, v_n > .$$

Cette somme de trois termes positifs ou nuls tend vers zéro si n tend vers l'infini, donc aussi chacun des trois termes. On conclut avec :

$$\lim_{n \to +\infty} < Sv_n, v_n > = \lim_{n \to +\infty} (Bv_n \mid Bv_n) = \lim_{n \to +\infty} | Bv_n | = 0.$$

c) La suite $\{ c_n \}_{n \in \mathbb{N}}$ et v ayant été définis en b), l'inégalité de Fenchel donne pour tout n de $\mathbb{N}$ et tout z de $\mathscr{B}$

$$< c_n, z > \leqslant F(c_n - Sv) + G(z) + < Sv, z >$$

Par construction, $\lim_{n \to +\infty} J(c_n,v) = \lim_{n \to +\infty} (F(c_n - Sv) + G(v)) = 0.$

La suite $\{ F(c_n - Sv) \}_{n \in \mathbb{N}}$ est donc majorée ainsi que $\{ < c_n, z > \}_{n \in \mathbb{N}}$ pour tout z de $\mathscr{B}$; l'hypothèse sur $\mathscr{B}$ donne alors que $\{ < c_n, y > \}_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée pour tout y de Y, d'où $\{ c_n \}_{n \in \mathbb{N}}$ bornée dans X ; vu le lemme 2, elle l'est aussi dans $\mathcal{H}$ et admet donc une sous-suite (toujours notée $\{ c_n \}_{n \in \mathbb{N}}$) faiblement convergente dans $\mathcal{H}$ (donc dans X) vers $c \in \mathcal{H}$; F étant s.c.i. sur X,

$$0 = \lim_{n \to +\infty} \inf J(c_n,v) \geqslant F(c - Sv) + G(v)$$

et $J(c,v)$ est nul d'après l'inégalité de Fenchel : (c,v) vérifie (6).

3.3. - Résolution de (P) par la méthode des approximations successives

On reste ici sous les hypothèses d'existence de la partie c) de la proposition 2. Ainsi $\mathcal{H}$ est hilbertien et (P) admet une solution.

Soit C l'ensemble des éléments c de $\mathcal{H}$ tels qu'il existe v dans Y vérifiant : (c,v) est solution de (P).

Soit φ la multi-application de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}$ définie par :

$$\forall c \in \mathcal{H} \qquad \varphi(c) = \{ x \mid x = c - Bv,\ v \in \partial F(c - Sv) \}.$$

LEMME 3. *φ est une application univoque partout définie sur $\mathcal{H}$. C'est une contraction de $\mathcal{H}$ dont l'ensemble des points fixes est* C.

Preuve. Sous nos hypothèses, d'après le corollaire de la proposition 1 (§ II), $\varphi(c)$ est non vide pour tout c de $\mathcal{H}$; pour $(c,d) \in \mathcal{H}^2$ soit :

$$v \in \partial F(c-Sv) \text{ et } w \in \partial F(d-Sw)$$

$$\gamma = c - Bv \quad \text{ et } \delta = d - Bw$$

Alors $|\gamma - \delta|^2 = |c-d|^2 + 2(c-d \mid Bw-Bv) + |Bw-Bv|^2$

i.e $\quad |\gamma - \delta|^2 = |c-d|^2 - 2 < c - Sv - (d-Sw), v-w > .$

Par monotonie de ∂F, $v \in \partial F(c-Sv)$ et $w \in \partial F(d-Sw)$ donnent :

$$|\gamma - \delta|^2 \leqslant |c-d|^2$$

On déduit du cas c = d que φ est une application univoque ; c'est bien une contraction d'après l'inégalité écrite et la fin du lemme est triviale par définition de φ et (**P**). C.Q.F.D.

Les éléments de C sont donc les points fixes d'une contraction a priori non stricte. On va voir qu'une technique d'itération permet d'approcher faiblement un élément de C grâce à *l'existence déjà connue* d'une solution pour (**P**).

Soit $c_o \in \mathcal{H}$ et $j \in \mathbb{N}^*$; posons :

$$c_j = \varphi^j(c_o) \qquad \overline{c_j} = \frac{c_o + c_1 + \ldots + c_{j-1}}{j}$$

$$v_j \in \partial F(c_j - Sv_j) \qquad \overline{v_j} = \frac{v_o + v_1 + \ldots + v_{j-1}}{j}$$

Le lemme suivant généralise un résultat exposé par B. Lemaire dans [11] :

PROPOSITION 3.

a) *Soit* $m \in \mathbb{N}^*$; *si* $\varphi^m(c_o) = c_o$, $(\overline{c_m},\overline{v_m})$ *est solution de* (**P**).

b) *La suite* $\{\overline{c_j}\}_{j\in\mathbb{N}^*}$ *converge faiblement dans* $\mathcal{H}$ *vers l'élément* $\overline{c}$ *de* C *limite forte dans* $\mathcal{H}$ *de la projection sur* C *des* c_j ; $\{\overline{v_j}\}_{j\in\mathbb{N}^*}$ *a une valeur d'adhérence* $\overline{v}$ *et* $(\overline{c},\overline{v})$ *est solution de* (**P**).

Preuve. a) Soit $j \in \mathbb{N}$; $c_{j+1} = \varphi(c_j) = c_j - B\, v_j$ donne

$$< c_j - Sv_j, v_j > \; = \; < c_j, v_j > - \frac{1}{2} < Bv_j, v_j > = (c_j \mid Bv_j) - \frac{1}{2} |Bv_j|^2$$

$$< c_j - Sv_j, v_j > \; = (c_j \mid c_j - c_{j+1}) - \frac{1}{2} |c_j - c_{j+1}|^2 = \frac{1}{2}(|c_j|^2 - |c_{j+1}|^2)$$

Alors $v_j \in \partial F(c_j - Sv_j)$ s'écrit :

$$F(c_j - Sv_j) + G(v_j) + \frac{1}{2}(|c_{j+1}|^2 - |c_j|^2) = 0 \tag{9}$$

En sommant de j = 0 à j = m−1 on trouve

$$\sum_{j=0}^{m-1}(F(c_j-Sv_j)+G(v_j))+\frac{1}{2}(|c_m|^2-|c_o|^2)=0$$

Par suite l'hypothèse $c_m = c_o$ donne :

$$\sum_{j=0}^{m-1}(F(c_j-Sv_j)+G(v_j))=0$$

$$B\bar{v}_m=\frac{1}{m}(Bv_o+\ldots+Bv_{m-1})=\frac{1}{m}\sum_{j=0}^{m-1}(c_j-c_{j+1})=\frac{c_o-c_m}{m}=0$$

et $<\bar{c}_m-S\bar{v}_m,\bar{v}_m>=(\bar{c}_m\,|\,B\bar{v}_m)-\frac{1}{2}|B\bar{v}_m|^2=0.$

Alors, par convexité de F et G,

$$F(\bar{c}_m-S\bar{v}_m)+G(\bar{v}_m)\leqslant\frac{1}{m}\left(\sum_{j=0}^{m-1}(F(c_j-Sv_j)+G(v_j))\right)\leqslant 0$$

i.e

$$F(\bar{c}_m-S\bar{v}_m)+G(\bar{v}_m)-<\bar{c}_m-S\bar{v}_m,\bar{v}_m>=0$$

d'après l'inégalité de Fenchel. En résumé : $\left\{\begin{array}{l}\bar{v}_m\in\partial F(\bar{c}_m-S\bar{v}_m)\\ \bar{v}_m\in\ker(S+S^*)\\ \bar{c}_m\in\mathrm{im}(S+S^*)\end{array}\right.$

b) On sait que (**P**) admet une solution, donc que C est non vide ; soit $d\in C$; d'après le lemme 3, c'est un point fixe de la contraction φ. L'inégalité $|\varphi(c_o)-d|\leqslant|c_o-d|$ prouve que la restriction de φ à la boule $\mathscr{B}_d$ de centre d et de rayon $|c_o-d|$ est une contraction de $\mathscr{B}_d$ dans elle-même. La suite $\{\bar{c}_j\}$ converge alors faiblement dans $\mathcal{H}$ d'après [1] vers la limite forte c dans $\mathcal{H}$ de la projection des c_j sur le convexe fermé C de $\mathcal{H}$.

Par hypothèse (Prop. 2, c)) G(0) est fini et l'inégalité de Fenchel donne

$$F(\bar{c}_j-S\bar{v}_j)\geqslant -G(0)$$

Par convexité de F et G on déduit de (9) pour tout j de $\mathbb{N}^*$:

(10) $$F(\bar{c}_j-S\bar{v}_j)+G(\bar{v}_j)\leqslant\frac{1}{2j}(|c_o|^2-|c_j|^2)$$

et donc $$G(\bar{v}_j)\leqslant\frac{1}{2j}(|c_o|^2-|c_j|^2)+G(0)$$

Les c_j restant dans $\mathscr{B}_d$,

(11) $$\lim_{j\to+\infty}\frac{1}{2j}(|c_o|^2-|c_j|^2)=0$$

Alors il existe un λ réel tel que la tranche $\mathscr{S}_\lambda = \{y \in Y \mid G(y) \leqslant \lambda\}$ contienne tous les $\bar{v}_j$; mais F est continue sur X, d'où G faiblement inf-compacte sur Y (cf. [14]) et $\mathscr{S}_\lambda$ faiblement compacte dans Y. Ainsi $\{\bar{v}_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ possède une valeur d'adhérence faible $\bar{v}$. Par des calculs déjà rencontrés : $B\bar{v}_j = \dfrac{c_o - c_j}{j}$. Les c_j restant dans $\mathscr{B}_d$, $\lim\limits_{j \to +\infty} |B\bar{v}_j| = 0$. La semi-continuité inférieure faible de la norme hilbertienne et le lemme 2 donnent alors :

$$|B\bar{v}| \leqslant \liminf_{j \to +\infty} |B\bar{v}_j| \leqslant 0 \quad \text{i.e} \quad |B\bar{v}| = 0 \text{ ou } \bar{v} \in \ker(S+S^*).$$

Enfin, F et G étant s.c.i., on déduit de (10) et (11)

$$F(\bar{c} - S\bar{v}) + G(\bar{v}) \leqslant \liminf_{j \to +\infty} [F(\bar{c}_j - S\bar{v}_j) + G(\bar{v}_j)] \leqslant 0$$

et l'inégalité de Fenchel permet de conclure : $(\bar{c}, \bar{v})$ est solution de **(P)**. C.Q.F.D.

IV - APPLICATIONS A LA MECANIQUE

4.1. - Problème de la table à secousses

Dans tout ce paragraphe, $@_T$ désigne l'ensemble des applications absolument continues de [0,T] dans $\mathbb{R}^3$. Ces applications sont dérivables presque partout sur [0,T].

Etudions le mouvement d'un point M de masse m reposant, avec un frottement régi par la loi de Coulomb, sur un plan horizontal (π) animé d'un mouvement de translation connu. La position de (π) est déterminée à chaque instant par celle d'un de ses points A. Notons

$\mathscr{R} = (0,x,y,z)$	un repère orthonormé fixé dans $\mathbb{R}^3$
. et $\lvert . \rvert$	le produit scalaire et la norme traditionnels de $\mathbb{R}^3$
v	le vecteur vitesse de M par rapport à (π)
R_T et γ_T	les composantes tangentielles respectives de la réaction R de (π) sur M et de l'accélération γ de A par rapport à $\mathscr{R}$
R_z et γ_z	les coordonnées respectives sur Oz de R et γ.

Si (π) est parallèle à (0,x,y) et si (0,0,–g) est l'accélération de la pesanteur, le principe fondamental de la dynamique s'écrit pour le point M :

$$\left\{\begin{aligned} & R_T = m\left(\frac{dv}{dt} + \gamma_T\right) \\ & R_z - mg = m\,\gamma_z \end{aligned}\right.$$

On supposera $\gamma_z(t)$ supérieur ou égal à $-g$ pour tout t de manière à respecter l'unilatéralité du contact entre le point M et la table. La loi de Coulomb introduit un coefficient de frottement positif k et se met sous la forme

$$-R_T(t) \in \partial\varphi(t,v(t))$$

où pour tout (t,h) de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3$

$$\varphi(t,h) = k\, R_z\, |h| = k\, m(g+\gamma_z(t))\, |h|.$$

Soit alors $u = m\, v$ et $f(t,h) = m\, h \,.\, \gamma_T(t) + \varphi(t,h)$; la fonction u vérifie

$$(12) \qquad -\dot{u}(t) \in \partial f(t,u(t))$$

On pose ici deux problèmes familiers :

(i) Problème de Cauchy. Soit u(0) fixé dans $\mathbb{R}^3$. Existe-t-il, sur un intervalle réel [0,T], un élément u de $@_T$ de dérivée dans $\mathcal{L}^\infty(0,T;\mathbb{R}^3)$ et vérifiant (12) presque partout ?

(ii) Problème périodique. Si le mouvement de (π) est T-périodique (alors γ est T-périodique), existe-t-il une application T-périodique u absolument continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}^3$ de dérivée dans $\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}_+;\mathbb{R}^3)$ vérifiant (12) presque partout sur $\mathbb{R}_+$?

PROPOSITION 4. *Si γ est un élément de* $\mathcal{L}^\infty(0,T;\mathbb{R}^3)$

1) le problème de Cauchy admet une solution ;

2) s'il existe a *dans* $\mathbb{R}_+^*$ *tel que* $|\gamma_T(t)| \leqslant k(g+\gamma_z(t)) - a$ *presque tout t de* [0,T], *le problème périodique admet une solution.*

Preuve. Posons $X = L^1(0,T;\mathbb{R}^3)$ et $Y = L^\infty(0,T;\mathbb{R}^3)$. Par définition de f, la fonction $F : x \mapsto \int_0^T f(t,x(t))dt$ est convexe et finie sur tout X, donc continue sur X pour sa topologie de Banach. Il résulte alors de [21] qu'un élément u de $@_T$ vérifie (12) presque partout sur [0,T] si et seulement si

$$(13) \qquad -\dot{u} \in \partial F(u(0)+S\dot{u})$$

où S désigne l'opérateur d'intégration par rapport au temps sur Y (cf. I) et où le sous-différentiel de F est pris dans la dualité traditionnelle liant X et Y (notée $<.,.>$). Une intégration par parties élémentaire (cf. Lemme 4) permet d'établir que S admet un transposé S* dans cette dualité et que,

$$(14) \qquad <Sy,y> = \frac{1}{2}\,|Sy(T)|^2 \quad \text{et} \quad (S+S^*)y = Sy(T)$$

pour $y \in Y$. De ce fait S est un opérateur linéaire monotone faiblement continu de Y dans X et la partie 1) de la proposition 4 est une conséquence immédiate du corollaire de la proposition 1.

Etablissons la partie 2). Si u est dans $@_T$, $u(T) - u(0) = S\dot{u}(T)$ et la condition de périodicité sur u est d'après (14) une condition sur $\dot{u}$ d'appartenance au noyau de $S+S^*$. Au total le problème périodique admet une solution si et seulement si on peut trouver $\dot{u}$ dans $\ker(S+S^*)$ et u(0) dans $\mathrm{im}(S+S^*)$ vérifiant (13). On reconnait le problème (P) étudié en III.

Soit D(t) la boule fermée de $\mathbb{R}^3$ de centre m $\gamma_T(t)$ et de rayon km $(g + \gamma_z(t))$ et soit $\psi_{D(t)}$ sa fonction indicatrice ; pour (t,h) dans $[0,T] \times \mathbb{R}^3$

$$f^*(t,h) = \sup_{h' \in \mathbb{R}^3} \left\{ h.h' - f(t,h') \right\} = \psi_{D(t)}(h). \tag{15}$$

Pour $y \in Y$ soit

$$G(y) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^T f^*(t,y(t))dt & \text{si } t \mapsto f^*(t,y(t)) \text{ est Lebesgue-intégrable} \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

D'après [21] , F et G sont mutuellement polaires. Sous l'hypothèse 2), la sphère C centrée à l'origine de $\mathbb{R}^3$ et de rayon m a est contenue dans D(t) pour presque tout t de [0,T] et d'après (15) G est nulle sur l'ensemble $\hat{C}$ des applications constantes de Y à valeurs dans C. La décomposition $y = (y - \frac{1}{T} Sy(T)) + \frac{1}{T} Sy(T)$ permet avec (14) d'écrire : $Y = \mathrm{im}(S+S^*) \oplus \ker(S+S^*)$. Ainsi G est finie sur la partie $\hat{C}$ de Y qui engendre positivement un supplémentaire algébrique $(\mathrm{im}(S+S^*))$ du noyau de $S+S^*$ et 2) est une application de la proposition 2 c).

Remarque. En cas d'unicité de la solution u du problème périodique, la proposition 3 fournit un moyen d'approximation de u. Un tel cas a été étudié et résolu explicitement par S. Maury dans [13] , quand le mouvement de translation de la table est horizontal. On voit apparaître là que les solutions du problème périodique peuvent être assez hétéroclites, nulles sur certains intervalles de temps durant lesquels le point suit sans glissement le mouvement de la table.

4.2. - Un problème d'élastoplasticité

Pour une classe de systèmes mécaniques élastoplastiques, B. Nayroles [16] , [17] a donné une caractérisation des solutions de problèmes d'évolution par la minimisation de fonctionnelles convexes et en a tiré des démonstrations d'existence dans le cadre d'espaces L^p, $p > 1$. Nous ramenons ici ces mêmes problèmes aux formes (4) et (6) pour tirer des propositions 1 et 2 des démonstrations d'existence valables encore pour $p = 1$.

4.2.1. - Le problème mécanique

Nous reprenons avec quelques changements de notations la formulation de B. Nayroles [17] . A chaque état du système correspondent des valeurs, dans un espace de Hilbert H, des variables e, k et ϵ appelées respectivement *déformation élastique, déformation plastique* et *déformation totale* du système. Par hypothèse

$$\epsilon = e + k.$$

Par une loi d'élasticité linéaire, e se relie à chaque instant au champ de contraintes u (à valeurs dans H) du système ; la structure hilbertienne de H a été construite pour que cette loi s'écrive :

$$e = u.$$

Enfin, la déformation plastique k obéit à une loi non linéaire du type de Norton-Hoff (cf. [7] , [9]) formulée comme suit : la vitesse de déformation plastique $\dot{k} \in L^q_{loc}(R,H)$ est pour presque tout t reliée à la contrainte u par

$$\dot{k}(t) \in \partial f(t,u(t))$$

où f_t est pour tout t une fonction convexe propre de H dans $\overline{\mathbb{R}}$.
La description du système mécanique implique enfin la spécification de deux sous-espaces supplémentaires orthogonaux dans H

- I ensemble des contraintes autoéquilibrées ;
- I' ensemble des déformations virtuelles compatibles avec les liaisons.

La donnée d'un problème d'évolution consiste en deux fonctions $t \mapsto \epsilon^o(t) \in H$ exprimant une information sur les déplacements imposés à certains éléments du sytème, et $t \mapsto u^o(t)$ exprimant une information sur les charges (de façon précise (ϵ^o, u^o) constitue la solution du problème linéaire d'équilibre élastique correspondant à ces déplacements et ces charges donnés). A chaque instant t, $\epsilon - \epsilon^o$ (resp. $u - u^o$) prend ses valeurs dans I' (resp. I) ; cette condition s'écrit

$$\epsilon_I(t) = \epsilon^o_I(t) \text{ et } u_{I'}(t) = u^o_{I'}(t)$$

si h_I et $h_{I'}$ désignent les projections respectives sur I et I' d'un élément h de H. Si k est une application absolument continue de [0, T] dans H, les différentes relations écrites se résument en posant $\dot{k} = v$ dans le système

$$(c_1) \qquad u_I(t) + \int_0^t v_I(s)ds + k_I(0) = \epsilon^o_I(t)$$

$$(c_2) \qquad u_{I'}(t) = u^o_{I'}(t)$$

$$(c_3) \qquad f(t,u(t)) + f^*(t,v(t)) - u(t) \,.\, v(t) = 0$$

pour lequel on pose encore deux problème familiers :

1) Problème de Cauchy : on se donne la condition initiale k(0) et on cherche des fonctions v et u sur un intervalle [0,T] vérifiant (c_1), (c_2), (c_3) presque partout.

2) Problème périodique : les données u^o, f, f* sont T-périodiques, tandis que ϵ^o est de la forme

$$\epsilon^o(t) = \varphi^o(t) + \gamma t$$

où γ est une constante de H et où φ^0 est T-périodique (une fonction g de $\mathbb{R}$ dans un ensemble E est dite T-périodique si, pour presque tout t de $\mathbb{R}$, $g(t+T) = g(t)$). On cherche une constante $k(0)$ de H et des fonctions u et v T-périodiques vérifiant (c_1), (c_2), (c_3) presque partout sur $\mathbb{R}_+$. Notons que si $k(0) \in H$ et v T-périodique sont fixés, la fonction u définie par (c_1) et (c_2) est T-périodique si et seulement si

$$\frac{1}{T}\int_0^T v_I(s)ds = \gamma_I. \tag{16}$$

Un même cadre fonctionnel va nous permettre de donner un résultat d'existence pour chacun des deux problèmes posés :

4.2.2. - Le cadre fonctionnel

On reprend ici les notations $X = L^p(0,T;H)$, $Y = L^q(0,T;H)$ et F posées dans l'Introduction ; on note $< x,y > = \int_0^T x(t) \,.\, y(t)dt$ le produit de dualité de deux éléments x et y de X et Y ; si $\mathscr{T}_1$ désigne la tribu des parties Lebesgue-mesurables de $[0,T]$ et $\mathscr{T}_2$ celle des boréliens de H, on suppose en outre que f est un intégrande convexe normal au sens de Rockafellar [21] sur $[0,T] \times H$ muni de la tribu produit $\mathscr{T}_1 \times \mathscr{T}_2$. On définit enfin, pour y dans Y

$$G(y) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^T f^*(t,y(t))dt & \text{si } t \mapsto f^*(t,y(t)) \text{ est Lebesgue-intégrable} \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

et la fonction $Sy : t \to \int_0^t y_I(s)ds$. L'opérateur S de Y dans X a quelques propriétés utiles résumées ci-dessous :

LEMME 4. *a) Pour tout* y *de* Y

$$S^*y = -Sy + Sy(T) \quad \textit{et} \quad < Sy,y > = \frac{1}{2} \, \| Sy(T) \|_H^2$$

b) si $B = S+S^*$, *l'application* $(B\alpha,B\beta) \to (B\alpha \mid B\beta) = < B\alpha,\beta >$ *confère à* im B *une structure hilbertienne.*

Preuve. a) Par hypothèse I est fermé dans H, donc Sy à valeurs dans I. Notant que, pour tout (y,z) de Y^2,

$$<Sy,z> = \int_0^T Sy(t) \,.\, z(t)dt = \int_0^T Sy(t) \,.\, z_I(t)dt$$

on trouve par intégration par parties

$$<Sy,z> = Sy(T) \,.\, Sz(T) - < y_I,Sz > = <y,Sz(T)> - <y,Sz> .$$

D'où le résultat.

b) D'après a), pour tout (y,z) de Y^2,

$$By = Sy(T) \text{ et } (By \mid Bz) = \langle By,z \rangle = Sy(T) \,.\, Sz(T).$$

Par suite im B n'est autre que I et l'application $(u,v) \to (u \mid v)$ de I^2 dans $\mathbb{R}$ (déjà étudiée au § III, Lemme 2) s'identifie ici au produit scalaire hilbertien de I induit par celui de H. Comme sous-espace fermé de H, I est bien hilbertien. C.Q.F.D.

Il résulte notamment du Lemme 4 que S est un opérateur linéaire monotone faiblement continu de Y dans X.

4.2.3. - Problème de Cauchy

Pour k(0) fixé dans H, ϵ^o et u^o fixés dans X, existe-t-il u dans X et v dans Y vérifiant (c_1), (c_2), (c_3) presque partout sur [0,T] ? La question prend une forme connue si on pose $c = \epsilon^o_I + u^o_{I'} - k_I(0)$ et on sait affirmer, si $\mathcal{T}$ désigne la topologie de Banach de X,

PROPOSITION 5. *S'il existe* $\alpha \in Y$ *tel que* $G(\alpha)$ *soit fini et* F *finie et continue en* $c - S\alpha$ *pour* $\mathcal{T}$*, le problème de Cauchy admet une solution.*

Preuve. D'après [21] , nos hypothèses font de F et G deux fonctions mutuellement polaires dans la dualité (X,Y) et (c_3) équivaut à $v \in \partial F(u)$. Mais (c_1) et (c_2) se résument en $u + Sv = c$ et le problème posé est celui de l'existence d'un v de Y vérifiant $v \in \partial F(c - Sv)$; ainsi la proposition 5 n'est plus qu'un énoncé du corollaire de la proposition 1 (§ II).

Remarque 1. Nos hypothèses sont plus faibles que celles de B. Nayroles qui supposait aussi G continue en α pour la topologie de Banach de Y ; il est connu que cela restreint l'étude au cas $1 < p < +\infty$ (cf. [6]).

Remarque 2. Soit $p > \eta > 0$; $\eta \geqslant \dfrac{p}{p-r}$; $a \in \mathcal{L}^\eta(0,T;\, \mathbb{R})$; $b \in \mathcal{L}^1(0,T;\, \mathbb{R})$. Si f vérifie, pour presque tout t de [0,T] et pour tout h de H

$$f(t,h) \leqslant a(t) \, \| h \|^r_H + b(t)$$

alors F est finie et continue sur X, donc G finie en un point au moins de Y et le problème de Cauchy a une solution.

Remarque 3. Si c est la fonction constamment nulle sur [0,T] , le cas $I' = \{0\}$ redonne le problème de Cauchy de l'Introduction :

$$\begin{cases} -\dot{u}(t) \in \partial f(t,u(t)) \text{ p.p sur } [0,T] \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

4.2.4. - Problème périodique

La présentation du problème périodique faite en 4.2.1. nous conduit à le poser de la façon suivante dans notre cadre fonctionnel : existe-t-il, pour γ_I fixé dans I, ϵ^o et u^o fixés dans X, u dans X et v dans Y vérifiant, outre les conditions (c_1), (c_2), (c_3) presque partout sur $[0,T]$, la condition (16) «de périodicité» ? Transformons un peu ce problème. D'après le lemme 4, la condition de périodicité s'écrit

$$(c_4) \qquad Bv = T\gamma_I$$

Soit $b = \epsilon^o_I + u^o_I, - S\gamma_I$; on définit les fonctions convexes F_1 et G_1 sur X et Y respectivement par

$$F_1(x) = F(x+b) - < x,\gamma_I >$$
$$G_1(y) = F_1(y) = G(y+\gamma_I) - < b,y+\gamma_I > .$$

Notons $\hat{I}$ l'espace des fonctions constantes de Y à valeurs dans I, muni de la topologie induite par celle de Y ; le changement de fonction inconnue $w = v - \gamma_I$ conduit à la

PROPOSITION 6. *On suppose* F *finie et continue sur tout* X *et* G *finie en un point de* Y *vérifiant* (c_4). *Alors*

a) F_1 *et* G_1 *sont mutuellement polaires ; le problème périodique a une solution si et seulement s'il existe* $w \in \ker B$ *et* $c \in \mathrm{im}\, B$ *tels que*

$$w \in \partial F_1(c - Sw)$$

b) il existe une suite $\{(c_n,v_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ *d'éléments de* $X \times Y$ *telle que*

$$v_n(t) \in \partial f(t,c_n(t) - Sv_n(t)) \text{ p.p. } \textit{et} \lim_{n\to+\infty} |Sv_n(T) - T\gamma_I| = 0$$

c) si en outre la restriction de G *à* $\hat{I}$ *est finie et continue en* γ_I, *le problème périodique a une solution.*

Preuve. a) $v \in Y$ vérifie (c_4) si et seulement si $v - \gamma_I$ est dans ker B. (c_1) et (c_2) équivalent par définition de b et w à $u = - Sw + b - k_I(0)$. Sous nos hypothèses, d'après [21], F et G sont mutuellement polaires (de même que F_1 et G_1) et (c_3) peut s'écrire :

$$F(u) + G(w+\gamma_I) - < u,w+\gamma_I > = 0.$$

Ainsi (c_1), (c_2), (c_3), (c_4) se résument en

$$\begin{cases} u = - k_I(0) - Sw + b \\ w \in \ker B \\ F_1(- k_I(0) - Sw) + G_1(w) + < k_I(0) + Sw,w > = 0 \end{cases}$$

D'après le Lemme 4, im B n'est autre que I et donc a) est démontré. On retrouve ainsi le problème (P) étudié au paragraphe III.

b) Ici, d'après le Lemme 4 b), les résultats de la proposition 2 b), s'appliquent avec les données X, Y, F_1, G_1, S et $\mathcal{T}$ définies au paragraphe 4.2.2.
Ainsi il existe une suite $\{(b_n,w_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $I \times Y$ vérifiant $w_n \in \partial F_1(b_n - Sw_n)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \| B\, w_n \|_H = 0$.
Alors $c_n = b_n + b$ et $v_n = w_n + \gamma_I$ remplissent les conditions annoncées.

c) Pour tout y de Y la décomposition

$$y = (y - \frac{1}{T} By) + \frac{1}{T} By \quad \text{avec} \quad B(y - \frac{1}{T} By) = 0$$

prouve que $\hat{I}$ est un supplémentaire algébrique de ker B. Alors l'hypothèse sur G faite en c) signifie que G_1 est finie sur une partie de Y engendrant positivement un supplémentaire algébrique de ker B. D'après la proposition 2 c), il existe w dans ker B et c dans im B vérifiant $w \in \partial F_1(c - Sw)$; la partie a) de cette proposition 6 permet alors de conclure.

Remarque 1. Si $t \to f^*(t,h)$ est définie et constante pour tout h de H et si la restriction de $h \to f^*(t,h)$ à I est continue en γ_I, l'hypothèse sur G faite en c) est réalisée.

Remarque 2. Soit I = H, $\varphi \in Y$, $\gamma_I = \frac{1}{T} S\varphi(T)$ et $\epsilon^0 = S\varphi$. Le problème périodique s'écrit avec ces données : existe-t-il u dans $@_q$ (cf. I) vérifiant

$$\begin{cases} \varphi(t) \in u(t) + \partial f(t,u(t)) & \text{p.p. sur } [0,T] \\ u(0) = u(T) \end{cases}$$

Pour de tels problèmes, H. Brézis et A. Haraux ont établi dans [5] , si p = q = 2 et si $t \mapsto f(t,h)$ ne dépend pas de t quand elle est définie, un résultat d'existence n'exigeant pas de F d'être finie sur tout X, ni même continue en un point de X, sous l'hypothèse que $h \mapsto f^*(h)$ est finie et continue en γ_I. Les hypothèses de la proposition 6 sont donc dans ce cas particulier beaucoup trop fortes.

Remarque 3. Citons une loi particulière de type Norton-Hoff pour laquelle le problème périodique a une solution quelles que soient les données T, I, I', ϵ^0, u^0 et γ_I. Plus précisément, soit

$$1 < p < +\infty\,, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\,, \quad 0 < \rho_1 \leqslant \rho_2$$

et C une multiapplication mesurable (cf. [21]) à valeurs convexes fermées de $\mathbb{R}_+$ dans H telle que, pour presque tout t de $\mathbb{R}_+$

$$B(0, \rho_1) \subset C(t) \subset B(0, \rho_2)$$

Le polaire $C^o(t)$ de $C(t)$ défini par

$$C^o(t) = \{ h \in H \mid \forall\, k \in C(t) \quad k.h \leqslant 1 \}$$

vérifie, pour presque tout t de R_+

$$B(0, \frac{1}{\rho_2}) \subset C^o(t) \subset B(0, \frac{1}{\rho_1}) .$$

Les jauges $j_{C(t)}$ $(h \to \inf \{ \lambda > 0 \mid h \in \lambda\, C(t) \})$ et $j_{C^o(t)}$ sont deux fonctions convexes conjuguées sur H qui permettent de définir les deux intégrandes convexes normaux conjugués :

$$f(t,.) = \frac{1}{p}\, j^q_{C(t)} \quad \text{et} \quad f^*(t,.) = \frac{1}{q}\, j^q_{C^o(t)} \cdot$$

Un tel f définit bien une loi de Norton-Hoff. Les inclusions vérifiées par $C(t)$ et $C^o(t)$ donnent pour presque tout t de $\mathbb{R}_+$ et tout h de H

$$\frac{1}{p} \| \rho_1 h \|^p \leqslant f(t,h) \leqslant \frac{1}{p} \| \rho_2 h \|^p$$

$$\frac{1}{q} \| \frac{h}{\rho_2} \|^q \leqslant f^*(t,h) \leqslant \frac{1}{q} \| \frac{h}{\rho_1} \|^q$$

La fonctionnelle intégrale F (resp. G) associée à f (resp. g) est alors continue sur tout X (resp. Y) pour tout T de $\mathbb{R}_+$ et la proposition 6 s'applique quelles que soient les données l, l', ϵ^o, u^o, γ_l. Cet exemple est déjà cité par B. Nayroles dans [16] comme un cas typique d'utilisation de ses résultats, ainsi que par A. Friaa dans [9] .

REFERENCES

[1] J.B. BAILLON. *«Un théorème de type ergodique pour les contractions non linéaires dans un espace de Hilbert».* C.R. Acad. Sc. Paris, Série A, 280 (1975), p. 1511.

[2] N. BOURBAKI. E.V.T., livre V, Chapitres 3, 4, 5.

[3] H. BREZIS et I. EKELAND. *«Un principe variationnel associé à certaines équations paraboliques. Le cas indépendant du temps».* C.R. Acad. Sc. Paris, Série A, 282 (1976), p. 971.

[4] H. BREZIS et I. EKELAND. *«Un principe variationnel associé à certaines équations paraboliques. Le cas dépendant du temps».* C.R. Acad. Sc. Paris, Série A, 282 (1976), p. 1197.

[5] H. BREZIS et A. HARAUX. *«Image d'une somme d'opérateurs monotones et applications».* Israël Journal of Mathematics, Vol. 23, n^o 2, 1976.

[6] A. BROENSTED et R.T. ROCKAFELLAR. *«On the subdifferentiability of convex functions».* Proc. Amer. Math. Soc. 16 (1965), p. 605-611.

[7] M. DAIGNIERES, M. FREMOND et A. FRIAA. *«Essai d'un modèle du type Norton-Hoff généralisé pour l'étude de la collision himalayenne (aspect cinématique)».* C.R. Acad. Sc. Paris, Série B, 286 (1978), p. 371.

[8] I. EKELAND et R. TEMAM. *«Analyse convexe et problème variationnels».* Dunod, Paris, 1973.

[9] A. FRIAA. *«Le matériau de Norton–Hoff généralisé et ses applications en Analyse limite».* C.R. Acad. Sc. Paris, Série A, 286 (1978), p. 953.

[10] P.J. LAURENT. *«Approximation et optimisation».* Hermann, Paris, 1972.

[11] B. LEMAIRE. *«Approximations successives pour certains problèmes périodiques».* Séminaire d'Analyse Convexe, Montpellier 1977, Exposé n^o 21.

[12] S. MAURY. *«Formes quadratiques positives généralisées».* C.R. Acad. Sc. Paris, Série A, 271 (1970), p. 1054-1057.

[13] S. MAURY. *«Un exemple de relation monotone entre force et vitesse qui n'est pas du type «sous-différentiel».* Séminaire d'Analyse Convexe, Montpellier 1974, Exposé n^o 10.

[14] J.J. MOREAU. *«Fonctionnelles convexes».* Séminaire sur les Equations aux Dérivées Partielles, Collège de France, 1966-1967.

[15] J.J. MOREAU. *«Un cas d'addition des sous-différentiels».* Séminaire d'Analyse Unilatérale, Montpellier 1969, Vol. 2, Exposé n^o 3.

[16] B. NAYROLES. *«Un théorème de minimum pour certains systèmes dissipatifs ; variante hilbertienne».* Séminaire d'Analyse Convexe, Montpellier 1976, Exposé n^o 2.

[17] B. NAYROLES. *«Deux théorèmes de minimum pour certains systèmes dissipatifs».* C.R. Acad. Sc. Paris, Série A, 282 (1976), p. 1035.

[18] H. RIOS. *«Etude de la question d'existence pour certains problèmes d'évolution par minimisation d'une fonctionnelle convexe»*. C.R. Acad. Sc. Paris, Série A, 183 (1976), p. 83.

[19] H. RIOS. *«Etude de certains problèmes paraboliques : existence et approximation des solutions»* Séminaire d'Analyse Convexe, Montpellier 1978, Exposé n^{o} 1.

[20] R.T. ROCKAFELLAR. *«Conjugate duality and optimization»*. Philadelphia 1974. SIAM, Coll. Regional conference series in applied mathematics n^{o} 16.

[21] R.T. ROCKAFELLAR. *«Convex integral functionals and duality in : Contributions to nonlinear functional analysis»*. E. Zarantonello Editor, Academic Press, 1971, p. 215.

[22] L. SCHWARTZ. *«Sous-espaces hilbertiens d'espaces vectoriels topologiques et noyaux associés»*. Journal d'Analyse Mathématique, Jérusalem 1964.