

Sur le choix de quelles topologies sur un espace vectoriel ou un module

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 4^e série, tome 29 (1965), p. 17-34

http://www.numdam.org/item?id=AFST_1965_4_29__17_0

© Université Paul Sabatier, 1965, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LE CHOIX DE QUELQUES TOPOLOGIES SUR UN ESPACE VECTORIEL OU UN MODULE

INTRODUCTION

L'analogie remarquable existant entre les topologies linéaires séparées d'un espace vectoriel sur un corps discret, ([7]) et les topologies localement convexes séparées d'un espace vectoriel sur $\mathcal{R}$ ou $\mathcal{C}$, semble être due principalement au fait qu'il existe une dualité véritable, tant entre un espace vectoriel linéairement topologisé et son dual topologique, qu'entre un espace vectoriel localement convexe séparé et son dual topologique.

La démonstration de l'existence de la première dualité est triviale, celle de la seconde est une conséquence du théorème de Hahn-Banach. Ayant été invitée par M. le Professeur MASCART à examiner des espaces vectoriels topologiques moins particuliers, j'ai donc été amenée à étudier des topologies n'entraînant pas en général une dualité véritable entre un espace et son « dual » topologique. J'ai donc examiné (chap. I) certaines σ -topologies sur un espace vectoriel sur $\mathcal{R}$ ou $\mathcal{C}$, préalablement muni d'une topologie quelconque d'espace vectoriel.

J'ai ensuite remarqué que les formes coordonnées, relatives à une base algébrique d'un espace vectoriel E , constituent une base continue de son dual algébrique E^* , ([6]), muni de la topologie linéaire faible (lequel E^* est le dual topologique de E muni de la topologie notée $\mathcal{T}_\ell$, (E^*, E) par KÖTHE). J'ai donc cherché (chap. II) à définir des topologies, ayant la même propriété, sur les duals topologiques d'espaces vectoriels différents : espaces vectoriels E , sur un corps valué, munis d'une topologie telle que les formes coordonnées, relatives à une base algébrique, soient des éléments du dual topologique de E . J'ai obtenu comme cas particulier, un résultat pour le dual topologique d'un espace vectoriel localement convexe, analogue à celui existant pour le dual topologique d'un espace vectoriel linéairement topologisé. ([5])

Enfin l'analogie du théorème de Mackey-Arens, dans le cas des espaces vectoriels linéairement topologisés, étant obtenu à l'aide de la considération des compacité linéaires, j'ai cherché (chap. III) à étudier des « P-compacités » sur des modules topologiques, où P désigne une propriété non nécessairement algébrique, mais vérifiant certains axiomes des variétés linéaires.

CHAPITRE PREMIER

Notations.

Soient E un espace vectoriel sur $\mathcal{R}$ ou $\mathcal{C}$, T une topologie sur E compatible avec sa structure d'espace vectoriel et E'_T le dual topologique de E . Il n'est fait aucune autre hypothèse sur T , donc E et E'_T ne sont pas nécessairement en dualité.

D'une façon générale A (resp A') étant une partie de E (resp E'_T), $W'(A, \varepsilon)$ (resp $W(A', \varepsilon)$) sera l'ensemble des u de E'_T (resp x de E) tels que $|ux| < \varepsilon \quad \forall x \in A$ (resp $\forall u \in A'$).

S étant un ensemble de parties bornées de E , pour tout élément B de S et tout nombre ε positif, les ensembles $W'(B, \varepsilon)$ définissent une S -topologie sur E'_T (topologie pour laquelle le filtre des voisinages de l'origine est engendré par les ensembles $W'(B, \varepsilon)$). Cette topologie sur E'_T sera notée $T'(S)$.

De même S' étant un ensemble de parties bornées de E'_T , muni de la topologie $T'(S)$, pour tout élément B' de S' et tout nombre ε positif, les ensembles $W(B', \varepsilon)$ définissent une S' -topologie sur E , qui sera notée $T(S')$. $\mathfrak{B}_T(0)$ sera le filtre des voisinages de l'origine dans E muni de T .

Remarque 1.1.

Quel que soit S $T'(S)$ est compatible avec la structure d'espace vectoriel de E'_T . Par contre $T(S')$ n'est pas nécessairement compatible avec la structure d'espace vectoriel de E . (Un ensemble $W(B', \varepsilon)$ n'est pas nécessairement absorbant) On définira cependant les parties bornées de E comme s'il en était ainsi :

$\mathcal{V}_{T(S')}(0)$ désignant le filtre des voisinages de l'origine dans E , muni de $T(S')$, on dira qu'une partie A de E est bornée pour $T(S')$ si :

$$\forall V \in \mathcal{V}_{T(S')}(0) \quad \exists \lambda > 0 \text{ tel que } \lambda A \subset V.$$

Remarque 1.2.

T et S étant fixés, soit S' un ensemble de parties bornées de E'_T muni de $T'(S)$. $E'_{T(S')}$ et E'_T sont alors généralement distincts. Cependant si l'ensemble des éléments de S' engendre E'_T on a alors $E'_T \subset E'_{T(S')}$

En effet soit u un élément de E'_T . Il existe alors un nombre fini n d'éléments B'_i de S' tels que $u = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i$ avec $u_i \in B'_i$ ($1 \leq i \leq n$). Si

l'on pose $\lambda = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|$ alors quel que soit ε positif :

$$x \in \bigcap_{1 \leq i \leq n} W(B'_i, \frac{\varepsilon}{\lambda}) \text{ implique } |ux| < \varepsilon$$

donc $u \in E'_{T(S')}$.

Proposition 1.1.

S étant fixé, les éléments B de S et les ensembles W [W' (B, η_1), η_2], où η_1 et η_2 sont deux nombres positifs, sont bornés pour toute S'-topologie sur E.

Démonstration.

Soient S' un ensemble de parties bornées de E'_T , muni de la topologie T' (S), B' un élément de S' et ε un nombre positif.

On veut montrer que, pour tout B $\in$ S, $\eta_1 > 0$ et $\eta_2 > 0$, existent λ et μ positifs tels que :

$$(1) \quad \lambda B \subset W(B', \varepsilon) \quad (2) \quad \mu W[W'(B, \eta_1), \eta_2] \subset W(B', \varepsilon).$$

Or il existe λ positif que $\lambda B' \subset W'(B, \varepsilon)$, ou ce qui est équivalent : $\lambda B \subset W(B', \varepsilon)$. Un tel λ vérifie donc (1).

D'autre part il existe λ' tel que $\lambda' B' \subset W'(B, \eta_1)$. Montrons que

$\mu = \lambda \times \frac{\varepsilon}{\eta_2}$ vérifie (2). Or :

$$\lambda' B' \subset W'(B, \eta_1) \implies \lambda' W[W'(B, \eta_1), \varepsilon] \subset W(B', \varepsilon)$$

et

$$W[W'(B, \eta_1), \varepsilon] = \frac{\varepsilon}{\eta_2} W[W'(B, \eta_1), \eta_2]$$

on vérifie donc bien (2) en faisant $\mu = \lambda' \frac{\varepsilon}{\eta_2}$.

Proposition 1.2.

Les ensembles $W'(V, \eta)$, avec $V \in \mathfrak{B}_T(0)$ et $\eta > 0$, sont bornés pour toute S-topologie sur E'_T .

Démonstration.

Soient S un ensemble de parties bornées de E, B un élément de S, et ε un nombre positif.

On veut montrer qu'il existe un nombre positif λ tel que :

$$\lambda W'(V, \eta) \subset W'(B, \varepsilon) \quad (1)$$

Or il existe λ' positif tel que $\lambda' B \subset V$. Prouvons que $\lambda = \lambda' \frac{\varepsilon}{\eta}$ vérifie (1).

En effet :

$$\lambda' B \subset V \implies \lambda' W'(V, \varepsilon) \subset W'(B, \varepsilon)$$

et

$$W'(V, \varepsilon) = \frac{\varepsilon}{\eta} W'(V, \eta)$$

Donc :

$$\lambda' \cdot \frac{\varepsilon}{\eta} W'(V, \eta) \subset W'(B, \varepsilon)$$

Notation.

Une partie de E'_T sera dite τ -équicontinue, si elle est équicontinue relativement à la topologie τ sur E .

Proposition 1.3.

Il existe une S' -topologie sur E satisfaisant aux conditions suivantes :

- 1) $T(S')$ est compatible avec la structure d'espace vectoriel de E ;
- 2) $E'_{T(S')} = E'_T$;
- 3) Pour les parties de E' , notation commune pour $E'_{T(S')}$ et E'_T , la $T(S')$ -équicontinuité équivaut à la T -équicontinuité.

Démonstration

Soit S' , l'ensemble des $W'(V, \eta)$ avec $V \in \mathcal{V}_T(0)$ et $\eta > 0$.

Les éléments de S' sont bornés pour toute S -topologie sur E'_T , donc les éléments de S' engendrent le filtre des voisinages de l'origine pour une S' -topologie sur E . Montrons que cette topologie $T(S')$ satisfait aux conditions 1), 2) et 3).

1) Pour vérifier que $T(S')$ est compatible avec la structure d'espace vectoriel de E , montrons que $T(S')$ est moins fine que la topologie initiale T . Pour cela considérons un ensemble $W[W'(V, \eta), \varepsilon]$, avec $V \in \mathcal{V}_T(0)$, $\varepsilon > 0$ et $\eta > 0$. On a alors :

$$W[W'(V, \eta), \varepsilon] = \frac{\varepsilon}{\eta} W[W'(V, \eta), \eta]$$

et

$$\frac{\varepsilon}{\eta} W[W'(V, \eta), \eta] \supset \frac{\varepsilon}{\eta} V$$

Mais $\frac{\varepsilon}{\eta} V$ est un élément de $\mathcal{V}_T(0)$, car le filtre $\mathcal{V}_T(0)$ est invariant par homothétie. Tout voisinage de l'origine dans E , muni de $T(S')$, est donc bien un voisinage de l'origine dans E , muni de T .

2) Montrons à présent que les éléments de S' constituent un recouvrement de E'_T .

Soit en effet u un élément de E'_T ; alors, par définition même de E'_T :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists V \in \mathcal{V}_T(0) \text{ tel que } u \in W'(V, \varepsilon)$$

D'après la remarque 1.2 on a donc $E'_T \subset E'_{T(S')}$. D'autre part, $T(S')$ étant moins fine que T , on a également $E'_{T(S')} \subset E'_T$. Donc $E'_{T(S')} = E'_T$: nous les confondrons maintenant dans la notation E' .

3) $T(S')$ étant moins fine que T , toute partie $T(S')$ -équicontinue de E' est également une partie T -équicontinue de E' .

Réciproquement, soit H une partie T -équicontinue de E' ; alors :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists V \in \mathcal{V}_T(0) \text{ tel que } H \subset W'(V, \varepsilon)$$

ce qui entraîne :

$$\forall \varepsilon > 0, x \in W [W' (V_\varepsilon, \varepsilon), \varepsilon] \implies |ux| < \varepsilon \quad \forall u \in H$$

autrement dit, H est aussi $T(S'_0)$ -équicontinue.

Donc, pour une partie H de E' , la $T(S'_0)$ -équicontinuité équivaut à la T -équicontinuité.

CHAPITRE II

1. — RAPPELS

Définition 2.1.1.

Soient A un ensemble filtrant à droite et M un ensemble quelconque. Pour toute application f de A dans M , le sous-ensemble $\{f(\alpha)\}_{\alpha \in A}$ est dit système filtrant à droite dans M .

Proposition 2.1.1.

A tout filtre sur M , on peut associer un système filtrant à droite dans M ; inversement à tout système filtrant à droite dans M , on peut associer un filtre sur M .

Démonstration (esquissée dans [6]).

Soit $\mathcal{F} = (F_\alpha)_{\alpha \in A}$ un filtre sur M . L'ensemble A est filtrant à droite pour la relation de préordre, notée $\leq$, et définie par :

$$\alpha \leq \beta \iff F_\beta \subset F_\alpha.$$

L'axiome du choix permet d'affirmer l'existence d'une application f de A dans $\bigcup_{\alpha \in A} F_\alpha$, telle que $f(\alpha) = x_\alpha \in F_\alpha$, $\forall \alpha \in A$.

Alors, $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ est un système filtrant à droite dans M : c'est ce que nous appellerons un système filtrant associé au filtre $\mathcal{F}$.

Inversement soit $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ un système filtrant à droite dans M . Les ensembles $B_\alpha = \{x_\beta \mid \beta \geq \alpha\}$ constituent une base $\mathcal{B}$ de filtre sur M . Le filtre de base $\mathcal{B}$ est dit filtre associé au système filtrant à droite $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$.

Définition 2.1.2.

Soit X un espace topologique et $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ un système filtrant à droite dans X . On dit que $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ converge vers un élément x de X si et seulement si :

$$\forall V \in \mathcal{T}(x), \exists \beta(V) \in A \text{ tel que } \alpha \geq \beta(V) \implies x_\alpha \in V.$$

Proposition 2.1.2.

Pour qu'un filtre $\mathcal{F}$ sur un espace topologique X converge vers un point x de X , il faut et il suffit que tout système filtrant associé à $\mathcal{F}$ converge vers x .

Démonstration (non donnée dans [6]).

Soient $\mathcal{F} = (F_\alpha)_{\alpha \in A}$ un filtre sur X convergeant vers x , et $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ un système filtrant associé à ce filtre.

Pour tout voisinage V de x , il existe un élément $\beta(V)$ de A tel que $F_{\beta(V)}$ soit contenu dans V , donc tel que :

$$\alpha \geq \beta(V) \implies x_\alpha \in V.$$

Inversement soit $\mathcal{F} = (F_\alpha)_{\alpha \in A}$ un filtre sur X ne convergeant pas vers x . Il existe donc un voisinage V de x , tel que F_α ne soit contenu dans V pour aucun $\alpha \in A$. Donc, toujours d'après l'axiome du choix, il existe une application f de A dans $\bigcup_{\alpha \in A} (F_\alpha \cap [x]V)$ telle que, pour tout $\alpha \in A$,

$f(\alpha) \in F_\alpha \cap [x]V$; autrement dit, il existe un système filtrant associé à $\mathcal{F}$ et ne convergeant pas vers x .

Définition 2.1.3.

Soit $(x_i)_{i \in I}$ une partie de G , groupe additif abélien, muni d'une topologie séparée de groupe topologique.

Soit $\mathcal{F}(I)$ l'ensemble des parties finies de I . A tout $\mathcal{g} \in \mathcal{F}(I)$, on associe l'ensemble $M_{\mathcal{g}}$ des sommes partielles $\sum_{j \in \mathcal{g}} x_j + \sum_{j' \in \mathcal{g}'} x_{j'}$, où $\mathcal{g}' \in \mathcal{F}(I - \mathcal{g})$,

en convenant de poser $\sum_{j \in \emptyset} x_j = 0$.

Si le filtre de base $(M_{\mathcal{g}})_{\mathcal{g} \in \mathcal{F}(I)}$ converge vers un point x de G , on dit que x est somme topologique des x_i , et l'on écrit $x = \sum_i x_i$.

2. — BASES CONTINUES

Définition 2.2.1.

E représentant un espace vectoriel topologique séparé sur un corps K , on dit qu'un sous-ensemble $(x_i)_{i \in I}$ de E est une base continue de cet espace si

- 1) tout x de E est, d'une façon et d'une seule, un somme topologique $\sum_i \lambda_i x_i$ (où $\lambda_i \in K$);
- 2) pour tout $i \in I$ l'application linéaire $x \rightsquigarrow \lambda_i$ est continue.

Remarque 2.2.1.

Soit E un espace vectoriel topologique séparé de base continue $(x_i)_{i \in I}$. Un élément x de E s'écrit alors $x = \sum_i \lambda_i x_i$, et on voit en particulier que le système filtrant $\left(\sum_{j \in \mathcal{g}} \lambda_j x_j \right)_{\mathcal{g} \in \mathcal{F}(I)}$ converge vers x .

Remarque 2.2.2.

On ignore si tout espace vectoriel admet une base continue. Dans certains cas simples on a cependant pu construire de telles bases. Par

exemple (1), soit E^* le dual algébrique, muni de la topologie linéaire faible, d'un espace vectoriel E sur un corps K discret : les formes coordonnées relatives à une quelconque base algébrique de E constituent une base continue de E^* [6].

Nous allons considérer un espace vectoriel E sur un corps K valué *non discret*. Les formes coordonnées, relatives à *une* base algébrique de E , constituent pour certaines topologies sur E dépendant de cette base, une base continue du dual topologique, muni de la topologie de la convergence simple. Ce résultat ne sera plus nécessairement vrai pour une topologie strictement plus fine. Comme cas particulier, si $K = \mathcal{R}$ ou $\mathcal{C}$ et si E est muni d'une topologie localement convexe séparée, nous obtiendrons un résultat analogue à celui cité en (1).

Définition.

On considère un espace vectoriel E de dimension infinie sur un corps K valué non discret. Soient $(X_i)_{i \in I}$ une base algébrique de E , $(U_i)_{i \in I}$ la famille des formes coordonnées correspondantes; soit $\mathcal{Q}$ l'ensemble des topologies sur E compatibles avec sa structure d'espace vectoriel et pour lesquelles chaque application U_i est continue.

Pour tout $T \in \mathcal{Q}$, on désigne par E'_T (comme au chap. I) le dual topologique de E , muni de la topologie T , par S_T un ensemble de parties de E satisfaisant à :

α : tout élément B de S_T est borné pour T , et contenu dans un sous-espace vectoriel de E de dimension finie;

β : pour tout $i \in I$, il existe $B \in S_T$ tel que $x_i \in B$.

Remarque 2.2.3.

Si $K = \mathcal{R}$ ou $\mathcal{C}$, d'après le théorème de Hahn-Banach, l'ensemble des topologies localement convexes séparées sur E est contenu dans $\mathcal{Q}$.

D'autre part l'hypothèse de continuité de tous les u_i entraîne que tout élément de $\mathcal{Q}$ est une topologie séparée sur E . En effet :

$$\forall x \in E, x \neq 0, \exists i \in I \text{ tel que } u_i x \neq 0$$

il existe donc un voisinage V_i de l'origine ne contenant pas x .

Par contre une topologie séparée sur E n'est pas en général un élément de $\mathcal{Q}$, comme le montre l'exemple de l'espace vectoriel $L^p (0 < p < 1)$ muni de la topologie habituelle. Toute forme linéaire continue sur L^p est en effet identiquement nulle [8].

Remarque 2.2.4.

T étant un élément fixé de $\mathcal{Q}$, il n'existe qu'une S_T -topologie sur E'_T . Cette S_T -topologie est la topologie de la convergence simple.

En effet soit S_T un ensemble de parties de E satisfaisant à α et β . Notons $T'(S_T)$ la topologie sur E'_T associée à S_T .

Considérons un sous-ensemble $W'(x, \varepsilon)$ de E'_T avec $x \in E$ et $\varepsilon > 0$. Il existe alors $\mathcal{g} \in \mathfrak{F}(I)$ tel que $x = \sum_{j \in \mathcal{g}} \lambda_j x_j$ avec $\lambda_j \in K$. En outre d'après

β :

$$\forall j \in \mathcal{g}, \exists B(j) \in S_T \text{ tel que } x_j \in B(j) \text{ on a alors :}$$

$$W'(x, \varepsilon) \supset \bigcap_{j \in \mathcal{g}} W' \left(B(j), \frac{\varepsilon}{\sum |\lambda_j|} \right)$$

La topologie de la convergence simple est alors moins fine que $T'(S_T)$.

Inversement soient B un élément de S_T et ε un nombre positif. Il existe alors $\mathcal{g} \in \mathfrak{F}(I)$ tel que B soit contenu dans le sous-espace vectoriel de E engendré par les x_j tels que j appartienne à $\mathcal{g}$. B est donc une partie bornée d'un sous-espace vectoriel de E de dimension finie. Il existe donc un nombre α positif tel que :

$$\sum_{j \in \mathcal{g}} \lambda_j x_j \in B \implies \sum_{j \in \mathcal{g}} |\lambda_j| < \alpha \text{ ce qui entraîne :}$$

$$W'(B, \varepsilon) \supset \bigcap_{j \in \mathcal{g}} W'(x_j, \frac{\varepsilon}{\alpha})$$

Donc $T'(S_T)$ est moins fine que la topologie de la convergence simple. Il y a donc bien identité entre ces deux topologies.

Proposition 2.2.1.

La famille $(u_i)_{i \in I}$ est une base continue de E'_T pour toute S_T -topologie telle que $T \in \mathcal{Q}$.

Démonstration.

u étant un élément quelconque de E'_T , on pose $u x_i = \lambda_i$.

1) Au sens de la somme topologique pour une S_T -topologie telle que $T \in \mathcal{Q}$, on a $u = \sum_i \lambda_i u_i$. En effet pour tous $B \in S_T$ et $\varepsilon > 0$, désignons, comme au chap. I, par $W'(B, \varepsilon)$ l'ensemble des $v \in E'_T$ tels que $|vx| < \varepsilon$ pour tout $x \in B$.

Soit alors $M_{\mathcal{g}}$, pour $\mathcal{g} \in \mathfrak{F}(I)$, l'ensemble des sommes :

$$\sum_{j \in \mathcal{g}} \lambda_j u_j + \sum_{j' \in \mathcal{g}'} \lambda_{j'} u_{j'} \quad \text{où } \mathcal{g}' \in \mathfrak{F}(I - \mathcal{g})$$

D'après α , quel que soit $W'(B, \varepsilon)$, il existe $\mathcal{g}(B) \in \mathfrak{F}(I)$, tel que B soit inclus dans le sous-espace vectoriel de E engendré par $(x_j)_{j \in \mathcal{g}(B)}$; on a alors :

$$M_{\mathcal{g}(B)} \subset u + W'(B, \varepsilon).$$

En effet, un élément x de B est une combinaison linéaire des x_j tels que $j \in \mathcal{g}(B)$; donc, pour tout élément v de $M_{\mathcal{g}(B)}$, on a :

$$vx = \sum_{j \in \mathcal{g}(B)} \lambda_j u_j x = ux$$

d'où $(v - u)x = 0$.

Donc le filtre de base $(M_g)_{g \in \mathcal{F}(I)}$ converge vers u .

2) Cette décomposition est unique.

Soit en effet, $(\mu_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de K distincte de $(\lambda_i)_{i \in I}$: il existe $k \in I$ tel que $|\lambda_k - \mu_k| = \alpha > 0$. Soient M'_g les sommes analogues aux M_g pour cette nouvelle famille de coefficients. D'après β , il existe $B(k) \in S_T$ tel que $x_k \in B(k)$. Or quel que soit $g \in \mathcal{F}(I)$, il existe $V_g \in M'$ tel que $|v_g x_k - u x_k| = |\lambda_k - \mu_k| = \alpha$, ce qui entraîne qu'aucun des M'_g n'est contenu dans $u + W'(B(k), \alpha)$. Le filtre de base $(M'_g)_{g \in \mathcal{F}(I)}$ ne converge donc pas vers u .

3) Pour tout $i \in I$, l'application $u \rightsquigarrow \lambda_i$ est continue.

Il suffit de vérifier sa continuité à l'origine. Or, toujours d'après β , il existe $B(i) \in S_T$, tel que $x_i \in B(i)$: alors pour tout $\varepsilon > 0$, $u \in W'(B(i), \varepsilon)$ implique $|\lambda_i| < \varepsilon$.

Proposition 2.2.2.

La famille $(u_i)_{i \in I}$ n'est pas nécessairement une base continue, pour une topologie strictement plus fine qu'une S_T -topologie telle que $T \in \mathcal{Q}$.

Démonstration.

L'application de E dans R^+

$$x = \sum_{i \in I} \lambda_i x_i \rightsquigarrow \sum_{i \in I} |\lambda_i|$$

est une norme sur E . T désignera la topologie sur E associée à cette norme. T est un élément de $\mathcal{Q}$. Les formes coordonnées $(u_i)_{i \in I}$ constituent donc une base continue de E'_T pour la S_T -topologie.

Soit A l'ensemble $(x_i)_{i \in I'}$ où I' est une partie infinie de I . A est contenu dans la sphère unité de E . Soit alors T' une S -topologie sur E'_T avec $A \in S$. Les formes coordonnées $(u_i)_{i \in I}$ ne constituent pas une base continue de E'_T pour la topologie T' . Considérons en effet l'élément u de E'_T défini par :

$$ux = u \left(\sum_{i \in I} \lambda_i x_i \right) = \sum_{i \in I} \lambda_i,$$

et supposons que les u_i constituent une base continue de E'_T pour la topologie T' . Alors, T' étant plus fine que la S_T -topologie, u est la somme topologique $\sum_i u_i$.

Donc si M_g est l'ensemble des sommes partielles $\sum_{j \in g} u_j + \sum_{j \in g} u_j$,

pour

$g \in \mathcal{F}(I)$ et $g' \in \mathcal{F}(I - g)$ le filtre de base $\mathfrak{M} = (M_g)_{g \in \mathcal{F}(I)}$ converge vers u .

Montrons que cette dernière affirmation est fausse.

Il suffit pour cela de vérifier qu'aucun M_g n'est contenu dans $u + W'(A, 1)$. Or, g étant un élément quelconque de $\mathcal{F}(I)$, il existe $k \in I'$ tel que k

n'appartienne pas à $\mathcal{G}$, et $\mathcal{G}' \in \mathfrak{F}(I - \mathcal{G})$ tel que k n'appartienne pas à $\mathcal{G}'$; on a alors :

$$\left| \sum_{j \in \mathcal{G}} u_j x_k + \sum_{j' \in \mathcal{G}'} u_{j'} x_k - u x_k \right| = 1$$

Ce qui prouve que $M_{\mathcal{G}}$ n'est pas contenu dans $u + W'(A, 1)$.

Remarque 2.2.5.

En fait on a établi un résultat plus précis; la famille $(u_i)_{i \in I}$ n'est même pas nécessairement une base continue de E'_x pour une S -topologie strictement plus fine que la S_x -topologie. En effet, il existe alors un élément de S contenant une infinité d'éléments de E linéairement indépendants.

CHAPITRE III

1. — DÉFINITION ET ÉTUDE DE QUELQUES PROPRIÉTÉS DE LA P-COMPACTITÉ

Axiomes 3.1.1.

A étant un anneau commutatif topologique, on désigne par $\mathcal{G}_A$ la catégorie dont les objets sont les A-modules topologiques séparés, et dont les morphismes sont les homomorphismes continus.

(Si $A = \mathbb{Z}$, un objet de $\mathcal{G}_A$ est un groupe topologique abélien).

Soient G un objet de $\mathcal{G}_A$, G' un sous-ensemble de G et P une propriété de certains sous-ensembles de G. On appellera P-parties de G les parties de G possédant cette propriété; P-parties de G' les P-parties de G contenues dans G' ; P-filtres sur G (resp G') les filtres ayant une base formée de P-parties de G (resp G'); ultra-P-filtres sur G (resp G') les éléments maximaux de l'ensemble des P-filtres sur G (resp G').

On impose à la propriété P de vérifier les axiomes suivants :

- P_1 : toute translatée d'une P-partie est une P-partie
- P_2 : l'intersection de deux P-parties est une P-partie.
- P_3 : l'adhérence d'une P-partie est une P-partie.
- P_4 : la symétrique d'une P-partie est une P-partie.

Définition 3.1.1.

Un objet G de $\mathcal{G}_A$ est dit localement-P s'il possède un système fondamental de P-voisinages de l'origine.

Remarques 3.1.1.

Un objet G localement-P de $\mathcal{G}_A$ possède un système fondamental de P-voisinages de l'origine symétrique et fermés.

Soit en effet $\mathcal{V}(0)$ le filtre des voisinages de l'origine dans G.

Si V est un élément de $\mathcal{V}(0)$, il existe alors un élément W symétrique et fermé de $\mathcal{V}(0)$, et un P-élément W_p de $\mathcal{V}(0)$, tels que

$$W_p \subset W \subset V$$

ce qui entraîne :

$$\overline{W_p} \cap (-\overline{W_p}) \subset W \subset V$$

où $\overline{W_p} \cap (-\overline{W_p})$ est un P-élément symétrique et fermé de $\mathcal{V}(0)$.

Définition 3.1.2.

Soient G un objet de $\mathcal{G}_A$ et P une propriété (satisfaisant à P_1 , P_2 , P_3 et P_4) de certains sous-ensembles de G. Une partie G' de G est alors dite P-compacte si tout P-filtre sur G' admet un point adhérent.

Proposition 3.1.1.

Toute P-partie P-compacte d'un objet G localement-P de $\mathcal{G}_A$ est un sous-espace complet de G.

Démonstration.

Soient G' une P-partie P-compacte de G, $\mathcal{F} = (F_\gamma)_\gamma \in \Gamma$ un filtre de Cauchy sur G' , et $\mathcal{V}(0)$ un système fondamental de P-voisinages de l'origine dans G, fermées et symétriques.

Puisque $\mathcal{F}$ est un filtre de Cauchy sur G' , ses éléments vérifient la propriété suivante :

$$\forall V \in \mathcal{V}(0), \exists \gamma \in \Gamma \text{ tel que } F_\gamma - F_\gamma \subset V \quad (1)$$

On considère une application T de $\mathcal{V}(0)$ dans $\mathcal{V}(0)$ qui vérifie la condition suivante :

$$\forall V \in \mathcal{V}(0), T(V) + T(V) \subset V$$

on note alors $\gamma[T(V)]$ l'ensemble, non vide d'après (1), de tous les $\gamma \in \Gamma$ tels que

$$F_\gamma - F_\gamma \subset T(V)$$

Choisissant dans chaque F_γ un élément f_γ , on va montrer que l'ensemble

$$\mathcal{B} = \left\{ (f_\gamma + V) \cap G' \mid \begin{array}{l} \gamma \in \gamma[T(V)] \\ V \in \mathcal{V}(0) \end{array} \right\}$$

est une base de P-filtre sur G' .

On voit immédiatement que ses éléments sont des P-parties de G et sont tous non vides.

Reste à vérifier que l'intersection de deux éléments de $\mathcal{B}$ contient un élément de $\mathcal{B}$.

Soient donc V_1 et V_2 deux éléments de $\mathcal{V}(0)$, γ_1 un élément de $\gamma[T(V_1)]$ et γ_2 un élément de $\gamma[T(V_2)]$. On va montrer qu'il existe :

$$\gamma \in \gamma[T(T(V_1) \cap T(V_2))]$$

tel que :

$$(f_{\gamma_1} + T(V_1) \cap T(V_2)) \cap G' \subset (f_{\gamma_1} + V_1) \cap (f_{\gamma_2} + V_2) \cap G'$$

On cherche donc un $\gamma \in \gamma[T(T(V_1) \cap T(V_2))]$ tel que pour tout $f \in F_\gamma$ on ait :

$$(f + T(V_1) \cap T(V_2)) \cap G' \subset (f_{\gamma_1} + V_1) \cap (f_{\gamma_2} + V_2) \cap G'$$

Montrons que tout $\gamma \in \gamma[T(T(V_1) \cap T(V_2))]$ tel que $F_\gamma \subset F_{\gamma_1} \cap F_{\gamma_2}$ est solution. Considérons en effet un tel γ et un élément f de F_γ . Il suffit de vérifier que :

$$f + T(V_1) \cap T(V_2) \subset f_{\gamma_i} + V_i \quad (i = 1, 2)$$

ou ce qui est équivalent :

$$f - f\gamma_i + T(V_1) \cap T(V_2) \subset V_i \quad (i = 1, 2)$$

Or on a :

$$f - f\gamma_i \in F\gamma_i - F\gamma_i \subset T(V_i) \quad (i = 1, 2)$$

$$\text{d'où } f - f\gamma_i + T(V_1) \cap T(V_2) \subset T(V_i) + T(V_1) \cap T(V_2) \subset T(V_i) \\ + T(V_i) \subset V_i \quad (i = 1, 2)$$

c'est-à-dire

$$f + T(V_1) \cap T(V_2) \subset f\gamma_i + V_i \quad (i = 1, 2)$$

$\mathcal{B}$ est donc une base de P-filtre sur G' . Il s'ensuit, les éléments de $\mathcal{B}$ étant fermés dans G' , qu'il existe un point x commun à tous les éléments de $\mathcal{B}$. Montrons que $\mathcal{F}$ converge vers x . Pour cela il suffit de vérifier que, pour tous $V \in \mathcal{V}(0)$ et $\gamma \in \gamma[T(T(V))]$, on a $F\gamma \subset (x + V) \cap G'$. Or pour tout tel γ , on a, puisque les éléments de $\mathcal{V}(0)$ sont fermés :

$$x \in (f\gamma + T(V)) \cap G' \subset (F\gamma + T(V)) \cap G'$$

d'où

$$F\gamma - x \subset F\gamma - F\gamma + T(V) \subset T(V) + T(V) \subset V$$

c'est-à-dire

$$F\gamma \subset (x + V) \cap G' \quad \text{q.e.d.}$$

Proposition 3.1.2.

Tout objet localement-P et P-compact de $\mathcal{G}_A$ est complet.

La démonstration est entièrement analogue.

Proposition 3.1.3.

Pour tout P-filtre $\mathcal{F}$ sur un objet G de $\mathcal{G}_A$, il existe un ultra-P-filtre sur G plus fin que $\mathcal{F}$.

Démonstration

D'après le théorème de Zorn, il suffit de montrer que toute famille totalement ordonnée de P-filtres plus fins que $\mathcal{F}$ est majoré dans l'ensemble des P-filtres plus fins que $\mathcal{F}$.

Soient $(\mathcal{F}_i)_{i \in I}$ une telle famille, et $(\mathcal{B}_i)_{i \in I}$ la famille des bases des $\mathcal{F}_i$ formées de P-parties. L'ensemble $\mathcal{B}$ de tous les éléments de toutes les bases $\mathcal{B}_i$ engendre alors, d'après P_2 , un P-filtre plus fin que $\mathcal{F}$ et que tous les $\mathcal{F}_i$. Ce P-filtre majore donc la famille $(\mathcal{F}_i)_{i \in I}$.

Proposition 3.1.4.

Si G' est une P-partie d'un objet localement-P de $\mathcal{G}_A$, ou un objet localement-P de $\mathcal{G}_A$, les deux propriétés suivantes sont équivalentes.

(1) Tout P-filtre sur G' admet un point adhérent,

(2) Tout ultra-P-filtre sur G' est convergent.

Démonstration

(1) $\implies$ (2)

Soit $\mathcal{U}$ un ultra-P-filtre sur G' : d'après (1), $\mathcal{U}$ a un point adhérent x . S'il ne convergeait pas vers x , le P-filtre engendré par $\mathcal{U}$ et les P-voisinages de x serait strictement plus fin que $\mathcal{U}$.

(2) $\implies$ (1)

Soit $\mathcal{F}$ un P-filtre sur G' . Il existe alors (Proposition 3.1.3.) un ultra-P-filtre $\mathcal{U}$ plus fin que $\mathcal{F}$. $\mathcal{U}$ converge vers un point x , donc x est adhérent à $\mathcal{F}$.

Axiomes 3.1.2.

Pour pouvoir continuer à conserver une certaine analogie entre compacité et P-compacité on est amené à imposer à P les deux nouveaux axiomes suivants :

P'_5 : L'image d'une P-partie par un morphisme de $\mathcal{G}_A$ est une P-partie.

P''_5 : L'intersection d'une P-partie avec l'image réciproque d'une P-partie, par un morphisme de $\mathcal{G}_A$, est une P-partie.

Proposition 3.1.5.

L'image d'un ultra-P-filtre, par un morphisme de $\mathcal{G}_A$, est une base d'ultra-P-filtre.

Démonstration

Considérons deux objets G_1 et G_2 de $\mathcal{G}_A$ et un morphisme $f : G_1 \rightarrow G_2$.

Si $\mathcal{U}$ est un ultra-P-filtre sur G_1 , $f(\mathcal{U})$ est alors d'après P'_5 , une base de P-filtre sur G_2 . Montrons que $f(\mathcal{U})$ est une base d'ultra-P-filtre sur G_2 . Supposons qu'il n'en soit pas ainsi : il existe une P-partie F de G_2 , contenue dans $f(G)$, et telle que $f(U)$ ne soit contenu dans F pour aucun élément U de $\mathcal{U}$. Or, d'après P''_5 , il existe un P-filtre engendré par la base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{U}$ et $f^{-1}(F)$: ce P-filtre étant strictement plus fin que $\mathcal{U}$, $\mathcal{U}$ n'est pas un ultra-P-filtre.

q.e.d.

Proposition 3.1.6.

$(G'_i)_{i \in I}$ étant une famille de P-parties P-compactes d'objets localement-P de $\mathcal{G}_A$, le produit $\prod_{i \in I} G'_i$ est P-compact.

Démonstration

Soit $\mathcal{U}$ un ultra-P-filtre sur $\prod_{i \in I} G'_i$. Pour tout $i \in I$, $p_{r_i}(\mathcal{U})$ est une base d'ultra-P-filtre sur G'_i qui converge vers un point x_i de G'_i : donc, $\mathcal{U}$ converge vers $x = (x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} G'_i$.

Proposition 3.1.7.

Toute limite projective d'objets P-compacts et localement-P de $\mathcal{G}_A$ est P-compacte.

Démonstration

Soient $(G_\gamma, f_{\gamma\beta})$ un système projectif d'objets P-compacts de $\mathcal{G}_A$, relatif à un ensemble d'indice Γ , et G sa limite projective.

On sait que l'objet G de $\mathcal{G}_A$ est fermé dans $\prod_{\gamma \in \Gamma} G_\gamma$. Sa P-compacité résulte donc immédiatement de celle de $\prod_{\gamma \in \Gamma} G_\gamma$.

2. — ÉTUDE DE CERTAINES P-COMPACITÉS

On étudiera successivement les cas suivants :

- 1) La propriété P est la compacité, notée C;
- 2) La propriété P est le caractère borné, noté B;
- 3) $A = \mathcal{R}$ ou $\mathcal{C}$ et la propriété P est la convexité, notée K.

Proposition 3.2.1.1.

Tout objet de $\mathcal{G}_A$ est C-compact.

Démonstration

Soient G un objet de $\mathcal{G}_A$, $\mathcal{F}$ un C-filtre sur G et $\mathcal{B}$ une base de $\mathcal{F}$ formée de C-parties de G .

Les éléments de $\mathcal{B}$ sont fermés. Donc pour qu'un point x de G soit adhérent à $\mathcal{F}$ il faut et il suffit que x appartienne à $\bigcap_{B \in \mathcal{B}} B$. Soit B_0 un élément quelconque (mais fixé) de $\mathcal{B}$.

L'ensemble $\{B \cap B_0\}_{B \in \mathcal{B}}$ est une base de filtre sur le compact B_0 . Il existe donc $x \in \bigcap_{B \in \mathcal{B}} (B \cap B_0)$ mais $\bigcap_{B \in \mathcal{B}} (B \cap B_0) = \bigcap_{B \in \mathcal{B}} B$, donc x est adhérent à $\mathcal{F}$.

Proposition 3.2.2.1.

Pour qu'un objet de $\mathcal{G}_A$ soit B-compact il faut et suffit que toute B-partie fermée de $\mathcal{G}_A$ soit compacte.

Démonstration.

Condition nécessaire :

Soit G un objet de $\mathcal{G}_A$. S'il existe une B-partie G' de G fermée et non compacte, il existe aussi un filtre sur G' , c'est-à-dire un B-filtre sur G , sans point adhérent.

Condition suffisante :

Soit G un objet de $\mathcal{G}_A$, $\mathcal{F}$ un B -filtre sur G et $\mathcal{B}$ une base de $\mathcal{F}$ formée de B -parties de G .

Si toute B -partie fermée de G est compacte, l'ensemble des éléments de $\mathcal{B}$ constitue une base de C -filtre sur G .

Donc d'après la proposition 3.2.1.1., $\mathcal{F}$ admet un point adhérent.

Soient maintenant G un objet localement-convexe de $\mathcal{G}_A$ ($A = \mathcal{R}$ ou $\mathcal{C}$), T sa topologie et G'_T son dual topologique. On désigne par $\sigma(G'_T, G)$ la topologie affaiblie sur G .

Proposition 3.2.3.1.

Pour que G muni de la topologie localement-convexe T , soit K -compact il faut et suffit que G muni de $\sigma(G'_T, G)$ soit compact.

Cette proposition sera démontrée à l'aide des lemmes 3.2.3.1. et 3.2.3.2.

Lemme 3.2.3.1.

Pour qu'un ultrafiltre $\mathcal{U}$ sur G converge vers x_0 pour $\sigma(G'_T, G)$, il faut et il suffit que x_0 appartienne à l'intersection de tous les K -ensembles de $\mathcal{U}$ fermés pour $\sigma(G'_T, G)$.

Démonstration.

Il s'agit de l'exercice 9, § 1, chap. IV de [4].

La condition nécessaire est triviale.

Condition suffisante :

Si x_0 n'est pas adhérent à $\mathcal{U}$, il existe un K -élément de $\mathcal{U}$, fermé pour $\sigma(G'_T, G)$ et ne contenant pas x_0 . Car il existe un élément F de $\mathcal{U}$, un élément u de G'_T et un nombre ε positif tel que $[x_0 + W(u, \varepsilon)] \cap F = \emptyset$: alors, H désignant le demi-espace des x tels que $ux \geq \varepsilon$, on voit que $x_0 + H$ est l'élément de $\mathcal{U}$ cherché.

Lemme 3.2.3.2.

Pour tout ultrafiltre $\mathcal{U}$ sur G , soit $\mathcal{U}'$ le filtre ayant pour base l'ensemble des K -éléments de $\mathcal{U}$. Alors pour qu'un point x_0 de G soit limite de $\mathcal{U}$ pour $\sigma(G'_T, G)$ il faut et suffit que x_0 soit adhérent à $\mathcal{U}'$ pour T .

Il s'agit de l'exercice 2, § 2, chap. IV de [4] : c'est une conséquence immédiate du précédent, puisqu'il y a identité entre les K -parties fermées pour T et les K -parties fermées pour $\sigma(G'_T, G)$.

Démonstration de la proposition 3.2.3.1.

Condition nécessaire :

Soient $\mathcal{U}$ un ultrafiltre sur G , et $\mathcal{U}'$ le K -filtre ayant pour base l'ensemble des K -éléments de $\mathcal{U}$. Par hypothèse, $\mathcal{U}'$ admet un point

adhérent x pour T . D'après le lemme 3.2.3.2., $\mathcal{U}$ converge vers x pour $\sigma(G'_T, G)$.

Condition suffisante :

Soit $\mathcal{F}$ un K -filtre sur G : il existe alors un ultrafiltre $\mathcal{U}$ plus fin que $\mathcal{F}$. Soit $\mathcal{U}'$ le K -filtre ayant pour base l'ensemble des K -éléments de $\mathcal{U}$; $\mathcal{U}'$ est plus fin que $\mathcal{F}$. Par hypothèse $\mathcal{U}$ converge vers un point x pour $\sigma(G'_T, G)$. D'après le lemme 3.2.3.1., x est donc adhérent à $\mathcal{U}'$ pour T . Puisque $\mathcal{U}'$ est plus fin que $\mathcal{F}$, x est également adhérent à $\mathcal{F}$ pour T .

Remarque.

La considération de la K -compacité permet d'affirmer qu'un objet localement P -compact n'est pas en général P -compact. Il suffit en effet de considérer, dans le cas où $A = \mathcal{R}$, l'objet $\mathcal{R}$ de $\mathcal{G}_A$. $\mathcal{R}$ est localement K -compact mais non K -compact.

En effet $\mathcal{R}$ étant localement compact est évidemment localement K -compact, mais le K -filtre de base $\{[n, +\infty[\}_{n \in \mathbb{N}}$ n'a pas de point adhérent dans $\mathcal{R}$, donc $\mathcal{R}$ n'est pas K -compact.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] N. BOURBAKI. Topologie générale, chap. I et II (1960).
- [2] N. BOURBAKI. Topologie générale, chap. III.
- [3] N. BOURBAKI. Espaces vectoriels topologiques, chap. I et II (1953).
- [4] N. BOURBAKI. Espaces vectoriels topologiques, chap. III, IV, V (1955).
- [5] L. GOUYON. C. R. Acad. Sc. Paris, t. 260, p. 5659-5661 (mai 1965).
- [6] G. KÖTHE. Topologische lineare Räume I. Springer (1960).
- [7] S. LEFCHETZ. Algebraic Topology, AMS (1943), p. 74 à 83.
- [8] W. ROBERTSON. Contributions to the general theory of linear topological spaces (Thesis, Cambridge, 1954).