

JEAN-MICHEL CORON

**Résolution de l'équation $Au + Bu = f$ où A est linéaire
et B dérive d'un potentiel convexe**

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 5^e série, tome 1, n° 3 (1979), p. 215-234

http://www.numdam.org/item?id=AFST_1979_5_1_3_215_0

© Université Paul Sabatier, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

RESOLUTION DE L'EQUATION $Au + Bu = f$ OU A EST LINEAIRE ET B DERIVE D'UN POTENTIEL CONVEXE

Jean-Michel Coron ⁽¹⁾

(1) 115, avenue du Roule - 92200 Neuilly.

Résumé : On montre par une méthode simple de Max-Min un théorème de Bahri et Morel [3] concernant l'équation $Au + Bu = f$ où A est linéaire auto adjoint et où B dérive d'un potentiel convexe. On applique les résultats obtenus à une équation de Laplace à la résonance, à un système hamiltonien et à une équation des ondes non linéaire.

Summary : We give a simple proof, based on a Max-Min argument, of a result of Bahri and Morel [3] concerning the equation $Au + Bu = f$ where A is a linear self adjoint operator and B is a non linear potential operator. We also study the existence of non-trivial solutions for $Au + Bu = 0$. We present applications to a Laplace'equation, an Hamiltonian system and a non linear wave equation.

INTRODUCTION

Soit H un espace de Hilbert réel, soit A un opérateur linéaire de domaine dense, auto adjoint et d'image fermée. On a donc $H = R(A) \oplus N(A)$, où $\oplus$ désigne la somme hilbertienne, $R(A)$ l'image de A et $N(A)$ le noyau de A . De plus $A|_{D(A) \cap R(A)}$ à valeurs dans $R(A)$ est bijectif d'inverse borné. On suppose que cet inverse que l'on notera A^{-1} est compact. On désigne par λ_{-1} la première valeur propre négative de A ($\lambda_{-1} = -\infty$ si A n'a pas de valeur propre négative).

Soit B le sous-différentiel d'une fonction convexe φ . On note $\text{conv } R(B)$ l'enveloppe convexe de l'image $R(B)$ de B .

On considère deux problèmes distincts :

Au § 1, on étudie $R(A+B)$. On montre que si $\overline{\lim}_{|u| \rightarrow +\infty} \frac{\varphi(u)}{|u|^2} < \frac{|\lambda_{-1}|}{2}$ alors

$$\overline{R(A+B)} = \overline{R(A) + \text{conv } R(B)}$$

et

$$\text{Int } [R(A+B)] = \text{Int } [R(A) + \text{conv } R(B)]$$

Ce résultat généralise un théorème de Brézis-Nirenberg [5] ou [7]. On retrouve, par une démonstration élémentaire de Max-Min, un résultat de Bahri-Morel [3].

Au § 2, on étudie l'existence de solution non triviale de l'équation :

$$(1) \quad 0 \in Au + Bu, \quad \text{en supposant que } 0 \in B0.$$

On prouve que si $\overline{\lim}_{|u| \rightarrow +\infty} \frac{\varphi(u)}{|u|^2} < \frac{|\lambda_{-1}|}{2}$ et si $\lim_{|u| \rightarrow 0} \frac{\varphi(u)}{|u|^2} > \frac{|\lambda_{-1}|}{2}$, alors il existe $u \neq 0$ solu-

tion de (1). On se restreint ensuite au cas où $H = L^2(\Omega)^P$, Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $\varphi(u) = \int_{\Omega} j[u(x)]dx$ où j est une fonction convexe de $\mathbb{R}^P$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\overline{\lim}_{|x| \rightarrow \infty} \frac{j(x)}{|x|^2} < \frac{|\lambda_{-1}|}{2}$ et $\lim_{|x| \rightarrow 0} \frac{j(x)}{|x|^2} > \frac{|\lambda_{-1}|}{2}$ et

on montre, moyennant d'autres hypothèses sur A , l'existence d'une solution non nulle à (1). On applique ce résultat à une équation de Laplace à la résonance non linéaire, à la recherche de solutions périodiques de systèmes hamiltoniens ; on étudie ensuite le cas d'une équation des ondes non linéaire ; les résultats obtenus sont à rapprocher de ceux de [1], [6], [9], [10], [11], [13], [14], [15].

Je remercie Monsieur BREZIS qui a dirigé ce travail.

I - ETUDE DE $R(A+B)$

Notations. On note E_{λ} le sous-espace propre associé à la valeur propre λ ; on pose $H_1 = (\bigoplus_{\lambda < 0} E_{\lambda}) \cap D(A)$,

$$H_2 = (\bigoplus_{\lambda \geq 0} E_{\lambda}) \cap D(A) ; \text{ on a donc } H = \overline{H_1} \oplus \overline{H_2}$$

THEOREME 1. Si $\overline{\lim}_{|u| \rightarrow +\infty} \frac{\varphi(u)}{|u|^2} < \frac{|\lambda_{-1}|}{2}$, alors

$$\overline{R(A+B)} = \overline{R(A) + \text{conv } R(B)}$$

et

$$\text{Int } [R(A+B)] = \text{Int } [R(A) + \text{conv } R(B)]$$

De plus si $f \in \text{Int} [R(A) + \text{conv } R(B)]$, il existe $(u_1, u_2) \in H_1 \times H_2$ tel que si $u = u_1 + u_2$:

$$(i) \quad f \in Au + Bu$$

$$(ii) \quad \phi(u_1 + u_2) = \max_{x_1 \in H_1} \inf_{x_2 \in H_2} \phi(x_1 + x_2)$$

et

$$(iii) \quad \begin{aligned} \phi(u_1 + u_2) &= \min_{x_2 \in H_2} \phi(u_1 + x_2) \\ \phi^*(f - Au) + \frac{1}{2}(Au, u) &= \min_{x \in D(A)} \phi^*(f - Ax) + \frac{1}{2}(Ax, x) = -\phi(u) \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \frac{1}{2}(Ax, x) + \varphi(x) - (f, x) \text{ et} \\ \varphi^*(x) &= \sup_{y \in H} (x, y) - \varphi(y). \end{aligned}$$

Démonstration. Soit $f \in R(A) + \text{conv } R(B)$; $f = Av + \sum_{i=1}^n t_i w_i^*$ avec $w_i^* \in Bw_i$, $t_i \geq 0$ et $\sum_{i=1}^n t_i = 1$. On pose $b_2 = -\frac{1}{2}(Av_2, v_2) + \sum_{i=1}^n t_i [\varphi(w_i) - (w_i^*, w_i)]$ où v_2 est la projection de v sur H_2 ; évidemment $v_2 \in H_2$.

On considère la fonction ϕ_ϵ de $D(A)$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\phi_\epsilon(u) = \frac{1}{2}(Au, u) + \frac{\epsilon}{2} \|u\|^2 + \varphi(u) - (f, u)$$

Etape 1. Soit F un sous-espace de dimension finie stable par A et inclus dans $D(A)$.

On pose : $F_1 = H_1 \cap F$

$$F_2 = H_2 \cap F$$

on pose, pour tout u_1 de F_1 , $\alpha_\epsilon(u_1) = \inf_{x_2 \in F_2} \phi_\epsilon(u_1 + x_2)$.

a) on se donne u_1 dans F_1 .

La fonction de F_2 dans $\mathbb{R}$, $\phi_\epsilon(u_1 + \cdot)$ est strictement convexe, continue et tend vers l'infini à l'infini. Il existe donc un élément de F_2 et un seul, que l'on notera $h_\epsilon(u_1)$ tel que $\alpha_\epsilon(u_1) = \phi_\epsilon(u_1 + h_\epsilon(u_1))$.

b) α_ϵ et h_ϵ sont continues.

En effet : Soit $(u_{1,n})_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de F_1 convergeant vers u_1 ; on a

$$\phi_\epsilon(u_{1,n} + h_\epsilon(u_{1,n})) \leq \phi_\epsilon(u_{1,n}) \leq C.$$

De plus $u_{1,n}$ est bornée donc $h_\epsilon(u_{1,n})$ est bornée ; on peut en extraire une suite convergente $h_\epsilon(u_{1,n_k}) \rightarrow u_2$

$$\alpha_\epsilon(u_{1,n_k}) = \phi_\epsilon(u_{1,n_k} + h_\epsilon(u_{1,n_k})) \rightarrow \phi_\epsilon(u_1 + u_2) \geq \alpha_\epsilon(u_1)$$

mais α_ϵ est s.c.s. donc $\phi_\epsilon(u_1+u_2) = \alpha_\epsilon(u_1)$ d'où $u_2 = h_\epsilon(u_1)$, d'où $h_\epsilon(u_{1,n}) \rightarrow h_\epsilon(u_1)$; h_ϵ est donc continue et par suite α_ϵ est aussi continue.

c) Il existe $(\epsilon_0, \rho, c) \in \mathbb{R}^{**} \times \mathbb{R}^{**} \times \mathbb{R}$ tel que : si $0 < \epsilon < \epsilon_0 \quad \forall u_1 \in H_1 \cap F, \alpha_\epsilon(u_1) \leq -\rho |u_1|^2 + C$ où ρ est indépendant de F ainsi que C et ϵ_0 .

En effet $\alpha_\epsilon(u_1) \leq \phi_\epsilon(u_1) \leq -\frac{|\lambda_{-1}|}{2} |u_1|^2 + \frac{\epsilon}{2} |u_1|^2 + \varphi(u_1) - (f, u_1)$.

Mais comme $\lim_{|u| \rightarrow +\infty} \frac{\varphi(u)}{|u|^2} < \frac{|\lambda_{-1}|}{2}$, $\exists R, \exists \theta$ avec $\theta < |\lambda_{-1}|$ tels que $\forall u \in H$,

$$|u| \geq R \Rightarrow \varphi(u) \leq \frac{\theta}{2} |u|^2.$$

En utilisant la convexité de φ et le fait que φ est bornée sur la sphère de centre 0 et de rayon R (d'après l'implication précédente), on voit que φ est bornée sur la boule de centre 0 et de rayon R donc $\exists C'$ tel que :

$\forall u \in H \quad \varphi(u) \leq \frac{\theta}{2} |u|^2 + C'$, ce qui termine la démonstration de c.

d) De a,b,c il résulte qu'il existe $u_{1,F}$ tel que :

$$\alpha_\epsilon(u_{1,F}) = \max_{x_1 \in F_1} \alpha_\epsilon(x_1)$$

on note P_F la projection (orthogonale) sur F . On pose $B_F = P_F B$, B_F est le sous différentiel de $\varphi_F : F \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow \varphi(x)$ (en effet, si I_F est la fonction indicatrice de F , comme $F \cap \text{Int}(D(\varphi)) \neq \emptyset$, on a $\partial I_F + \partial \varphi = \partial(I_F + \varphi)$ d'où l'on en déduit facilement que $B_F = \partial \varphi_F$).

Montrons (*) que :

$$(2) \quad P_F f \in \epsilon u_F + A u_F + B_F u_F$$

Pour alléger l'écriture on écrira u, u_1, u_2 à la place de $u_F, u_{1,F}, u_{2,F}$ (où $u_{2,F} = h_\epsilon(u_{1,F})$ et $u_F = u_{1,F} + u_{2,F}$).

On remarque d'abord que :

$$\forall (x, y) \in F^2, \quad \forall \eta \in B_F x$$

$$(3) \quad \phi_\epsilon(x+ty) - \phi_\epsilon(x) \geq (\epsilon x + A x + \eta - f, ty) + \frac{t^2}{2} (A y, y)$$

en effet :

$$(4) \quad \frac{\epsilon}{2} |x+ty|^2 - \frac{\epsilon}{2} |x|^2 \geq (\epsilon x, ty)$$

(*) Je remercie M. Brézis qui m'a fourni cette démonstration de (2). Ma démonstration supposait φ de classe C^1 .

$$(5) \quad \frac{1}{2}(A(x+ty), x+ty) - \frac{1}{2}(Ax, x) = (Ax, ty) + \frac{t^2}{2}(Ay, y)$$

$$(6) \quad \varphi(x+ty) - \varphi(x) \geq (\eta, ty)$$

En additionnant (4), (5), (6) on obtient (3).

Supposons que $P_F f \notin \epsilon u + Au + B_F u$.

Comme $B_F u$ est un convexe fermé $\exists a \in F$ tel que :

$$(7) \quad \forall \eta \in B_F u \quad (f - \epsilon u - Au, a) < (\eta, a)$$

on pose $a = a_1 + a_2$ avec $a_1 \in F_1$ et $a_2 \in F_2$.

On applique l'inégalité (3) avec $x = u_1 - ta_2 + h_\epsilon(u_1 + ta_1) = u_t$

$$y = a_1 + a_2 = a$$

$$\forall \eta_t \in B_F u_t, \phi_\epsilon(u_t + t(a_1 + a_2)) - \phi_\epsilon(u_t) \geq (\epsilon u_t + Au_t + \eta_t - f, t(a_1 + a_2)) + \frac{t^2}{2}(Aa, a)$$

$$\begin{aligned} \text{mais} \quad \phi_\epsilon(u_1 + ta_1 + h_\epsilon(u_1 + ta_1)) &\leq \phi_\epsilon(u_1 + h_\epsilon(u_1)) \\ &\leq \phi_\epsilon(u_1 + h_\epsilon(u_1 + ta_1) - ta_2) \\ &= \phi_\epsilon(u_t) \end{aligned}$$

donc $\forall \eta_t \in B_F u_t$:

$$\forall t > 0 \quad (\epsilon u_t + Au_t + \eta_t - f, a_1 + a_2) + \frac{t}{2}(Aa, a) \leq 0$$

$u_t \rightarrow u$ donc η_t est borné ; soit $t_n \rightarrow 0^+$ tel que $\exists \eta_{t_n} \in B_F(u_{t_n})$

$\eta_{t_n} \rightarrow \eta$; on a $\eta \in B u$ et $(\epsilon u + Au + \eta - f, a) \leq 0$

en contradiction avec (7) ce qui termine la démonstration de (2).

Etape 2. On fait varier F .

Remarquons d'abord que $\phi_\epsilon(u_1, F + u_2, F) \geq b_2$.

En effet : soit $x_2 \in F_2$, on a :

$$\varphi(x_2) - \varphi(w_i) \geq (w_i^*, x_2 - w_i).$$

On multiplie par t_i et on somme

$$(8) \quad \varphi(x_2) - \sum_{i=1}^n t_i \varphi(w_i) \geq \sum_i (t_i w_i^*, x_2) - \sum_{i=1}^n t_i (w_i^*, w_i)$$

de plus

$$(9) \quad \frac{1}{2}(Ax_2, x_2) - \frac{1}{2}(Av_2, v_2) \geq (Av_2, x_2 - v_2).$$

On ajoute (8) et (9) et on remplace $Av + \sum_{i=1}^n t_i w_i^*$ par f ; il vient :

$$\phi_\epsilon(x_2) \geq -\frac{1}{2}(Av_2, v_2) + \sum_{i=1}^n t_i [\varphi(w_i) - (w_i^*, w_i)] = b_2$$

d'où $\alpha_\epsilon(0) \geq b_2$ et donc $\alpha_\epsilon(u_{1,F}) \geq b_2$

donc

$$(10) \quad b_2 \leq \phi_\epsilon(u_{1,F} + u_{2,F}) \leq \phi_\epsilon(u_{1,F}) \leq -\rho |u_{1,F}|^2 + C \leq C.$$

$u_{1,F}$ est donc borné ainsi que $\phi_\epsilon(u_{1,F} + u_{2,F})$ et $\phi_\epsilon(u_{1,F})$ donc $u_{2,F}$ est borné. Mais φ est bornée sur tout borné, donc B est aussi bornée sur tout borné, comme on le voit en utilisant l'inégalité

$\varphi(x+h) - \varphi(x) \geq (\eta, h) \quad \forall \eta \in \partial \varphi(x), \quad \forall h$; mais $-\epsilon u_F - Au_F + P_F f \in P_F B u_F$ donc Au_F est aussi borné.

On peut extraire du filtre des sous-espaces de dimension finie de $D(A)$ stable par A un ultrafiltre convergent tel que

$$\begin{aligned} u_F &\longrightarrow u \\ Au_F &\longrightarrow v \end{aligned}$$

Le graphe de A est un sous-espace vectoriel fermé de $H \times H$. Il est donc faiblement fermé donc $v = Au$; du fait de la compacité de A^{-1} , $P_{R(A)} u_F \rightarrow P_{R(A)} u$ et donc $(Au_F, u_F) \rightarrow (Au, u)$.

Montrons que $u_F \rightarrow u$; soit F_0 un sous-espace de l'ultrafiltre, soit $x \in F_0$; si $F_0 \subset F$ on a (car $P_F f - \epsilon u_F - Au_F \in P_F B u_F$) :

$$\varphi(x) - \varphi(u_F) \geq (P_F f - \epsilon u_F - Au_F, x - u_F)$$

En passant à la limite :

$$(11) \quad \varphi(x) - \overline{\lim} \varphi(u_F) \geq (f - \epsilon u - Au, x - u) + \epsilon (\overline{\lim} |u_F|^2 - |u|^2)$$

et ceci pour tout vecteur x d'un élément de l'ultrafiltre ; φ étant continue, on en déduit que (11) est vrai pour tout x de H on prend $x = u$; comme $\underline{\lim} \varphi(u_F) \geq \varphi(u)$ il vient $\overline{\lim} |u_F|^2 \leq |u|^2$ donc $u_F \rightarrow u$; de plus d'après (11),

$$\forall x \in H \quad \varphi(x) - \varphi(u) \geq (f - \epsilon u - Au, x - u)$$

et donc

$$f \in \epsilon u + Au + Bu.$$

En passant à la limite dans (10) il vient :

$$(12) \quad b_2 \leq \phi_\epsilon(u_1 + u_2) \leq \phi_\epsilon(u_1) \leq -\rho |u_1|^2 + C \leq C$$

Montrons que :

$$(13) \quad \inf_{x_2 \in H_2} \phi_\epsilon(x_1 + x_2) \leq \phi_\epsilon(u_1 + u_2) \quad \forall x_1 \in H_1$$

Soit x_1 un élément de H_1 et $x_{1,F}$ la projection de x_1 sur F .

Soit $x_{2,F}$ réalisant le minimum de $\phi_\epsilon(x_{1,F} + \cdot)$ sur F_2 , d'après (10) et la définition de $u_{1,F}$:

$$(14) \quad \phi_\epsilon(x_{1,F} + x_{2,F}) \leq \phi_\epsilon(u_{1,F} + u_{2,F}) \leq C$$

comme $(Ax_{1,F}, x_{1,F}) \geq (Ax_1, x_1)$ et comme $|x_{1,F}| \leq |x_1|$, $x_{2,F}$ est borné ; $x_{2,F} \rightarrow x_2$ (quitte à extraire un nouvel ultrafiltre). La restriction de A à $\overline{H_2}$ dans $\overline{H_2}$ est autoadjointe et positive ; on note $A_2^{1/2}$ sa racine carrée. En passant à la limite dans (14) il vient :

$$\frac{\epsilon}{2}(|x_1|^2 + |x_2|^2) + \frac{1}{2}(A_2^{1/2}x_2, A_2^{1/2}x_2) + \frac{1}{2}(Ax_1, x_1) + \varphi(x_1 + x_2) - (f, x_1 + x_2) \leq \phi_\epsilon(u_1 + u_2)$$

Il ne reste plus qu'à approcher x_2 par des éléments $x_{2,n}$ de H_2 tels que $x_{2,n} \rightarrow x_2$ et

$(Ax_{2,n}, x_{2,n}) \rightarrow (A_2^{1/2}x_2, A_2^{1/2}x_2)$; on obtient (13).

Etape 3. On va maintenant faire tendre ϵ vers zéro. Pour marquer la dépendance en ϵ de u_1 , u_1 sera noté $u_{1\epsilon}$; de même u_2 sera noté $u_{2\epsilon}$; d'après (12) $u_{1\epsilon}$, $\phi_\epsilon(u_{1\epsilon})$, $\phi_\epsilon(u_{1\epsilon} + u_{2\epsilon})$ sont bornés. De plus :

$$(15) \quad b_2 \leq \phi_\epsilon(u_{1\epsilon} + u_{2\epsilon}) = \phi_\epsilon(u_{1\epsilon}) + \frac{\epsilon}{2}|u_{2\epsilon}|^2 + \frac{1}{2}(Au_{2\epsilon}, u_{2\epsilon}) + \varphi(u_{1\epsilon} + u_{2\epsilon}) - \varphi(u_{1\epsilon}) - (f, u_{2\epsilon})$$

Comme $f \in \epsilon u_\epsilon + Au_\epsilon + Bu_\epsilon$ (avec $u_\epsilon = u_{1\epsilon} + u_{2\epsilon}$)

$$\varphi(u_{1\epsilon}) - \varphi(u_{1\epsilon} + u_{2\epsilon}) \geq (f - \epsilon u_\epsilon - Au_\epsilon, -u_{2\epsilon})$$

En utilisant en plus (15), on déduit que : $b_2 + \frac{\epsilon}{2}|u_{2\epsilon}|^2 + \frac{1}{2}(Au_{2\epsilon}, u_{2\epsilon}) \leq \phi_\epsilon(u_{1\epsilon}) \leq c$ donc $\epsilon|u_{2\epsilon}|$ est borné d'où $\epsilon u_{2\epsilon} \rightarrow 0$ et par suite

$$f \in \overline{R(A+B)}$$

Etape 4. On suppose maintenant que $f \in \text{Int}[R(A) + \text{conv } R(B)]$.

Donc $\exists \tau > 0$ tel que si $|h| \leq \tau \quad \exists v_h \in H \quad \exists (w_{i,h}) \quad 1 \leq i \leq n_h$

$$\exists (t_{i,h})_1 \leq i \leq n_h \quad \exists (w_{i,h}^*)_1 \leq i \leq n_h \quad \text{avec}$$

- 1) $f + h = Av_h + \sum_{i=1}^{n_h} t_i w_{i,h}^*$
- 2) $\sum_i t_{i,h} = 1$ et $t_{i,h} \geq 0$
- 3) $w_{i,h}^* \in B w_{i,h}$

Donc :

$$\varphi(u_\epsilon) - \varphi(w_{i,h}) \geq (w_{i,h}^*, u_\epsilon - w_{i,h})$$

On multiplie par $t_{i,h}$ et on somme :

$$(16) \quad \varphi(u_\epsilon) - \sum_i t_{i,h} \varphi(w_{i,h}) \geq (f+h-Av_h, u_\epsilon) - \sum_i t_{i,h} (w_{i,h}^*, w_{i,h})$$

Soit $v_{2,h}$ [resp $v_{1,h}$] la projection de v_h sur H_2 (resp H_1)

$$(17) \quad \frac{1}{2}(Au_{2\epsilon}, u_{2\epsilon}) - \frac{1}{2}(Av_{2,h}, v_{2,h}) \geq (Av_{2,h}, u_{2\epsilon} - v_{2,h})$$

en ajoutant (16) et (17) et en utilisant le fait que $u_{1\epsilon}$ est borné (voir étape 3) il vient :

$$\exists C_h/C_h + \varphi(u_\epsilon) + \frac{1}{2}(Au_{2\epsilon}, u_{2\epsilon}) - (f, u_\epsilon) \geq (h, u_\epsilon)$$

d'où

$$(18) \quad C_h + \phi_\epsilon(u_{1\epsilon} + u_{2\epsilon}) - \frac{1}{2}(Au_{1\epsilon}, u_{1\epsilon}) \geq (h, u_\epsilon)$$

mais $\phi_\epsilon(u_{1\epsilon} + u_{2\epsilon})$ est borné d'après (12) et de plus

$$b_2 \leq \phi_\epsilon(u_{1\epsilon}) \leq \frac{1}{2}(Au_{1\epsilon}, u_{1\epsilon}) + \frac{\epsilon}{2} |u_{1\epsilon}|^2 + \varphi(u_{1\epsilon}) - (f, u_{1\epsilon})$$

donc $\frac{1}{2}(Au_{1\epsilon}, u_{1\epsilon})$ est borné inférieurement ; on utilise alors (18) pour voir qu'il existe C'_h tel que
 $\forall \epsilon > 0 \quad (h, u_\epsilon) \leq C'_h$; donc u_ϵ est borné mais $-u_\epsilon - Au_\epsilon + f \in Bu_\epsilon$ donc $u_\epsilon + Au_\epsilon$ est borné, mais
 $u_\epsilon \rightarrow 0$ donc Au_ϵ est borné.

Soit $(\epsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs tendant vers zéro telle que

$$\begin{aligned} Au_{\epsilon_n} &\longrightarrow v \\ u_{\epsilon_n} &\longrightarrow u \end{aligned}$$

on a $v = Au$; montrons que $f \in Au + Bu$.

$$\forall x \in H, \varphi(x) - \varphi(u_{\epsilon_n}) \geq (f - Au_{\epsilon_n} - \epsilon_n u_{\epsilon_n}, x - u_{\epsilon_n})$$

Comme à l'étape 2, $(Au_{\epsilon_n}, u_{\epsilon_n}) \rightarrow (Au, u)$ donc

$$(19) \quad \forall x \in H, \varphi(x) - \lim \varphi(u_{\epsilon_n}) \geq (f - Au, x - u)$$

mais $\lim \varphi(u_{\epsilon_n}) \geq \varphi(u)$ d'où

$$\forall x \in H \quad \varphi(x) - \varphi(u) \geq (f - Au, x - u)$$

ce qui montre que $f \in Au + Bu$.

De plus en prenant $x = u$ dans (19), on voit que $\varphi(u) \geq \overline{\lim} \varphi(u_{\epsilon_n})$ et donc $\varphi(u_{\epsilon_n}) \rightarrow \varphi(u)$; comme $\epsilon_n \|u_{\epsilon_n}\|^2 \rightarrow 0$ et $(Au_{\epsilon_n}, u_{\epsilon_n}) \rightarrow (Au, u)$, on voit que $\phi_{\epsilon_n}(u_{\epsilon_n}) \rightarrow \phi(u)$.

Soit $x_1 \in H_1$ d'après (13) comme $\phi \leq \phi_{\epsilon}$ on a :

$$\inf_{x_2 \in H_2} \phi(x_1 + x_2) \leq \phi_{\epsilon_n}(u_{\epsilon_n})$$

$$\text{et donc } (n \rightarrow +\infty) \quad \inf_{x_2 \in H_2} \phi(x_1 + x_2) \leq \phi(u) \quad \forall x_1 \in H_1$$

et on a donc bien :

$$\phi(u_1 + u_2) = \max_{x_1 \in H_1} \inf_{x_2 \in H_2} \phi(x_1 + x_2).$$

De plus, comme $f \in A(u_1 + u_2) + B(u_1 + u_2)$, on a

$$\phi(u_1 + u_2) = \min_{x_2 \in H_2} \phi(u_1 + x_2).$$

Reste à vérifier (iii) :

Soit $y \in D(A)$ $y = y_1 + y_2$ où $y_1 \in H_1$ et $y_2 \in H_2$. Soit $\epsilon > 0$.

Comme $\phi(u) = \max_{x_1 \in H_1} \inf_{x_2 \in H_2} \phi(x_1 + x_2)$ il existe un élément $\bar{y}_2$ de H_2 tel que si $\bar{y} = y_1 + \bar{y}_2$:

$$-(f, \bar{y}) + \varphi(\bar{y}) + \frac{1}{2}(A\bar{y}, \bar{y}) \leq \varphi(u) + \frac{1}{2}(Au, u) - (f, u) + \epsilon$$

et comme $\varphi^*(f - Ay) \geq (f - Ay, y) - \varphi(y)$ on a :

$$\varphi^*(f - Ay) \geq \frac{1}{2}(Ay, y) - \varphi(y) - \frac{1}{2}(Au, u) + (f, u) - \epsilon - (Ay, y).$$

Mais comme $f \in Au + Bu$, $\varphi^*(f - Au) + \varphi(u) = (u, f - Au)$

d'où

$$\begin{aligned} \varphi^*(f - Ay) + \frac{1}{2}(Ay, y) &\geq \varphi^*(f - Au) + \frac{1}{2}(Au, u) + \frac{1}{2}(A(y - \bar{y}), y - \bar{y}) - \epsilon \\ &= \varphi^*(f - Au) + \frac{1}{2}(Au, u) + \frac{1}{2}(A(y_2 - y_2), y_2 - y_2) - \epsilon \\ &\geq \varphi^*(f - Au) + \frac{1}{2}(Au, u) - \epsilon \quad \forall \epsilon > 0 \end{aligned}$$

ce qui finit la démonstration du Théorème 1.

Remarques.

1) Si $\overline{\lim}_{|u| \rightarrow \infty} \frac{\varphi(u)}{|u|^2} = \frac{\theta}{2} < \frac{|\lambda_{-1}|}{4}$, on a en plus des propriétés de bornitude des solutions de $Au + Bu = f$. En particulier les projections de ces solutions sur $R(A)$ sont bornées. En outre on peut se passer de l'hypothèse A autoadjoint en la remplaçant par $(Au, u) \geq -\frac{1}{|\lambda_{-1}|} |Au|^2$ (λ_{-1} n'étant plus nécessairement une valeur propre avec $R(A) = N(A)$ et A^{-1} compact). Pour les démonstrations de ces propriétés et d'autres compléments sur ces questions, voir [5] et [7].

2) Par contre, si on a seulement $\overline{\lim}_{|u| \rightarrow \infty} \frac{\varphi(u)}{|u|^2} < \frac{|\lambda_{-1}|}{2}$, les projections sur $R(A)$ des solutions de $f = Au + Bu$ ne sont plus nécessairement bornées (voir [3]).

3) On peut démontrer le Théorème 1 (excepté (ii)) en étudiant le problème de la minimisation de $\varphi^*(f - Ax) + \frac{1}{2}(Ax, x)$ sur $D(A)$ (à la place du problème $\max_{x_1 \in H_1} \inf_{x_2 \in H_2} \phi(x_1 + x_2)$). On est là aussi amené à remplacer φ par φ_ϵ avec $\varphi_\epsilon(x) = \varphi(x) + \frac{\epsilon}{2}|x|^2$.

4) La méthode que nous employons à l'étape 1 est voisine de la méthode de Min Max employée par Castro et Lazer [8] ou celle de Berger et Schechter [4] ou encore celle de Amann [1].

5) La démonstration ci-dessus est à peu près celle de [3]. La seule modification importante est dans l'étape 1 où on montre l'existence de u_f sans utiliser le Théorème de Rabinowitz, avec une méthode de Max-Min qui donne des renseignements supplémentaires sur u .

II - EXISTENCE DE SOLUTION NON TRIVIALE DE L'EQUATION $0 \in Au + Bu$

Les hypothèses sur A et B sont celles de l'introduction ; on suppose que $\varphi(0) = 0$ et que $|\lambda_{-1}| < +\infty$

1)
THEOREME 2. Si 1) $\overline{\lim}_{|u| \rightarrow \infty} \frac{\varphi(u)}{|u|^2} < \frac{|\lambda_{-1}|}{2}$ (20)

2) $\lim_{|u| \rightarrow 0} \frac{\varphi(u)}{|u|^2} > \frac{|\lambda_{-1}|}{2}$ (21)

alors il existe un u non nul tel que $0 \in Au + Bu$.

a) Remarque préliminaire.

Avant de donner une démonstration du Théorème 2, remarquons que (21) implique que $0 \in B0$ (et donc $0 \in A0 + B0$). En effet d'après (21), $\exists \eta > 0$ tel que $|x| \leq \eta \Rightarrow \varphi(x) \geq 0 = \varphi(0)$.

Soit I_η la fonction indicatrice de la boule fermée de centre 0 et de rayon η , d'après l'implication précédente $0 \in \partial(\varphi + I_\eta)(0)$ mais $D(\varphi) \cap \text{Int } D(I_\eta) \neq \emptyset$, donc $\partial(\varphi + I_\eta) = \partial\varphi + \partial I_\eta$ et comme $\partial I_\eta(0) = 0$, on a bien $0 \in B_0$.

b) Démonstration du Théorème 2.

D'après (21), $\exists \eta > 0, \exists \theta > |\lambda_{-1}|$ tels que

$$|u| \leq \eta \Rightarrow \varphi(u) \geq \frac{\theta}{2} |u|^2$$

Montrons que

$$|u^*| \leq \frac{\theta\eta}{2} \Rightarrow \varphi^*(u^*) \leq \frac{|u^*|^2}{2\theta}$$

$$\text{si } |u| \geq \eta \text{ on a } \frac{\theta\eta^2}{2} \leq \varphi\left(\frac{\eta}{|u|} u\right) = \varphi\left(\left(1 - \frac{\eta}{|u|}\right) 0 + \frac{\eta}{|u|} u\right) \leq \eta \frac{\varphi(u)}{|u|}$$

soit

$$\varphi(u) \geq \frac{\theta\eta}{2} |u|$$

Il est alors facile de voir que $\varphi \geq \psi$ où ψ est la fonction convexe continue définie par :

$$|u| \leq \frac{\eta}{2} \Rightarrow \psi(u) = \frac{\theta}{2} |u|^2$$

$$|u| \geq \frac{\eta}{2} \Rightarrow \psi(u) = \frac{\theta\eta}{2} |u| - \frac{\theta}{8} \eta^2$$

On a

$$\varphi^* \leq \psi^*$$

$$\text{Or } |u^*| \leq \frac{\theta\eta}{2} \Rightarrow \psi^*(u^*) = \frac{|u^*|^2}{2\theta} \text{ et donc}$$

$$(22) \quad |u^*| \leq \frac{\theta\eta}{2} \Rightarrow \varphi^*(u^*) \leq \frac{|u^*|^2}{2\theta}$$

0 est donc intérieur au domaine de φ^* d'où $0 \in \text{int } R(\partial\varphi)$ et par suite $0 \in \text{int } [R(A) + R(B)]$. On peut appliquer le Théorème 1 :

$$\exists u \text{ tel que } \alpha) 0 \in Au + Bu$$

$$\beta) \phi(u) = \max_{x_1 \in H_1} \inf_{x_2 \in H_2} \phi(x_1 + x_2)$$

on va montrer que $\phi(u) > 0$, ce qui prouvera que $u \neq 0$ et terminera donc la démonstration ; soit a_1 un vecteur non nul de $\text{Ker}(A - \lambda_{-1}I)$ tel que $|a_1| \leq \frac{\theta\eta}{2|\lambda_{-1}|}$; d'après (22) on a :

$$\varphi^*(|\lambda_{-1}|a_1) \leq |\lambda_{-1}|^2 \frac{|a_1|^2}{2\theta}$$

donc

$$(23) \quad \forall x_2 \in H_2 \quad \varphi(x_2 + a_1) \geq |\lambda_{-1}| |a_1|^2 - |\lambda_{-1}|^2 \frac{|a_1|^2}{2\theta}$$

mais

$$\phi(u) \geq \inf_{x_2 \in H_2} \phi(a_1 + x_2) \geq \inf_{x_2 \in H_2} \varphi(x_2 + a_1) - \frac{|\lambda_{-1}|}{2} |a_1|^2$$

d'où avec (23)

$$\phi(u) \geq \frac{1}{2} |\lambda_{-1}| |a_1|^2 \left(1 - \frac{|\lambda_{-1}|}{\theta}\right) > 0.$$

2)

On se restreint maintenant au cas où $H = L^2(\Omega)^p$ où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^k$ et où il existe une fonction convexe continue j de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\varphi(u) = \int_{\Omega} j(u(x)) dx$.

THEOREME 3. On suppose que

$$(24) \quad \exists k < |\lambda_{-1}|, \exists a \text{ tels que } \forall x \in \mathbb{R}^p \quad j(x) \leq \frac{k}{2} |x|^2 + a$$

$$(25) \quad \lim_{|x| \rightarrow 0} \frac{j(x)}{|x|^2} > \frac{|\lambda_{-1}|}{2}$$

$$(26) \quad \dim N(A) < +\infty$$

$$(27) \quad \text{Ker}(A - \lambda_{-1} I) \cap [L^\infty(\Omega)]^p \neq \{0\}.$$

Alors il existe une fonction u de H non nulle telle que

$$(28) \quad 0 \in Au + Bu$$

$$(29) \quad \phi(u) = \max_{x_1 \in H_1} \inf_{x_2 \in H_2} \phi(x_1 + x_2) > 0$$

$$(30) \quad \varphi(u) \leq \frac{|\lambda_{-1}| \text{am}(\Omega)}{|\lambda_{-1}| - k} \quad \text{où } m(\Omega) \text{ est la mesure de } \Omega.$$

Démonstration du Théorème 3. D'après (25), $\exists \eta > 0, \exists \theta > |\lambda_{-1}|$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}^p \quad |x| \leq \eta \Rightarrow j(x) \geq \frac{\theta}{2} |x|^2$$

Soit

$$k : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$$

$$|x| \leq \frac{\eta}{2} \rightarrow k(x) = \frac{\theta}{2} |x|^2$$

$$|x| \geq \frac{\eta}{2} \rightarrow k(x) = \frac{\theta\eta}{2} |x| - \frac{\theta\eta^2}{8}$$

k est convexe ; soit $\psi : H \rightarrow \mathbb{R}$

$$u \rightarrow \int_{\Omega} k[u(\alpha)] d\alpha$$

ψ est convexe continue et on a $\varphi \geq \psi$.

Montrons que $0 \in \text{Int}[R(A) + \text{conv } R(B)]$. On sait (voir [5] p. 265) qu'il suffit de vérifier que

$$\forall u \in N(A) - \{0\} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\varphi(tu)}{t} > 0.$$

$$\text{Or } \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{k(tu(\alpha))}{t} = \frac{\theta\eta}{2} |u(\alpha)|, \text{ donc :}$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\varphi(tu)}{t} \geq \int_{\Omega} \frac{\theta\eta}{2} |u(\alpha)| d\alpha > 0$$

on peut appliquer le Théorème 1 : $\exists u \in H$ tel que :

$$0 \in Au + Bu$$

$$\phi(u) \geq \max_{x_1 \in H_1} \inf_{x_2 \in H_2} \phi(x_1 + x_2)$$

on va montrer que $\phi(u) > 0$ (ce qui assurera que $u \neq 0$).

D'après (27) $\exists a_1 \in \text{Ker}(A - \lambda_{-1} I)$ tel que $\|a_1\|_{\infty} < \frac{\eta}{2}$ avec $a_1 \neq 0$; $\psi(a_1) = \frac{\theta}{2} |a_1|^2$ donc

$$\forall x_2 \in H_2 \quad \psi(a_1 + x_2) \geq \psi(a_1) + (\theta a_1, x_2) = \psi(a_1) = \frac{\theta}{2} |a_1|^2$$

mais $\varphi \geq \psi$ donc $\varphi(a_1 + x_2) \geq \frac{\theta}{2} |a_1|^2$ et par suite

$$\inf_{x_2 \in H_2} \phi(a_1 + x_2) > 0$$

et donc

$$0 < \phi(u)$$

Reste à montrer (30)

$$0 < \phi(u_1 + u_2) \leq \phi(u_1) \leq \frac{k}{2} |u_1|^2 + am(\Omega) - \frac{|\lambda_{-1}|}{2} |u_1|^2$$

donc

$$(31) \quad |u_1|^2 \leq \frac{2am(\Omega)}{|\lambda_{-1}| - k}$$

$$\text{on a} \quad \phi(u_1+u_2) \geq \varphi(u_1+u_2) + \frac{1}{2}(Au_1, u_1)$$

$$\text{où} \quad \phi(u_1+u_2) \leq \phi(u_1) = \varphi(u_1) + \frac{1}{2}(Au_1, u_1)$$

$$\text{donc} \quad \varphi(u_1+u_2) \leq \varphi(u_1) \leq \frac{k}{2} |u_1|^2 + \text{am}(\Omega)$$

On utilise alors (31) et on obtient (30).

3)

Application.

a) Equation de Laplace.

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^k$ de frontière régulière. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots$ la suite croissante des valeurs propres distinctes de l'opérateur $-\Delta$ relatives aux conditions aux limites $u = 0$ sur $\partial\Omega$. Soit $j, \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, une application convexe telle que $j(0) = 0$. On a alors la proposition suivante, où $\beta = \partial j$.

$$\text{PROPOSITION 1. Si } \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{j(x)}{x^2} < \frac{\lambda_{k+1} - \lambda_k}{2} \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{j(x)}{x^2} > \frac{\lambda_{k+1} - \lambda_k}{2}$$

alors il existe une fonction u de $H^2(\Omega)$ telle que

- i) $u \neq 0$
- ii) $-\Delta u - \lambda_{k+1} u + \beta(u) \ni 0$
- iii) $u = 0$ sur $\partial\Omega$.

Démonstration. Il suffit d'appliquer le Théorème 3 à :

- a) $H = L^2(\Omega)$
- b) $Au = -\Delta u - \lambda_{k+1} u$, $D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$.

Remarque. La Proposition 1 est à rapprocher de certains résultats de [1].

b) Mécanique hamiltonienne.

Soit $\mathcal{H} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe telle que $\mathcal{H}(0,0) = 0$ on a la proposition suivante :

$$\text{PROPOSITION 2. Si (i) } \exists k < \frac{2\pi}{T} \text{ tel que } \exists a \text{ avec}$$

$$\mathcal{H}(x,p) \leq \frac{k}{2} (|x|^2 + |p|^2) + a \quad \forall (x,p) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$$

$$(ii) \quad \lim_{|x|^2 + |p|^2 \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}(x,p)}{|x|^2 + |p|^2} > \frac{\pi}{T}$$

alors il existe une fonction (x, p) de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ absolument continue de période minimale T et une constante $h > 0$ telles que

$$(32) \quad (-\dot{p}(t), \dot{x}(t)) \in \partial \mathcal{H}(x(t), p(t)) \text{ presque partout}$$

$$(33) \quad \mathcal{H}(x(t), p(t)) = h \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$(34) \quad h \leq \frac{2a\pi}{2\pi - kT}.$$

Démonstration. On applique le Théorème 3 avec

- pour espace de Hilbert $(L^2([0, T])^{2n})$

- pour fonction $j, \mathcal{H}$

- pour opérateur $A : D(A) = \{(x, p), (x, p, \dot{x}, \dot{p}) \in L^2(0, T), x(0) = x(T) \text{ et } p(0) = p(T)\}$

$$A(x, p) = (\dot{p}, -\dot{x})$$

on vérifie facilement que A est autoadjoint, d'image fermée et que $A^{-1} : R(A) \rightarrow R(A)$ est compact (et même de Hilbert Schmidt). Précisons les vecteurs propres et les valeurs propres de A . Soit $(e_p)_{1 \leq p \leq n}$ une base de $\mathbb{R}^n$. On note $a_{m,p}$ la fonction $[0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$

$$t \mapsto \left(\cos \frac{2\pi mt}{T} e_p, \sin \frac{2\pi mt}{T} e_p \right)$$

On note $b_{m,p}$ la fonction $[0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$

$$t \mapsto \left(\sin \left(\frac{2\pi}{T} mt \right) e_p, -\cos \left(\frac{2\pi}{T} mt \right) e_p \right)$$

Il est facile de voir que les valeurs propres de A sont les réels $\frac{2\pi m}{T}$ avec $m \in \mathbb{Z}$ et que $\text{Ker}(A - \frac{2\pi m}{T} I)$ admet comme base $\{a_{m,p} \mid 1 \leq p \leq n\} \cup \{b_{m,p} \mid 1 \leq p \leq n\}$.

La première valeur propre négative de A est $-\frac{2\pi}{T}$.

On applique le Théorème 3. Il existe donc une fonction (x, p) de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ absolument continue telle que :

(x, p) admet T pour période

(35) $(-\dot{p}(t), \dot{x}(t)) \in \partial \mathcal{H}(x(t), p(t))$ presque partout (et donc $\exists h / \forall t \mathcal{H}(x(t), p(t)) = h$) avec de plus les propriétés (29) et (30). On note (x_1, p_1) (resp. (x_2, p_2)) la projection de (x, p) sur H_1 (resp. H_2). Montrons que T est la période minimale de (x, p) . Supposons que (x, p) admette $\frac{T}{k}$ comme période où k est un entier strictement supérieur à 1. Les expressions des vecteurs de H_1 et de H_2 en fonction des $a_{m,p}$ et $b_{m,p}$ montrent que (x_1, p_1) admet aussi $\frac{T}{k}$ comme période.

On pose

$$\begin{aligned} y_1(t) &= k x_1 \left(\frac{t}{k} \right) \\ q_1(t) &= k p_1 \left(\frac{t}{k} \right). \end{aligned}$$

Il est facile de voir que (y_1, q_1) appartient à H_1 .

On doit donc avoir

$$(36) \quad \inf_{y_2, q_2 \in H_2} \phi(y_1 + y_2, q_1 + q_2) \leq \phi(x, p);$$

soit (y_2, q_2) un élément de H_2 on pose

$$\begin{aligned} \bar{x}_2(t) &= \frac{1}{k} y_2(kt) \\ \bar{p}_2(t) &= \frac{1}{k} q_2(kt) \end{aligned}$$

(après avoir prolongé y_2 et q_2 par périodicité à $\mathbb{R}$ tout entier) $(\bar{x}_2, \bar{q}_2) \in H_2$; on a

$$\phi(y_1 + y_2, q_1 + q_2) = \frac{1}{2} \int_0^T (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)(y_1 + y_2) - (q_1 + q_2)(\dot{y}_1 + \dot{y}_2) dt + \int_0^T \varphi(y_1 + y_2, q_1 + q_2) dt$$

on fait le changement de variable $\tau = t/k$

$$\phi(y_1 + y_2, q_1 + q_2) = \frac{1}{2} \int_0^{T/k} k^2 (\dot{p}_1 + \dot{p}_2)(x_1 + \bar{x}_2) - (p_1 + \bar{p}_2)(\dot{x}_1 + \dot{\bar{x}}_2) d\tau + k \int_0^{T/k} \varphi(k(x_1 + \bar{x}_2), k(p_1 + \bar{p}_2)) d\tau$$

Mais $\varphi(k\alpha, k\beta) \geq k \varphi(\alpha, \beta) \quad \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. En utilisant de plus le fait que p_1, p_2, x_1, x_2 admettent T/k comme période il vient :

$$\phi(y_1 + y_2, q_1 + q_2) \geq k \phi(x_1 + \bar{x}_2, q_1 + \bar{q}_2).$$

En utilisant (35) on obtient $\phi(x_1 + \bar{x}_2, q_1 + \bar{q}_2) \geq \phi(x_1 + x_2, q_1 + q_2)$.

D'où

$$\phi(y_1 + y_2, q_1 + q_2) \geq k \phi(x_1 + x_2, q_1 + q_2).$$

Mais d'après (29) $\phi(x_1 + x_2, q_1 + q_2) > 0$ donc

$$\phi(y_1 + y_2, q_1 + q_2) > \phi(x_1 + x_2, q_1 + q_2) \quad \forall (y_2, q_2) \in H_2$$

en contradiction avec (36).

Reste à vérifier l'inégalité (34) ; elle résulte immédiatement de l'inégalité (30) car $\lambda_{-1} = -\frac{2\pi}{T}$ et $\mathcal{H}(x(t), p(t)) = h$.

Remarques. La proposition 2 est due à F.M. Clarke et I. Ekeland [10]. Leur méthode consiste à minimiser un problème dual. C'est la comparaison entre leur méthode et la mienne qui m'a suggéré le (iii) du Théorème 1.

H. Amann étudie aussi dans [1] l'existence de solutions non triviales de période T mais en se passant de l'hypothèse $\mathcal{H}$ convexe ($\mathcal{H}$ étant alors de classe C^2). Toutefois, contrairement au convexe on ne sait pas s'il en existe une admettant T comme période minimale. P.H. Rabinowitz établit dans [14] et dans [15] l'existence d'une solution périodique non triviale avec des hypothèses de croissance différente puisque ces hypothèses impliquent en particulier que $\mathcal{H}(x,p)/x^2+p^2 \rightarrow 0$ quand $x^2+p^2 \rightarrow 0$ et $\rightarrow \infty$ quand $x^2+p^2 \rightarrow \infty$. Là aussi $\mathcal{H}$ n'est pas supposée convexe mais de classe C^1 et on ne sait pas si T est la période minimale. I. Ekeland étudie dans [11] le même problème dans le cas où $\mathcal{H}$ est convexe continue ; il obtient alors une estimation a priori de l'énergie.

c) *Equation des ondes.*

Soit j une fonction convexe de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $j(0) = 0$; on pose $\beta = j'$ et on suppose que $j'(0) = 0$ (ce qui sera d'ailleurs impliqué par les autres hypothèses sur j). On cherche à prouver l'existence d'une solution non triviale à l'équation :

$$(37) \quad \begin{aligned} & \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta(u) = 0 \\ & u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \quad \forall t \end{aligned}$$

u est 2π périodique en t

PROPOSITION 3. Si $\overline{\lim}_{|u| \rightarrow +\infty} \frac{j(u)}{|u|^2} < \frac{3}{2}$ et si $\lim_{|u| \rightarrow 0} \frac{j(u)}{|u|^2} > \frac{3}{2}$ alors il existe une solution non nulle à (37).

Démonstration. Soit $H = L^2((0,\pi) \times (0,2\pi))$; soit $\mathcal{A}$ l'opérateur

$$\begin{aligned} D(\mathcal{A}) &= \left\{ u \in C^2([0,\pi] \times [0,2\pi]) / u(0,.) = u(\pi,.) = 0, u_t(.,0) = u_t(.,2\pi) \right\} \\ \mathcal{A}u &= \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \end{aligned}$$

On pose $A = \mathcal{A}^*$; on sait que A est autoadjoint d'image fermée et que A^{-1} est compact. De plus si

$$u = \sum_{\substack{j \geq 0 \\ m \geq 0}} a_{j,m} \sin jx \cos mt + \sum_{\substack{j \geq 0 \\ m > 0}} b_{j,m} \sin jx \sin mt$$

alors u appartient à $D(A)$ si et seulement si

$$\sum_{\substack{j > 0 \\ m \geq 0}} (j^2 - m^2) a_{j,m}^2 + \sum_{\substack{j > 0 \\ m \geq 0}} (j^2 - m^2) b_{j,m}^2 < +\infty$$

et dans ce cas :

$$Au = \sum_{\substack{j > 0 \\ m \geq 0}} (j^2 - m^2) a_{j,m} \sin jx \cos mt + \sum_{\substack{j > 0 \\ m \geq 0}} (j^2 - m^2) b_{j,m} \sin jx \sin mt$$

Les valeurs propres de A sont donc les $j^2 - m^2$ avec $j > 0$, $m \geq 0$; donc $\lambda_{-1} = 1 - 4 = -3$ et $\text{Ker}(A + 3I)$ est engendré par les fonctions de classe C^∞ $\sin x \cos 2t$, $\sin x \sin 2t$. Remarquons qu'il n'est pas possible d'appliquer le Théorème 3 car la dimension de $N(A)$ est infinie ; il est d'ailleurs facile de voir que, en général,

$0 \notin \text{int}[R(A) + \text{conv } R(B)]$ où $Bu = \beta u$. Reprenons les notations de la démonstration du Théorème 1 avec $f = 0$; A. Bahri et H. Brézis ont montré dans [2] que la suite u était bornée dans $L^2((0, \pi) \times (0, 2\pi))$ car elle vérifie $0 = \epsilon u_\epsilon + Au_\epsilon + Bu_\epsilon$ et que $0 \in \text{int } R(\beta)$. Comme dans l'étape 4 de la démonstration du Théorème 1 on conclut à l'existence d'une fonction u de $L^2((0, \pi) \times (0, 2\pi))$ telle que

$$\alpha) \quad Au + Bu = 0$$

$$\beta) \quad \phi(u) = \max_{x_1 \in H_1} \inf_{x_2 \in H_2} \phi(x_1 + x_2).$$

Mais comme dans la démonstration du Théorème 3 on montre que :

$$\max_{x_1 \in H_1} \inf_{x_2 \in H_2} \phi(x_1 + x_2) > 0$$

et donc $u \neq 0$. Ce qui termine la démonstration de la Proposition 3.

Remarques.

1. Si $u = u_1 + u_2$ avec $u_1 \in H_1$ et $u_2 \in H_2$ il est montré dans [2] que u_1 est continue et u_2 dans $L^\infty((0, \pi) \times (0, 2\pi))$.

2. De nombreux auteurs ont déjà étudié le problème de l'existence de solutions non triviales de (37). Citons en particulier H. Brézis et Nirenberg dans [6], H. Amann dans [1] et P.H. Rabinowitz dans [14] avec des hypothèses voisines sauf dans [14] : P.H. Rabinowitz fait des hypothèses de croissance inverses sur β en 0 et à l'infini : $\beta(x) = o(|x|)$ en 0, et à l'infini $\exists \bar{x} > 0 \quad \exists \theta \in]\theta, \frac{1}{2}[$ tels que

$$|x| > \bar{x} \Rightarrow f(x) = \int_0^x \beta(s) ds \leq \theta x f(x) ; \beta \text{ étant de plus strictement croissante et de classe } C^2, \text{ P.H. Rabinowitz}$$

montre alors l'existence d'une solution non triviale.

REFERENCES

- [1] H. AMANN. «*Saddle points and multiple solutions of differential equations*». à paraître.
- [2] A. BAHRI, H. BREZIS. «*Periodic solutions of a nonlinear wave equation*». à paraître.
- [3] A. BAHRI et J.L. MOREL. «*Image de la somme de deux opérateurs*». C.R. Acad. Sc. Paris 287 (1978) p. 719-722.
- [4] M.S. BERGER et M. SCHECHTER. «*On the solvability of semilinear gradient operator equations*». Advances in Math. 25 (1977), pp. 97-132.
- [5] H. BREZIS et L. NIRENBERG. «*Characterizations of the ranges of some nonlinear operators and applications to boundary value problems*». Annali Sc. Norm. Sup. di Pisa, serie IV, V, (1978) pp. 225-326.
- [6] H. BREZIS et L. NIRENBERG. «*Forced vibrations for a nonlinear wave equation*». Comm. Pure Appl. Math. 31 (1978) pp. 1-30.
- [7] H. BREZIS et L. NIRENBERG. «*Image d'une somme d'opérateurs non linéaires et applications*» C.R. Acad. Sc. Paris, t. 284 (1977) pp. 1365-1368.
- [8] A. CASTRO et A.C. LAZER. «*Applications of a Max Min principle*». Rev. Colombiana de Mat., 10 (1976) pp. 141-149.
- [9] F.H. CLARKE. «*Periodic solutions to Hamiltonian inclusions*». à paraître.
- [10] F.H. CLARKE et I. EKELAND. «*Hamiltonian trajectories having prescribed minimal period*». Comm. Pure Appl. Math.
- [11] I. EKELAND. «*Periodic solutions of Hamilton's equations and a theorem of P. Rabinowitz*». J. Diff. Eq.
- [12] A. LAZER, E. LANDESMAN et D. MEYERS. «*On saddle point problems in the calculus of variations, the Ritz algorithm, and monotone convergence*». J. Math. Anal. Appl. 53 (1975) pp. 594-614.
- [13] P.H. RABINOWITZ. «*A variational method for finding periodic solutions of differential equations*». MRC Report 1854 (May 1978).

- [14] P.H. RABINOWITZ. «*Free vibrations for a semi linear wave equation*». Comm. Pure. Appl. Math., 31 (1978) pp. 31-68.
- [15] P.H. RABINOWITZ. «*Periodic solutions of Hamiltonian systems*». Comm. Pure. Appl. Math., 31 (1978) pp. 157-184.

(Manuscrit reçu le 19 juillet 1979)