

J. L. BOURSIN

Sur quelques problèmes de géométrie aléatoire

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 4^e série, tome 28 (1964), p. 9-100

http://www.numdam.org/item?id=AFST_1964_4_28__9_0

© Université Paul Sabatier, 1964, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Sur quelques problèmes de géométrie aléatoire

par J. L. BOURSIN

CHAPITRE PREMIER

1.1. Dans ce chapitre sont réunis les calculs préliminaires nécessaires aux chapitres II et III. Il s'agit essentiellement du problème suivant :

Étant donné une répartition (le plus souvent supposée isotrope) dans R^n , déterminer la loi de la distance de deux points indépendants. Le mot « distance » ne signifie pas nécessairement distance euclidienne, on verra au paragraphe 2.1. l'utilité de cette généralisation.

FORMULES GÉNÉRALES

Soit $F(x, y)$ la loi parente :

$$\int_E dF(x, y) = 1$$

La loi cherchée s'écrit :

$$G(d) = \int_E dF(x, y) \int E \cap B(x, y, d) dF(x', y) \quad 1.1.$$

Bien entendu, on peut supposer $E = R^n$ tout entier; et pour la distance euclidienne, nous poserons :

$$x' = x + rd \cos \theta \quad y' = y + rd \sin \theta$$

ce paramétrage étant fait pour R^2 pour alléger les notations.

L'intérêt de cette transformation est que le champ de la nouvelle intégrale est un hypercube *invariable* (ici le carré $0 < r < 1$ $0 < \theta < 2\pi$). La suite du calcul dépend de la forme particulière de F . Faisons cependant quelques remarques; par suite de l'isotropie, F est en réalité une fonction d'une seule variable r .

$$F(x, y, z, \dots) = KH(r)$$

K étant une constante (aire de la sphère de rayon 1).

Ainsi à une distribution de variable positive $H(r)$, nous associons une nouvelle distribution, également de variable positive $G(d)$; cette corres-

pondance sera notée :

$$G(d) = DD H(r)$$

DD devant être considéré comme un opérateur. Diverses questions peuvent être posées quant à cet opérateur :

Soit (F) l'ensemble des lois de distribution de variables positives.

DD (F) est-il confondu avec (F) ?

DD opère-t-il transitivement sur DD (F) ?

Sinon, existe-t-il au moins une distribution invariante ?

Un opérateur DD est associé à chaque dimension n ; que peut-on dire de la suite des images d'une même distribution par cette suite d'opérateurs ?

La plupart de ces questions sont actuellement sans réponse. Indiquons cependant que la loi de Laplace Gauss est invariante pour l'opérateur de dimension 1, et pour celui-là seulement.

Nous allons expliciter l'image de quelques distributions simples.

1.2. Distance euclidienne et loi normale.

Soit une distribution normale plane, définie par rapport à ses axes par :

$$f(x, y) = \exp. - \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{\sigma^2} + \frac{y^2}{\sigma'^2} \right)$$

Notons (x, y, d) le disque de centre le point de coordonnées x, y et de rayon d . La fonction cherchée est :

$$E(d) = \int \int_{\mathbb{R}^2} \exp. - \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{\sigma^2} + \frac{y^2}{\sigma'^2} \right) dx dy \int \int_{(x, y, d)} \exp. - \frac{1}{2} \left(\frac{x'^2}{\sigma^2} + \frac{y'^2}{\sigma'^2} \right) dx' dy'$$

Pour calculer l'intégrale interne, on pose comme indiqué plus haut :

$$x' = x + rd \cos \theta \quad y' = y + rd \sin \theta$$

L'élément différentiel devient :

$$d^2 r dr d\theta$$

Et le domaine d'intégration devient :

$$0 < r < d \quad 0 < \theta < 2\pi \quad -\infty < x, y < +\infty$$

On peut écrire $F(d)$ sous la forme :

$$F(d) = \frac{d^2}{4\pi^2 \sigma^2 \sigma'^2} \int \int_{\mathbb{R}^2} rd r d\theta \int \int \exp. - \frac{1}{2} \left[\frac{2 \left(x + \frac{dr}{r} \cos \theta \right)^2}{\sigma^2} + \frac{2 \left(y + \frac{dr}{r} \sin \theta \right)^2}{\sigma'^2} + \frac{d^2 r^2}{r} \left(\frac{\cos^2 \theta}{\sigma^2} + \frac{\sin^2 \theta}{\sigma'^2} \right) \right] dx dy$$

L'intégration en x et y est immédiate et donne :

$$E(d) = \frac{d^2}{4\pi\sigma\sigma'} \int \int \exp. - \frac{1}{2} d^2 r^2 \frac{1}{2} \left(\frac{\cos^2 \theta}{\sigma^2} + \frac{\sin^2 \theta}{\sigma'^2} \right) r dr d\theta$$

Soit enfin :

$$F(d) = \frac{d^2}{2\pi\sigma\sigma'} \int_0^{2\pi} \frac{1 - \exp. - \frac{1}{4} d^2 \left(\frac{\cos^2 \theta}{\sigma^2} + \frac{\sin^2 \theta}{\sigma'^2} \right) d\theta}{d^2 \left(\frac{\cos^2 \theta}{\sigma^2} + \frac{\sin^2 \theta}{\sigma'^2} \right)}$$

Il est plus simple, dans le cas général, de calculer $f(d)$:

$$f(d) = \frac{1}{4\pi\sigma\sigma'} \int_0^{2\pi} d \exp. - \frac{1}{4} d^2 \left(\frac{\cos^2 \theta}{\sigma^2} + \frac{\sin^2 \theta}{\sigma'^2} \right) d\theta$$

d'où :

$$f(d) = \frac{d}{2\sigma\sigma'} \exp. - \frac{d^2}{8} \left(\frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{\sigma'^2} \right) I_0 \left(\frac{d^2}{8} \left(\frac{1}{\sigma^2} - \frac{1}{\sigma'^2} \right) \right) \quad 1.2.$$

I_0 étant la fonction de BESSEL modifiée de première espèce.

Dans le cas d'une distribution isotrope, cette expression se réduit à :

$$f(d) = \frac{d^2}{2\sigma^2} \exp. \left(- \frac{1}{4} \frac{d^2}{\sigma^2} \right)$$

d'où :

1.3.

$$F(d) = 1 - \exp \left(- \frac{d^2}{4\sigma^2} \right)$$

Ce calcul se généralise à R^n très aisément, au moins dans le cas isotrope. Notant (x, d) la boule centrée au point de coordonnées x_i et de rayon d , la fonction cherchée s'écrit :

$$F(d) = \hat{=} \int_{R^n} \exp. - \frac{1}{2} \frac{\sum x_i^2}{\sigma^2} dx_1 dx_2 \dots dx_n \int_{(x,d)} \exp. - \frac{1}{2} \frac{\sum x'_i{}^2}{\sigma^2} dx'_1 dx'_2 \dots dx'_n$$

le signe $\hat{=}$ signifie égal à une constante multiplicative près que nous ne déterminerons qu'à la fin du calcul pour alléger les écritures.

Posons $x'_i = x_i + g_i$

avec :

$$g_1 = rd \cos \phi$$

$$g_2 = rd \cos \phi_2 \sin \phi_1$$

.....

$$g_{n-1} = rd \sin \phi_1 \sin \phi_2 \dots \sin \phi_{n-2} \cos \phi_{n-1}$$

$$g_n = rd \sin \phi_1 \sin \phi_2 \dots \sin \phi_{n-2} \sin \phi_{n-1}$$

Les angles ϕ varient de 0 à π sauf ϕ_{n-1} qui varie de 0 à 2π
 Le jacobien se calcule sans peine :

$$J = r^{n-1} s (\phi_1 \phi_2 \dots \phi_{n-1})$$

s étant une fonction des angles ϕ qu'il est inutile d'expliciter. D'autre part :

$$\Sigma (x_i'^2 + x_i^2) = 2 \Sigma \left(x_i + \frac{g_i}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} \Sigma g_i^2$$

F devient :

$$F(d) = \int_0^{r^{n-1}} s dr d\varphi_1 d\varphi_2 \dots d\varphi_{n-1} \int \exp. - \frac{1}{2} \left(\frac{\Sigma g_i}{2\sigma^2} + 2 \frac{\Sigma \left(x_i + \frac{1}{2} g_i \right)^2}{\sigma^2} \right) dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

L'intégration par rapport aux variables x_i est immédiate et donne :

$$F(d) = \int r^{n-1} s \exp. - \left(\frac{1}{4} \Sigma g_i^2 \right) dr d\varphi_1 d\varphi_2 \dots d\varphi_{n-1}$$

Cette intégrale se décompose en produit d'intégrales, toutes constantes sauf une; ainsi :

$$E(d) = \int_0^1 r^{n-1} \exp. \left(\frac{\Sigma g_i^2}{4\sigma^2} \right) dr$$

car Σg_i^2 ne dépend que de r :

$$\Sigma g_i^2 = r^2 d^2$$

Posant $r^2 d^2 = 4 u \sigma^2$

$$E(d) = \int_0^{\frac{d^2}{4\sigma^2}} u^{\frac{1}{2}(n-1)} e^{-u} du$$

La constante se rétablit donc en :

$$F(d) = \frac{\int_0^{\frac{d^2}{4\sigma^2}} u^{\frac{1}{2}(n-1)} e^{-u} du}{\int_0^\infty u^{\frac{1}{2}(n-1)} e^{-u} du} \quad 1.4.$$

Ce résultat était prévisible. En effet :

Les coordonnées de chaque point sont des variables normales.
 La différence de deux variables normales est une variable normale.
 Toutes les différences $x-x'$ ont le même écart-type.
 La somme de leurs carrés suit donc une loi de χ^2 à n degrés de liberté.

1.3. Distance cubique et loi normale.

Rappelons que nous désignons par distance cubique la distance

$$\sup |x_i - x'_i|$$

Désignons comme précédemment par (x, d) la boule (intuitivement, c'est un cube) centrée au point de coordonnées x_i et de rayon d ; la formule générale s'applique et donne :

$$F(d) = \int_{\mathbb{R}^n} \exp. - \frac{1}{2} \frac{\sum x_i^2}{\sigma^2} dx_1 dx_2 \dots dx_n \int_{(x,d)} \exp. - \frac{1}{2} \frac{\sum x_i'^2}{\sigma^2} dx'_1 dx'_2 \dots dx'_n$$

Posons

$$x'_i = x_i + dh_i$$

tous les h_i variant de -1 à $+1$; remarquons en outre que :

$$\sum x_i'^2 + \sum x_i^2 = 2 \sum \left(x_i + \frac{1}{2} dh_i \right)^2 + \frac{1}{2} \sum d^2 h_i^2$$

quant au jacobien, il est constant et vaut d^n . Ainsi :

$$F(d) = d^n \int dh_1 dh_2 \dots dh_n \int \exp. - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \frac{\sum d^2 h_i^2}{\sigma^2} + \frac{2 \sum \left(x_i + \frac{1}{2} dh_i \right)^2}{\sigma^2} \right) dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

L'intégration par rapport aux variables x_i est immédiate et donne :

$$F(d) = d^n \int \exp. \left(-\frac{1}{4} \sum \frac{h_i^2 d^2}{\sigma^2} \right) dh_1 dh_2 \dots dh_n$$

qui se décompose en le produit de n facteurs proportionnels à :

$$F_0(d) = \int_{-1}^1 d \exp. - \frac{h^2 d^2}{4 \sigma^2} dh = \int_0^{\frac{d}{2\sigma}} e^{-u^2} du$$

La constante se rétablit immédiatement et :

$$F(d) = \left(\frac{\int_0^{\frac{d}{2\sigma}} e^{-u^2} du}{\int_0^\infty e^{-u^2} du} \right)^n \quad 1.5.$$

1.4. Loi uniforme et distance euclidienne.

Tout en étant plus difficiles, les calculs relatifs à ce cas font depuis longtemps partie de la littérature; ils constituent en effet un préliminaire indispensable au fameux problème de Sylvester. C'est pourquoi nous ne ferons qu'un rappel rapide à leur propos.

Deux méthodes principales permettent d'abréger les intégrations; l'une est due à CROFTON, qui l'a donnée dans l'article « Probability » de l'*Encyclopaedia Britannica*; supposons N points distribués de façon indépendante et uniforme dans un domaine D de R^n . On cherche à calculer la probabilité pour que la figure formée par ces n points ait une certaine propriété, indépendamment de la position de cette figure dans l'espace ou par rapport à D .

$$P = U / V$$

V désignant la mesure du domaine D et U celle de l'ensemble (à Nn dimensions) E des points tels que la propriété souhaitée ait lieu.

Soit D' un domaine contenant D et soit $V + \Delta V$ sa mesure; le nouvel ensemble E' contient E ; soit $U + \Delta U$ sa mesure.

La nouvelle probabilité s'écrit :

$$P + \Delta P = (U + \Delta U) / (V + \Delta V)^n$$

Divisons l'ensemble E' en $N + 1$ ensembles E'_i tels que pour E'_i , i des N points se trouvent dans $D' - D$ et les autres dans D . Soit P_i la probabilité correspondante :

$$U + \Delta U = U + \sum_{i=1}^n C_N^i P_i V^{N-i} (\Delta V)^i$$

ou, en introduisant P et $P + \Delta P$:

$$(P + \Delta P) (V + \Delta V)^n = P V^n + \sum_{i=1}^n C_N^i P_i V^{N-i} (\Delta V)^i$$

ou encore :

$$P (V + \Delta V)^n = \sum_{i=1}^n C_N^i (P_i - P) V^{N-i} (\Delta V)^i$$

Supposons maintenant que V tende vers 0; soient alors dP et dV les accroissements de P et V :

$$\boxed{dP = N (P_i - P) \frac{dV}{V}} \quad 1.6.$$

Ceci constitue la formule de CROFTON, qui évitera une intégration fastidieuse chaque fois que l'on pourra calculer P_i de façon simple.

En application, déterminons la répartition de la distance de deux points indépendants à l'intérieur de la boule :

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2 = R^2 \quad (S)$$

Pour la formule de CROFTON, $N = 2$ et $p_1 = s/V$ s désignant l'aire de la calotte de la sphère de rayon x centrée sur S et intérieure à S .

Si l'on pose $x = 2 R \sin \Theta$ un calcul très simple et classique montre que :

$$s = \frac{1}{2} S(x) g(x/R)$$

$S(x)$ désignant l'aire de la sphère de rayon x et $g(x/R)$ étant la fonction :

$$g(x/R) = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} t \, dt}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} t \, dt}$$

On a donc pour déterminer $p(x)$ l'équation différentielle :

$$\frac{1}{2} dP = \left(\frac{\frac{1}{2} S(x) g(x/R)}{V} - P \right) \frac{dV}{V}$$

Soit :

$$V^2 dP + 2PV dV = S(x) g(x/R) dV$$

or

$$dV = \frac{dV}{dR} dR = S(R) dR$$

Reportant et intégrant en remarquant que P s'annule pour $x = 2R$

$$PV^2 = \int_{\frac{x}{2}}^R S(x) S(t) g(x/t) dt$$

On peut donc simplifier en remarquant que :

$$yS(y) = n V(y) = n V(R) y^n / R^n$$

$P(x)$ peut donc s'écrire :

$$P(x) = \frac{n^2 x^{n-1}}{R^{2n}} \int_{\frac{x}{2}}^R t^{n-1} g(x/t) dt \quad 1.7.$$

Si n est impair, $g(x/R)$ est un polynome et P peut se calculer à l'aide de fonctions élémentaires. M. le Recteur R. DELTHEIL a explicité jusqu'à la dimension 9. Posant $q = x/R$

$$\begin{aligned} n=3 \quad 32P &= 32q^3 - 18q^4 + q^6 \\ n=5 \quad 512P &= 512q^5 - 400q^6 + 50q^8 - 3q^{10} \\ n=7 \quad 4096P &= 4096q^7 - 3920q^8 + 784q^{10} - 98q^{12} + 5q^{14} \\ n=9 \quad 4096P &= 4096q^9 - 4536q^{10} + 1260q^{12} - 234q^{14} + \frac{405}{16}q^{16} - \frac{70}{64}q^{18} \end{aligned}$$

Il n'est pas difficile, ni de grand intérêt, de prolonger ce calcul; nous l'avons fait pour deux valeurs encore de n :

$$\begin{aligned}
n=11 \quad 2^{15}P &= 2^{15}q^{11} - 40656q^{12} + 14520q^{14} - \frac{7623}{2}q^{17} + 605q^{19} - \frac{847}{16}q^{20} + \frac{63}{32}q^{21} \\
n=13 \quad 2^{16}P &= 2^{16}q^{13} - 89232q^{14} + 39039q^{16} - 13013q^{18} + 5577q^{20} \\
&- \frac{5915}{16}q^{21} + \frac{10647}{256}q^{22} + \frac{927}{256}q^{23}
\end{aligned}$$

Toutes ces expressions se réduisent évidemment à $P = 1$ pour $q = 2$

On peut encore calculer la moyenne de cette distance, et sa limite si n augmente indéfiniment. Cette limite a été obtenue par M. DELTHEIL qui a trouvé :

$$l = R\sqrt{2}$$

1.5. Loi uniforme et distance cubique.

Appliquons la formule générale :

$$F(d) = \int_B dx_1 dx_2 \dots dx_n \int_{B \cap B'} dx'_1 dx'_2 \dots dx'_n$$

B et B' étant les boules respectivement définies par :

$$-R < x < R \quad \text{et} \quad -d < x' - x < d \quad \text{pour tout } i$$

Mais en ce cas, $F(d)$ se décompose en un produit d'intégrales, toutes égales à la fonction $F_0(d)$ correspondant au cas $n = 1$. D'ailleurs en ce dernier cas, distance cubique et distance euclidienne se confondent; cette fonction a donc été obtenue plus haut :

$$F_0(d) = d/R (1 - d/4R)$$

Remarquons que, comme dans tous les autres cas étudiés, F décroît quand n augmente; ici; ceci résulte de la relation

$$F_n = F_0 F_{n-1}.$$

D'ailleurs, sauf pour $d = 2R$, F tend vers 0 avec n ; il ne saurait donc y avoir convergence uniforme vers une fonction de répartition.

Examinons maintenant un dernier cas :

Loi exponentielle et distance cubique.

La répartition occupe ici tout l'espace R^n et

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \exp - \sum |x_i|$$

La formule générale s'applique encore et :

$$F(d) = \int_{R^n} e^{-\sum |x_i|} dx_1 dx_2 \dots dx_n \int_B e^{-\sum |x'_i|} dx'_1 dx'_2 \dots dx'_n$$

B désignant encore la boule de centre (x_i) et de rayon d . Dans ce cas encore

les variables se séparent et $F(d)$ est le produit de n facteurs égaux à :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|} dx \int_{x-d}^{x+d} e^{-|x'|} dx'$$

qui se décompose en :

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{-d} e^x dx \int_{x-d}^{x+d} e^{x'} dx' + \int_{-d}^0 e^x dx \int_{x-d}^0 e^{x'} dx' + \int_{-d}^0 e^x dx \int_0^{x+d} e^{x'} dx' \\ & \int_0^d e^{-x} dx \int_{x-d}^0 e^{x'} dx' + \int_0^d e^{-x} dx \int_0^{x+d} e^{x'} dx' + \int_d^{+\infty} e^{-x} dx \int_{x-d}^{x+d} e^{x'} dx' \end{aligned}$$

Soit :

$$F_*(d) = 1 - e^{-d} - \frac{1}{2} d e^{-d}$$

Et la même relation de récurrence que dans le cas uniforme entraîne le même résultat.

En résumé :

distance euclidienne

distance cubique

Loi normale	Dans R^n $F(d) = \frac{\int_0^{\frac{d^2}{4\sigma^2}} u^{\frac{1}{2}(n-1)} e^{-u} du}{\int_0^{\infty} u^{\frac{1}{2}(n-1)} e^{-u} du}$	Dans R^n $F(d) = \left(\frac{\int_0^{\frac{d}{2\sigma}} e^{-u^2} du}{\int_0^{\infty} e^{-u^2} du} \right)^n$
	Dans R^n $f(d) = \frac{n^2 d^{n-1}}{R^{2n}} \int_{\frac{d}{2}}^R t^{n-1} dt \frac{\int_0^{\arccos \frac{d}{2t}} \sin^{n-2} u du}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} u du}$	Dans R^n $F(d) = \left(\frac{d}{R} \left(1 - \frac{d}{4R} \right) \right)^n$
		Dans R^n $F(d) = \left(1 - e^{-d} - \frac{1}{2} d e^{-d} \right)^n$

1.6. Compléments sur le cas uniforme.

La méthode de CROFTON, exposée ci-dessus n'est évidemment pas la seule qui évite le calcul direct. KENDALL propose d'utiliser les fonctions caractéristiques : cette méthode ne s'applique commodément qu'aux domaines invariants par rotation. Nous en proposons une autre, inspirée des calculs de

LEBESGUE (*Exposé d'un mémoire de Crofton*) qui l'a employée pour les trois premiers moments de la fonction $F(d)$.

Soit donc une aire plane (l'extension se ferait sans peine à des domaines de R^n) que nous supposons convexe. Cherchons le moment d'ordre K de $F(d)$:

$$M_k = \frac{\iiint (\text{distance } MM')^k dx dy dx' dy'}{\frac{1}{2} S^2}$$

Pour coordonnées du couple M et M' nous prendrons $p \theta r r'$ définis par :

$$\begin{aligned} x \cos \theta + y \sin \theta &= p \\ x' \cos \theta + y' \sin \theta &= p \\ x \sin \theta - y \cos \theta &= r \\ x' \sin \theta - y' \cos \theta &= r' \end{aligned}$$

le jacobien est $r - r'$ et M_k prend pour expression :

$$M_k = \frac{\iiint (r - r')^{k+1} dr dr' dp d\theta}{\frac{1}{2} S^2}$$

qui se calcule sans peine si l'on prend garde à conserver positive l'expression $r' - r$:

$$\boxed{M_k = \frac{1}{(k+2)(k+3)} \frac{1}{\frac{1}{2} S^2} \iint C^{k+3} dp d\theta} \quad 1.8$$

C désignant la longueur de la corde découpée par le contour sur la sécante p, θ . La façon la plus commode de définir le contour est donc la donnée de la fonction $C(p, \theta)$; cette donnée est d'ailleurs surabondante puisque la seule connaissance de l'ensemble des valeurs de p, θ qui annulent cette fonction suffit à définir la carte. Mais on ignore toujours :

Quelles conditions nécessaires et suffisantes doivent remplir des nombres pour qu'ils constituent la suite des moments de la fonction $C(p, \theta)$ d'un contour du plan.

Si le contour qui serait ainsi défini est unique.

CHAPITRE II

2.1. Concernant les systèmes de trois points (que nous désignerons par « triples »), c'est aux caractéristiques d'encombrement que nous nous intéressons principalement : aire de la figure d'appui (au sens que M. DARMOIS a donné à ce terme) et caractéristiques d'alignements.

Précisons ce dernier point : l'alignement géométrique de trois points aléatoires indépendants dans le plan ayant évidemment une probabilité nulle, nous devons définir un alignement approché, et c'est la probabilité d'un tel événement qui va être étudiée sous le nom de « probabilité élémentaire » dans la troisième partie de ce chapitre.

2.2. Aire du polygone d'appui.

Nous ne rappelons que pour mémoire cette caractéristique; elle est en effet très abondamment étudiée, au moins dans le cas où la loi parente est uniforme, dans tous les traités qui abordent le problème de SYLVESTER pour lequel cette étude est un préliminaire indispensable.

Examinons-la pour une loi parente normale, que, par un choix convenable d'axes et d'unités, nous pouvons supposer maxwellienne.

Soient donc deux points A et B de coordonnées x, y et x', y' ; désignons par Δ le domaine formé par les points M, de coordonnées x'', y'' tels que

$$(\text{Aire ABM}) < X$$

L'écriture sous forme d'intégrale de la loi cherchée est immédiate :

$$F(X) = \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} e^{-\frac{1}{2}(x'^2+y'^2)} dx' dx dy dy$$

$$\int_{\Delta} e^{-\frac{1}{2}(x''^2+y''^2)} dx'' dy''$$

Changeons de variables en posant :

$$\begin{aligned} x \cos \Theta + y \sin \Theta &= p & x' \cos \Theta + y' \sin \Theta &= p \\ x \sin \Theta - y \cos \Theta &= r & x' \sin \Theta - y' \cos \Theta &= r' \end{aligned}$$

le jacobien est $r - r'$ et l'intégrale devient :

$$F(X) = \int |r-r'| e^{-\frac{1}{2}(2p^2+r^2+r'^2)} dp dr dr' \int_{\Delta} e^{-\frac{1}{2}(x''^2+y''^2)} dx'' dy''$$

Dans la deuxième intégrale, nous posons :

$$\begin{aligned} x'' \sin \Theta - y'' \cos \Theta &= r'' \\ x'' \cos \Theta + y'' \sin \Theta &= q \end{aligned}$$

le jacobien est réduit à l'unité et le nouveau domaine est défini par :

$$\left| \frac{q(r-r')}{2} \right| < X$$

Et

$$F(X) = \int \int |r-r'| e^{-\frac{1}{2}(2p^2+r^2+r'^2+q^2)} dp d\theta dq dc dr' \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}r'^2} dr'$$

les variables p et r' se séparent et déterminent des facteurs constants.

Pour les autres, nous poserons :

$$r - r' = a$$

$$r + r' = b$$

car alors :

$$F(X) = \int \int |a| e^{-\frac{1}{2}\left(q^2 + \frac{1}{2}(a^2+b^2)\right)} dq da db$$

La variable b se sépare également. Finalement :

$$F(X) = \int \int a e^{-\frac{1}{2}(q^2 + y^2)} dq dy$$

q et y pouvant prendre toutes valeurs réelles telles que :

$$|qy| > X\sqrt{2}$$

$$F(X) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}q^2} dq \left(\int_{X/q}^{\infty} -y e^{-\frac{1}{2}y^2} dy + \int_0^{-X/q} y e^{-\frac{1}{2}y^2} dy \right)$$

Soit enfin :

$$F(X) = \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}q^2} (1 - e^{-X^2/q^2}) dq$$

Reste à déterminer la constante. Remarquons d'abord que :

$$1 - e^{-X^2/q^2} < X^2/q^2$$

$F(X)$ est donc majorée par :

$$X^2 \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}q^2} \frac{dq}{q^2}$$

intégrale convergente; en sorte que $F(X)$ tend vers 0 avec X , ce qui était prévu. D'autre part :

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}q^2} e^{-X^2/q^2} dq = \int_0^{\sqrt{X} \times \sqrt{2}} e^{-\frac{1}{2}q^2} e^{-X^2/q^2} dq + \int_{\sqrt{X} \times \sqrt{2}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}q^2} e^{-X^2/q^2} dq$$

Pour le second terme de cette somme :

$$\exp(-X^2/q^2) < 1$$

en sorte que ce terme est inférieur à :

$$\int_{\sqrt{X} \times \sqrt{2}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} q^2} dq$$

qui tend vers 0 si X augmente indéfiniment.

Pour le premier terme de cette somme, remarquons que :

$$\frac{1}{2} q^2 + \frac{X^2}{q^2} < \frac{1}{2} X \sqrt{2} + \frac{X^2}{X \sqrt{2}} = X \sqrt{2}$$

On peut donc le majorer par :

$$X \sqrt{2} e^{-X \sqrt{2}}$$

qui tend aussi vers 0 si X augmente indéfiniment.

Le seul terme restant est donc :

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2} q^2} dq = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Ainsi, on peut énoncer :

Théorème. — L'aire du triangle défini par 3 points indépendants à répartition maxwellienne a pour distribution :

$$F(X) = 1 - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\left(\frac{1}{2} q^2 - \frac{X^2}{q^2}\right)} dq$$

2.3. Rayon du cercle défini.

a) Loi parente uniforme.

Des perturbations considérables apparaissent à ce propos, causées par l'influence de la frontière, et il en sera ainsi pour toute distribution à support compact. Les résultats peuvent être évidemment écrits sous formes d'intégrales d'ordre 6 (ou 4 si l'on utilise la méthode de CROFTON) mais ces formes demeurent inutilisables de par leur complexité.

Remarquons au passage que dans le cas des systèmes de deux points, nous avons évité — ou plutôt repoussé — cette difficulté en définissant la carte par sa fonction $C(p, \theta)$. Cet artifice, même généralisé à des cercles est inutilisable; il exigerait une sorte de « convexité circulaire » c'est-à-dire que tout cercle ayant 3 points dans la carte y est contenu en entier, propriété qui n'appartient manifestement à aucune carte bornée.

b) Loi parente normale.

Une simplification considérable apparaît dans ce cas car il n'est plus nécessaire de borner la carte et l'effet de frontière disparaît.

La $f.r.$ cherchée s'écrit :

$$g(R) = \frac{1}{(2\pi\sqrt{\sigma\sigma'})^{3/2}} \iiint \exp. -\frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{\sigma^2} + \frac{y^2}{\sigma'^2} + \frac{x'^2}{\sigma^2} + \frac{y'^2}{\sigma'^2} + \frac{x''^2}{\sigma^2} + \frac{y''^2}{\sigma'^2} \right) dx dx' dx'' dy dy' dy''$$

Substituons aux six variables $x y x' y' x'' y''$ les variables $a, b, r, \theta, \theta', \theta''$ ainsi définies :

$$x = a + r \cos \theta$$

$$y = b + r \sin \theta$$

et les mêmes relations pour les variables accentuées, le jacobien est :

$$J = r^3 \begin{vmatrix} \sin \theta & \cos \theta & 1 \\ \sin \theta' & \cos \theta' & 1 \\ \sin \theta'' & \cos \theta'' & 1 \end{vmatrix}$$

Nous proposons une interprétation de ce jacobien en l'écrivant :

$$J = r^3 \frac{1}{2} \begin{vmatrix} e^{i\theta} & 1 & e^{-i\theta} \\ e^{i\theta'} & 1 & e^{-i\theta'} \\ e^{i\theta''} & 1 & e^{-i\theta''} \end{vmatrix}$$

déterminant de Van Der Monde qui s'écrit :

$$J = r^3 \frac{P}{2}$$

où P désigne le produit des distances deux à deux des points après l'homothétie qui les amène sur le cercle unité.

Intégrons d'abord en a et b après avoir mis l'exponentielle sous la forme canonique des trinomes. On obtient pour noyau :

$$\frac{3}{4\pi\sigma\sigma'} r^3 \exp -\frac{1}{2} \left[\frac{r^2}{\sigma^2} \left(\Sigma \cos^2 \theta - \frac{1}{3} (\Sigma \cos \theta)^2 \right) + \frac{r^2}{\sigma'^2} \left(\Sigma \sin^2 \theta - \frac{1}{3} (\Sigma \sin \theta)^2 \right) \right]$$

Intégrons en r :

$$g(R) = \iiint \frac{1}{4u^3} (e^{uR^2} (uR^{2-4}) + 1) P d\theta d\theta' d\theta''$$

avec $u = -\frac{1}{2} \left(\frac{\Sigma \cos^2 \theta - \frac{1}{3} (\Sigma \cos \theta)^2}{\sigma^2} + \frac{\Sigma \sin^2 \theta - \frac{1}{3} (\Sigma \sin \theta)^2}{\sigma'^2} \right)$

et la densité de R^2 s'écrit très simplement :

$$l(R^2) = \iiint P e^{uR^2} d\theta d\theta' d\theta''$$

2.5. Relations de pré-alignement.

Nous désignons ainsi diverses relations ayant la propriété caractéristique commune suivante :

— ce sont des relations pré-orthoides ayant pour extension transitive l'alignement géométrique (pour le sens des néologismes cf. Ch. VI).

Deux de ces relations retiendront plus particulièrement notre attention.

a) Trois points du plan sont pré-alignés à h près si la plus petite hauteur du triangle qu'ils forment n'atteint pas h .

Ce pré-alignement est appelé linéaire.

b) Trois points du plan sont pré-alignés à h près s'il existe une droite telle que la somme des carrés des distances des points à la droite n'atteint pas h^2 . Ce pré-alignement est appelé hyperbolique.

1. Loi parente uniforme :

D'avantage qu'à la probabilité X définie plus haut, nous nous intéresserons à sa partie principale quand h tend vers 0; nous avons en effet en vue l'étude d'échantillons comportant un grand nombre de points.

Cas du pré-alignement linéaire :

Soient A de coordonnées x, y et A' de coordonnées x', y' deux points de la carte. L' « aire utile » pour le troisième point est :

$$(A) = 2h \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}$$

Et la probabilité cherchée est alors :

$$X = 2h \frac{\int \int \int \int (A) dx dx' dy dy'}{\int \int \int \int dx dx' dy dy'}$$

D'ailleurs ce rapport d'intégrales est évidemment la distance moyenne de deux points pris au hasard sur la carte.

Nous expliciterons cependant, pour permettre une intéressante comparaison avec le cas du pré-alignement hyperbolique. La méthode employée ici a été proposée par LEBESGUE.

Caractérisons la carte par sa fonction $C(p, \theta)$ longueur de la corde de coordonnées d'EULER p et θ . Bien entendu, cette caractérisation est surabondante; de toute façon, nous n'utilisons que les moments de cette fonction :

$$I(n) = \int \int C^n dp d\theta$$

l'intégrale étant étendue à toutes les sécantes de la carte supposée convexe. On sait (DELTHEIL, 18) que $I(0)$ est le périmètre de la carte et $I(1)$ son aire. Rappelons une propriété de $I(3)$ et $I(4)$ en calculant X .

Pour coordonnées du couple $A A'$ prenons les coordonnées $p \theta$ de la sécante et

$$\begin{aligned} r &= x \sin \theta - y \cos \theta \\ r' &= x' \sin \theta - y' \cos \theta \end{aligned}$$

le jacobien se calcule sans peine; on trouve :

$$J = r' - r$$

Alors :

$$U = \int \int \int \int A \, dx \, dx' \, dy \, dy' = \int \int dp \, d\theta \int \int (r' - r)^2 \, dr \, dr'$$

et

$$V = \int \int \int \int dx \, dx' \, dy \, dy' = S^2 = \int \int dp \, d\theta \int \int |r' - r| \, dr \, dr'$$

Ou

$$6 U = I(4) \quad \text{et} \quad 3 V = I(3)$$

Cas du pré-alignement hyperbolique :

Prenons provisoirement pour axes les axes de l'ellipse d'inertie des trois points affectés de masses égales et désignons par H^2 la somme des carrés des côtés du triangle $A A' A''$.

$$H^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (x' - x'')^2 + (y' - y'')^2 + (x'' - x)^2 + (y'' - y)^2$$

d'où, tenant compte des relations

$$x + x' + x'' = y + y' + y'' = 0$$

$$H^2 = 3(x^2 + y^2 + x'^2 + y'^2 + x''^2 + y''^2)$$

D'autre part :

$$(x^2 + x'^2 + x''^2)(y^2 + y'^2 + y''^2) = (xy' - yx')^2 = 4/3 S^2$$

S désignant l'aire du triangle étudié.

alors, pour un point limite de l'aire utile :

$$h^4 - H^2 h^{2/3} + 4 S^{2/3} = 0$$

L'intérêt du calcul qui précède réside dans cette relation, indépendante de tout repérage, puisque nous avons donné à H et S une signification intrinsèque. Soient donc deux points A et A' ; nous les repèrerons par les coordonnées p, θ, r et r' définies plus haut. Soit M le troisième point et x et y ses coordonnées dans un système d'axes portés par AA' et sa médiatrice; alors :

$$H^2 = 2(x^2 + y^2) + \frac{3}{2}(r - r')^2$$

$$S^2 = \frac{1}{2} y (r - r')$$

La condition limite s'écrit :

$$6 h^4 - 4(x^2 + y^2) h^2 - 3(r - r')^2 h^2 + 2(r - r')^2 y^2 = 0$$

Nous distinguerons deux fractions du domaine d'intégration :

$$a) \quad h \sqrt{2} < |r - r'|$$

Dans ce cas l'aire utile est limitée au plus par une ellipse dont la condition ci-dessus est l'équation; la mesure de cette aire est

$$\frac{3\pi h}{2\sqrt{2}} \sqrt{2h^2 - (r-r')^2} < h^2$$

Nous retiendrons qu'elle est d'ordre 2 en h .

$$b) \quad h\sqrt{2} > |r-r'|$$

dans ce cas, si l'on désigne l'aire utile par $A(h)$, on a comme précédemment :

$$X = \frac{\int \int \int \int A(h) dx dx' dy dy'}{\int \int \int \int dx dx' dy dy'}$$

Comme

$$A(h) = \int_{f - \frac{r+r'}{2}}^{f' - \frac{r+r'}{2}} \sqrt{\frac{3}{2} + \frac{2x^2}{(r-r')^2 - 2h^2}} dx$$

le numérateur Y de X s'écrit :

$$Y = 2h \int \int \int \int dp d\theta |r-r'| dr dr' \int_{f - \frac{r+r'}{2}}^{f' - \frac{r+r'}{2}} \sqrt{\frac{3}{2} + \frac{2x^2}{(r-r')^2 - 2h^2}} dx$$

Posons

$$B = \int \int \int \int |r-r'| dp d\theta dr dr' \int_{f - \frac{r+r'}{2}}^{f' - \frac{r+r'}{2}} \sqrt{\frac{3}{2} + \frac{2x^2}{(r-r')^2 - 2h^2}} dx$$

et majorons l'expression

$$K = \frac{Y}{2h} - B$$

Dans ce but, posons

$$r-r' = a\sqrt{2} \qquad r+r' = b\sqrt{2}$$

Le jacobien est unité et le noyau de l'intégrale K devient :

$$N = |a|\sqrt{2} \left(\sqrt{\frac{x^2}{a^2-h^2} + \frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{3}{2}} \right)$$

C'est une fonction paire de a , et comme le domaine d'intégration est symétrique en a , on peut supposer a positif et doubler le résultat. N'étant une fonction positive, majorons le domaine d'intégration par le domaine

$$\begin{aligned} h &< a < (f + f')/\sqrt{2} \\ 0 &< x < f' \\ 0 &< b < (f + f')/\sqrt{2} \end{aligned}$$

Intégrons en a , après avoir posé $a^2 = u$

$$J = \sqrt{2} \int_{h^2}^{\frac{(f+f')^2}{2}} \sqrt{\frac{x^2}{u-h^2} + \frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{x^2}{u} + \frac{3}{2}} du$$

or

$$F(a) = \int \sqrt{\frac{x^2}{a} + \frac{3}{2}} da = -\sqrt{a} \sqrt{x^2 + \frac{3a}{2}} - \frac{x^2}{\sqrt{6}} \operatorname{Log} \frac{\sqrt{a} + \sqrt{a + \frac{2}{3}x^2}}{-\sqrt{a} + \sqrt{a + \frac{2}{3}x^2}}$$

et tend vers 0 avec a et est fonction continue de a partout ailleurs, donc

$$J < h D$$

D restant borné si h tend vers 0. Cette propriété se conserve évidemment par l'intégration en x et b . Finalement le calcul de la limite de $Y/2h$ pour h tendant vers 0 est ramené au calcul de B .

Ce calcul ne présente pas d'autres difficultés que techniques. Nous le ferons cependant en raison de l'importante propriété suivante :

$$B = w \int \int (f - f')^4 dp d\Theta$$

où w est une constante numérique; l'expression intégrale est celle que nous avons rencontrée dans le cas du pré-alignement. Ainsi :

THÉORÈME. — *Les probabilités élémentaires des pré-alignements linéaire et hyperbolique sont dans un rapport constant indépendant de la carte.*

La différence entre ces deux définitions est plus apparente que réelle; si le pré-alignement hyperbolique semble plus satisfaisant pour la théorie, le pré-alignement linéaire se prête admirablement aux mesures expérimentales.

Démontrons cette propriété. Par suite de la parité en a , l'intégrale B s'écrit :

$$B = 2\sqrt{2} \int \int \int \int a dp d\Theta da db \int_{f - \frac{b\sqrt{2}}{2}}^{f + \frac{b\sqrt{2}}{2}} \sqrt{\frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}} dx$$

L'intégration en x donne pour noyau :

$$J = \left| \begin{array}{c} \frac{3a}{\sqrt{2}} z \sqrt{1+z^2} + \log(z + \sqrt{1+z^2}) \\ \frac{f-b/\sqrt{2}}{a\sqrt{3/2}} \\ \frac{f-b/\sqrt{2}}{a\sqrt{3/2}} \end{array} \right|$$

soit :

$$J = \frac{3}{a\sqrt{2}} \left[\frac{f'\sqrt{2}-b}{3} \sqrt{3a^2 + (f'\sqrt{2}-b)^2} - \frac{f\sqrt{2}-b}{3} \sqrt{3a^2 + (f\sqrt{2}-b)^2} \right. \\ \left. + a^2 \operatorname{Log} \frac{f'\sqrt{2}-b + \sqrt{3a^2 + (f'\sqrt{2}-b)^2}}{f\sqrt{2}-b + \sqrt{3a^2 + (f\sqrt{2}-b)^2}} \right]$$

Intégrons maintenant en a et b ; l'intégrale se décompose en

$$I = \int_{f\sqrt{2}}^{f'+f\sqrt{2}} \frac{f'+f}{\sqrt{2}} db \int_0^{b-f\sqrt{2}} J da + \int_{\frac{f'+f}{\sqrt{2}}}^{f'\sqrt{2}} db \int_0^{f'\sqrt{2}-b} J da$$

Dans le premier terme de cette somme, on pose $n = b - \sqrt{2}f$ et ce terme devient :

$$\frac{3}{2}\sqrt{2} \int_0^{f'-f} \frac{f'-f}{\sqrt{2}} dn \int_0^n da \frac{(f'-f)\sqrt{2}-n}{3} \sqrt{3a^2 + [(f'-f)\sqrt{2}-n]^2} + \frac{n}{3} \sqrt{3a^2 + n^2} \\ + a^2 \operatorname{Log} \frac{(f'-f)\sqrt{2}-n + \sqrt{3a^2 + [(f'-f)\sqrt{2}-n]^2}}{-n + \sqrt{3a^2 + n^2}}$$

Dans le second terme, on pose $n = f'\sqrt{2} - b$ et il s'écrit alors :

$$\frac{3}{2}\sqrt{2} \int_0^{f'-f} \frac{f'-f}{\sqrt{2}} dn \int_0^n \frac{n}{3} \sqrt{3n^2 + a^2} + \frac{(f'-f)\sqrt{2}-n}{3} \sqrt{3a^2 + [(f'-f)\sqrt{2}-n]^2} \\ + a^2 \operatorname{Log} \frac{n + \sqrt{2a^2 + n^2}}{n - (f'-f)\sqrt{2} + \sqrt{3a^2 + [n(f'-f)\sqrt{2}]^2}} da$$

D'où, par addition :

$$I = 3\sqrt{2} \int_c^{\frac{f'-f}{\sqrt{2}}} dn \int_0^n \frac{n}{3} \sqrt{3a^2 + n^2} + \frac{(f'-f)\sqrt{2}-n}{3} \sqrt{3a^2 + [(f'-f)\sqrt{2}-n]^2} \\ + a^2 \operatorname{Log} \frac{(n + \sqrt{3a^2 + n^2})(f'-f)\sqrt{2} - n + \sqrt{3a^2 + [(f'-f)\sqrt{2}-n]^2}}{3a^2} da$$

Enfin, pour mettre en évidence la propriété annoncée, il suffit de poser

$$F = (f' - f) \frac{\sqrt{2}}{2} \quad n = Fx \quad a = Fy$$

Alors

$$I = 3\sqrt{2} F^4 \int_0^1 dx \int_0^x \frac{x}{3} \sqrt{3y^2 + x^2} + \frac{2-x}{3} \sqrt{3y^2 + (2-x)^2} \\ + y^2 \operatorname{Log} \frac{(x + \sqrt{3y^2 + x^2})(2-x) + \sqrt{3y^2 + (2-x)^2}}{3y^2} dy$$

et l'intégrale restante est effectivement numérique. L'intégration en x se fait aisément par parties et une calculatrice C.A.B. 500 de l'Institut de Calcul Numérique de la Faculté de Toulouse nous a permis d'obtenir une valeur approchée du rapport

$$\frac{X(\text{hyperbolique})}{X(\text{linéaire})} = 2,04 \quad 2.5$$

2.6. II. Loi non uniforme :

Il serait long et sans grand intérêt de multiplier les exemples et les cas particuliers; les calculs faits au chapitre précédent et les formules générales données dans le présent chapitre montrent assez comment procéder. Nous ne donnerons donc qu'un seul exemple, particulièrement simple.

Loi normale. Pré-alignement linéaire.

Les notations, pour abrégé, sont identiques à celles employées au paragraphe (2.2.). Alors :

$$F(h) = \hat{=} \int \int \int \int dF dF' \int \int_{(A)} dF''$$

posant encore :

$$x \cos \theta + y \sin \theta - p = s \quad x \sin \theta - y \cos \theta = t$$

et prenant $dF = \exp - \frac{1}{2} (x^2 + y^2)$

l'intégrale interne devient :

$$\int \int \exp - \frac{1}{2} (t^2 + (s - p)^2) dt ds$$

t pouvant prendre toute valeur et s les valeurs de valeur absolue inférieure à h . L'intégration en t détermine une constante. $F(h)$ s'écrit donc :

$$F(h) = \int \dots \int |r - r'| e^{-\frac{1}{2}(2p^2 + r^2 + r'^2 + (s-p)^2)} dr dr' dp ds$$

le domaine d'intégration reste un paralléloétope; les intégrations en r, r' et θ déterminent des constantes. Pour intégrer en p , nous écrirons :

$$2p^2 + (s-p)^2 = 3\left(p - \frac{s}{3}\right)^2 - \frac{s^2}{3} + s^2$$

et, intégrant en $q = p - s/3$ sur \mathbb{R} tout entier, on détermine une nouvelle constante; finalement :

$$F(h) = \int_0^h e^{-\frac{1}{2} \frac{s^2}{3}} ds$$

h suit donc une loi normale tronquée avec $\sigma = \sqrt{\frac{3}{2}}$.

2.7. Remarque sur l'égalité (2.5).

Cette égalité a été établie en supposant X infiniment petit. Il est facile de voir qu'elle est inexacte pour une valeur de h finie non nulle. Il n'en résulte pas d'inconvénient, les théorèmes de convergence du chapitre V supposant tous h infiniment petit. De plus, cette propriété ne s'étend pas à toutes les définitions possibles de la quantité d'alignement. On voit par exemple que la surface du triangle défini par trois points est une quantité d'alignement ne satisfaisant pas à cette propriété.

En outre, c'est une relation d'équivalence qui permet un classement des quantités d'alignements, selon des « types », classes d'équivalences pour cette relation.

CHAPITRE III

3.1. Nous commencerons par étendre les résultats et les méthodes du paragraphe (1.6) à des systèmes plus importants; en fait, ceci généralise la méthode que LEBESGUE avait proposée pour des couples de points : s'agissant d'étudier les moments d'une fonction ne dépendant que de la droite joignant deux points aléatoires indépendants, Lebesgue proposait comme coordonnées du couple de points

$$p \quad \theta \quad r \quad r'$$

p et θ déterminant la droite et r, r' déterminant les points sur cette droite; la propriété remarquable étant que les variables $p \quad \theta$ se séparent des autres. C'est aux formes quadratiques définies positives, et d'abord au cas d'une ellipse que nous étendons cette méthode.

Soient donc 5 points de coordonnées x_i, y_i ($i = 1, 2, \dots, 5$). Nous pensons :

$$\begin{aligned} x_i &= l + a \cos h \cos \theta_i - b \sin h \sin \theta_i \\ y_i &= m + a \sin h \cos \theta_i + b \cos h \sin \theta_i \end{aligned}$$

la signification géométrique des nouvelles variables est évidente; nous y distinguerons :

les paramètres de position globale	$l \quad m \quad h$
les paramètres de grandeur	$a \quad b$
les paramètres de position interne	θ_i

Le jacobien s'écrit :

$$\left| \begin{array}{ccccccccc} \text{I} & 0 & ch c_1 & -sh s_1 & -a sh c_1 & -b ch s_1 & R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \text{I} & 0 & ch c_2 & -sh s_2 & -a sh c_2 & -b ch s_2 & 0 & R_2 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & & & & & & & & & & \\ \dots & & & & & & & & & & \\ \dots & & & & & & & & & & \\ 0 & \text{I} & sh c_1 & -ch s_1 & a ch c_1 & -b sh s_1 & Q_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & & & & & & & & & & \\ \dots & & & & & & & & & & \\ \dots & & & & & & & & & & \end{array} \right|$$

où c_i est mis pour $\cos \theta_i$ et ch pour $\cos h$. De plus :

$$R_i = -a ch s_i - b sh c_i$$

$$Q_i = -a sh c_i + b ch c_i$$

on obtient, après quelques manipulations

$$J = (a^2 - b^2) a^2 b^2 K$$

où K ne dépend plus que des paramètres de positions internes; ce qui est la propriété annoncée. Plus précisément :

1	0	c_1	s_1	0	c_1	0	0	0	0	$=K$
1	0	c_2	s_2	0	0	c_2	0	0	0	
1	0	c_3	s_3	0	0	0	c_3	0	0	
1	0	c_4	s_4	0	0	0	0	c_4	0	
1	0	c_5	s_5	0	0	0	0	0	c	
0	1	0	0	c_1	$-s_1$	0	0	0	0	
0	1	0	0	c_2	0	$-s_2$	0	0	0	
0	1	0	0	c_3	0	0	$-s_3$	0	0	
0	1	0	0	c_4	0	0	0	$-s_4$	0	
0	1	0	0	c_5	0	0	0	0	$-s_5$	

On peut donner de ce déterminant une interprétation géométrique simple; il est facile de l'écrire :

$$K = (s_i, c_i, s_i c_i, s_i^2, c_i^2)$$

ou

$$K = 1/4 (s_i, c_i, s_{2i}, c_{2i}, I)$$

Posons $\exp i\theta_i = u_i$; alors

$$K = 1/16 (I, u, u^2, u^3, u^4)$$

et le déterminant de VAN DER MONDE s'interprète comme le produit des distances des points d'angles polaires θ_i sur le cercle trigonométrique. Ainsi, comme dans le cas des couples de points :

Théorème. — Le jacobien est indépendant des paramètres de position globale et est à variables séparées par rapport aux deux autres groupes de paramètres.

3.2. Cette méthode simplifie certains calculs peu accessibles directement. Donnons-en quelques exemples pour 5 points indépendants à distribution maxwellienne. La densité conjointe des dix variables

$$l, m, a, b, h, \theta_i \quad (i = 1, 2 \dots 5)$$

s'écrit, en utilisant le résultat précédent :

$$f(l, m, a; b, h, \theta_i) = \frac{K}{(2\pi)^{5/2}} a^5 b^5 (b^2 - a^2) \exp - \frac{1}{2} (5l^2 + 5m^2 + 2la \cos h \sum \cos \theta_i - 2lb \sin h \sum \sin \theta_i + ma \sin h \sum \cos \theta_i + 2mb \cos h \sum \sin \theta_i + a^2 \sum \cos^2 \theta_i + b^2 \sum \sin^2 \theta_i)$$

les variables l et m pouvant prendre toute valeur réelle

les variables a et b pouvant prendre toutes valeurs positives telles que $a < b$
 h variant entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ et les angles θ_i pouvant prendre toute valeur d'un
intervalle quelconque d'amplitude 2π .

Un certain nombre de résultats peuvent s'en déduire. Désignons par $D(l, m, a)$ par exemple la section du paralléloétope des variables par la variété que définissent les valeurs constantes de l, m et a .

3.2.1. Probabilité pour que la conique que définissent 5 points gaussiens indépendants soit une ellipse :

$$W = \int_D f \, da \, db \, dl \, dm \, dh \, d\theta_i$$

(plusieurs intégrations partielles sont explicitées dans les lignes suivantes).
Pour les applications suivantes, on suppose que les 5 points définissent une ellipse.

3.2.2. Répartition du centre de l'ellipse définie par 5 points gaussiens indépendants. On l'obtient en intégrant sur $D(l, m)$.

$$f(l, m) = \int_D(l, m) f \, da \, db \, dh \, d\theta_i.$$

3.2.3. Répartition de l'excentricité de l'ellipse définie. Nous l'obtiendrons en posant :

$$e = a/b \quad r = b^2 - a^2$$

le jacobien du changement s'écrit :

$$\frac{(e, r)}{(a, b)} = 2(1 - a^2/b^2)$$

et, intégrant en r de 0 à l'infini et sur $D(l, m, h, \theta_i)$

$$f(e) = \int_{D(l, m, h, \theta_i)} 2 f(1 - a^2/b^2) \, dl \, dm \, dh \, dr \, d\theta_i$$

Il est immédiat d'intégrer dans tout le plan en l et m :

$$f(e) = \frac{1}{10(2\pi)^{3/2}} \int_{D(h, \theta_i)} K a^2 b^4 \exp - \frac{1}{2} a^2 (\sum \cos^2 \theta_i - (\sum \cos \theta_i)^2) \\ \dots + b^2 (\sum \sin^2 \theta_i - \frac{1}{5} (\sum \sin \theta_i)^2) \, dh \, dr \, d\theta_i$$

puis en h :

$$f(e) = \frac{\pi}{10(2\pi)^{3/2}} \int \frac{K r^3 e^2}{(1-e^2)^2} \exp. - \frac{1}{2} \frac{r}{1-e^2} \left(e^2 (\sum \cos^2 \theta_i - \frac{1}{5} (\sum \cos \theta_i)^2) \right. \\ \left. + (\sum \sin^2 \theta_i - \frac{1}{5} (\sum \sin \theta_i)^2) \right) \, dr \, d\theta_i$$

et enfin en r :

$$f(e) = \frac{48\pi}{5(2\pi)^{3/2}} e^2 (1-e^2)^2 \int \frac{K \, d\theta}{\left[e^2 (\sum \cos^2 \theta_i - \frac{1}{5} (\sum \cos \theta_i)^2) + (\sum \sin^2 \theta_i - \frac{1}{5} (\sum \sin \theta_i)^2) \right]}$$

3.2.4. Aire moyenne de l'ellipse définie.

Les calculs sont inchangés jusqu'à l'intégration en h comprise. Pour la suite le noyau est à multiplier par $\frac{er}{1-e^2}$ et il faut intégrer en e de 0 à 1.

Toutes ces formules intégrales présentent l'indéniable avantage de s'appliquer à un domaine simple, en l'occurrence un hypercube d'arêtes parallèles aux axes de coordonnées. Néanmoins leur calcul numérique reste d'un coût important. Le calcul 3.2.4. par exemple, exige, au dire d'un spécialiste du calcul numérique, un temps de calcul de l'ordre de 17 minutes sur I.B.M. 7 090 (avec 3 chiffres significatifs).

3.3. Extension pour l'approximation de systèmes de points plus importants.

Cette étude est faite en géométrie plane; la simplification qui résulte de cette hypothèse est essentiellement une simplification d'écriture, allégée des indices qu'exigerait une étude dans R^n .

Préliminaire : conique passant par 5 points.

Supposons donnés cinq points par leur coordonnées cartésiennes en axes rectangulaires et cherchons les coefficients d'une forme quadratique nulle en ces cinq points; c'est un problème banal mais dont la solution habituellement présentée masque la symétrie, bien évidente a priori, et se prête aux généralisations. Il s'agit de résoudre le système :

$$(I) \quad f_i = ax_i^2 + 2bx_iy_i + cy_i^2 + 2dx_i + ey_i + f = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5)$$

A l'homogénéité près, et à des cas particuliers de probabilités nulles si les 5 points sont indépendants, nous sommes assurés de l'existence et de l'unicité de la solution. Remplaçons le système (I) par :

$$\begin{array}{lll} \sum x_i f_i = 0 & \sum y_i f_i = 0 & \sum x_i y_i f_i = 0 \\ \sum x_i^2 f_i = 0 & \sum y_i^2 f_i = 0 & \end{array}$$

Ce système est presque sûrement équivalent au précédent. En effet, nous avons multiplié son déterminant par

$$(x, y, xy, x^2, y^2)$$

qui n'est nul que si les 5 points sont sur une même conique passant par l'origine des coordonnées. Il est même certainement non nul si on choisit pour axes les axes d'inertie du système de points. C'est ce que nous suppo-

serons désormais. Avec une condition non homogène arbitraire, par exemple $f = 1$ nous pourrions poser :

$$\Lambda = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ B & 2C & C' & 2A & 0 & 0 \\ C & 2C' & B' & 0 & 2A' & 0 \\ E & 2F & E' & 2C & 2C' & 0 \\ D & 2E & F & 2B & 2C & A \\ F & 2E' & D & 2C' & 2B' & A' \end{pmatrix}$$

avec :

$$\begin{aligned} A &= \sum x_i^2 & A' &= \sum y_i^2 & B &= \sum x_i^3 & B' &= \sum y_i^3 & C &= \sum x_i^2 y_i & C' &= \sum x_i y_i^2 \\ D &= \sum x_i^4 & D' &= \sum y_i^4 & E &= \sum x_i^3 y_i & E' &= \sum x_i y_i^3 & F &= \sum x_i^2 y_i^2 \end{aligned}$$

Alors la réponse au problème posé se présente sous une forme symétrique par rapport aux 5 points de base; elle s'écrit en effet;

$$\Lambda = P^{-1} 1$$

3.4. Extension. Recherche d'une forme quadratique approchant un système de plus de cinq points.

Supposons donnés dans le plan n points par leurs coordonnées x_i et y_i ($i = 1, 2, \dots, n$); nous en cherchons la plus fine approximation quadratique (en abrégé : p.f.a.q.) c'est-à-dire la forme :

$$\varphi = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + 1$$

Telle que l'expression :

$$M = \sum \varphi_i^2$$

soit rendue minimale; nous sommes assurés a priori de l'existence et de l'unicité d'une telle forme : l'existence résulte de la possibilité qu'on a de limiter les systèmes possibles ($a \ b \ c \ d \ e$) à un compact de R^5 . L'unicité exige une discussion plus précise :

Définition. — Nous dirons que deux systèmes sont équivalents si

- a) leurs axes d'inertie sont les mêmes,
- b) les onze quantités $A \ A' \dots F$ définies plus haut sont les mêmes pour les deux systèmes.

Il est manifeste que cette relation est une relation d'équivalence. Nous distinguerons alors des systèmes singuliers, équivalents à des systèmes réduits à 1, 2, 3 ou 4 points : en ce cas, le problème posé subit une indétermination à 4, 3, 2 ou un paramètre. Tout autre système sera dit régulier et les systèmes réguliers font seuls l'objet de la suite.

Cette relation tire son intérêt du théorème suivant :

Théorème. — Deux systèmes équivalents ont la même *pfaq*.

En particulier, s'il existe, dans la classe du système étudié un système réduit à 5 points, la *pfaq* est la conique définie par ces points : ce n'est pourtant pas le cas en général, l'équivalence se traduisant par 14 conditions analytiques.

Malheureusement, la réciproque de ce théorème est inexacte, comme on peut s'en convaincre en considérant deux systèmes réduits à 5 points tous portés par la même conique; et le maintien de la condition *a* n'y change rien. Nous donnerons plus loin une condition analytique nécessaire et suffisante pour lever cette difficulté. Démontrons le théorème annoncé ci-dessus.

Les conditions nécessaires

$$\frac{\partial m}{\partial a} = \frac{\partial m}{\partial b} = \frac{\partial m}{\partial c} = \frac{\partial m}{\partial d} = \frac{\partial m}{\partial e} = 0$$

s'écrivent

$$\sum x_i^2 \varphi_i = 0 \quad \sum y_i^2 \varphi_i = 0 \quad \sum x_i \varphi_i = 0 \quad \sum y_i \varphi_i = 0 \quad \sum x_i y_i \varphi_i = 0$$

L'expression de *M* se simplifie en :

$$M = a \sum x_i^2 \varphi_i + 2b \sum x_i y_i \varphi_i + c \sum y_i^2 \varphi_i + 2d \sum x_i \varphi_i + 2e \sum y_i \varphi_i + \sum \varphi_i$$

soit

$$M = \sum \varphi_i$$

Conservant les mêmes axes et les mêmes notations que pour le problème préliminaire, on obtient :

$$M = a A + c A' + n$$

et un système d'équations linéaires formellement identique au précédent : seules les expressions mentionnées dans la condition *b* figurent dans ce système, ce qui démontre le théorème. Nous écrivons ce système :

$$A P = 1$$

Si on ne s'intéresse qu'à *M*, à l'exclusion de la *pfaq* qui permet de l'obtenir, on obtiendra cette quantité en annulant le déterminant

$$\begin{vmatrix} A & 0 & A' & 0 & 0 & n-M \\ B & 2C & C' & 2A & 0 & 0 \\ C & 2C' & B' & 0 & 2A' & 0 \\ E & 2F & E' & 2C & 2C' & 0 \\ F & 2E' & D' & 2C' & 2B' & A' \\ D & 2E & F & 2B & 2C & A \end{vmatrix}$$

Nous sommes maintenant en mesure de donner une condition analytique nécessaire et suffisante pour que deux systèmes aient la même *pfaq* :

$$P^{-1} 1 = s Q^{-1} 1$$

ce qui se traduit par :

$P^{-1}Q$ admet 1 pour vecteur propre.

La fonction de système de points $M(\sigma)$ que nous venons de définir est en quelque sorte une mesure de la façon dont les points du système sont « presque sur une même conique ». D'une façon plus précise, disons que la relation

$$M < h$$

définit pour les systèmes de n points une relation pré-orthoïde; l'extension transitive correspond au cas $h = 0$ et la vérification des axiomes, avec les modifications du langage qui s'imposent pour passer du cas $n = 3$ au cas général est immédiat. Toute la théorie faite s'applique donc et en particulier le fait que si l'on observe un grand nombre de points répartis de façon aléatoire et indépendante le nombre des systèmes de n points satisfaisant à la relation :

$$M < h$$

suit asymptotiquement, et donc approximativement une loi de Poisson.

Une dernière remarque, qui peut être utile pour la réduction de systèmes à des systèmes équivalents plus simples :

Théorème. — Si deux systèmes ont la même *pfaq*, leur réunion a également la même *pfaq*.

La démonstration est évidente si l'on remarque que la condition donnée plus haut est linéaire par rapport à la matrice Q et que la matrice Q correspondant à la réunion de deux systèmes de matrices respectives Q_1 et Q_2 est simplement :

$$Q = Q_1 + Q_2$$

CHAPITRE IV

NOTIONS DUALES

En géométrie plane, la relation « trois droites sont concourantes » est manifestement orthoïde; nous les considérons comme l'extension transitive d'un certain nombre de relations pré-orthoïdes. Pour chacune de ces relations nous donnerons les formules et nous examinerons les calculs qui conduisent à la détermination de la partie principale de la probabilité élémentaire X correspondante.

4.1. Géométrie euclidienne.

Les méthodes employées ici sont des extensions de celles proposées par CROFTON [7], BARBIER [27], LEBESGUE [17] et aussi par M. le Recteur R. DELTHEIL (Thèse).

Naturellement, nous devons définir une carte, c'est-à-dire un ensemble de droites de mesure finie parmi lesquelles « trois droites seront choisies au hasard ». Nous choisirons l'ensemble des sécantes d'un contour du plan; il est évident qu'on ne modifie pas la carte en remplaçant ce contour par le plus petit convexe le contenant : avec BARBIER nous dirons d'une façon imagée qu'on tend un fil autour du contour choisi.

Par abus de langage, dans toute la suite, le mot carte désignera aussi bien un convexe du plan que l'ensemble de ses sécantes; cet « abus » est d'ailleurs dual de celui fait tout naturellement au paragraphe 5.2.

L'élément différentiel de probabilité ne peut pas être choisi de façon arbitraire : conformément au sous-titre donné plus haut, il est naturel de lui imposer d'être invariant dans tout déplacement. Ainsi, soit une droite D définie par son équation

$$ux + vy + 1 = 0$$

Un déplacement se définit comme la transformation

$$\begin{aligned} X &= a + x \cos \alpha - y \sin \alpha \\ Y &= b + x \sin \alpha + y \cos \alpha \end{aligned}$$

L'équation de D devient :

$$UX + VY + 1 = 0$$

avec :

$$u = \frac{U \cos \alpha + V \sin \alpha}{a U + b V + 1} \quad v = \frac{-u \sin \alpha + V \cos \alpha}{a U + b V + 1}$$

On doit chercher une mesure définie par :

$$\int \int F(u, v) du dv$$

que l'on veut évaluer à

$$\int \int F(U, V) dU dV$$

La première intégrale s'écrit :

$$\int \int F(u, v) \frac{\partial(u, v)}{\partial(U, V)} dU dV$$

et l'égalité pour toute carte entraîne

$$F(U, V) = F(u, v) \frac{\partial(u, v)}{\partial(U, V)}$$

Le jacobien se calcule sans peine :

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(U, V)} = (aU + bV + 1)^{-3}$$

Or, des égalités (1) on tire :

$$\left(\frac{u^2 + v^2}{U^2 + V^2} \right)^{3/2} = (aU + bV + 1)^{-3}$$

Les conditions requises seront satisfaites si l'on choisit $F(u, v)$ proportionnel à $(u^2 + v^2)^{-3/2}$ soit comme élément différentiel :

$$\frac{du dv}{(u^2 + v^2)^{3/2}}$$

En coordonnées d'EULER, posant :

$$u = -\cos \theta / p \quad v = -\sin \theta / p$$

le jacobien se réduit à p^3 et donc l'élément différentiel à

$$dp d\theta$$

Poincaré dans son traité « Calcul des probabilités » a prouvé que cet élément est le seul invariant par tout déplacement.

4.2. Définition I (corrélative du pré-alignement linéaire).

Trois droites sont préconcourantes à h près si la distance de l'une d'elles à l'intersection des deux autres n'atteint pas h .

Prenons deux droites D et D'; la mesure utile pour la troisième droite est celle de l'ensemble des sécantes communes :

— à la carte,

— au cercle de rayon h centré au point d'intersection de D et D'.

On sait que l'ensemble des sécantes d'un contour convexe a pour mesure

$$\int \int dp d\theta = L \quad \text{périmètre du contour.}$$

En effet, supposons le contour défini comme enveloppe des droites d'équation

$$x \cos \theta + y \sin \theta = P(\theta)$$

On suppose la fonction P constamment positive (l'origine est alors un point

intérieur du contour) ainsi que la quantité $P + P''$ (la concavité est constamment tournée vers 0). Alors

$$ds = (P + P'') d\theta$$

et

$$L = \int_0^{2\pi} P d\theta + \int_0^{2\pi} P'' d\theta$$

la seconde intégrale est nulle, tandis que la première est $\int \int dp d\theta$. Cette intégrale peut même servir de définition à la « longueur ». C'est ainsi que E. CARTAN [4] propose d'appeler « périmètre » d'une surface fermée convexe la mesure de l'ensemble des plans qui la coupent.

4.3. Probabilité pour qu'une sécante de la carte coupe le cercle (w, h) .

a) w est intérieur à la carte. Il résulte du calcul ci-dessus que cette probabilité vaut :

$$v_1 = \frac{2\pi h}{L}$$

b) w est extérieur à la carte. Nous supposons h assez petit pour que les tangentes communes intérieures et extérieures à la carte et au cercle puissent être tenues pour parallèles deux à deux.

La mesure des sécantes communes est égale à la différence entre les longueurs de fils tendus avec et sans croisement autour des deux contours.

longueur du fil croisé :

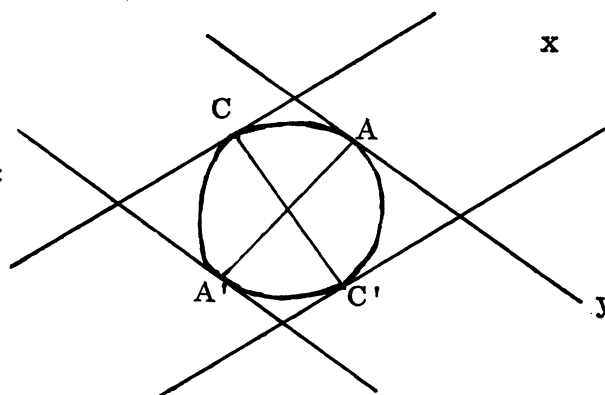
$$xC + CA' + A'y$$

longueur du fil non croisé :

$$xC' + C'A + Ay$$

différence :

$$2 CA = 2 a h$$



a désignant l'angle sous lequel on voit la carte du point w .

Ainsi X est encore du premier ordre en h et sa partie principale est Yh avec :

$$Y = \frac{\int \int \frac{2\pi h}{2} dp d\theta dp' d\theta'}{\frac{1}{2} L^2} + \frac{\int \int \frac{2a h}{2} dp d\theta dp' d\theta'}{\frac{1}{2} L^2}$$

La première intégrale étant étendue à l'ensemble des couples de sécantes se coupant à l'intérieur de la carte, et la seconde à l'ensemble des couples se coupant à l'extérieur.

La première se calcule aisément; soit AB la corde découpée par le contour sur une sécante D et soit C sa longueur. Les droites D' coupant D entre A et B forment un ensemble de mesure :

$$\int \int dp d\theta = 2C$$

L'ensemble total des couples a donc pour mesure :

$$\int \int C dp d\theta$$

car chaque couple est compté deux fois. Cette intégrale est calculée au paragraphe 2.5. Sa valeur est $2\pi S$ (S désignant l'aire du contour).

Ainsi :

$$Y_1 = 4\pi^2 hS/L^3$$

Pour simplifier l'expression de la seconde, nous changerons de variables, prenant comme coordonnées du couple de sécantes les deux angles θ et θ' et x et y , coordonnées cartésiennes du point d'intersection des deux sécantes. Alors :

$$\frac{\partial(p, p')}{\partial(x, y)} = \sin(\theta - \theta')$$

On a donc :

$$Y_2 = \frac{4h}{L^3} \int \int a \sin(\theta - \theta') dx dy d\theta d\theta'$$

θ et θ' varient chacun de 0 à a (nous diviserons par 2 le résultat)

$$\begin{aligned} \int \int \sin(\theta - \theta') d\theta d\theta' &= \int_0^a d\theta' \left(\int_0^{\theta'} \sin(\theta' - \theta) d\theta - \int_{\theta'}^a \sin(\theta' - \theta) d\theta \right) \\ &= \int_0^a (1 - \cos \theta' - \cos(a - \theta') + 1) d\theta' \\ &= 2(a - \sin a) \end{aligned}$$

Ainsi

$$Y_2 = \frac{4h}{L^3} \int \int a(a - \sin a) dx dy$$

Nous achèverons le calcul pour certaines cartes particulières.

4.4. Carte circulaire.

On a $R = r \sin a/2$

En coordonnées polaires :

$$Y_2 = \frac{4h}{L^3} \int \int a(a - \sin a) r dr d\theta$$

Soit :

$$Y_s = \frac{4h}{L^3} 2\pi \int_R^\infty a(a - \sin a) r dr$$

et, avec a pour variable,

$$r = \frac{R}{\sin \frac{1}{2} a} \quad dr = -\frac{1}{2} R \frac{\cos \frac{1}{2} a}{\sin^2 \frac{1}{2} a} da$$

$$Y_s = \frac{4\pi h R^3}{L^3} \int_0^\pi a(a - \sin a) \cos \frac{1}{2} a \frac{da}{\sin^3 \frac{1}{2} a}$$

dont le calcul est élémentaire :

$$Y_s = 16h \frac{\pi R^3}{L^3} = 16 \frac{h S}{L^3}$$

Au total, pour une carte circulaire :

$$Y = \frac{4h S}{L^3} (\pi^2 + 4)$$

4.5. Pour étendre ces calculs à d'autres cartes, nous mettrons en évidence certaines simplifications.

Soit $A(a)$ l'aire du domaine extérieur à la carte d'où l'on voit la carte sous un angle au moins égal à a . Manifestement :

$$J = \int \int a(a - \sin a) dx dy = \int_0^\pi a(a - \sin a) dA$$

Intégrant par parties :

$$J = \left[a A(a - \sin a) \right]_0^\pi + \int_0^\pi A(a) (2a - \sin a - a \cos a) da$$

La partie tout intégrée est nulle; en effet pour $a = \pi$, A est nul; d'autre part si a tend vers 0, $A a^2$ est borné :

A est fonction décroissante de a ; soient R et R' les rayons de deux cercles, l'un intérieur C , l'autre extérieur C' à la carte; on a

$$A_C(a) < A(a) < A_{C'}(a)$$

ou

$$\frac{\pi R^3}{\sin^3 \frac{1}{2} a} < A(a) < \frac{\pi R'^3}{\sin^3 \frac{1}{2} a}$$

La propriété annoncée résulte de cette double inégalité. Ainsi :

$$J = \int_0^\pi A(a) (2a - \sin a - a \cos a) da$$

Application 1. Triangle équilatéral.

$$Y = \frac{4\pi hS}{L^3} + \frac{4hJ}{L^3}$$

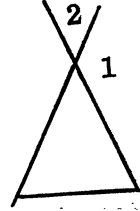
Pour calculer J, nous intégrerons seulement dans les régions 1 et 2 et nous triplerons le résultat.

Région 1.

Désignons par $2b$ la longueur du côté du triangle.

Il est immédiat que

$$\text{si } a > \frac{\pi}{3} \quad A = b^2 \left(\frac{\pi - a}{\sin^2 a} + \frac{\cos a}{\sin a} \right)$$



$$\text{si } a < \frac{\pi}{3} \quad A = \frac{b^2}{\sin^2 a} \left(\frac{\pi}{3} + a + \sin \left(\frac{2\pi}{3} - 2a \right) + \sin a \cos a \right)$$

Région 2.

Toujours $a < \frac{\pi}{3}$ et

$$A = \frac{b^2}{\sin^2 a} \left(\frac{\pi}{3} - a + (\cos a - \sqrt{3} \sin a) \left(\sin \frac{\pi}{3} - a \right) \right)$$

au total, pour $a < \frac{\pi}{3}$

$$A = \frac{b^2}{\sin^2 a} \left(\frac{2\pi}{3} + \sqrt{3} \cos^2 a \right)$$

Après l'intégration qui est élémentaire, on obtient :

$$J = 3b^2 \left(29 \frac{\pi}{6} + \sqrt{3} + \sqrt{3} \operatorname{Log} 9/16 + 8 \int_0^{\pi/3} \operatorname{Log} \sin x \, dx \right)$$

Un calcul analogue peut être fait pour un triangle quelconque, mais le résultat ne présente aucune particularité qui mérite d'être notée.

4.6. Définition II (corrélative du pré-alignement hyperbolique).

Trois droites sont préconcourantes à h près s'il existe un point de leur plan dont la somme des carrés des distances aux trois droites n'atteint pas h^2 .

Soient alors deux droites D et D' que, provisoirement nous rapportons à leurs bissectrices, en sorte que D et D' ont pour équation :

$$x \cos a \pm y \sin a = 0$$

et soit D'' une troisième droite, rapportée aux mêmes axes :

$$x \cos \theta + y \sin \theta = p$$

Le point $M(x, y)$ a pour somme des carrés des distances aux trois droites

$$f(M) = 2x^2 \sin^2 a + 2y^2 \cos^2 a + (x \cos \theta + y \sin \theta - p)^2$$

fonction qui est minimale quand :

$$4y \cos^2 a + \sin \theta (x \cos \theta + y \sin \theta - p) = 0$$

$$4y \sin^2 a + \cos \theta (x \cos \theta + y \sin \theta - p) = 0$$

d'où l'on tire par élimination la valeur minimale

$$f_0(M) = \frac{2p^2 \cos^2 a \sin^2 a}{\cos^2 a \cos^2 \theta + \sin^2 a \sin^2 \theta + 2 \sin^2 a \cos^2 a}$$

Les droites « possibles » sont les sécantes de la courbe définie par :

$$f_0(M) = h^2$$

On voit aisément que cette courbe est l'ellipse :

$$x^2 \frac{2 \sin^2 a}{1+2 \sin^2 a} + y^2 \frac{2 \cos^2 a}{1+2 \cos^2 a} = h^2$$

et on est ramené à un problème identique au précédent; remarquons encore que la « mesure utile » et donc la probabilité dépend linéairement de h .

4.7. Diverses extensions de ces résultats peuvent être envisagées. Les trois que nous proposons sont extrêmement voisines sous un langage très différent : il serait sans doute intéressant de les comparer d'une façon précise :

a) On peut abandonner la condition dite « fondamentale » au paragraphe 4.1. selon laquelle tout déplacement laisse invariante la probabilité élémentaire.

b) On peut aussi maintenir cette condition, mais pour un autre groupe de transformations que celui des déplacements euclidiens : par exemple en géométrie cayleyenne.

c) On peut enfin rester en métrique euclidienne, mais sur une surface dont les géodésiques nous tiendront lieu de droites.

4.7.1. Exemple de généralisation de première espèce :

Considérons dans le plan une répartition « normale » de droites de probabilité élémentaire :

$$\frac{1}{2} (2\pi)^{3/2} e^{-\frac{1}{2} p^2} dp d\theta$$

Prenons deux droites de coordonnées p, θ_1 et q, θ_2 et désignons par x et y les coordonnées de leur point d'intersection. Le raisonnement précédent s'applique sans changement :

$$F = \int e^{-\frac{1}{2} (p^2 + q^2)} dp dq d\theta_1 d\theta_2 \int e^{-\frac{1}{2} r^2} dr d\phi$$

tous les angles variant de 0 à π et r restant compris dans l'intervalle

$$x \cos \theta + y \sin \theta - h, \quad x \cos \theta + y \sin \theta + h$$

Remplaçons les variables p, q, r par x et y définis plus haut et s :

$$r = x \cos \theta + y \sin \theta + sh$$

s varie de -1 à $+1$. Alors :

$$F = \int |\sin(\theta_1 - \theta_2)| \exp - \frac{1}{2} (x \cos \theta_1 + y \sin \theta_1)^2 + (x \cos \theta_2 + y \sin \theta_2) \\ + (x \cos \theta + y \sin \theta + sh)^2 dx dy ds d\theta_1 d\theta_2 d\theta$$

L'intégration en x et y ne présente pas de difficultés et le résultat s'en présente sous une forme curieusement simple :

$$F = \int J e^{-\frac{1}{2} J^2 s^2} ds d\theta_1 d\theta_2$$

avec :

$$J^2 = \frac{h^2 \sin^2(\theta_1 - \theta_2)}{\sin^2(\theta_1 - \theta) + \sin^2(\theta - \theta_2) + \sin^2(\theta_1 - \theta_2)}$$

4.7.2. Généralisation de la seconde espèce :

Nous ne nous attarderons pas sur ce point qui nous écarterait trop de notre sujet, et d'ailleurs qui a déjà été abondamment étudié sous un autre langage que celui des probabilités. Il ne s'agit en effet que d'associer à un groupe un invariant intégral, et réciproquement; on sait que ce n'est pas toujours possible. Ce sujet a été étudié dans les « leçons sur les invariants intégraux » de E. CARTAN.

4.7.3. Généralisation de la troisième espèce :

Nous sommes déjà bien plus éloigné et plutôt que de revenir au cas « non généralisé » nous préférons nous ramener à une généralisation de première espèce. Nous nous bornerons à déterminer la probabilité élémentaire, qui était $dp d\theta$ dans le cas des droites du plan.

Dans toute la suite, on considérera une portion de surfaces suffisamment limitée pour que deux de ses points déterminent une géodésique et une seule. De plus, nous supposerons qu'un système de coordonnées polaires géodésiques est utilisable en sorte que la première forme fondamentale de la surface se réduise à :

$$ds^2 = dr^2 + g(r, \theta) d\theta^2$$

a) Détermination des géodésiques par le équations d'HAMILTON. Soit $F(x, y, x', y')$ une fonction homogène de degré 1 par rapport à x' et y' . On veut déterminer les courbes extrémales pour l'intégrale :

$$I = \int_{t_0}^{t_1} F dt$$

Elles sont définies par les équations d'EULER :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial x'} - \frac{\partial F}{\partial x} &= 0 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y} &= 0\end{aligned}$$

Posons alors

$$p = \frac{\partial F}{\partial x'} \quad q = \frac{\partial F}{\partial y'}$$

ou inversement :

$$x' = f(x, y, p, q) \quad y' = h(x, y, p, q)$$

La fonction d'HAMILTON H est :

$$H(x, y, p, q) = -F(x, y, f, h) - pf - qh$$

Avec toutes ces notations, les équations d'Euler deviennent :

$$\frac{dp}{dt} + \frac{\partial H}{\partial x} = 0 \quad \frac{dq}{dt} + \frac{\partial H}{\partial y} = 0 \quad H,$$

Ce qui peut encore s'écrire, compte tenu de la définition de H :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p} \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q} \quad H,$$

Ce sont les équations d'HAMILTON pour les géodésiques.

b) Soit donc une surface définie comme il a été dit plus haut et soit

$$ds^2 = E dx^2 + 2F dx dy + G dy^2$$

sa première forme quadratique fondamentale. Les géodésiques sont données par les équations d'HAMILTON où l'on prend :

$$F^2 = E x'^2 + 2F x' y' + G y'^2$$

Soit X un ensemble de géodésiques, chacune définie par deux paramètres a et b . Leurs équations sont de la forme :

$$x = x(a, b, t) \quad y = y(a, b, t)$$

Calculant p et q d'après leurs formules de définition, on fixe t , paramètre courant sur la géodésique G et on considère l'expression :

$$dG = dx dp + dy dq$$

et on prend pour mesure de l'ensemble X l'intégrale sur X de dg . Cette définition n'a de sens et d'intérêt que si :

- elle est invariante par un changement de coordonnées sur la surface.
- elle est invariante par rapport à t .

Ces deux invariances s'établissent facilement;

I. Invariance par changement de coordonnées.

Posons : $x = x(X, Y) \quad y = y(X, Y)$

on en déduit :

$$x' = \frac{\partial x}{\partial X} X' + \frac{\partial y}{\partial Y} Y' \quad y' = \frac{\partial y}{\partial X} X' + \frac{\partial y}{\partial Y} Y'$$

de même :

$$P = p \frac{\partial x}{\partial X} + q \frac{\partial y}{\partial X} \quad Q = p \frac{\partial x}{\partial Y} + q \frac{\partial y}{\partial Y}$$

calculant dP dQ et reportant dans l'expression de dG on vérifie l'invariance.

II. Invariance par rapport à t .

Soit C la courbe limitant le domaine de variation des paramètres a et b .

$$M(X) = \int_C dG = \int_C dx dp + dy dq = - \int_C p dx + q dy$$

La variation de M si t varie est :

$$\partial M = - \int_C x p \partial d + x p d \partial + \partial q dy + q \partial dy$$

or

$$\int_C p d \partial x = [p \partial x] - \int \partial x dp$$

et la partie tout intégrée disparaît puisque C est fermée. De même pour y ; ainsi :

$$\partial M = \int_C \partial p dx - \partial x dp + \partial q dy - \partial y dq$$

et tenant compte des équations d'HAMILTON :

$$\partial M = \int_C \left(\frac{\partial H}{\partial x} dx + \frac{\partial H}{\partial p} dp + \frac{\partial H}{\partial y} dy + \frac{\partial H}{\partial q} dq \right) \partial t$$

$$\text{soit } \partial M = \left(\int_C dH \right) \partial t = 0$$

Cette définition a été donnée par HAIMOVICI en 1936 dans les annales scientifiques de l'University de Jassy.

En coordonnées polaires géodésiques, l'expression prend une forme plus simple.

Désignons par V l'angle de la géodésique G avec le rayon vecteur.

$$\operatorname{tg} V = \frac{\theta'}{r'} \sqrt{g}$$

les paramètres se calculent donc ainsi :

$$p = \frac{r'}{\sqrt{F}} = \cos V \quad q = \frac{g \theta'}{\sqrt{F}} = g \sin V$$

et donc :

$$dp = - \sin V dV$$

$$dq = \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial r} \sin V dr + \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial \theta} \sin V d\theta + \sqrt{g} \cos V dV$$

reportant dans l'expression de dG :

$$dG = - \sin V dr dV + \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial r} \sin V d\theta dr + \sqrt{g} \cos V d\theta dV$$

comme cette expression ne dépend pas de la valeur de V , nous prendrons

$$V = \frac{\pi}{2}$$

ainsi

$$dG = \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial r} d\theta dr$$

en particulier, pour les surfaces à courbures constantes K auxquelles seules nous nous intéresserons dans la suite :

$$g = \frac{1}{K} \sin^2 \sqrt{K} r$$

Ainsi, pour le plan, $K = 0$ $g = r$ et on retrouve l'expression $drd\theta$ déjà étudiée.

$$\text{Si } K = 1 \quad dG = \cos r dr d\theta$$

$$\text{Si } K = -1 \quad dG = \cosh r dr d\theta$$

Le raisonnement fait plus haut en géométrie euclidienne plane s'applique intégralement ici (on utilisera de préférence le préalignement linéaire qui donne les calculs les plus simples). Les calculs sont même considérablement simplifiés si l'on ne compte comme concourantes que les géodésiques se coupant dans le domaine étudié; car alors la probabilité se réduit à son premier terme Y_1 . Par exemple pour $K = 1$:

$$Y = \frac{4\pi h}{L^3} \int \int \int \int \cos r \cos r' dr dr' d\theta d\theta'$$

avec les mêmes notations.

4.7.4. Remarque sur le cas de la sphère :

Le calcul précédent n'établit les formules que localement, alors que dans le cas de la sphère, elles sont bien connues et valables globalement.

On peut d'ailleurs éviter le recours à la dualité. En effet, le concours de trois grands cercles équivaut à la propriété pour leurs pôles d'être sur un même grand cercle. On peut donc définir le préconcours ainsi :

Trois géodésiques sont pré-concourantes à h près s'il existe deux plans, symétriques l'un de l'autre par rapport au centre de la sphère, dont la distance soit au plus égale à h et tels que les pôles des trois géodésiques soient situés entre ces plans.

La probabilité du pré-concours de trois géodésiques indépendantes à distribution uniforme est alors :

$$P = \frac{2\pi R h}{4\pi R^2} = \frac{h}{2R}$$

R désignant le rayon de la sphère.

CHAPITRE V

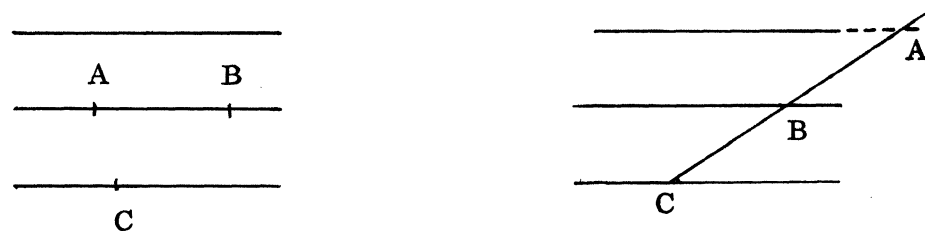
LES ALIGNEMENTS

Cette étude a un double but : fournir d'abord un exemple de relations orthoïdes, définies et étudiées au chapitre VI. Ensuite, apporter des éléments d'information et de précision sur une méthode souvent utilisée, mais jamais justifiée — à notre connaissance — ; cette méthode consiste à tirer des conclusions de la présence d'alignements dans le nuage représentatif de résultats d'expérience. Examinons d'abord sommairement un cas très simple, mise en évidence de quasi-périodes dans un système à un paramètre. 5.1. Le paramètre sera désigné par le mot « temps » et le vocabulaire habituel à ce paramètre sera employé : instant, durée....

Au cours du temps, un certain nombre d'instants seront particularisés sous le nom de secousses, la première secousse définissant l'instant $t = 0$. On désire mettre en évidence des quasi-périodes dans ce système de secousses et, à cet effet, on choisit une durée T arbitrairement. Le graphique est alors dressé selon le schéma ci-dessous.

$$\begin{array}{lll}
 a_0 \text{ ————— } b_0 & & \\
 a_1 \text{ ————— } b_1 & \text{avec } b_i - a_i = T & 0 \leq i \leq n \\
 \dots & & \\
 a_n \text{ ————— } b_n & b_j = a_j + 1 & 0 \leq j \leq n - 1
 \end{array}$$

n est choisi en sorte que toutes les secousses du système trouvent place sur l'épure. On reporte alors chaque secousse, en s'autorisant à prolonger le graphique pour mettre en évidence certains alignements artificiellement masqués; c'est ainsi que les deux schémas ci-dessous sont équivalents:



Pour la plupart des cas, les deux premiers moments suffisent pour conclure; s'il y a lieu, l'étude peut être prolongée, exactement comme dans le cas de

deux dimensions étudié plus loin. Les alignements dont il s'agit sont naturellement des alignements approchés car, supposant les points indépendants, l'alignement géométrique est de probabilité nulle.

X désignant la probabilité d'alignement de trois points, sous certaines conditions de transitivité (qui sont explicitées plus loin dans le cas bi-dimensionnel), la probabilité d'alignement de n points est $X^{(n-2)}$ (6.3.). Comme il ne s'agit que de moyenne et de variance, la transitivité est sans effet et les divers alignements d'une même carte peuvent être considérés comme des événements indépendants; alors désignant par S_p la somme des probabilités de conjonction de p alignements, on a (cf. 6.2.)

$$\begin{aligned} M &= S_1 \\ V &= S_1 - S_1^2 + 2 S_2 \end{aligned}$$

Soit $N = \binom{3}{n}$ le nombre d'épreuves; on en déduit :

$$\begin{aligned} M &= NX \\ V &= NX(1 - X) \end{aligned}$$

On prendra soin, dans une étude expérimentale, de compter avec une multiplicité correcte les alignements multiples : n points alignés comptent pour $n - 2$ alignements simples.

Trois points seront tenus pour alignés si la droite passant par deux d'entre eux coupe le graphique temps en un point situé à une distance du troisième inférieure à la « limite de tolérance » eT .

La proposition suivante est à peu près évidente :

L'alignement de trois points est indépendant de la base de temps choisie. Soient en effet trois secousses de dates respectives $x y z$; posons :

$$\begin{aligned} x &= aT + r \\ y &= bT + s \\ z &= cT + t \end{aligned}$$

$a b c$ étant des entiers distincts positifs ou nuls et r, s, t étant, d'après la convention faite au début de cette étude assujettis à la seule condition d'être positifs. Les conditions :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ r & s & t \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

sont équivalentes, et la seconde ne dépend pas de la base, pourvu qu'elle soit suffisamment petite devant les valeurs de $x y z$.

Cette proposition a deux conséquences : elle donne à un alignement une signification intrinsèque, indépendamment de l'artifice graphique qui a permis de les mettre en évidence; ensuite, elle fait considérer les divers

schémas obtenus pour un seul séisme (ensemble de secousses) comme des échantillons d'une même population, l'échantillon étant d'autant plus significatif que la base est plus petite. Cette dernière remarque est importante et rend compte d'une apparente bizarrerie de l'exemple numérique exposé ci-dessous.

Cet exemple est à l'origine de cette étude partielle et lui a fourni son langage; nous le devons au Lieutenant de Vaisseau P. SABATIER qui a mis en graphiques de multiples observations du plus haut intérêt.

On prend $e = 1/400$; évaluons X :

Soient A et B deux secousses de dates x et y ; choisissons pour base $x - y$ ou une partie aliquote de cette durée; la droite AB rencontre $n - 2$ fois le graphique, définissant chaque fois une « plage utile » égale à deux fois la limite de tolérance.

D'où une plage utile totale :

$$X = 2 eT (n - 2)$$

si l'on suppose les points répartis de façon aléatoire, uniforme et indépendante.

Le tableau qui suit résume les résultats des calculs et les nombres expérimentaux. De façon inattendue : *les nombres observés sont significativement inférieurs à ceux qu'on peut attendre du seul hasard.*

Nous proposons à ce paradoxe apparent trois explications :

1	15	19 09	300	5.0	450	32	4 960	22.3	4.7	19
2	17	20 00	351	5.8	542	35	6 545	29.6	5.4	29
3	20	20 00	351	5.7	443	35	6 545	29.0	5.4	37
4	24	21 42	452	5.3	447	39	9 139	40.8	6.4	19
5	30	24 20	611	4.9	451	51	20 825	93.9	9.7	23
6	38	24 22	613	6.2	438	53	23 436	102.6	10	45
7	48	28 10	841	5.7	444	58	30 856	136.6	11.7	54
8	60	30 42	993	6.0	440	60	34 220	150.6	12.3	62
9	75	39 30	1 521	4.9	451	75	70 300	317	17.8	69
10	90	41 30	1 641	5.5	445	78	76 076	338	18.4	90
11	105	42	1 671	6.0	437	79	79 079	345	18.8	78
12	120	42	1 671	7.2	428	79	79 079	338	18.4	105
Numéro d'expérience	Base de temps B	Heure de fin d'expérience (début 14 h)	Durée d'expérience D	B/D 10 ²	X	Nombre de points	Nombre de triangles	Moyenne théorique	Ecart-type théorique	Alignements observés

— La loi choisie (loi uniforme) n'est peut-être pas la plus plausible pour un phénomène naturellement décroissant. D'autres lois pourraient être recherchées.

— Les alignements observés peuvent être d'une précision plus rigoureuse que celle annoncée dans le compte rendu.

— La convention de prolongation est inapplicable dans son intégralité (il est en effet difficile de prolonger de plus d'une demi-base de part et d'autre en conservant une précision acceptable).

5.2. Système à deux dimensions.

Notations, définitions, hypothèses générales.

Dans le plan considérons une aire convexe, bornée, appelée « carte ». Sur cette carte, n points sont répartis « au hasard » ce qui signifiera dans toute cette étude que les points sont répartis indépendamment suivant une loi uniforme, en sorte que la probabilité pour un point désigné de se trouver sur un élément d'aire da est

$$\frac{da}{S}$$

S désignant la mesure de l'aire de la carte. On se propose l'étude probabiliste de l'alignement de trois points ou plus; et, l'alignement géométrique ayant une probabilité nulle, on utilisera le pré-alignement linéaire, déjà défini au § 2.4. Cette définition se prête à une vérification expérimentale aisée : on peut, à l'aide d'un ruban de largeur h recouvrir trois points pré-alignés.

Rappelons d'abord une remarque due à GUMBEL. Posons :

$$P_r = \text{prob} (R \geq r)$$

et

$$P_{(r)} = \text{prob} (R = r)$$

Appelons $g(u)$ la fonction génératrice de la distribution de l'entier r . On a

$$g(u) = \sum_{r=0}^m P_{(r)} u^r \quad 5.1.$$

Développant $g(u)$ en polynôme de Taylor par rapport à $u - 1$ désignant par $M(s)$ le moment factoriel d'ordre s

$$M(s) = E(r(r-1)(r-2)\dots(r-s+1))$$

on obtient :

$$g(u) = \sum_{s=0}^m \frac{M(s)}{s!} (u-1)^s \quad 5.2.$$

D'autre part, désignons par P_{a_i} la probabilité de l'événement a_i et supposant ces événements indépendants :

$$P_{[r]} = \sum P_{a_1} P_{a_2} \dots P_{a_r} (1 - P_{a_{r+1}}) \dots (1 - P_{a_m})$$

la sommation étant étendue à l'ensemble des combinaisons de r événements pris parmi m .

Avec la même convention :

Posons

$$S_r = \sum P_{a_1} P_{a_2} \dots P_{a_r}$$

Reportant :

$$P_{[r]} = S_r - C_{j+1}^1 S_{r+1} \dots + (-1)^s C_{r+t}^s + \dots + (-1)^{m-r} C_m^{m-r} S_m \quad 5.3.$$

On sait qu'une formule de cette forme reste valable si les événements ne sont plus supposés indépendants, à condition de poser :

$$S_r = \sum P_{a_1 a_2 \dots a_r}$$

la sommation étant effectuée de la même manière et $P_{a_1 a_2 \dots a_r}$ désignant la probabilité de conjonction des événements $a_1 a_2 \dots a_r$.

Reportons dans l'expression (5.1.) de $g(u)$ et réordonnons par rapport aux expressions S_r :

$$g(u) = \sum_{i=0}^m S_i (u-1)^i \quad 5.4.$$

Identifiant les développements (5.2.) et (5.4.)

$$r! s_r = M(r)$$

C'est par cette formule que nous étudierons les moments factoriels de la distribution des alignements.

En particulier, on voit que les moments factoriels d'ordre 1 et 2, et par suite la moyenne et l'écart-type ne dépendent que de la probabilité des événements simples et des événements binaires. Par suite, leur détermination n'exige pas l'étude de la présence d'alignements multiples.

5.3. Étude des deux premiers moments.

La probabilité d'un événement a_i c'est-à-dire de l'alignement approché de trois points désignés à l'avance est :

$$P_{a_i} = 2hx/S$$

x désignant la distance moyenne de deux points indépendants de la carte. Calculons maintenant S_1 :

$$S_1 = \sum P_{a_i} = 2 C_n^3 \frac{xh}{S}$$

d'où

$$E(r) = M(1) = S_1$$

Puis S_2 :

$$S_2 = \sum P_{a_i a_j} = \frac{1}{2} C_n^3 (C_n^3 - 1) \frac{4x^2 h^2}{S^2}$$

d'où la variance :

$$V = S_1 - S_1^2 + 2 S_2$$

soit

$$V = \frac{2 r h x}{S} - 4 r \frac{h^2 x^2}{S^2} \quad (r = C_n)$$

5.4. Exemples.

Carte circulaire : On sait qu'alors

$$x = \frac{128 R}{45 \pi}$$

Prenons comme valeurs numériques : $n = 10$ $R = 100 h$

On obtient aisément :

$$M = 2,03$$

$$V = 1,95$$

Carte carrée :

Le calcul de la moyenne n'est aisé que pour les valeurs de la distance ne dépassant pas le côté a du carré (BOREL, 3). Évaluant les autres par la formule de la moyenne, on trouve :

$$x = 0,497 a$$

Conservant les mêmes valeurs numériques ($n = 10$) et donnant au rapport h^2/S la même valeur, soit :

$$a = 100 h \sqrt{\pi}$$

on trouve :

$$M = 2,03$$

Un calcul plus précis est nécessaire pour comparer les deux exemples; c'est pour le cercle que se présente la plus grande moyenne, et le rapport vaut :

$$1,0278$$

On obtient aussi

$$V = 1,96$$

5.5. Carte rectangulaire.

C'est le cas le plus fréquent dans les applications, mais la méthode directe employée pour calculer x à partir de la distribution de la distance est trop peu précise : cette distribution n'étant connue simplement que pour les valeurs de la distance ne dépassant pas le plus petit côté de la carte. Nous préférons utiliser la formule (1.8.)

$$x = \frac{1}{6 S^2} \int \int C^* dp dq$$

Le calcul sera poursuivi jusqu'à son terme plus bas.

Calcul approché des moments d'ordre 3 et 4.

Moyennant une hypothèse simplificatrice, il est possible de prolonger ces raisonnements et ces calculs aux ordres supérieurs. Cette hypothèse est : « l'alignement est transitif » ; cette définition sera explicitée au chapitre suivant mais son sens intuitif ne laisse pas de doute : l'alignement simultané des points ABC et BCD entraîne l'alignement ABD par exemple.

Cette propriété est exacte pour l'alignement géométrique, mais non pour l'alignement approché, il ne s'agit pour l'instant que d'une hypothèse d'approximation. Le calcul des sommes S_r n'exige plus que le dénombrement suivant :

Soient N points permettant de former $s = C_N^3$ triangles. On choisit p de ces triangles pour constituer ce que nous appelons une « main ». Il y a C_N^p mains différentes. Y dénombrer celles qui satisfont à la condition supplémentaire : « h triangles « aplatis » entraîne que les $p - h$ autres le sont ». si $p = 3$ a) la main est formée par 4 lettres. Il y a $C_N^4 C_4^3$ telles mains

et $h = 2$

b) la main contient 5 lettres au moins. Alors $h = 3$

si $p = 4$ Les triangles de la main peuvent être formés par :

a) 4 lettres et ce de C_N^4 façons en ce cas $h = 2$

b) 5 lettres et ce de $u(5) = C_N^5 C_5^4 C_5^3 - u(4)$ façons et
alors $h = 3$

c) 6 lettres et ce de $u(6) = C_N^6 C_6^4 C_6^3 - u(5)$ façons; et ou
des triangles sont formés par 4 des lettres ou non
si oui (ce qui a lieu dans 4 $C_N^4 C_{N-4}^3$ cas) $h = 3$
si non $h = 4$

d) 7 lettres et ce de $u(7) = C_N^7 C_7^4 C_7^3$ façons
si la même hypothèse que dans le cas précédent est vérifiée
(ce qui a lieu dans 4 $C_N^4 C_{N-4}^3$ cas) $h = 3$
si non $h = 4$

e) 8 lettres au moins, et toujours $h = 4$

En sommant pour chaque valeur de h les nombres de cas qui donnent lieu à cette valeur, on obtient S_3 et S_4 et, par les formules établies au début de ce chapitre les moments d'ordre 3 et 4, factoriels, puis ordinaires :

$$M_1 = M(1)$$

$$M_2 = M(2) + M(1)$$

$$M_3 = M(3) + 3 M(2) + M(1)$$

$$M_4 = M(4) + 6 M(3) + 7 M(2) + M(1)$$

5.6. Mais l'intérêt de ce calcul est fortement diminué du fait que les deux derniers moments obtenus ne sont que des approximations, à une précision qu'il serait malaisé de déterminer. D'autre part, la méthode de calcul proposée semble bien « artisanale » et semble se prêter difficilement à un calcul mécanique ou électro-magnétique, surtout si l'on envisage de chercher des moments d'ordre plus élevé, ou même d'ordre h quelconque.

Ce sont ces diverses objections que nous allons tenter de lever dans la suite, d'abord dans le cas des alignements. Puis nous nous affranchirons totalement de ce support intuitif et géométrique en axiomatisant intégralement l'étude, ce qui permet des généralisations, même d'ordre géométrique, qui ne peuvent absolument pas se déduire de l'étude présente.

Nous modifierons pour toute la suite la définition du pré-alignement. Nous avons déjà remarqué une propriété de l'alignement géométrique : si ABC sont alignés et BCD aussi, on en déduit que ACD sont alignés, « par transitivité ». Dans le cas des alignements approchés, nous érigerons ce théorème en définition.

Définition. — Trois points sont h -alignés, ou lorsqu'une ambiguïté n'est à craindre alignés, si

- ou bien ils sont pré-alignés à h près,
- ou bien leur alignement se déduit par transitivité d'alignements déjà reconnus.

La mesure expérimentale du nombre de h -alignements peut se faire de la façon suivante :

- a) on dresse le catalogue des pré-alignements, comme il a été dit plus haut.
- b) sans plus considérer la carte, on ajoute à cette liste tous les alignements déduits par transitivité d'alignements figurant déjà au catalogue.

Une remarque évidente qui sera démontrée et précisée dans la suite peut déjà être faite; les h -alignements de type b sont d'autant moins nombreux que les points sont plus « rares » sur la carte; à l'extrême, l'existence de deux points dont la distance est inférieure à h entraîne le h -alignement de tous les ensembles de trois points.

5.7. Étude théorique du nombre de h -alignements.

Reprenant le raisonnement du paragraphe 5.1., nous étudierons cette répartition par ses moments factoriels, déduits eux-mêmes des sommes S_r par les formules :

$$M(r) = r! S_r$$

Désignons une fois pour toute la probabilité d'alignement de trois points indépendants désignés à l'avance par X . S_1 et S_2 ont déjà été calculés et nous avons remarqué :

Moyenne et variance sont les mêmes pour la distribution des h -alignements et des pré-alignements.

Rappelons les résultats obtenus :

$$S_2 = \frac{1}{2} C_n^3 (C_n^3 - 1) X^2$$

$$S_2 \text{ tend vers } \frac{1}{2} n^3$$

Méthode générale de calculs de S_p

On forme donc comme précédemment les C_n^3 triangles possibles avec les n points de la carte. On choisit p de ces triangles en sorte que le h -alignement de g d'entre eux entraîne de façon nécessaire et suffisante le h -alignement de tous; on désigne par $A(p, g)$ le nombre de façons dont ce choix peut se faire. Alors :

$$S_p = \sum A(p, g) X^g$$

la sommation étant étendue à toutes les valeurs possibles de g . La plus grande est évidemment p , et la plus petite est le plus petit nombre g_0 tel

que $C_{g_0-2}^3$ dépasse p .

Indiquons une méthode générale de calcul des nombres $A(p, g)$.

Nous appelons chaîne d'induction un ensemble de triangles ayant deux à deux sommets communs. Les p triangles sont répartis en s chaînes d'induction, comprenant respectivement a_1, a_2, \dots, a_s triangles; la chaîne d'induction i est écrite à l'aide d'au plus $a_i + 2$ lettres, sinon elle serait décomposée.

Un alignement induit provient du fait que cette chaîne est écrite à l'aide de moins de $a_i + 2$ lettres; plus précisément g_i alignements induits sont obtenus si $a_i + 2 - g_i$ lettres suffisent à former la chaîne. Soit donc j_i le nombre de lettres constituant la chaîne a_i ; posons

$$J = \sum j_i$$

On remarquera que J est supérieur ou égal à n et non nécessairement égal; en effet deux chaînes d'induction distinctes peuvent avoir un point en commun. Comme :

$$j_i = a_i + 2 - g_i$$

en sommant :

$$J = p + 2s - (p - g)$$

d'où la formule fondamentale :

$$J = 2s + g$$

Montrons sur un cas particulier comment peut s'employer cette formule le tableau se remplit ligne par ligne de haut en bas, et pour chaque ligne, de gauche à droite.

$$p = 3$$

s	Cas possibles	J	2s	g
2	Chaque groupe de 3 lettres	9	6	3
2	Groupe A 3 lettres			
	Groupe B 4 lettres	7	4	3
1	Groupe A 5 lettres	5	2	3
	Groupe A 4 lettres	4	2	2

Il reste à sommer par valeurs de g ; de la même façon :

$$p = 4$$

4	A3 B3 C3 D3	12	8	4
3	A4 B3 C3	10	6	4
2	A4 B4	8	4	4
	A3 B5	8	4	4
	A3 B4	7	4	3
1	A6	6	2	4
	A5	5	2	3
	A4	4	2	2

Nous avons pu établir un programme partiel pour effectuer ces dénombrements et prolonger ces calculs sur ordinateur I.B.M. 7 090; même dans ces conditions les temps de calcul, voisins d'une minute pour les petites valeurs de g restent prohibitifs. Aussi, et tenant compte d'autre part de la remarque faite plus haut sur l'influence de la transitivité quand les points deviennent « rares », nous faisons maintenant une étude asymptotique de la distribution du nombre des alignements.

5.8. Étude asymptotique.

Faisons d'abord une remarque sur les premiers moments factoriels; supposons que n augmente indéfiniment et que simultanément X décroisse en sorte que le premier moment factoriel (c'est-à-dire la moyenne) ait une limite finie que nous désignons par u ; cela peut se faire en faisant croître S par homothétie, proportionnellement à n^3 , (remarquons qu'en cette hypo-

thèse, les points deviennent bien de plus en plus « rares »). On déduit des expressions obtenues de S_2 et S_3 que :

$$S_2 \text{ tend vers } \frac{1}{2} u^2$$

$$S_3 \text{ tend vers } u^3/3 !$$

Ainsi, S_p est équivalent à son terme de plus haut degré en X ; dans le dénominateur, ce terme est obtenu en ne retenant que les choix des triangles ne contenant aucun alignement par transitivité. C'est cette propriété que démontre pour toute valeur de p le paragraphe suivant.

Théorème limite.

— Pour tout g différent de p , $A(p, g)$ est un infiniment grand avec n d'ordre strictement inférieur à 3 g .

Pour prouver cette proposition, nous partons de la remarque suivante : pour tout g différent de p , g est strictement supérieur à s . En effet, toute chaîne d'induction exige pour son existence même au moins un alignement, et le seul cas où il y ait autant de chaînes que d'alignements de catégorie a est celui où chaque chaîne contient un triangle et un seul; mais alors

$$g = s = p$$

cas qui a été exclu par l'hypothèse. Pour former un choix de triangles comptant parmi les $A(p, g)$ on peut choisir d'abord les w lettres qui le constitueront, puis former les triangles à l'aide de ces lettres; cette dernière construction peut se faire de K' façons, et K' est borné par un nombre K ne dépendant pas de n ; en effet, w est borné, par exemple par $3g$.

Alors

$$A(p, g) < C_n^w K$$

or

$$w < J$$

donc

$$w < 2s + g$$

p et g étant fixés, évaluons pour n croissant indéfiniment le rapport :

$$\frac{A(p, g)}{n^{3g}} < \frac{K}{n^{3g}} C_n^w \sim \frac{K n^{w-3g}}{n!} < \frac{K n^{2(s-g)}}{g_0!}$$

qui tend vers 0 quand n augmente indéfiniment.

Considérons maintenant S_p

$$S_p = \sum A(p, g) X_g$$

et supposons que p et g étant fixés, n croisse indéfiniment. Pour tout g distinct de p , $A(p, g) X_g$ tend vers 0. D'autre part :

$$A(p, p) = C_r^p - \sum A(p, g) \quad (\text{avec } r = C_n^3)$$

ce qui entraîne

$$A(p, p) X^p \sim C_r^p X^p \sim \frac{u^p}{p!}$$

S_p tend donc bien vers u^p/p : et le moment factoriel d'ordre p tend vers u^p qui est le moment factoriel d'ordre p de la loi POISSON de moyenne u . Avant de préciser davantage cette convergence tirons en quelques conséquences :

Les moments factoriels de la distribution des h -alignements sont supérieurs aux moments factoriels de rang homologue de la distribution des pré-alignements associée (puisque'il en est ainsi des sommes S_p , par définition des h -alignements).

D'autre part, les moments factoriels de la distribution qu'on obtiendrait en considérant les alignements comme des événements indépendants, sont pour la même raison, inférieurs aux moments de rang homologue de la distribution des pré-alignements associée. Mais pour ces derniers, le calcul est immédiat :

$$S_p = C_p \cdot X^p$$

et tend donc vers $u_p/p!$: *il en est donc de même pour les moments factoriels de la distribution des pré-alignements.*

Cette propriété rend inutile à posteriori la distinction entre h -alignement et pré-alignement qui alourdissait considérablement mesures expérimentales, raisonnements et calculs.

Il reste à préciser s'il est possible cette convergence; la question est importante, et le résultat indépendant du mode de convergence des moments; c'est pourquoi nous lui consacrons un paragraphe spécial.

5.9. Remarque.

Le raisonnement fait ici avait l'avantage de la généralité; mais si notre propos avait été seulement de prouver la convergence vers la loi de POISSON dans le cas particulier de l'alignement approché, le détour qui consiste à employer les moments pour démontrer la convergence était assez vain.

Supposons par exemple de la carte carrée, de côté 1, et plaçons nous dans l'hypothèse majorante de l'indépendance. Les triples de la carte admettent une représentation dans le $1/6$ du pavé de R^6 défini par $0 < x_i < 1$ pour tout indice i . On peut définir cette représentation ainsi :

A tout triple $AA'A''$ (les trois points étant rangés par ordre d'abscisse croissante) on associe le point G de coordonnées $(x \ y \ x' \ y' \ x'' \ y'')$.

L'alignement géométrique se traduit par l'appartenance de G au cône du second degré :

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Quant au pré-alignement, il se traduit par l'appartenance de G à un voisinage V de cette quadrique. L'extension transitive se traduit par l'adjonc-

tion au cône de portions de plan parallèles aux plans de coordonnées, et il est facile de voir que le voisinage V' ainsi ajouté à une mesure qui tend vers 0 avec $1/n$ plus rapidement que la mesure de V dans les conditions asymptotiques de l'énoncé. On pourrait par cette voie s'affranchir de l'hypothèse majorante.

Le problème posé apparaît maintenant au schéma de BERNOULLI, et la probabilité d'observer s pré-alignements est :

$$P(s) = C_N X^s (1 - X)^{N-s}$$

Alors N tendant vers l'infini et X décroissant simultanément en sorte que la moyenne ait une limite finie, cette probabilité tend vers

$$e^{-u} \frac{u^s}{s!}$$

Ce qui établit la convergence légale vers la loi de POISSON, « shuntant » en quelque sorte l'étape intermédiaire des moments.

Une étude complète des relations orthoïdes serait sans doute possible par cette voie. La seule difficulté consisterait dans la définition d'une représentation adéquate dans R^6 , le cas du pavé, sommairement étudié dans ces remarques étant d'une simplicité extrême; il est à craindre qu'une généralisation nous fasse perdre ce caractère, et conduise à des domaines de R^6 d'une grande complexité.

C'est pourquoi nous avons choisi la méthode des moments pour le développement de la question dans le cas général.

5.10. Complément : calcul de la distance moyenne de deux points aléatoires indépendants d'une carte rectangulaire.

Ce calcul se ramène, nous l'avons vu, à celui de

$$\int \int C^4 \, dp d\theta$$

étendu à l'ensemble des sécantes de la carte; désignons par l et L les dimensions de ce rectangle et traçons, dans un plan représentatif des paramètres p, θ les courbes définies respectivement par :

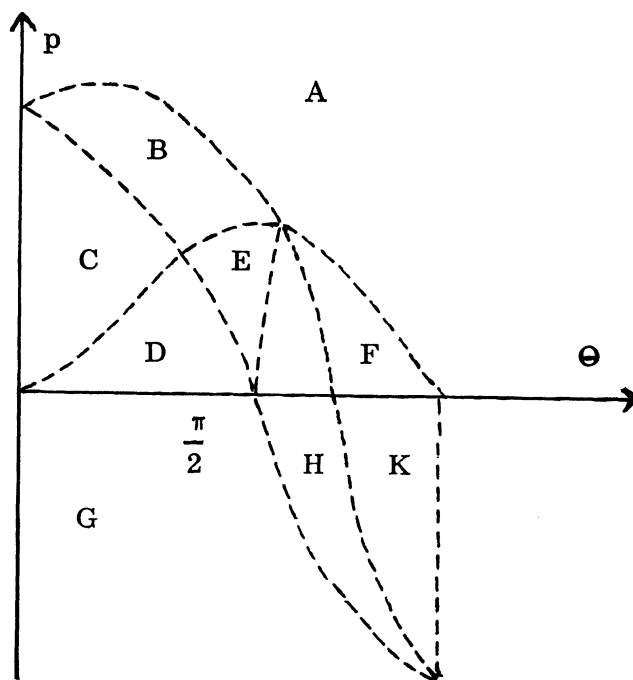
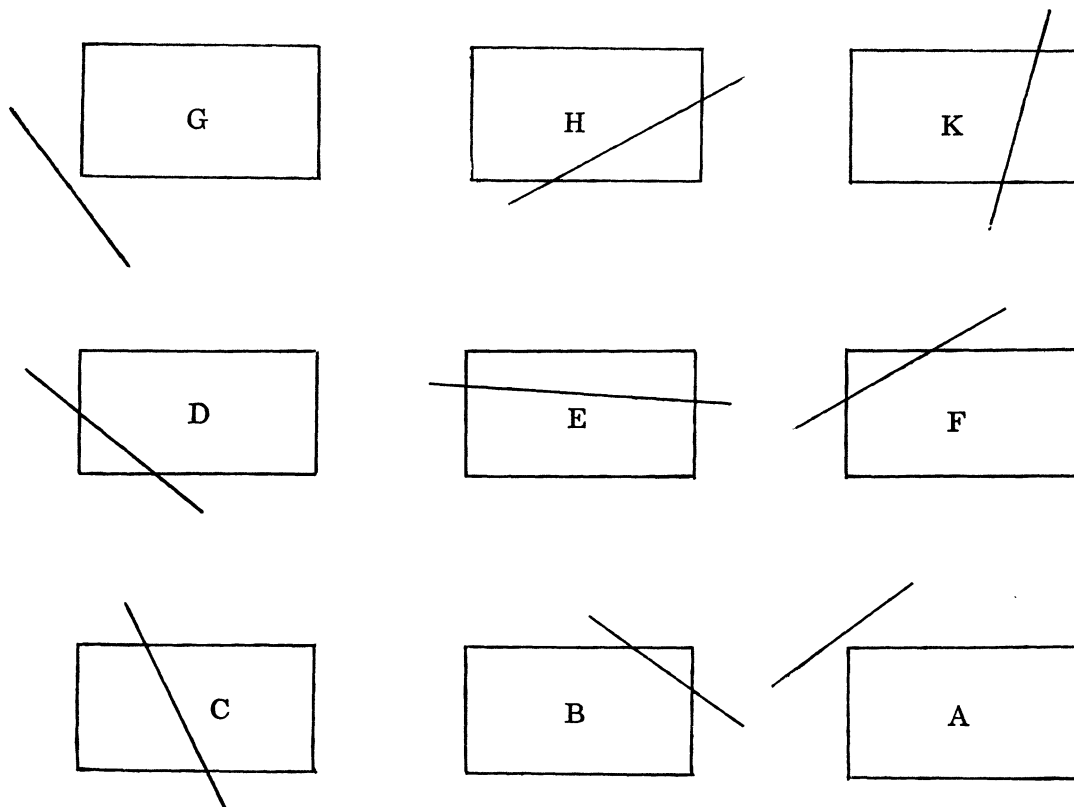
$$p = l \sin \theta$$

$$p = L \cos \theta$$

$$p = L \cos \theta + l \sin \theta$$

Nous limiterons les variations de θ à l'intervalle, $0, \pi$; les courbes ainsi définies séparent les divers cas de figures comme il est indiqué sur le schéma ci-après.

Il est maintenant facile de déterminer les diverses expressions de la fonction $C(p, \theta)$:



zones A et G	$C = 0$
zone B	$C = \frac{L \cos \theta + l \sin \theta - P}{\sin \theta \cos \theta}$
zone C	$C = \frac{l}{\cos \theta}$
zone D	$C = \frac{p}{\sin \theta \cos \theta}$
zone E	$C = \frac{L}{\sin \theta}$
zone F	$C = \frac{p - l \sin \theta}{\sin \theta \cos \theta}$
zone H	$C = \frac{L \cos \theta - p}{\sin \theta \cos \theta}$
zone K	$C = \frac{-l}{\cos \theta}$

Ces calculs sont élémentaires; on a seulement pris soin que les expressions proposées soient toutes positives dans leur zone de validité.

Désignons par $y(A)$, $Y(B)$ les valeurs de l'intégrale dans les diverses zones.

Posons :

$$L = l \operatorname{tg} \alpha$$

et intégrons d'abord par rapport à p :

$$y(A) = 0 \qquad y(G) = 0$$

$$y(C) = \int_0^\alpha \frac{l^2}{\cos^3 \theta} (L \cos \theta - l \sin \theta) d\theta.$$

$$y(E) = \int_\alpha^{\pi/2} \frac{L^2}{\sin^3 \theta} (\sin \theta - L \cos \theta) d\theta + \int_{\pi/2}^{\pi/2-\alpha} \frac{L}{\sin^3 \theta} (L \cos \theta + l \sin \theta) d\theta$$

$$y(K) = \int_{\pi-\alpha}^\pi \frac{l^2}{\cos^3 \theta} (-L \cos \theta - l \sin \theta) d\theta$$

Ces intégrales se ramènent à deux d'entre elles en posant $\pi - \theta$

$$y(C) + y(E) + y(K) = 2 \left[\int_0^\alpha l^2 L \frac{d\theta}{\cos^3 \theta} - l^2 \int_0^\alpha \frac{\sin \theta}{\cos^3 \theta} d\theta + L^2 l \int_\alpha^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sin^3 \theta} - L^2 \int_\alpha^{\pi/2} \frac{\cos \theta}{\sin^3 \theta} d\theta \right]$$

D'autre part :

par le changement de variables $q = L \cos \theta + \sin \theta - p$ $\varphi = \theta$, on voit que

$$y(B) = y(D)$$

$$\text{et que} \qquad y(F) = y(H)$$

pour ces deux dernières intégrales, le changement de variables

$q = L \cos \theta - p$ $\varphi = \theta$ prouve qu'elles sont égales aux précédentes. Finalement :

$$\int \int C^* dp d\theta = 4y(D) + y(C) + y(E) + y(K)$$

La suite du calcul est élémentaire; posant $L = d \sin \alpha$ $l = d \cos \alpha$ on obtient :

$$\begin{aligned} \int \int C^* dp d\theta = 4d^5 \sin^2 \alpha \cos^3 \alpha - \frac{2}{5} d^5 (l - \cos^5 \alpha - \sin^5 \alpha) \\ + l^4 L \operatorname{Log} \frac{d}{d+L} - L^4 l \operatorname{Log} \frac{d-l}{d+l} \end{aligned}$$

5.11. On sait (BOREL, 3) qu'il est inexact que la convergence des moments d'une suite de fonctions de distribution vers une suite de nombres supposés être les moments d'une fonction de distribution entraîne la convergence légale de la suite de fonctions.

Le premier théorème sur ce sujet semble dû à LIAPOUNOFF, qui dans une note à l'Académie Impériale des Sciences de Saint-Petersbourg (8^e série, vol. 12, n^o 5) établissait :

« Supposant les fonctions $f_i(x)$ monotones, et supposant que les moments de $f_i(x)$ tendent lorsque i augmente indéfiniment vers les moments de rang correspondant de la loi $f(x)$ de LAPLACE GAUSS, la suite $f_i(x)$ converge légalement vers la loi de LAPLACE GAUSS. »

Plus tard, POLYA, dans l'article cité en bibliographie, a étendu considérablement ce théorème en le prouvant pour une classe importante de lois limites continues. Il est facile de voir que sa démonstration s'applique sans changement à la convergence vers la loi de POISSON, et établit la convergence en loi « dans tout intervalle où la loi limite est continue, uniformément ».

La démonstration que nous donnerons peut paraître plus naturelle : mais elle utilise des résultats publiés postérieurement à l'article de M. POLYA. La plupart des lemmes sont d'ailleurs communs aux deux démonstrations.

LEMME 1. — Si une suite de fonctions de distributions $f_n(x)$ converge vers une distribution continue, la convergence est uniforme.

Au cas où la limite ne serait pas continue, on modifierait l'énoncé en ajoutant... « sur tout intervalle où la loi limite est continue », et la démonstration reste inchangée.

Comme $f(-\infty) = 0$ et $f(+\infty) = 1$ et que f est non décroissante, au nombre arbitraire positif on peut associer un nombre positif M tel que

$$f(-M) < \frac{1}{2} \varepsilon \quad \text{et} \quad f(M) > 1 - \frac{1}{2} \varepsilon$$

D'autre part, f étant continue est uniformément continue sur le segment

— M, M; ainsi on peut diviser le segment — M, M par m points d'abscisses $x_1 x_2 \dots x_m$ en sorte que :

$$f(x_{i+1}) - f(x_i) < \frac{1}{2} \varepsilon \text{ quel que soit } i$$

la convergence en ces points entraîne pour $n > N_1$ les m inégalités :

$$|f_n(x_i) - f(x_i)| < \frac{1}{2} \varepsilon$$

Alors :

$$\text{si } x < -M \quad -f(-M) < f_n(x) - f(x) < f_n(-M)$$

d'autre part :

$$f_n(-M) \leq f_n(-M) - f(-M) + f(-M) \leq \frac{1}{2} \varepsilon + \frac{1}{2} \varepsilon$$

et donc :

$$-\frac{1}{2} \varepsilon < f_n(x) - f(x) < \varepsilon$$

si $x > M$ on raisonne de la même manière. Enfin

si $-M < x < M$ soit i l'indice tel que $x_i < x < x_{i+1}$ Alors :

$$f_n(x) - f(x) \leq (f_n(x_{i+1}) - f(x_{i+1})) + (f(x_{i+1}) - f(x_i)) < \frac{1}{2} \varepsilon + \frac{1}{2} \varepsilon$$

et de même :

$$f_n(x) - f(x) \geq (f_n(x_i) - f(x_i)) - (f(x_{i+1}) - f(x_i)) > -\frac{1}{2} \varepsilon - \frac{1}{2} \varepsilon$$

Ainsi dans tous les cas, pour n suffisamment grand :

$$-\varepsilon < f_n(x) - f(x) < \varepsilon$$

ce qui établit la propriété.

LEMME 2 (théorème de HELLY-MONTEL). — Dans tout ensemble infini de fonctions de distributions, il existe une suite qui converge vers une limite pour toute valeur de x .

Soit E un ensemble dénombrable partout dense sur R et x_i ($i = 1, 2, \dots n, \dots$) ses points.

L'ensemble des valeurs des fonctions au point x_1 est un ensemble infini borné; il existe donc une suite S_1 convergeant vers une limite que nous appellerons $F(x_1)$.

Limitons-nous aux fonctions de S_1 et itérons le procédé pour $x_2, \dots x_n, \dots$

Soit Σ la suite dont le $p^{\text{ième}}$ élément est le $p^{\text{ième}}$ élément de la suite S_n . Pour tout point x_p de l'ensemble E, la suite Σ converge, puisque sauf les $p-1$ premiers, tous ses termes appartiennent à la suite S_p .

$F(x)$ est une limite de fonctions non décroissantes donc non décroissante.

E étant partout dense, prolongeons par continuité à tout point de l'axe réel la définition : tout point de cet axe étant limite à gauche de points de E

$$F(x) = \lim F(x_i)$$

les x_i étant des points de E tendant à gauche vers x .

Montrons qu'aux points de continuité de $F(x)$, $F \Sigma(x)$ tend vers $F(x)$.

Soient en effet deux points de E, a et b , situés de part et d'autre de x tels que :

$$F(b) - F(a) < \frac{\varepsilon}{2}$$

ce qui est possible puisque F est continue en x . En a et b , $F(x)$ converge vers $F(x)$ donc à partir d'un certain rang N :

$$|F_n(a) - F(a)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad |F_n(b) - F(b)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

d'où

$$F_n(x) \leq F_n(b) < F(b) + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad F_n(x) \geq F_n(a) > F(a) - \frac{\varepsilon}{2}$$

et par suite :

$$-\varepsilon < F(a) - F(x) - \frac{\varepsilon}{2} < F_n(a) - F(x) \leq F_n(x) - F(x) < F(b) - F(x) + \frac{\varepsilon}{2}$$

Ce qui établit la convergence en tout point de continuité. Mais $F(x)$ étant non décroissante, a au plus une infinité dénombrable de points de discontinuité; on peut donc reprendre le même procédé diagonal, définissant une première suite convergeant en tout point de continuité ET au point de discontinuité n° 1, puis une suite extraite convergeant en tout point de continuité ET aux points de discontinuité n° 1 et 2...

La suite diagonale ainsi construite converge en tout point de l'axe réel. Qu'en est-il de la fonction limite? On sait qu'elle est non décroissante, mais on ignore :

$$\text{si } F(+\infty) - F(-\infty) = 1$$

si F est continue à gauche en ses points de discontinuité.

On ne peut donc affirmer qu'il s'agit d'une fonction de distribution.

Une condition suffisante (mais non nécessaire) pour que la limite soit une fonction de distribution a été donnée en 1950 par D. KENDALL et RAO dans une note de *Biometrika* : « On the generalized second limit theorem in the theory of probabilities ». C'est que les fonctions de la suite admettent un moment du second ordre majoré uniformément. Cette condition est évidemment remplie s'il y a convergence en moments. Autrement dit :

si une suite F_n converge en moments, l'ensemble dérivé est un ensemble de fonctions de distribution.

Nous aurons encore besoin des lemmes suivantes :

si le moment m_{2p} existe, la fonction caractéristique peut s'écrire :

$$\phi(t) = \sum_{j=0}^{2p-1} (it)^j m_j / j! + r (it)^{2p} m_{2p} / 2p!$$

avec $|r| < 1$ et r tendant vers 1 si t tend vers 0.

Pour $p = 0$ la propriété est évidente. Pour $p \neq 0$ nous avons

$$e^{itz} = \sum_{j=0}^n (itx)^j / j! + r' (itx)^{n+1} / (n+1)! \quad |r'| < 1$$

et il suffit de remplacer dans l'intégrale définissant $\phi(t)$ pour obtenir la relation espérée. D'autre part, retranchant membre à membre les relations précédentes écrites pour deux rangs successifs n et $n+1$, il vient :

$$|r' - 1| < |xt| / (n+2) \quad (a)$$

Or

$$[r - 1] m_{2p} = \int_{-\infty}^{\infty} (r' - 1) x^{2p} dF$$

et par suite :

à tout nombre ε positif, on peut associer un nombre X assez grand pour que

$$|r - 1| m_{2p} < \varepsilon + \int_{-X}^X |r' - 1| x^{2p} dF$$

Mais, pour X fixé, on peut rendre l'intégrale aussi petite que l'on veut en prenant t assez petit (grâce à l'inégalité a). Donc

$$|r - 1| m_{2p} < 2\varepsilon$$

ce qui montre que r tend vers 1 si t tend vers 0.

Réciproquement, si pour un entier positif p

$$\phi(t) = \sum_{j=0}^{2p} (it)^j a_j / j! + o(t^{2p}) \quad (b)$$

alors, les $2p$ premiers moments existent et sont respectivement égaux aux coefficients a_j . Pour établir cette réciproque, désignons par ∂^2 l'opérateur

$$\partial^2 A(t) = A(t+2h) + (t-2h) - 2A(t)$$

Désignons par $t_{2p}^2 B(t)$ le dernier terme de la formule (b), $B(t)$ tendant vers 0. On peut calculer :

$$\left(\frac{\partial^2}{4h^2}\right)^p t_{2p}^2 B(t) = \sum_{j=0}^{2p} C_{2p}^j (-1)^j (p-j)^{2p} B(2ph - 2jh)$$

et donc pour h et t assez petits ($h < A/2p$ $t < A$)

$$\left(\frac{\partial^2}{4h^2}\right)^p t_{2p}^2 B(t) < \sum_{j=0}^{2p} C_{2p}^j |p-j|^{2p} \varepsilon$$

et par suite :

$$\left[\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\partial^2}{4h^2}\right)^p t_{2p}^2 B(t) \right]_{t=0} = 0$$

Mais on voit sans peine que, sur un polynôme, l'opérateur $\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\partial^2}{4h^2} \right)^p$

est la dérivation d'ordre $2p$. Appliquant cet opérateur à $\phi(t)$ et tenant compte de la relation qui vient d'être obtenue :

$$\frac{d^{2p}}{dt^{2p}} \phi(t) = (-1)^p a_{2p}$$

Or

$$\partial^2 e^{ixt} = -4 \sin^2 xh e^{ixt}$$

et donc

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin xh}{xh} \right)^{2p} x^{2p} dF = a_{2p}$$

et comme $\frac{\sin xh}{xh}$ converge uniformément vers 1 on voit que pour tout intervalle fini :

$$\int_a^0 x^{2p} dF < a_{2p}$$

et donc que le moment d'ordre $2p$ est fini. On peut alors utiliser le théorème direct

$$\phi(t) = \sum_{j=0}^{2p-1} (it)^j m_j / j! + \frac{(it)^{2p}}{2p!} m_{2p} (1 + o(1))$$

et comparant les deux expressions, on en tire les égalités $m_j = a_j$ pour tout entier j au plus égal à $2p$.

Ces proportions préliminaires établies, considérons une suite de fonctions de distributions convergeant légalement vers une limite $G(x)$ la suite des moments de rang r étant supposée converger vers une limite a_r . Alors, $G(x)$ est une fonction de distribution (puisque les moments d'ordre 2 sont uniformément bornés), et les fonctions caractéristiques $\phi_n(t)$ convergent vers la fonction caractéristique $\phi(t)$ de $G(x)$. Ainsi pour n assez grand :

$$\phi_n(t) = \sum_{j=0}^{2p-1} (it)^j m_j(n) / j! + r (it)^{2p} m_{2p}(n) / 2p!$$

et le dernier terme a une limite puisqu'il en est ainsi des autres.

Comparant au développement de $\phi(t)$ et usant des théorèmes préliminaires, on établit que les limites des moments sont les moments de la fonction limite.

Enfin, supposons qu'une suite de fonctions de distribution converge en moments vers les moments d'une fonction de distribution $G(x)$. Supposons en outre que $G(x)$ soit déterminée de façon unique par ses moments.

On peut extraire une sous-suite qui converge vers une fonction de distri-

bution et cette limite est l'unique qui ait pour moments ceux de $G(x)$, c'est donc $G(x)$. Soit $x = a$ un point de continuité de $G(x)$ et

$$A = \limsup F_n(a)$$

il existe une sous-suite convergeant vers A au point $x = a$; mais comme $G(x)$ est continue, on peut en extraire une sous-suite convergeant vers $G(a)$ ce qui implique :

$$G(a) = \limsup F_n(a)$$

Procédant de même pour la limite inférieure, on prouve la convergence légale.

Reste enfin, pour l'application au cas particulier qui nous a entraîné à cette étude, à montrer que la loi de Poisson est déterminée de façon unique par ses moments. Ceci est une conséquence immédiate (DUGUÉ : Arith. des lois de Probabilités) du fait que sa fonction caractéristique est analytique.

CHAPITRE VI

RELATIONS ORTHOÏDES

Il est remarquable que la convergence qui vient d'être établie n'exige que fort peu des propriétés de l'alignement, et peut s'étendre à maintes autres relations. Pour éviter des répétitions fastidieuses dans ce qui ne resterait malgré tout qu'une suite plus ou moins étendue de cas particuliers, nous allons poser un petit nombre d'axiomes et en déduire les mêmes résultats.

Pour une question de langage, nous limiterons notre étude à des ensembles de trois points; mais l'extension à des ensembles plus importants des définitions et des démonstrations est immédiate; divers exemples en sont donnés au cours de ce travail.

6.1. Soit E un ensemble dont les éléments seront appelés « points »; E^3 sera appelé l'ensemble des triples. E'^3 désigne l'ensemble des éléments diagonaux de E^3 c'est-à-dire l'ensemble des triples dont deux points au moins sont confondus. Enfin, on posera $E'' = E^3 - E'^3$.

Une relation orthoïde est une application de E^3 sur un ensemble réduit à trois éléments que nous désignerons par V , F et I , et qui satisfait aux axiomes suivants :

$$\begin{array}{l|l} 0_1 & R^{-1}(I) = E'^3 \\ 0_2 & \text{Pour tout } s \text{ appartenant au groupe symétrique d'ordre 3,} \\ & R(X) = V \text{ entraîne } R(sX) = V \end{array}$$

Conséquences. — Dans les mêmes conditions :

$$R(X) = F \text{ entraîne } R(sX) = F$$

en effet, $R(sX)$ ne peut être égal à I d'après 0_1 sinon sX et donc X appartiendrait à E'^3 , ce que l'hypothèse exclut. De plus $R(sX)$ ne peut être égal à V car ceci entraînerait, d'après 0_2 que $R(s^{-1}sX) = V$ soit $R(X) = V$ ce qui contredit également l'hypothèse.

Avant d'introduire le troisième axiome, définissons une opération, la contraction, sur l'ensemble E'' . Soient X et Y deux éléments distincts de E'' dont les projections sur E_{xy} sont identiques, autrement dit, dont les deux premières coordonnées sont respectivement égales. On définit l'élément Z de E^3 par les égalités :

$$\begin{aligned} \text{Proj. } Z / E_{yz} &= \text{Proj. } X / E_{yz} \\ \text{Proj. } Z / E_x &= \text{Proj. } Y / E_x \end{aligned}$$

Nous noterons cette correspondance :

$$Z = X \circ Y$$

X et Y ont été supposés distincts; ceci entraîne que Z appartient à E'' ,

puisque $\text{Proj. } Y/E_x$ est différente de toute autre projection de X ou de Y .

Ce qui revient à dire que $R^{-1}(V \cup F)$ est fermé pour la contraction. Il n'en est évidemment pas de même pour $R^{-1}(V)$ en général; cette propriété va constituer le dernier axiome des relations orthoïdes :

| 0_3 $R^{-1}(V)$ est fermé pour la contraction.

Une relation qui satisfait seulement aux deux premiers axiomes est appelée relation pré-orthoïde.

Soit R une relation pré-orthoïde; désignons par R' la relation pré-orthoïde dont l'ensemble $R'^{-1}(V)$ est le plus petit ensemble contenant $R^{-1}(V)$ et qui soit fermé pour la contraction. R' est manifestement une relation orthoïde, nous dirons que c'est l'extension transitive de R .

Il est évident que toute relation orthoïde coïncide avec son extension transitive. Inversement, une relation orthoïde donnée peut être considérée comme l'extension transitive de plusieurs relations pré-orthoïdes : si $R^{-1}(V)$ est un ensemble fini de n éléments, il y a 2^n telles relations pré-orthoïdes.

6.2. Définition des classes.

Soient a et b deux points distincts. On appelle sous-classe du couple ab et on note « ab » l'ensemble des triples (abx) appartenant à $R^{-1}(V)$. On appelle classe du couple ab et on note $((ab))$ l'ensemble des triples dont les trois points appartiennent à des triples de « ab ».

Il est évident que

$$((ab)) \supset \text{« } ab \text{ »}$$

Proposition I. — Toute sous-classe est contenue dans $R^{-1}(V)$. Cela est inscrit dans la définition.

Proposition II. — Toute classe est contenue dans $R^{-1}(V)$. Démontrons cette proposition, c'est-à-dire, démontrons que tout triple de $((ab))$ appartient à $R^{-1}(V)$.

CAS I : le triple contient a et b . L'axiome 0_2 montre que le triple appartient à « ab » et par suite à $R^{-1}(V)$.

CAS II : le triple contient une et une seule des lettres a et b , soit par exemple a . Soit (avw) ce triple. Par définition de la classe abv et abw appartiennent à $R^{-1}(V)$, donc aussi, d'après 0_2 bav et baw . Par définition d'une relation orthoïde, leur contracté wav appartient aussi à $R^{-1}(V)$ et donc enfin avw d'après 0_2 .

CAS III : $u \ v \ w$ sont distincts de a et de b .

Soit wvu ce triple. Appartiennent à $R^{-1}(V)$:

abu	abv	abw	par définition de $((ab))$
vbu	wbv		d'après 0_3
bvu	bvw		d'après 0_2
wuv			d'après 0_3

Proposition 6.2.1. — Si u et v appartiennent à des triples de $((ab))$

$$((uv)) = ((ab))$$

Nous montrerons successivement que a et b appartiennent à des triples de $((uv))$ puis l'inclusion $((uv)) \subset ((ab))$; l'égalité en résultera.

a) abu et abv appartiennent à « ab » donc à $R^{-1}(V)$. Il en est donc de même de vbu (d'après 0_3) et uvb (d'après 0_2). Donc b appartient à un triple de « uv ». La démonstration est identique pour le point a

b) Soit ijk un triple de $((uv))$. Appartiennent à $R^{-1}(V)$:

abu	abv	par hypothèse
vbu		d'après 0_3 donc aussi uvb (d'après 0_2)
uvi		par hypothèse donc aussi ivb (d'après 0_3)
bvi	abv	d'après 0_2

et donc aussi leur contracté abi .

La démonstration est identique pour abj et abk .

Deux corollaires s'en déduisent :

Corollaire 1. — Deux points arbitraires distincts appartenant à des triples d'une classe peuvent servir à définir cette classe.

Si E est un ensemble fini, si une sous-classe contient p triples, il résulte de sa définition qu'elle contient $p + 2$ points et la classe contient donc C_{p+2}^3 triples. Il en résulte :

Corollaire 2. — Toutes les sous-classes d'une même classe contiennent le même nombre de triples.

6.3. Nous allons appliquer ces propositions et définitions à l'étude probabiliste annoncée au commencement de ce chapitre.

Soit F un ensemble de points : nous supposons que l'expression « prendre un point au hasard dans F » a été définie. E est une partie de F , formée de n points pris au hasard dans F et indépendants.

Soit R une relation pré-orthoïde et X la probabilité pour que trois points pris au hasard dans F soient liés par R .

On se propose l'étude du nombre de triples qui sont liés par R au sein de l'ensemble E . Comme au chapitre précédent, nous étudierons cette distribution par ses moments factoriels; eux-mêmes déduits des sommes

$$S_r = M(r)/r !$$

sommes des probabilités de conjonction de r « événements favorables ».

Calcul de S_1 et S_2

Pour ce calcul et les suivants de ce chapitre, nous étudierons parallèlement la distribution attachée à une relation pré-orthoïde, et à son extension transitive. Il faut remarquer que X est le même pour ces deux relations; en effet, un seul point de E'' étant en jeu, fermer $R^{-1}(V)$ pour la contraction est une opération neutre.

Le calcul de S_1 et S_2 nous offre la même simplification; en effet, une conjonction concerne au plus deux triples, et sa probabilité ne saurait être affectée par une contraction. Ce qui revient à énoncer :

Théorème 6.3.1. — Les deux premiers moments sont les mêmes pour une relation pré-orthoïde et son extension transitive.

C'est ce théorème, évidemment faux pour une valeur finie de n et pour les moments d'ordre supérieur que nous nous proposons d'établir asymptotiquement.

Proposition 6.3.2. — p triples distincts ayant une projection commune sur E_{xy} , la probabilité pour qu'ils forment une sous-classe est X^p .

Il est évident que cette probabilité est au plus X^p . Pour prouver l'égalité il suffit de remarquer que le fait que $p-1$ triples constituent une sous-classe ne saurait entraîner que le $p^{\text{ième}}$ y appartienne, car celui-ci contient un point qu'aucun autre triple ne contient.

Proposition 6.3.3. — Considérons une famille de p triples ayant deux à deux deux points en commun; soit j le nombre de points qui la constituent. La probabilité pour que cette famille soit une classe est X^{j-2} .

Remarquons d'abord que j vaut au plus $p+2$. Et pour $j = p+2$ cette proposition ne diffère pas de la précédente.

j points permettent de former $j-2$ triples ayant même projection sur E_{xy} et ceux-ci forment une sous-classe avec la probabilité X^{j-2} d'après la proposition précédente. Mais alors (6.2.1.) les p triples donnés appartiennent à une classe et donc à $R^{-1}(V)$.

Soient donc maintenant p triples. On les répartit en s ensembles de la façon suivante : choisissons deux points d'un triple, a et b par exemple; appartiennent à l'ensemble contenant ce triple tous les triples de la forme abx et tous ceux formés de trois points appartenant à des triples du sous-ensemble; la probabilité pour que ces p triples appartiennent à $R^{-1}(V)$ c'est-à-dire, pour que chacun des s ensembles soit partie d'une classe est

$$X^{\sum j_i - 2s}$$

j_i désignant le nombre de lettres constituant l'ensemble de rang i . Ceci résulte de la proposition (6.3.3.) appliquée à chacun des s ensembles.

Ces propositions autorisent l'emploi pour toute relation orthoïde de la méthode pratique de dénombrement donnée au chapitre précédent pour les alignements et qui reposait entièrement sur la relation fondamentale :

$$J = 2s + g$$

6.4. L'étude asymptotique s'étend également : supposons que n croisse indéfiniment et que, simultanément X décroisse en sorte que la moyenne ait une limite finie u . Conservant les mêmes notations qu'au chapitre précédent, nous démontrons le théorème limite de la même façon, seules les premières lignes étant à modifier légèrement; reprenons-les.

LEMME. — Pour tout g différent de p , g est strictement supérieur à s . En effet, l'existence d'une classe exige qu'un triple au moins appartienne à $R^{-1}(V)$; de plus si elle n'en exige qu'un, c'est qu'elle ne contient qu'un triple et ceci ne peut avoir lieu pour toutes les classes, car on aurait alors $g=s=p$ ce qui est exclu.

Le théorème limite reposant uniquement sur ce lemme se trouve de ce fait étendu aux relations orthoïdes.

Or l'inclusion des ensembles $R^{-1}(V)$ nous montre que les moments factoriels de la distribution liée à une relation pré-orthoïde sont :

a) inférieurs aux moments factoriels de même rang de son extension transitive;

b) supérieurs aux moments factoriels de même rang de la relation qu'on obtiendrait en tenant pour indépendantes les appartenances à $R^{-1}(V)$ des divers triples. Or ces derniers moments factoriels ne dépendant pas de n et valent u^r .

Par suite :

THÉORÈME. — n augmentant indéfiniment et X décroissant simultanément en sorte que la moyenne de la distribution du nombre des triples liés par R ait une limite finie u , cette distribution converge légalement vers la loi de Poisson de moyenne u , que la relation R soit supposée orthoïde ou simplement pré-orthoïde.

6.5. Exemples.

Au cours de ce travail, diverses relations de ce type sont rencontrées. Par exemple :

— Dans R^2 , le pré-alignement linéaire, le pré-alignement hyperbolique sont des relations pré-orthoïdes. L'alignement géométrique en est l'extension transitive commune.

— Le pré-concours de droites est une relation pré-orthoïde.

CHAPITRE VII

7.1. Dans les paragraphes qui suivent, on s'intéresse à un aspect un peu différent de la régularité. Des objets sont placés « au hasard » dans un « récipient ». Quelle est la distribution du nombre d'objets qu'il est possible de placer? Quelle est la distribution de la « perte de place », différence entre la mesure du récipient et la somme des mesures des objets? Quel est le « regret » (l'expression est due à M. VAN DER WAERDEN (*), qui l'a employée dans un sens voisin pour la théorie des jeux), différence entre cette perte de place, et la perte de place « inévitable » qui subsiste, même si l'on « range » les objets? Ce sont toutes ces questions que nous allons préciser et étudier maintenant.

Dans un premier pas, objet et récipient sont à une dimension.

Soit donc AB un segment de longueur $T = dh + r$; d est un entier positif, h est une longueur donnée et r une longueur inférieure à h . Dans la suite, ce segment sera appelé support. Sur ce support, on place des segments de longueur h en sorte que :

- a) tout segment est intérieur au support,
- b) les intérieurs de deux segments distincts sont disjoints,
- c) on ne puisse adjoindre aucun nouveau segment en respectant les deux premières conditions.

Cette opération peut se faire de façon ordonnée; le premier segment a pour origine A et l'extrémité d'un segment est confondue avec l'origine du suivant. Alors :

- a) Le support reçoit d segments.
- b) Il y a une perte de place égale à r .

Mais cette opération peut aussi se faire « au hasard »; intuitivement, on voit qu'on laisse « des vides » et donc qu'on peut ranger moins de segments. C'est ce qui va être précisé.

7.2. Loi exponentielle.

Ce cas se distingue par sa grande simplicité analytique; il présente de plus une certaine « vraisemblance » et devrait pouvoir recevoir des applications pratiques. Posons $A_0 = A$ et soit A_i l'origine du segment de rang i . Posant :

$$A_0A_1 = X_0 \quad \text{et pour } i \neq 0 \quad A_iA_{i+1} = h + X_i$$

On prend pour hypothèse que les variables X suivent, indépendamment la loi

$$m e^{-mX}$$

qu'on peut considérer comme une loi de χ^2 à deux degrés de liberté. Alors :

$$AA_n = \sum X_i + nh$$

(*) Séminaire I. S. U. P. Mai 1963.

Ainsi on peut placer au moins n intervalles si

$$X_0 + X_1 + \dots + X_{n-1} \leq (d - n) \cdot h + r = l_n$$

Or cette somme suit une loi de χ^2 à $2n$ degrés de liberté et par suite la probabilité cherchée est :

$$P(n) = \frac{1}{2^n \Gamma(n)} \int_0^{l_n} e^{-x} x^{n-1} dx$$

la probabilité pour qu'on place exactement n segments est alors :

$$Q(n) = P(n) - P(n+1)$$

Bien entendu, on n'emploiera ces formules que pour les valeurs de n « possibles » c'est-à-dire au plus égale à d et au moins égale à $\frac{1}{2}(d-1)$. Quand à la perte de place elle vaut

$$(d - n) h + r \quad \text{avec la probabilité } Q(n)$$

La perte de place inévitable étant r , le regret vaut $(d - n) h$ avec la probabilité $Q(n)$. Dans ces conditions le regret moyen est :

$$R = h (d \sum Q(n) - \sum n Q(n))$$

Cette somme se développe aisément en :

$$R = -h (-d + n_0 + P(n_0 + 1) + P(n_0 + 2) + \dots + P(d))$$

qui peut s'écrire encore :

$$R = h \sum (1 - P(i))$$

la somme étant étendue à toutes les valeurs possibles de i (l'adjonction du terme de rang n_0 ne modifie pas l'expression puisque la probabilité correspondante vaut 1).

7.3. Loi uniforme.

Les conditions générales du problème restant les mêmes, on suppose que les variables X_i suivent indépendamment une loi uniforme de 0 à h (pour respecter la condition c). Nous poserons $X = hY$ définissant de nouvelles variables uniformément réparties de 0 à 1.

Il reste à déterminer la *f.r.* de la statistique

$$Z = Y_0 + Y_1 + \dots + Y_{n-1}$$

ce qui n'offre pas de difficultés et s'obtient par de multiples méthodes. Voici l'une des plus rapides.

La fonction caractéristique de la distribution parente est :

$$g(t) = \frac{e^{it} - 1}{it}$$

en sorte que la fonction caractéristique de Z est :

$$h(t) = (g(t))^n$$

et la loi cherchée s'écrit :

$$f(Z) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T e^{-itx} \left(\frac{e^{it} - 1}{it} \right)^n dt \right)$$

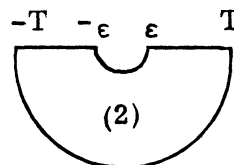
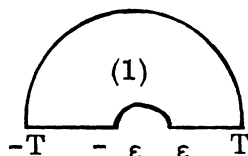
Le noyau de cette intégrale est holomorphe; nous choisirons pour contour d'intégration



afin de pouvoir développer le binôme et intégrer terme à terme. Alors :

$$\int e^{-itx} \left(\frac{e^{it} - 1}{it} \right)^n dt = \sum_{p=0}^n C_p^n (-1)^{n-p} \int \frac{e^{-itx} e^{itp}}{it^n} dt$$

mais $\int_0^{\infty} \frac{e^{ist}}{t^n} dt$ est nul pour s positif comme on le voit en intégrant sur le contour (1) et vaut $-2\pi \frac{i^n s^{n-1}}{(n-1)!}$ si s est négatif comme on s'en assure sans peine en intégrant sur le contour (2)



On en tire :

$$f(Z) = \frac{1}{(n-1)!} \sum_{p \leq Z} C_p^n (-1)^p (Z-p)^{n-1}$$

Incidentement, remarquons qu'en faisant $Z > n$, on retrouve une formule donnée pour la première fois par ABEL (Journal de Crelle) et retrouvée par une autre méthode de dénombrement par M. MATCHINSKI (C. R. Acad. Sc., 254, page 3799) :

$$\sum_{p=0}^n (n-1)^p C_p^n (x-p)^{n-1} = 0$$

En toute rigueur, cette formule n'est établie que pour les valeurs de x comprises entre n et $n+1$; mais s'agissant d'un polynôme la formule est évidemment générale.

Dans ces conditions, on peut placer au moins n segments si

$$AA_n \leq dh + r$$

$$\text{soit } Y_0 + Y_1 + \dots + Y_{n-1} \leq d - n + r/h$$

ce qui a lieu avec la probabilité :

$$P(n) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^{d-n+r/h} \sum C_p^n (-1)^p (x-p)^{n-1} dx$$

La suite du raisonnement se développe de la même façon que dans le cas exponentiel, regret et regret moyen ayant une expression identique :

$$R = h \sum (1 - P(i))$$

L'expression de $P(n)$ peut d'ailleurs être simplifiée et mise sous forme entière. En effet, dans l'intervalle $t, t + 1$:

$$(n-1)! f(x) = \sum_{p=0}^t C_n^p (-1)^p (x-p)^{n-1}$$

Choisissons la primitive $G(x)$ définie par :

$$n! G(x) = \sum_{p=0}^t C_n^p (-1)^p (x-p)^n$$

Dans ces conditions, la primitive adoptée pour l'intervalle suivant ne diffère de $G(x)$ que par l'adjonction du dernier terme $C_n^{t+1} (-1)^{t+1} (x-t-1)^n$; par conséquent, pour $x = t + 1$ ces primitives prennent la même valeur. Dans ce cas, $P(n)$ peut s'écrire sous la forme :

$$P(n) = \frac{1}{n!} \sum_{p=0}^{d-n} C_n^p (-1)^p (d-n-p+r/h)^n$$

Diverses généralisations peuvent être envisagées. En particulier, le raisonnement qui a été fait dans le cas de la loi exponentielle peut être étendu sans aucun changement au cas d'une loi de χ^2 à un nombre quelconque de degrés de liberté.

D'autre part, si d est très grand, les valeurs possibles de n sont toutes grandes et on peut remplacer la loi de la somme $AA_n - nh$ par son approximation laplacienne.

Désignons par m et s respectivement la moyenne et l'écart-type de la loi parente de $X/h = Y$; appliquant le même raisonnement que dans les deux cas précédents, on obtient :

$$P(n) = \int_0^{d-n-r/h} \exp - \frac{1}{2} \frac{(x - nm)^2}{n s^2} dx$$

CHAPITRE VIII

Dès qu'on quitte la droite numérique, le problème devient plus complexe. La structure d'ordre total qui nous avait permis de décomposer un problème aléatoire global en une itération de choix élémentaires disparaît le plus souvent. Il est cependant possible d'obtenir quelques renseignements sur « l'encombrement » d'un nuage quelconque.

8.1. Étude d'étendue pour un échantillon normal à 2 dimensions.

— Etendue dans un azimut donné.

Les éloignements des points de l'échantillon forment également un échantillon; la loi normale parente a pour paramètre σ , longueur du demi-diamètre conjugué de l'ellipse représentative de la distribution. Soit

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp -\frac{1}{2} \frac{t^2}{\sigma^2} dt$$

Désignons par $x_1 \dots x_n$ les éloignements des divers points, rangés par ordre croissant. La distribution du couple $x_1 x_n$ s'écrit :

$$dG = (F(x_n) - F(x_1))^{n-2} dF(x_1) dF(x_n)$$

Changeons de variables en posant :

$$R = x_n - x_1 \quad M = \frac{1}{2}(x_n + x_1)$$

Alors :

$$dG = \left(F\left(M + \frac{1}{2}R\right) - F\left(M - \frac{1}{2}R\right) \right)^{n-2} f\left(M + \frac{1}{2}R\right) f\left(M - \frac{1}{2}R\right) dR dM$$

Il reste à intégrer en M :

$$dG(R) = dR n(n-1) \int_{-\infty}^{+\infty} (F(x+R) - F(x))^{n-2} f(x+R) dF(x)$$

On en tire par exemple l'étendue moyenne :

$$\begin{aligned} n(n-1) \int_{-\infty}^{+\infty} dF(x+R) \int_{-\infty}^{x+R} (F(x+R) - F(x))^{n-2} R dF(x) \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} du \int_{-\infty}^u \frac{d^2 F(u) - F(v)}{du dv} (u-v) dv \end{aligned}$$

Enfin, en intégrant par parties :

$$E_n(R) = \int_{-\infty}^{+\infty} (I - F^n - (I - F)^n) dx$$

L'hypothèse de normalité n'est évidemment pas intervenue dans ce calcul; la formule ci-dessus a été démontrée par TIPPETT qui a calculé de la même façon la variance :

$$\text{var}_n(R) + (E_n(R))^2 = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{x_n} (I - F_1^n - (I - F_1)^n - (F_n - F_1)^n) dx_1 dx_n$$

Dans le cas normal, une tabulation a été faite par PEARSON et HARTLEY, qui est reproduite dans *Biometrika Tables for Statisticians*, Volume I.

Mais quant à nous, c'est une conséquence fort simple et d'ordre géométrique que nous voulons tirer de ces formules.

Explicitons dans le cas normal l'expression de $E(R)$:

$$E_n(R) = \int_{-\infty}^{\infty} 1 - \left(\int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp -\frac{1}{2} \frac{t^2}{\sigma^2} dt \right)^n - \left(\int_x^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp -\frac{1}{2} \frac{t^2}{\sigma^2} dt \right)^n dt$$

et si l'on pose $x = \sigma y$ et $u = \sigma t$

$$E_n(R) = \sigma \int_{-\infty}^{+\infty} 1 - \left(\int_{-\infty}^y \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} u^2} du \right)^n - \left(\int_y^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} u^2} du \right)^n dy$$

Le coefficient de σ est une constante numérique.

De façon tout à fait semblable, on prouve que :

$$\text{var}(R) = \sigma^2 K$$

K étant encore une constante numérique.

Les propriétés suivantes en résultent :

— Dans deux directions conjuguées de la distribution normale plane :

a) La somme des carrés des étendues moyennes (resp. la somme des variances) est constante.

b) L'aire du parallélogramme construit sur les étendues moyennes (resp. les écarts-types) est constante.

Ces propriétés se généralisent aisément dans deux directions. L'expression de la densité de l'étendue, qui nous a donné l'expression de la moyenne, nous donne le moment d'ordre k :

$$E(R^k) = n(n-1) \int_{-\infty}^{+\infty} dF(u) \int_{-\infty}^u (F(u) - F(v))^{n-2} (u-v)^k dF(v)$$

Il suffit de remplacer $F(u)$ par son expression dans le cas de la loi de Laplace-Gauss pour voir que

$$E(R^k) = W \sigma^k \quad W \text{ étant une constante numérique.}$$

L'écart-moyen d'ordre k satisfait donc aux mêmes propriétés que l'étendue. Autre généralisation, pour une variable laplacienne à n dimensions; en effet les propriétés utilisées en dimension 2 sont exclusivement :

a) La projection d'une distribution normale sur une droite est une distribution normale.

b) Les théorèmes d'Appolonius.

toutes propriétés qui sont vraies en dimension n quelconque.

8.2. Le désordre à l'échelle.

Dans une plaquette récente, M. G. KENDALL écrit : « ... it would be desirable to define random non-overlapping circles, all of the same size,

in a plane. Such a definition has not been obtained and leads to great difficulties... » C'est une réponse bien imparfaite que nous apportons à ce vœu en donnant la définition du désordre à l'échelle.

8.2.1. Obtention d'une distribution aléatoire à l'échelle.

Supposant le plan muni d'une distribution ponctuelle, rapportée à son point moyen et illimitée dans toutes les directions, on considère n points indépendants $A_1 A_2 \dots A_n$. Posons :

$$r = \inf. A_i A_j \quad i \neq j$$

L'homothétie centrée en O et de rapport R/r transforme la distribution en un système de n points, pouvant être pris pour centres de n disques disjoints de rayon R .

On peut aussi prendre un rapport d'homothétie h , aléatoire et borné à gauche par R/r , ou encore un nombre certain k , suffisamment grand pour qu'il soit presque sûrement supérieur (ou au moins, pour certaines applications, avec une probabilité voisine de 1) à R/r .

C'est en somme cette dernière hypothèse qui est retenue par les agronomes pour les études forestières (par exemple SHANKS : *Plottless sampling trials in Appalachian forest types*, dans Ecology 1954, vol. 35).

Voyons rapidement les résultats que permet cette hypothèse dans le cas d'une hypothèse d'uniformité. Pour plus de simplicité, nous conserverons le langage forestier.

8.2.2. Soit m la densité moyenne des troncs, et $f(d)$ la distribution du diamètre d de ces troncs; l'aire moyenne couverte est :

$$A = \pi m \int_0^\infty \frac{d^2}{4} f(d) \quad dd$$

Soit P un point choisi au hasard et soit n le nombre des arbres vus de P sous un demi-angle au moins égal à α . Un arbre M est compté si la distance PM est telle que :

$$PM < d/2 \sin \alpha$$

et le nombre moyen d'arbres de diamètre d ainsi compté est alors :

$$\pi m \left(\frac{d}{2 \sin \alpha} \right)^2$$

soit pour valeur moyenne de n :

$$\frac{A}{\sin^2 \alpha}$$

Ce procédé permet une évaluation extrêmement rapide de l'aire boisée effectivement.

Abandonnons maintenant cette hypothèse, et considérons un désordre à l'échelle suivant la première définition qui a été donnée.

8.3. Encombrement circulaire d'un nuage aléatoire à l'échelle.

Soient n disques, de diamètre commun d . Leurs centres A_i constituent ce que nous appelons nuage aléatoire à l'échelle.

Diamètre de l'ensemble.

C'est simplement :

$$D = ds/r$$

d et r étant définies plus haut et s étant le diamètre du nuage initial. Soient $f_1 f_2 \dots f_p$ les distributions des distances $A_i A_j$ ordonnées par exemple lexicographiquement. Nous considérons la suite de variables aléatoires g_i indépendantes et ayant les mêmes lois marginales que les f_i . Soient x et y respectivement la plus petite de ces distances et la plus grande. Il est bien connu que x et y sont asymptotiquement indépendantes; en effet le couple xy a pour loi :

$$W(x, y) = p(p-1) (F(y) - F(x)) f(x) f(y)$$

(ce qui exprime que $p-2$ valeurs sont contenues dans l'intervalle xy). Si l'on pose :

$$p(1 - F(y)) = a \quad pF(x) = b$$

on obtient :

$$W(a, b) = \frac{n-1}{n} \left(1 - \frac{a+b}{p}\right)^{p-2}$$

qui converge vers $\exp(-a-b)$ d'où l'indépendance de a et b et si F monotone celle de x et y asymptotiquement.

En fait, $\log D$ est à la constante $\log d$ près, l'amplitude du logarithme de g . L'obtention de la loi d'encombrements circulaires résulte alors de la composition des algorithmes suivants :

A. Obtention de la loi parente de la distance : ceci a été fait pour diverses lois au chapitre 1..... $F(x)$

B. Transformation de cette loi par $y = \log x$ $G(y)$

C. Calcul de la loi d'étendue d'un échantillon de $m = \frac{1}{2} N(N-1)$

variables avec la loi parente $G(y)$. La formule de transformation est donnée au début de ce chapitre. Désignons cette nouvelle loi par..... $H(w)$

D. Transformation de cette loi par $D = e^w$.

On obtient la loi d'encombrement circulaire pour la répartition choisie et pour la définition de la distance adoptée; les calculs faits ici donnent donc la réponse aux problèmes suivants :

Des cercles (ou des boules dans R^n) étant répartis au hasard selon un désordre à l'échelle de loi normale (resp. uniforme), quelle est la distribution du diamètre de l'ensemble qu'ils forment ?

Des rectangles (ou des pavés dans R^n) étant répartis au hasard selon un désordre à l'échelle de loi uniforme, quelle est la distribution de la plus grande coordonnée du plus petit pavé qui les contient ?

Même problème pour une loi normale mais on se limite à des carrés (ou des pavés cubiques dans R^n).

Dans tous ces cas, nous désignerons par $f_n(x)$ cette loi du diamètre d'un nuage aléatoire à l'échelle composé de n points. Il est maintenant possible de fournir une réponse au problème de contenance, qui avait été résolu dans un cas particulier au chapitre VII.

Explicitons les résultats obtenus avec les deux distances, euclidienne et cubique, qui nous ont servi.

On considère un récipient sphérique (dans l'espace à n dimensions). On y place, suivant un plan aléatoire à l'échelle des boules. La répartition est supposée normale (resp. uniforme). Quelle est la probabilité pour qu'on puisse en mettre au moins p ? Cette probabilité s'écrit :

$$P(p) = \int_0^D f_p(x/d) \quad dx$$

D désignant le diamètre du support.

Cas cubique. Seul l'énoncé change, mais le résultat reste formellement identique. Dans un récipient cubique de R^n , d'arête D , on place suivant un plan aléatoire à l'échelle, et avec une répartition laplacienne (resp. uniforme) des cubes d'arête d . La probabilité pour que ce procédé permette de placer p cubes est :

$$P(p) = \int_0^D f_p(x/d) \quad dx$$

CHAPITRE IX

9.1. Étude du pavé d'appui. Indépendance limite de ses dimensions.

Etant donné un échantillon de m points dans l'espace R^n , nous désignerons par « pavé d'appui » le plus petit pavé, d'arêtes parallèles aux axes et contenant tous les points de l'échantillon. La plupart des propriétés de ce pavé se déduiront de l'indépendance limite de ses dimensions; on sait en effet qu'il n'est pas exact en général que les dimensions de ce pavé soient indépendantes au sens habituel du mot.

Cette notion que nous allons utiliser, d'indépendance asymptotique globale, est due à M. GEFFROY qui a étudié sous cet aspect des échantillons à deux dimensions.

Distance de deux lois à n variables.

Il existe de multiples façons de définir une telle distance compatible avec la convergence légale, c'est-à-dire en sorte que les relations :

la distance $d(F, F_n)$ tend vers 0
 F_n converge légalement vers F

soient équivalentes. La distance définie par M. Paul LÉVY pour les lois d'une variable étendue par M. GEFFROY aux lois de deux variables s'étend sans peine à n variables. Soit en effet $Z = F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ l'équation de la surface représentant dans l'espace R^{n+1} une loi à n variables. La complétant éventuellement par des portions de plans parallèles aux plans de coordonnées, on obtient une surface continue $S(F)$. Considérons maintenant deux surfaces $S(F)$ et $S(F')$. Une droite variable d'équations

$$Z = -x_i + a_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

coupe ces surfaces en deux points M et M' . La distance MM' reste comprise entre 0 et $\sqrt{n+1}$ et varie continûment avec les nombres a_i . Nous poserons par définition :

$$d(F, F') = \sup_{a_i} MM'$$

Ce maximum est sûrement atteint, à cause de la continuité des surfaces $S(F)$ et $S(F')$. Soient c_i les valeurs des a_i correspondantes. Les axiomes :

$$\begin{aligned} d(F, F') &= d(F', F) \\ d(F, F') &= 0 \text{ si et seulement si } F = F' \end{aligned}$$

sont évidemment vérifiés.

Quant à l'inégalité triangulaire, elle résulte de l'inégalité

$$MM' \leq MM'' + M''M'$$

appliquée aux points $MM'M''$ où la droite qui réalise le maximum pour les surfaces $S(F)$ et $S(F')$ rencontre les trois surfaces $S(F)$ $S(F')$ $S(F'')$. Alors :

$$\begin{aligned} MM' &= d(F, F') \\ MM'' &\leq d(F, F'') \\ M''M' &\leq d(F'', F') \end{aligned}$$

Il est aisé de voir que les relations de comptabilité avec la convergence légale sont satisfaites; cela résulte du théorème de Polya sur la convergence uniforme (19). D'autre part, les inégalités :

$$\begin{aligned} d(F, F') &< \varepsilon \sqrt{n+1} \\ F(x_1 - \varepsilon, x_2 - \varepsilon, \dots, x_n - \varepsilon) - \varepsilon &< F'(x_1, \dots, x_n) < \\ &F(x_1 + \varepsilon, \dots, x_n + \varepsilon) + \varepsilon \\ &\quad \forall x_1 x_2 \dots x_n \end{aligned}$$

sont équivalentes.

On peut maintenant définir l'indépendance asymptotique globale. Nous la définirons pour toutes les variables séparées, mais il est possible de définir de la même manière l'indépendance asymptotique globale de deux ou plusieurs groupes de variables; cette question ne se posait évidemment pas dans le cas de deux variables seulement.

Définition.

$F_p(x_1, x_2, \dots, x_n)$ étant la fonction de répartition du point (x_i) et $A_p(x_i)$ la fonction de répartition marginale de x_i . Nous dirons que les variables $x_1 x_2 \dots x_n$ sont asymptotiquement globalement indépendantes si

$$d(F_p, A_p(x_1) A_p(x_2) \dots A_p(x_n))$$

tend vers 0 avec $1/p$.

Cette définition contient la définition usuelle de l'indépendance limite, convergence de F_p vers une loi F à variables séparées.

Nous allons donner maintenant une condition d'indépendance asymptotique globale des dimensions du pavé d'appui, pour un échantillon dans l'espace à p dimensions.

Soit $F(x_1 x_2 \dots x_p)$ la distribution parente d'un tel échantillon. Désignons par F_i la loi marginale de la variable x_i et posons :

$$Y_i = \sup x_i$$

plus grande valeur de la variable x_i pour un échantillon de m points. Pour que les variables $Y_1 Y_2 \dots Y_p$ soient asymptotiquement globalement indépendantes, il suffit que :

$$k = \frac{I - F_1 F_2 \dots F_p}{I - F}$$

tende vers 1 avec F .

Ceci généralise un théorème de M. GEFFROY pour deux dimensions.

Pour une grande partie de la démonstration, il nous suffira que k soit majoré par B et minoré par A , deux nombres positifs, finis et non nuls.

Démontrons ce théorème. Les variables Y_i ont pour loi :

$$\begin{array}{ll} \text{marginale :} & F^m_i \\ \text{globale} & : F^m \end{array}$$

Pour qu'il y ait indépendance asymptotique globale, il faut et il suffit que

$$d = F^m - (F_1 F_2 \dots F_p)^m$$

tende vers 0 avec $1/m$.

Nous poserons :

$$q = I - F \quad \text{et} \quad F_1 F_2 \dots F_p = I - kq$$

k ayant alors précisément la valeur explicitée dans le théorème énoncé.

Dans ces conditions :

$$d = (I - q)^m - (I - kq)^m$$

Soit donc h un nombre positif arbitraire; il nous faut déterminer un nombre M tel que $m > M$ entraîne $-h < d < h$.

Résultats évidents préliminaires.

Pour alléger la démonstration, nous réunissons ici quelques résultats élémentaires utiles pour la suite.

a) L'expression $\left(I - \frac{1}{m^{\frac{1}{2}}}\right)^m$ tend vers 0 avec $1/m$.

b) Il en est de même de $\left(I - \frac{A}{m^{\frac{1}{2}}}\right)^m$ et aussi du produit de cette

quantité par m .

c) Il existe un nombre j tel que $q < j$ entraîne $|k - I| < \frac{1}{2} h e$.

On pourra d'ailleurs limiter l'étude à ces valeurs de q , car hors de ces régions la propriété souhaitée est triviale.

d) $z e^{-z}$ est toujours inférieure à e^{-1} . Quel que soit f , $mf(1-f)^m$ est donc inférieur à e^{-1} .

e) Il existe des nombres $M_1 M_2 M_3$ tels que pour toute valeur de m supérieure à ces nombres on ait respectivement :

$$\begin{array}{ll} \left(I - \frac{1}{m^{\frac{1}{2}}}\right)^m < h & m^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{1}{m^{\frac{1}{2}}}\right)^m < h/B \\ m^{\frac{1}{2}} \left(I - \frac{A}{m^{\frac{1}{2}}}\right)^m < Ah & \end{array}$$

Choisissons donc une valeur de m en sorte que ces trois conditions soient remplies et séparons l'espace en quatre régions (certaines pouvant être vides sans que la démonstration en soit affectée) le recouvrant entièrement.

Région I.

$$q > 1/m^{\frac{1}{2}} \quad kq > 1/m^{\frac{1}{2}}$$

de l'expression de d résulte la double inégalité :

$$-(1 - Kq)^m < d < (1 - q)^m$$

et donc, en tenant compte de la définition de la région,

$$-\left(1 - \frac{1}{m^{\frac{1}{2}}}\right)^m < d < \left(1 - \frac{1}{m^{\frac{1}{2}}}\right)^m$$

et donc, d'après la remarque (e)

$$-h < d < h$$

Région II

$$q > 1/m^{\frac{1}{2}} \quad kq < 1/m^{\frac{1}{2}}$$

Dans ce cas, d est négatif; sa valeur absolue d' peut s'écrire :

$$d' = mq(1 - k)(1 - wq)^m$$

or $w > q > A$ donc

$$d' < m kq \frac{1 - k}{k} \left(1 - \frac{A}{m^{\frac{1}{2}}}\right)^m$$

ce qui, d'après la condition (e) est inférieur à h . Donc dans cette région

$$-h < d < 0$$

Région III

$$q < 1/m^{\frac{1}{2}} \quad kq > 1/m^{\frac{1}{2}}$$

Dans ce cas d est positif et s'écrit :

$$d = mq(k - 1)(1 - wq)^m$$

soit

$$d < B m^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{B^{-1}}{m^{\frac{1}{2}}}\right)^m$$

ce qui montre, en tenant compte de la 3^e des conditions (e) que

$$0 < d < h$$

Région IV

$$q < 1/m^{\frac{1}{2}} \quad kq < 1/m^{\frac{1}{2}}$$

Soit d' la valeur absolue de d . On peut écrire :

$$\begin{aligned} d' &= mq |k - 1| (1 - wq)^m \\ \text{si } k > 1 \quad d' &< (k - 1) m q (1 - q)^m \end{aligned}$$

d'où

$$d' < \frac{1}{2} h e^{-1} \text{ en tenant compte des remarques } c \text{ et } d$$

si $k < 1$

$$d' < \frac{k - 1}{k} m k q (1 - kq)^m$$

ce qui de même est majoré par :

$$\frac{\frac{1}{2} h e}{k} e^{-1}$$

finalement on a prouvé que dans tout l'espace, — $h < d < h$ ce qui achève d'établir le théorème.

Remarque sur ce théorème : nous n'avons établi qu'une condition suffisante et cette condition pourrait sans doute être affinée. Remarquons cependant que si k a une limite, on ne peut la supposer différente de 1 sans infirmer le théorème. En effet :

Imaginons que k ait une limite, supérieure à 1 pour fixer les idées; soit un nombre strictement compris entre 1 et la limite de k , au moins dès que $q < \varepsilon$.

L'expression $\left(1 - \frac{1}{m}\right)^m - \left(1 - \frac{a}{m}\right)^m$ tendant quand m augmente indéfiniment vers $e^{-1} - e^{-a}$ il existe un rang M à partir duquel cette expression dépasse le nombre strictement positif $b = \frac{1}{2} (e^{-1} - e^{-a})$.

Choisissons donc une valeur de m supérieure à M et supérieure à $1/\varepsilon$ et les points pour lesquels $qm = 1$; d est alors positif et

$$d > \left(1 - \frac{1}{m}\right)^m - \left(1 - \frac{a}{m}\right)^m > b$$

Quel que soit m , il existe donc des points tels que $d > h$; l'indépendance asymptotique globale est donc exclue.

9.2. Localisation asymptotique presque sûre du polytope d'appui d'un échantillon normal à n dimensions.

Définitions et résultats préliminaires. (Rappels de l'op. cit.)

Etant donné une suite infinie de variables aléatoires indépendantes X_i toutes de même loi $F(x)$, nous désignons par Y_n la plus grande valeur de l'échantillon des n variables X_i ($i = 1, 2, \dots, n$)

Y_n est dite « stable presque sûrement » s'il existe une suite certaine a_n telle que $Y_n - a_n$ tende presque sûrement vers 0. Cette condition se décompose en deux conditions :

$$\begin{array}{ll} C^+ & \text{presque sûrement } Y_n < a_n + \varepsilon \\ C^- & \text{presque sûrement } Y_n > a_n - \varepsilon \end{array} \quad \forall \varepsilon$$

Etude de la condition C^+ .

Posons $G(x) = 1 - F(x)$ et désignons par g la fonction réciproque de G . La convergence presque sûre vers 0 de $Y_n - a_n$ entraînant la convergence en probabilité, nous pouvons choisir :

$$a_n = g(I/n)$$

La condition posée est une condition de majoration presque sûre de Y_n par

$$B(n) = g(I/n) + \varepsilon$$

posant alors

$$B(t) = g(I/t) + \varepsilon$$

on a :

$$b(x) = I/G(x - \varepsilon)$$

On sait dans ces conditions que la condition C^+ équivaut à la convergence pour tout ε de l'intégrale :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dF(x)}{G(x - \varepsilon)}$$

Considérons le rapport :

$$r(x) = \frac{G(x - \varepsilon)}{G(x) \operatorname{Log} G(x)}$$

l'intégrale peut s'écrire :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dF(x)}{r(x) G(x) \operatorname{Log} G(x)}$$

L'existence de I entraîne que r n'est pas borné inférieurement quand x augmente indéfiniment. En effet, s'il existait un nombre A tel que

$$r(x) > -A \quad \text{si } x > x_0$$

on aurait :

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^x \frac{dF(x)}{r(x) G(x) \text{Log } G(x)} &= \int_{x_0}^x \frac{d \text{Log } |\text{Log } G(x)|}{-r(x)} \\ &> \int_{x_0}^x \frac{d \text{Log } |\text{Log } G(x)|}{A} = \frac{1}{A} \text{Log} \left(\frac{\text{Log } G(x)}{\text{Log } G(x_0)} \right) \end{aligned}$$

qui augmente indéfiniment avec x .

Ainsi, il existe une suite de valeurs croissantes de $x : x_1, x_2, \dots, x_n$ augmentant indéfiniment telle que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r(x_n) = -\infty \quad \text{pour tout } \varepsilon$$

Examinons la famille K_1 des fonctions de répartition telle que :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} r(x) = -\infty$$

ce qui s'écrit aussi, en posant $W(x) = -\text{Log } G(x)$

$$W(x) - W(x - \varepsilon) - \text{Log } W(x) \rightarrow +\infty \text{ avec } x \quad (\text{A})$$

On montre (12) que cette condition équivaut à :

$$W(x) - W(x - \varepsilon) - \text{Log } W(x - \varepsilon) \rightarrow +\infty \text{ avec } x \text{ pour tout } \varepsilon$$

et de la même manière, que les conditions :

$$\lim (W(x) - W(x - \varepsilon) - n \text{Log } W(x)) = +\infty \quad (\text{B})$$

$$\lim (W(x) - W(x - \varepsilon) - n \text{Log } W(x - \varepsilon)) = +\infty \quad (\text{B}')$$

sont équivalentes.

Théorème. — Les conditions (A') et (B') sont équivalentes.

L'implication

$$(\text{B}') \implies (\text{A}')$$

est évidente. Montrons la réciproque. Si (A') est vérifiée, quel que soit l'entier n est pour tout ε positif, on a pour x augmentant indéfiniment :

$$W\left(x - \frac{h}{n}\right) - W\left(x - \frac{h+1}{n}\varepsilon\right) - \text{Log } W\left(x - \frac{h+1}{n}\varepsilon\right) \rightarrow +\infty$$

pour tout entier h compris entre 0 et $n-1$. Ajoutant toutes ces expressions, on déduit :

$$W(x) - W(x - \varepsilon) - \sum_{h=0}^{n-1} \text{Log } W\left(x - \frac{h+1}{n}\varepsilon\right) \rightarrow +\infty$$

et donc :

$$W(x) - W(x - \varepsilon) - n \text{Log } W(x - \varepsilon) \rightarrow +\infty$$

et par suite :

$$W(x) - W(x - \varepsilon) - n \text{Log } W(x) \rightarrow +\infty$$

ce qui est la condition (B').

Théorème. — La condition (B') entraîne la condition C+ en effet de

$$\lim. W(x) - W(x - \varepsilon) - 2 \operatorname{Log} W(x) = +\infty$$

on déduit :

$$\lim. \frac{G(x - \varepsilon)}{G(x) [\operatorname{Log} G(x)]^2} = +\infty$$

et donc :

$$\int_{x_0}^x \frac{dF(x)}{G(x - \varepsilon)} < \int_{x_0}^x \frac{-dG(x)}{G(x) [\operatorname{Log} G(x)]^2} = \frac{1}{\operatorname{Log} G(x)} - \frac{1}{\operatorname{Log} G(x_0)}$$

qui est borné quand x augmente indéfiniment.

Théorème. — La condition (B') entraîne la condition C.

Nous montrerons mieux :

$$a_n - \varepsilon < Y_n \text{ presque complètement sûrement.}$$

Cette dernière condition est en effet équivalente à la convergence de l'intégrale :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp - \left(\frac{G(x - \varepsilon)}{G(x)} \right) \frac{dF(x)}{G^*(x)}$$

or (B') entraîne que pour x assez grand :

$$\exp - \left(\frac{G(x - \varepsilon)}{G(x)} \right) \frac{1}{G^*(x)} < \frac{1}{G(x - \varepsilon)}$$

en effet ceci équivaut à :

$$\frac{G(x - \varepsilon)}{G(x)} - 2 \operatorname{Log} G(x) < - \operatorname{Log} G(x - \varepsilon)$$

ce qui est évidemment réalisé si :

$$\frac{G(x - \varepsilon)}{G(x) \operatorname{Log} G(x)} < -2$$

Finalement la condition (B') entraîne la stabilité presque sûre de la suite Y_n . Enfin, la condition :

$$\frac{W'(x)}{\operatorname{Log} W(x)} = \frac{f(x)}{G(x) \operatorname{Log} \operatorname{Log} G(x)} \rightarrow +\infty$$

entraîne la condition (B') et donc la stabilité presque sûre de la suite Y_n . En effet :

$\lim. (W(x) - W(x - \varepsilon) - \operatorname{Log} W(x - \varepsilon)) = \lim. \{W'(u) - \operatorname{Log} W(x - \varepsilon)\}$
 u étant compris entre $x - \varepsilon$ et x . Or cette quantité est supérieure à

$\lim. \{W'(u) - \operatorname{Log} W(u)\}$ qui est infinie avec u donc avec x .

9.3. Ces rappels faits, il va nous être possible d'étudier le polytope d'appui d'un échantillon normal à p dimensions.

Loi de $Z = OM$

Ce calcul a été fait au paragraphe 1.2. Il nous est en effet loisible de supposer que la loi est centrée réduite, et les coordonnées indépendantes (moyennant s'il le faut un changement d'axes et une affinité qui ne modifie pas les propriétés que nous avons en vue)

$$F(Z) = A \int_0^Z t^{p-1} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$

La constante A étant choisie en sorte que $F(+\infty) = 1$

Théorèmes. — La loi du χ^2 à p degrés de liberté satisfait aux conditions (C+, C-). Il suffit, pour le prouver, de vérifier la condition (Γ) d'après ce qui vient d'être rappelé. Or :

$$q = \frac{f(x)}{G(x) \operatorname{Log} \operatorname{Log} G(x)} \sim \frac{x^{p-1} e^{-\frac{1}{2}x^2}}{x^{p-1} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) \operatorname{Log} \left| \operatorname{Log} \left(x^{p-1} \exp - \frac{1}{2}x^2\right) \right|}$$

En effet, la règle de l'Hospital permet d'affirmer que :

$$\int_x^\infty t^{p-1} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt \sim x^{p-1} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

Ainsi :

$$q \sim \frac{x}{\operatorname{Log} \left| \operatorname{Log} x^{p-1} e^{-\frac{1}{2}x^2} \right|}$$

et par le même raisonnement :

$$q \sim \frac{\operatorname{Log} \left(x^{p-1} e^{-\frac{1}{2}x^2} \right)}{\frac{p-2}{x} - x}$$

qui augmente indéfiniment avec x . La condition (Γ) est donc vérifiée. Par suite, les plus grandes valeurs d'un échantillon Z_n sont stables presque sûrement; elles se concentrent autour de a_n défini par :

$$\frac{1}{n} = A \int_{a_n}^\infty t^{p-1} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$

Remarquons que :

$$\frac{1}{n} \sim a_n^{p-1} e^{-\frac{1}{2}a_n^2} A \quad (D)$$

et que :

$$\operatorname{Log} n \sim \frac{1}{2} a_n^2 \quad (D')$$

Appelons Z'_1, Z'_2, \dots, Z'_n les valeurs de l'échantillon ordonnées de la droite vers la gauche. Nous commençons par déterminer une suite certaine e_n telle que

$$a_n - e_n < Z'_1 < a_n + e_n \text{ presque sûrement}$$

et tendant vers 0 avec $1/n$.

La condition

$$Z'_1 < a_n + e_n \quad \text{p.s.}$$

équivaut à la convergence de la série de terme général $G(a_n + e_n)$. Or :

$$G(a_n + e_n) \sim (a_n + e_n)^{p-1} e^{-\frac{1}{2}(a_n + e_n)^2}$$

$$\sim a_n^{p-1} e^{-\frac{1}{2}a_n^2} e^{-a_n e_n}$$

ce qui d'après (D) équivaut à celle de :

$$\frac{\exp(-a_n e_n)}{n}$$

Prenons par exemple

$$e_n = \frac{2 \operatorname{Log} \operatorname{Log} n}{a_n}$$

Alors, d'une part la convergence de la série est assurée par la convergence de

la série de terme général $\frac{1}{n \operatorname{Log}^2 n}$ et d'autre part, e_n tend bien vers 0 avec $1/n$. En effet :

$$e_n \sim \frac{\operatorname{Log} a_n^2}{a_n}$$

d'après (D') et a_n augmente indéfiniment.

Quant à la seconde condition :

$$Z'_1 > a_n - e_n \quad \text{p.s.}$$

elle est conséquence de la même minoration presque complètement sûre; et cette dernière équivaut à la convergence de la série du terme général :

$$u_n = F^n(a_n - e_n)$$

Or :

$$\operatorname{Log} u_n = n \operatorname{Log} A \int_0^{a_n - e_n} t^{p-1} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$

ce qui équivaut à :

$$= n A \int_{a_n - e_n}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2} t^{p-1} dt$$

ou à :

$$-nA (a_n e_n)^{p-1} e^{-\frac{1}{2}(a_n - e_n)^2} \sim -nA a_n^{p-1} e^{-\frac{1}{2}a_n^2} \text{Log}^2 n$$

et donc d'après (D) à $-\text{Log}^2 n$.

Par suite

$$u_n < n^{-\text{Log} n}$$

ce qui achève la démonstration.

9.4. Il nous reste à déterminer une suite d'entiers k_n croissant indéfiniment avec n et telle que :

$$a_n - e_n < Z'^{k_n} n \quad \text{p.c.s.}$$

On sait (12) qu'il est nécessaire et suffisant que :

$$a) \quad \frac{n G(a_n - e_n)}{k_n} \rightarrow \infty \text{ avec } n$$

$$b) \text{ la série de terme général } C_n^{k_n-1} F^{n-k_n-1}(a_n - e_n) G^{k_n-1}(a_n - e_n)$$

soit convergente.

La première condition s'écrit :

$$q = \frac{n (a_n - e_n)^{p-1} e^{-\frac{1}{2}(a_n - e_n)^2}}{k_n} \rightarrow \infty$$

Or

$$q \sim \frac{n a_n^{p-1} e^{-\frac{1}{2}a_n^2} \text{Log}^2 n}{k_n}$$

soit d'après (D) :

(E)

$$\frac{\text{Log}^2 n}{k_n} \rightarrow \infty \text{ avec } n. \quad (E)$$

Supposons cette condition réalisée. Alors :

soit

$$r_n = \frac{n(n-1) \dots (n-k_n+2)}{n^k n^{-1}} \equiv \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k_n-2}{n}\right)$$

On a

$$(k_n-2) \text{Log} \left(1 - \frac{k_n-2}{n}\right) < \text{Log } r_n < (k_n-2) \text{Log} \left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

(E) entraîne que k_n/n et k_n^2/n tendent vers 0 avec $1/n$ et donc que $\text{Log } r_n$ tend vers 0.

Ainsi r_n tend vers 1.

Majorons le terme général de la série de la condition b par :

$$u_n = F^n(a_n - e_n) [n G(a_n - e_n)]^{k_n - 1}$$

alors :

$$\begin{aligned} \text{Log } u_n &< n \text{ Log } A \int_0^{a_n - e_n} e^{-\frac{1}{2} t^2} t^{p-1} dt \\ &+ (k_n - 1) \text{ Log } n A \int_{a_n - e_n}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} t^2} t^{p-1} dt \end{aligned}$$

ou

$$\text{Log } u_n < -n (a_n - e_n)^{p-1} e^{-\frac{1}{2} (a_n - e_n)^2} + (k_n - 1) \text{ Log } \text{Log}^2 n$$

qui équivaut à $-\text{Log}^2 n + k_n \text{ Log } \text{Log}^2 n$

Ainsi, si l'on prend

$$k_n = \frac{\text{Log}^3 n}{3 \text{ Log } \text{Log}^2 n}$$

$$\text{Log } u_n < -\frac{2}{3} \text{Log}^3 n$$

et la condition b est réalisée. Il en est de même de la première condition, car

$$\frac{\text{Log}^3 n}{k_n} = 3 \text{ Log } \text{Log}^2 n$$

augmente bien indéfiniment.

Ainsi : tous les points de l'échantillon sont asymptotiquement presque sûrement intérieurs à une hypersphère de centre O , de rayon :

$$R_n = a_n + 2 \frac{\text{Log } \text{Log } n}{a_n}$$

De plus, le nombre de points appartenant à la couche limitée par cette hypersphère et celle de même centre et de rayon $a_n - 2 \frac{\text{Log } \text{Log } n}{a_n}$ est asymptotiquement presque complètement sûrement supérieur à

$$\frac{1}{3} \frac{\text{Log}^3 n}{\text{Log } \text{Log}^2 n}$$

Il reste à préciser la répartition de ces points dans cette couche.

Faisons deux remarques avant cette étude.

1. La projection d'une répartition de Laplace-Gauss de R^n sur un hyperplan est une répartition de LAPLACE-GAUSS de R^{n-1} .

2. Soient deux surfaces fermées convexes de R^n , S et S' . Désignons par

$F(\theta)$ et $F'(\theta)$ les contours apparents respectifs de ces surfaces sur un hyperplan variable passant par Oz .

La condition nécessaire et suffisante pour que S contienne S' est qu'il en soit de même de F et F' quel que soit l'hyperplan de projection.

Ce résultat peut paraître absolument évident et intuitif; mais précisément, trop de termes y sont employés d'une façon qui peut paraître appartenir au langage courant pour que nous ne cherchions pas à préciser cet énoncé et à démontrer ces propriétés. Toutefois, pour ne pas allonger l'exposé d'une démonstration incidente purement géométrique, nous en reportons la démonstration à la fin de ce chapitre.

Nous nous proposons d'établir que le polytope d'appui $W(p, n)$ d'un échantillon de n points normaux dans l'espace R^n (c'est-à-dire, selon la définition de M. DARMOIS, le plus petit polytope convexe contenant tous les points de l'échantillon) contient asymptotiquement presque complètement

sûrement l'hypersphère de centre O et de rayon $a_n - 2 \frac{e_n}{a_n}$.

Pour cela, il suffit de démontrer que $W(p-1, n)$ contient l'hypersphère de même rayon et ainsi de suite. On est ainsi ramené à prouver que le polygone d'appui d'un échantillon normal à deux dimensions contient asymptotiquement presque sûrement le cercle de centre O et de rayon $a_n - 2 \frac{e_n}{a_n}$.

On remarquera que cette démonstration est plus exigeante que celle qu'il faut faire pour l'étude similaire d'un échantillon à deux dimensions, bien que les deux rayons soient asymptotiquement équivalents.

On remarquera que cette démonstration est plus exigeante que celle qu'il faut faire pour l'étude similaire d'un échantillon à deux dimensions, bien que les deux rayons soient asymptotiquement équivalents.

On sait (12) que cela équivaut à la détermination d'une suite v_n telle que

$$\frac{2 \pi^2 a_n^2}{v_n} < \frac{e_n}{a_n}$$

et que la série de terme général

$$w_n = v_n \left(1 - \frac{1}{v_n}\right)^{k_n}$$

soit convergente.

On satisfait à la première de ces conditions en choisissant

$$v_n = \frac{\pi^2 a_n^2}{\text{Log Log } n}$$

Dans ce cas :

$$\text{Log } w_n = \text{Log } v_n + k_n \text{Log} \left(1 - \frac{1}{v_n}\right)$$

soit

$$\text{Log } W_n < 3 \frac{1}{2} \text{Log } m - \frac{1}{2} \text{Log } \text{Log } m - k_n/v_n$$

équivalent, à une constante multiplicative près à $\frac{-m^{4/3}}{(\text{Log } m)^{\frac{1}{2}}}$

ce qui assure la convergence.

Finalement, le polytope d'appui est :

presque sûrement intérieur à la boule de centre O de rayon $a + \frac{e_n}{a_n}$

presque complètement sûrement extérieur à la boule de centre O de

rayon $a - 2 \frac{e_n}{a_n}$

9.5. Complément de géométrie.

A) Définitions, rappels.

Un domaine de R^n est une partie de R^n qui est voisinage de chacun de ses points.

La frontière de ce domaine est l'intersection des adhérences du domaine et de son complémentaire.

Un domaine est dit convexe, si, lorsqu'il contient deux points, il contient tous les points du segment de droite qu'ils définissent.

La frontière d'un domaine convexe sera appelée par abus de langage surface convexe. Quant à la réunion d'une surface convexe et du domaine qui la définit, nous l'appellerons volume convexe.

B) Lemmes.

Lemme 1. — Si un point n'appartient pas à un volume convexe, il existe un hyperplan qui sépare l'espace en deux régions, l'une contenant le point et l'autre le volume.

Un volume convexe étant un fermé, il existe un point M_0 du volume qui réalise le minimum de la distance de P à un point M du volume.

Le lieu des points équidistants de P et de M_0 est un hyperplan H. Cet hyperplan sépare l'espace en deux régions, l'une contenant P l'autre M_0 .

La région contenant M_0 contient le volume tout entier. En effet, s'il en était autrement, c'est-à-dire s'il existait un point Q de A appartenant à la même région que P, nous considérerions le plan à deux dimensions défini par Q M_0 et P.

La trace de H sur ce plan est la médiatrice de M_0P ; la droite M_0Q ne saurait être perpendiculaire à M_0P mais par suite de la convexité

$$M_0Q \subset A$$

et donc il existe un point de A plus proche de P que M_0 .

Lemme 2. — Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un point soit extérieur à un volume convexe est qu'il existe une droite passant par ce point et ne contenant aucun point du volume.

Soit P le point et A le volume convexe.

La condition est évidemment suffisante; s'il existe une droite passant par P et ne contenant aucun point de A , P ne saurait appartenir à A .

Réciproquement P est un point extérieur à un fermé convexe d'après la lemme 1 : il existe un hyperplan séparant l'espace en deux régions, l'une contenant A et l'autre contenant P .

Alors, il existe une droite passant par P et ne rencontrant pas l'hyperplan. Cette droite ne contient pas de point de A ; en effet, si elle en contenait un, elle contiendrait un point de chacune des deux régions déterminées par l'hyperplan, et donc un point de l'hyperplan, ce qui contredit l'hypothèse.

C) *Théorème.*

On appelle contour apparent de A sur un hyperplan H la projection de A sur H .

La définition même d'un volume convexe permet d'affirmer que le contour apparent est un volume convexe à $n - 1$ dimensions.

Soient S et S' deux volumes convexes, F et F' leurs contours apparents respectifs sur un hyperplan variable passant par Oz . Il est nécessaire et suffisant, pour que S contienne S' que la même inclusion ait lieu pour F et F' quel que soit l'hyperplan choisi pour la projection.

La condition est nécessaire. Si S contient S' , tout point M de S' appartient à S et sa projection appartient donc à F ; tout point de F' appartenant à F , l'inclusion est réalisée.

La condition est suffisante. Supposons-la remplie et imaginons qu'un point P de S' soit extérieur à S . Alors il existe une droite passant par P et ne contenant aucun point de S , d'après le lemme 2. On peut d'ailleurs la supposer perpendiculaire à l'axe Oz . Projetons sur l'hyperplan perpendiculaire à cette droite; la droite se projette en un point p et ce point n'appartient pas à F ; mais ceci contredit l'hypothèse selon laquelle F contient F' quel que soit l'hyperplan choisi.

On peut d'ailleurs limiter le nombre d'hyperplans choisis à un ensemble dénombrable dont les angles polaires sont partout denses sur $[0, \pi]$.

CONCLUSION

On a pu remarquer qu'une part importante des citations et rappels bibliographiques se rapporte à des ouvrages ou des publications déjà anciennes. C'est que le sujet avait subi une certaine désaffectation. Dans une plaquette publiée en 1963, M. G. KENDALL et P. MORAN [16] remarquent qu'aucun ouvrage n'a été publié depuis « l'excellente petite brochure de M. DELTHEIL, *Probabilités Géométriques*, en 1926 ». Dans les vingt dernières années, continuent ces auteurs, un grand nombre de problèmes se sont posés qui exigent l'usage de cette discipline; et de citer l'astronomie, la physique atomique, la biologie, la cristallographie, la pétrographie, la théorie de l'échantillonnage, la sylviculture...

Ils expriment l'espoir d'attirer l'attention des mathématiciens sur un sujet « ... of great intellectual charm with many challenging fields for further research ».

Ce travail est un commencement de réponse à cet appel; réponse non délibérée, puisqu'elle était entreprise bien avant la publication de M. KENDALL. Commencement seulement, puisque, même dans le champ très étroit de notre sujet, il laisse, — faut-il le regretter ou s'en réjouir? — bien des questions ouvertes. Citons, au hasard :

L'opérateur DD sur l'espace des distributions de probabilité à support positif;

Les moments de la fonction $C(p, \theta)$ (chapitre I);

Les « classes de relations pré-orthoïdes » (chapitre II);

L'application de la théorie du chapitre V au cas non asymptotique.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] AUBERT, On the foundation of the theory of relations. Archiv for matematik og naturvidenskal, Oslo. 1952.
- [2] BARBIER, Note sur le jeu du point couvert. Journal Math. Pures et Appl., 1860.
- [3] BOREL, Traité de calcul des probabilités.
- [4] CARTAN, Le principe de dualité et certaines intégrales multiples. Bull. Soc. Math. de France, 1896.
- [5] CROFTON, Geometrical theorems relating to means values. Proceedings London Math. Soc., 1877.
- [6] CROFTON, Sur quelques théorèmes de calcul intégral. C. R. Acad. Sc. Paris, 1869.
- [7] CROFTON, Encyclopaedia Britannica, article « probability ».
- [8] DUGUE, Traité de statistique théorique et appliquée. Masson, 1958.
- [9] FAVARD, Cours de géométrie différentielle locale.
- [10] FELLER, An introduction to probability theory and its applications. Wiley, New York, 1950.
- [11] GARNIER, Cours de cinématique. Tome III.
- [12] GEFFROY, Thèse. Paris, 1958.
- [13] GUMBEL, Statistics of extremes. Columbia, 1958.
- [14] KENDALL, The advanced theory of statistics. Griffin, Londres, 1943.
- [15] KENDALL, A course on geometry of n dimensions. Griffin, 1963.
- [16] KENDALL, Geometrical probability. Griffin, 1963.
- [17] LEBESGUE, Exposé d'un mémoire de Crofton. Nouvelles Annales, 1909.
- [18] DELTHEIL, Thèse.
- [19] POLYA, Über den zentralen Grenzwertsatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung und das Momentenproblem. Math. Zeitschrift, 1920.
- [20] SYLVESTER, On Buffon's problem of the needle. Acta Math., 1891.

TABLE DES MATIÈRES

PREMIERE PARTIE. — Caractéristiques géométriques locales.

CHAPITRE PREMIER : Couples de points de R^n	9
Formules générales	9
Distance euclidienne	10
Distance cubique	13
Le cas géométrique	14
Complément uniforme. La fonction $C(p, \theta)$	17
CHAPITRE II : Triples de R^2	19
Aire	19
Rayon du cercle défini	21
Le pré-alignement	22
CHAPITRE III : Systèmes plus importants	33
Extension d'une méthode de LEBESGUE	30
Approximation quadratique	34
CHAPITRE IV : Notions duales	37
Le choix de la probabilité élémentaire	39
Pré-concours de droites	40
Généralisations	43

DEUXIEME PARTIE. — Régularités statistiques globales.

CHAPITRE V : Alignements	48
Phénomènes à un paramètre	48
Exemple numérique	53
Points de R^2	55
Théorème limite	58
CHAPITRE VI : Relations orthoïdes	69
CHAPITRE VII : Encombrement d'un échantillon dans R	74
CHAPITRE VIII : Encombrement d'un échantillon dans R^2	78
Distribution dans deux directions conjuguées	78
Le désordre à l'échelle	79
CHAPITRE IX : Echantillon laplacien	83
Un théorème d'indépendance asymptotique globale —	83
Localisation asymptotique p. s. du polytope d'appui .	88
BIBLIOGRAPHIE	99