ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

JEAN COMBES

Sur les valeurs prises par les dérivées successives des fonctions analytiques

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 4e série, tome 24 (1960), p. 167-180

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1960_4_24__167_0>

Sur les valeurs prises par les dérivées successives des fonctions analytiques

par Jean COMBES

1. — *INTRODUCTION.*

Ce travail développe une question abordée dans l'article intitulé « *Sur certains systèmes infinis d'équations linéaires* », qui a paru dans les *Annales de la Faculté des sciences de Toulouse*, 4e série : la partie (I) dans le tome XXI, les parties (II) et (III) dans le tome XXIII. Nous conserverons les notations de cet article; les références que nous y ferons seront notées comme suit : (II, 5) signifie partie (II), paragraphe 5; les autres références seront indiquées par un numéro entre crochets renvoyant à la bibliographie qui termine le présent travail.

Soit $f(z) = \sum_{o}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$ une fonction entière. Sa croissance (c'est-à-dire son ordre et, dans le cas d'un ordre fini positif, son type) se calcule à l'aide des modules des a_n, qui sont les valeurs des dérivées successives à l'origine. Considérons maintenant, pour chacune des dérivées successives $f^{(n)}$ ($n=0, 1, 2\ldots$) la valeur prise en un point z_n: la suite (z_n) est une suite quelconque de points du plan complexe. On peut étudier en un certain sens la grandeur des $f^{(n)}(z_n)$ en considérant la fonction

$$g(z) = \sum_{0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_n)}{n!} z^n = \sum_{0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} z^n.$$

Un résultat élémentaire dans cette voie est le suivant : *si, pour tout n,* $|z_n| \leqslant C$, C étant une constante positive quelconque, *g est une fonction entière dont la croissance est inférieure ou égale* (1) *à celle de f.* En effet f a même croissance que la fonction entière ϕ définie par

$$\phi(z) = \sum_{0}^{\infty} \frac{|a_n|}{n!} z^n \qquad \text{et on a :} \qquad |f^{(n)}(z_n)| \leqslant \phi^{(n)}(C).$$

---

(1) Cela signifie : (ordre de g) $\leqslant$ (ordre de f) et de plus, si les deux ordres ont une même valeur finie > 0, (type de g) $\leqslant$ (type de f).

Ce résultat a été énoncé en (II, 5, p. 97-98) en supposant f de croissance moindre que (ordre 1, type 1). Si cet énoncé se trouvait être suffisant pour l'application qui suivait, il était bien inutilement restrictif!

Nous avons établi en (II, 5) un résultat d'*égalité*, au lieu d'inégalité, lorsqu'on suppose en plus que la croissance de f n'est pas trop grande. Ce résultat, qui étend un théorème de Boas, est le suivant. *Supposons,* pour fixer les idées, *que, pour tout n,* $|z_n| \leqslant 1$; *soit alors* $\mathscr{E}$ *l'espace vectoriel des fonctions entières de croissance moindre que* (*ordre* 1, *type* $1/1{,}3775 = 0{,}7259\ldots$) : *l'application* $f \to g$ *est un automorphisme de* $\mathscr{E}$ *qui conserve la croissance.* En particulier, la croissance de toute fonction $f \in \mathscr{E}$ peut se calculer en utilisant, au lieu des $f^{(n)}(0)$, les valeurs $f^{(n)}(z_n)$ prises en une suite arbitraire de points du disque-unité.

C'est de questions analogues que nous allons encore nous occuper, en nous bornant à quelques cas simples. $f(z) = \sum\limits_{o}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$ désignera toujours une fonction entière; une suite (z_n) étant donnée, on posera $b_n = f^{(n)}(z_n)$, et on notera g la fonction *associée* à f définie par $g(z) = \sum\limits_{o}^{\infty} \frac{b_n}{n!} z^n$. A désignera comme en (II, 3, 4 et 5) la matrice triangulaire régulière

$$\begin{pmatrix} 1 & z_0 & \frac{z_0^2}{2!} & \cdots & \frac{z_0^n}{n!} & \cdots \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & z_1 & \cdots & \frac{z_1^{n-1}}{(n-1)!} & \cdots \end{pmatrix},$$
$$\cdots$$

B son inverse à gauche, X et Y les vecteurs de coordonnées $(a_0, a_1, a_2 \ldots)$ et $(b_0, b_1, b_2 \ldots)$. La relation entre g et f peut s'écrire $\mathrm{A\,X} = \mathrm{Y}$; les résultats que nous indiquerons découlent essentiellement du fait que, dans certaines conditions, cette égalité entraîne $\mathrm{X} = \mathrm{BY}$. Nous examinerons quelques répartitions simples des points z_n, pour lesquelles nous pourrons majorer avec assez de précision les éléments de B.

2. — *POINTS z_n SITUÉS DANS LE DISQUE-UNITÉ : AUTRES RÉSULTATS*

Comme il a été rappelé dans l'introduction, pour toute fonction $f \in \mathscr{E}$, quelle que soit la suite (z_n) de points du disque $|z| \leqslant 1$, les $f^{(n)}(z_n)$ sont en un certain sens du même ordre de grandeur que les $f^{(n)}(0)$: *ils peuvent leur être substitués dans le calcul de la croissance de f.*

On peut établir un autre résultat, distinct du précédent (aucun des deux ne contient l'autre), où apparaît mieux le caractère linéaire de l'application $f \to g$, notamment le fait que si f est multipliée par λ, g l'est aussi.

Remarquons d'abord que, non seulement pour les éléments de $\mathscr{E}$, mais *pour toute fonction entière f telle que* $\sum\limits_{o}^{\infty} |a_n|$ *converge, on a l'inégalité*

$$(1) \qquad \sum_{o}^{\infty} |b_n| \leqslant e . \sum_{0}^{\infty} |a_n|$$

Cela se déduit facilement de AX = Y, c'est-à-dire des relations

$$b_n = a_n + a_{n+1} z_n + \dots + a_{n+p} \frac{z_n^p}{p!} + \dots \qquad (n = 0, 1, 2 \dots,)$$

en majorant $|b_n|$, compte tenu de $|z_n| \leqslant 1$, et en additionnant.

Des exemples simples montrent que *le nombre e ne peut être remplacé au second membre de* (1) *par un nombre plus petit*, aussi bien lorsqu'on considère l'ensemble des fonctions f telles que $\Sigma |a_n|$ converge, que lorsqu'on se limite aux fonctions de $\mathscr{E}$, ou même seulement à l'ensemble des polynômes. On supposera tous les z_n égaux à 1, et on pourra prendre dans le premier cas $f(z) = e^{\tau z}$ avec τ inférieur à 1 et arbitrairement proche de 1. L'exemple de $f(z) = \dfrac{z^p}{p!}$ avec p arbitrairement grand s'applique à tous les cas.

Pour avoir une *inégalité de sens contraire* à celui de (1), on supposera que $f \in \mathscr{E}$. On sait alors (II, 5) que l'on a aussi X = BY, et que les éléments (²) b_{ij} de B (i, j = 1 2, ...) vérifient les inégalités

$$|b_{n+1\ p+1}| \leqslant k^{p-n} \text{ avec } k = 1{,}3775$$

$$\text{Donc :} \quad \begin{aligned} |a_0| &\leqslant |b_0| + k|b_1| + \dots + k^n \ |b_n| + \dots \\ |a_1| &\leqslant \qquad\quad |b_1| + \dots + k^{n-1}|b_n| + \dots \\ &\qquad\qquad \dots \end{aligned}$$

Par addition on obtient

$$(2) \qquad \sum_0^\infty |a_n| \leqslant \sum_0^\infty \frac{k^{n+1} - 1}{k - 1} |b_n| .$$

On voit ainsi que, *pour toute $f \in \mathscr{E}$, et quelle que soit la suite (z_n) de points du disque-unité, on a la double inégalité.*

$$(3) \qquad \frac{1}{e} \sum_0^\infty |b_n| \leqslant \sum_0^\infty |a_n| \leqslant \sum_0^\infty \frac{k^{n+1} - 1}{k - 1} |b_n| .$$

On pourrait aussi former d'autres inégalités analogues à (2). Par exemple, en multipliant par k^n l'inégalité

$$|a_n| \leqslant |b_n| + k|b_{n+1}| + \dots$$

(²) Nous gardons les notations déjà employées. Il ne faut évidemment pas confondre les b_n avec les b_{ij} à deux indices, qui sont les éléments de B.

et en ajoutant, on aurait :

$$\sum_0^\infty k^n |a_n| \leqslant \sum_0^\infty (n+1) k^n |b_n| .$$

Notons que l'inégalité (2) n'est pas du type analogue à (1) : $\sum_0^\infty |a_n| \leqslant \sum_0^\infty |b_n| \times C^{te}$

C'est qu'*il n'y a pas d'inégalité de cette dernière forme*, valable pour toute $f \in \mathscr{E}$ et toute suite (z_n) de points du disque-unité : dans ces conditions, le quotient [3]

$\sum_0^\infty |a_n| \ / \ \sum_0^\infty |b_n|$ *n'est pas borné*. Il ne l'est même pas lorsqu'on se limite pour f aux polynômes. Nous le montrerons en nous plaçant dans le cas où $z_n = (-1)^n$, dans lequel l'évaluation précise des éléments b_{ij} de B est possible.

Les relations de récurrence qui définissent les éléments b_{1j} de la première ligne de B signifient en effet que (voir (I, 2)) :

$$(b_{11} + b_{13} z^2 + b_{15} z^4 + \dots) e^z + (b_{12} z + b_{14} z^3 + \dots) e^{-z} \equiv 1$$

(D'après l'inégalité $|b_{1\ n+1}| \leqslant k^n$, l'égalité ci-dessus n'est pas seulement formelle, mais vaut au moins pour $|z| < 1/k$.) Les deux parenthèses sont donc respectivement égales à

$$\frac{ch\, z}{ch\, 2z} \quad \text{et} \quad -\frac{sh\, z}{ch\, 2z}, \quad \text{et} \quad \sum_0^\infty b_{1\ n+1} z^n \quad \text{à} \quad \phi(z) = \frac{2e^z}{e^{4z}+1}.$$

Cette fonction admet pour pôles les plus rapprochés de l'origine les deux pôles simples $\frac{i\pi}{4}$ et $-\frac{i\pi}{4}$, avec les résidus respectifs $-\frac{1}{2\sqrt{2}}(1+i)$ et $-\frac{1}{2\sqrt{2}}(1-i)$. Elle est donc de la forme $-\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{z - \pi/4}{z^2 + \frac{\pi^2}{16}} + \psi(z)$, ψ ayant un rayon d'holomorphie supérieur à $\pi/4$. On en déduit que $|b_{1\ n}| \sim \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{4}{\pi}\right)^n$. Dés lors prenons tous les b_n nuls sauf $b_p = 1$ $\left(g(z) \text{ est le monôme } \frac{z^p}{p!} \right)$. La fonction f correspondante est un polynôme de degré p dont déjà le coefficient a_0, égal à $b_{1\ p+1}\, b_p$, vérifie $|a_0| \sim \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{4}{\pi}\right)^{p+1}$. Si p est assez grand, le quotient $\left(\sum_0^\infty |a_n|\right) / \left(\sum_0^\infty |b_n|\right)$ sera aussi grand qu'on voudra.

---

[3] Pour $f \in \mathscr{E}$, le dénominateur du quotient s'annule si et seulement si $f \equiv 0$. Nous attribuons naturellement dans ce cas au quotient la valeur 1 qu'il a lorsque f est une constante non nulle.

On peut se demander si, au second membre de l'inégalité (2), *le nombre k peut être remplacé par un nombre plus petit* k', l'inégalité restant encore valable quelles que soient la suite (z_n) de points du disque-unité et la fonction $f \in \mathscr{E}$. Ce problème est sans doute difficile et semble lié à la détermination de la constante de Whittaker W et à l'étude de ses propriétés. L'exemple précédent montre que, même si au lieu de $\mathscr{E}$ on ne considère que l'ensemble des polynômes, *il est nécessaire que l'on ait* : $k' \geqslant \frac{4}{\pi}$.
On peut avoir un ***résultat meilleur*** en utilisant la fonction qui a fourni à Madame S.S. Macintyre le plus petit majorant connu de W (*cf.* [2]).

L'équation différentielle $\phi'(z) = \phi(e^{i\alpha} z)$ admet, à un facteur constant près, la solution $\phi(z) = \sum_0^\infty e^{\frac{1}{2}n(n-1)i\alpha} \frac{z^n}{n!}$. Pour α convenablement choisi, le zéro de ϕ le plus près de l'origine a un module ρ compris entre 0,7377 et 0,7378. La fonction $f(z) = \phi(\rho z) = \sum_0^\infty a_n \frac{z^n}{n!}$ est d'ordre 1 et de type ρ ($|a_n| = \rho^n$). Chacune des dérivées $f^{(n)}$ $(n = 0, 1, 2 \ldots)$ s'annule en un point z_n du cercle $|z| = 1$.

Soient A la matrice correspondant à cette suite particulière (z_n), B son inverse à gauche, X le vecteur $(1, \rho, \rho^2 \ldots)$. On sait d'après (I, 5) que B' A' X' n'existe pas, c'est-à-dire qu'il existe au moins une valeur n telle que

$$(4) \qquad \sum_{p=n}^{\infty} \rho^p \left(\sum_{q=n}^{p} |b_{n+1\ q+1}| \frac{1}{(p-q)!} \right)$$

diverge. Il résulte de là que, pour la valeur n considérée,

$$L = \limsup_{p \to \infty} \sqrt[p]{|b_{n+1\ p+1}|} \geqslant \frac{1}{\rho}.$$

Dans le cas contraire, en effet, on aurait pour tout p: $|b_{n+1\ p+1}| < C\lambda^p$ (C: constante convenable; $\lambda < \frac{1}{\rho}$) .La parenthèse de (4) serait majorée par

$$C \sum_0^p \frac{\lambda^q}{(p-q)!} < C\lambda^p e^{1/\lambda},$$

et la série (4) ne pourrait diverger. Il suffit maintenant de considérer une suite partielle d'indices p pour laquelle $\sqrt[p]{|b_{n+1\ p+1}|} \to$ L, et à chacun de ces indices d'associer le monôme $g(z) = \frac{z^p}{p!}$ Le coefficient a_n de la fonction f correspondante vaut $b_{n+1\ p+1}$ et on voit que k' *doit être supérieur ou égal à* $1/\rho > 1/0{,}7378 = 1{,}3553\ldots$

REMARQUES.

1. — Soit *une* fonction $f \in \mathscr{E}$. Considérons l'ensemble de ses associées g, pour toutes les suites (z_n) de points du disque-unité. Cet ensemble ne comprend pas toutes

les fonctions de même croissance que f, puisque g satisfait nécessairement à la double inégalité (3).

2. — Nous avons, dans tout ce paragraphe, utilisé la majoration obtenue par Madame S. S. Macintyre : $|b_{n+1\ p+1}| \leqslant k^{p-n}$, avec $k = 1{,}3775$ [3]. Si on s'était contenté (voir (II, 4)) de remplacer A par $A = 2\,\mathrm{I} - \mathrm{A}'$ et d'utiliser l'inverse B de A, ce qui donne des calculs beaucoup plus élémentaires, on serait parvenu aux mêmes résultats que ci-dessus, sauf que le nombre k aurait été remplacé par $1/\log 2 = 1{,}44\ldots$ Remarquons toutefois que les résultats obtenus auraient été valables avec une *signification plus large des fonctionnelles* b_n. Au lieu de poser

$$b_n = a_n + \ldots + a_{n+p}\,\frac{z_n^p}{p!} + \ldots,$$

on aurait pu poser

$$(5) \qquad b_n = \alpha_{nn}\,a_n + \ldots + \alpha_{n\ n+p}\,a_{n+p}\,\frac{z_n^p}{p!} + \ldots,$$

les α_{ij} étant astreints seulement à vérifier $|\alpha_{ij}| \leqslant 1$. En effet, les majorations faites quand on utilise A et B ne dépendent que des *modules* des éléments de A, et restent *a fortiori* valables si ces modules sont diminués. C'est ce point de vue qui va être adopté dans les paragraphes suivants. Pour simplifier nous énoncerons les résultats pour les fonctionnelles $b_n = f^{(n)}(z_n)$, tout en sachant qu'ils restent vrais dans le cas plus général de (5). Notons que la constante qui remplace la constante de Whittaker lorsqu'on considère les fonctionnelles (5) a *exactement* la valeur $\log 2$: on le voit avec $b_n = a_n - \sum_{p=1}^{\infty} \frac{a_{n+p}}{p!}$; tous ces b_n sont nuls pour la fonction $e^{z \log 2}$.

3. — *POINTS* z_n *SITUÉS EN MOYENNE DANS LE DISQUE-UNITÉ.*

Supposons maintenant que, pour tout n, $\dfrac{|z_0| + \ldots + |z_n|}{n+1} \leqslant 1$. On sait alors (Davis, [4]) que *si on désigne par* $\mathscr{F}$ *l'espace vectoriel des fonctions entières de croissance moindre que* (*ordre* 1, *type* $1/e$), *les conditions* $f^{(n)}(z_n) = 0$ *pour tout* n *et* $f \in \mathscr{F}$ *entraînent* $f \equiv 0$.

Nous retrouverons ce résultat et le généraliserons en établissant ici encore une double inégalité où interviennent les a_n et les b_n. Nous commençons par étudier l'inverse à gauche B de A (les notations sont toujours celles du paragraphe 1).

L'élément $b_{n+1\ p+1}$ $(p > n)$ a pour valeur d'après (I, 4)

$$(-1)^{p-n} \begin{vmatrix} z_n & \frac{z_n^2}{2!} & \cdots & \frac{z_n^{p-n}}{(p-n)!} \\ 1 & z_{n+1} & \cdots & \frac{z_{n+1}^{p-n-1}}{(p-n-1)!} \\ 0 & 1 & \cdots & \\ & & \cdots & \\ 0 & 0 & \cdots & z_{p-1} \end{vmatrix}$$

Les sommes des modules des éléments des différentes lignes du déterminant sont majorées respectivement par $e^{|z_n|}$, $e^{|z_{n+1}|}$,... Donc

$$|b_{n+1\ p+1}| < e^{|z_n|+\cdots+|z_{p-1}|} \leqslant e^p$$

Cette majoration, qui utilise seulement les modules des éléments de A, vaut non seulement pour les éléments de B, mais aussi pour ceux de l'inverse à gauche B de $A = 2\,\mathrm{I} - \mathrm{A}'$, et on sait que $A'\,B = BA' = 2\,B - \mathrm{I}$.

Soient dès lors $f \in \mathcal{F}$, *g son associée,* X *et* Y *les vecteurs correspondants.* $B\mathrm{X}'$, *donc* $\mathrm{B}'\ \mathrm{A}'\ \mathrm{X}'$ *existent, et par suite* $\mathrm{X} = \mathrm{BY}$. Si $\mathrm{Y} = 0$, X aussi : c'est le résultat de P. Davis, qui a montré en outre que, dans l'énoncé de son théorème, le nombre $1/e$ ne peut être remplacé par un nombre plus grand (d'où l'introduction de l'espace $\mathcal{F}$). On voit ainsi que la majoration apparemment très large faite pour les $|b_{n+1\ p+1}|$ permet d'obtenir la valeur exacte de la constante qui joue ici le rôle de la constante de Whittaker.

Contrairement à ce qui se passait au paragraphe 2, *l'application* $f \to g$ *n'est plus un automorphisme de* $\mathcal{F}$ *et ne conserve plus la croissance de toutes les fonctions de* $\mathcal{F}$ (4). Les inégalités $|b_n| \leqslant |a_n| + |a_{n+1}|\ |z_n| + \ldots$ donnent par addition :

$$(6) \qquad \sum_0^\infty |b_n| \leqslant \sum_0^\infty e^n\ |a_n|$$

$$\left(\text{on majore} \quad 1 + |z_{n-1}| + \ldots + \frac{|z_0|^n}{n!} \quad \text{par} \quad 1 + n + \ldots + \frac{n^n}{n!} < e^n \right).$$

Donc g est entière; sa croissance n'excède pas (ordre 1, type 1), mais elle peut être supérieure à celle de f.

(4) Voir à ce sujet le paragraphe 4, où sont donnés des résultats concernant le cas : $|z_n| \leqslant n + 1$ (ce qui est évidemment réalisé ici).

Il suffit pour le voir de prendre $f(z) = e^{\tau z}$ $(0 < \tau < 1/e)$ et la suite (z_n) ainsi définie : soit (n_i) une suite strictement croissante d'entiers positifs telle que $\dfrac{n_i}{n_{i-1}}$ tende vers l'infini; on prend $z_n = 0$ si n est différent des n_i, $z_{n_1} = n_1$, ..., $z_{n_i} = n_i - n_{i-1}$, ... g est alors d'ordre 1, et de type $\tau\, e^{\tau}$, qui dépasse $1/e$ si τ en a été choisi assez voisin.

Pour avoir une *inégalité de sens contraire* à celui de (6), on utilise toujours que, si $f \in \mathscr{F}$, on a X = BY. De la majoration établie pour les éléments de B on déduit aisément

(7) $\sum_0^\infty |a_n| \leqslant \sum_0^\infty (1 + n\,e^n)\ |b_n|$, mais il faut observer que le second membre de (7) peut être infini : on vient d'en voir un exemple ci-dessus.

Il y aurait lieu de voir si la majoration des éléments de B et les inégalités (6) et (7) pourraient être améliorées. Notons seulement que, dans (6), e ne peut être remplacé par un nombre inférieur à $\sqrt{e}$: il suffit de prendre $f(z) = \dfrac{z^{2p}}{(2p)!}$ (p entier donné), et une suite (z_n) où $z_p = p$; b_p vaut alors $\dfrac{p^p}{p!}$

4. — *CAS OU* $|z_n| \leqslant (n+1)^\alpha$ $(\alpha > 0)$.

Soit (r_n) *une suite non-décroissante de nombres positifs.* Dans tout ce paragraphe (z_n) désigne une suite quelconque de points du plan complexe astreints seulement à vérifier : $|z_n| \leqslant r_n$, quel que soit n.

On a vu en (II, 4, p. 95) que les éléments de la première ligne de la matrice B vérifient pour $p > 0$ les inégalités :

$|b_{1\ p+1}| \leqslant C\, r_0\, r_1 \dots r_{p-1}\, (1/\log 2)^p$, C étant une constante numérique qui ne dépend pas de la suite (r_n) : C est le maximum pour $p > 0$ de β_{p+1} $(\log 2)^p$, β_{p+1} étant défini en (II, 4, a). L'application de ce résultat à la $(n+1)^{ieme}$ ligne de B, c'est-à-dire à la suite $\{r_n \ \ r_{n+1} \ \ \dots\}$, donne, pour $p > n$:

$$|b_{n+1\ p+1}| \leqslant C\, r_n\, r_{n+1} \dots r_{p-1}\, (1/\log 2)^{p-n}.$$

Ces inégalités valent d'ailleurs non seulement pour B, mais aussi pour l'inverse à gauche B de $A = 2\,\mathrm{I} - \mathrm{A}'$.

Appliquons ceci au cas où $r_n = (n+1)^\alpha$ $(\alpha > 0)$. On *a*, pour $p > n$: $|b_{n+1\ p+1}| \leqslant C \left(\dfrac{p\,!}{n\,!}\right)^\alpha \left(\dfrac{1}{\log 2}\right)^{p-n}$, d'où on a déduit (II, 4) que, *si* $\mathscr{E}_\alpha$ *désigne* (5) *l'espace des fonctions entières de croissance moindre que* $\left(\text{ordre } \dfrac{1}{\alpha+1} = \rho,\right.$ type $\left.\dfrac{(\log 2)^\rho}{\rho}\right)$, *les conditions* $f \in \mathscr{E}_\alpha$ *et* $f^{(n)}(z_n) = 0$ *pour tout* n *entraînent* $f \equiv 0$.

(5) $\mathscr{E}$ n'est pas $\mathscr{E}_0$, parce que, au paragraphe 2, on a utilisé le nombre k au lieu de $1/\log 2$.

$\left(\text{L'ordre et le type indiqués sont ceux de } \sum_0^\infty \frac{(\log 2)^n}{(n!)^\alpha} z^n \right)$. Nous allons maintenant établir, avec les hypothèses actuelles, des résultats analogues à ceux du paragraphe 2.

En premier lieu, montrons que *la croissance de la fonction g associée à une fonction* $f \in \mathscr{E}_\alpha$ *est inférieure ou égale à celle de f.* Ce résultat vaut d'ailleurs pour d'*autres fonctions que celles de* $\mathscr{E}_\alpha$. Nous l'établissons en nous occupant d'abord de l'*ordre.*

Considérons pour commencer une fonction entière f d'ordre $\sigma < 1$. Posons $\sigma = \dfrac{1}{\beta + 1} : \beta \in]0, +\infty]$. Soit γ vérifiant $0 < \gamma < \beta$ et arbitrairement voisin de β. Les coefficients a_n de f satisfont, à partir d'un certain rang, à $|a_n| < \dfrac{1}{(n!)^\gamma}$, et les b_n correspondants à

$$(8) \qquad |b_n| < \frac{1}{(n!)^\gamma}\left(1 + \frac{(n+1)^\alpha}{(n+1)^\gamma} + \dots + \frac{(n+1)^{\alpha p}}{(n+1)^\gamma \dots (n+p)^\gamma} \times \frac{1}{p!} + \dots\right),$$

donc à : (9) $\qquad |b_n| < \dfrac{1}{(n!)^\gamma} e^{(n+1)^{\alpha-\gamma}}$

Si $\alpha - \beta < 1$, il en sera de même de $\alpha - \gamma$, pour γ assez voisin de β : on voit donc que g est entière et a un ordre inférieur ou égal à celui de f.

Dès lors : *si* $\alpha \leqslant 1$, *l'application* $f \to g$ *ne peut augmenter l'ordre d'aucune fonction d'ordre* < 1; *si* $\alpha < 1$, *on a le même résultat pour les fonctions d'ordre* $< 1/\alpha$.

Dans le cas $\alpha \leqslant 1$, on voit facilement que l'ordre des fonctions d'ordre 1, mais de type fini, n'est pas non plus augmenté (on majore les $|a_n|$ par K^n, K étant une constante convenable, et les $|b_n|$ par $K^n e^{K(n+1)^\alpha}$); par contre, pour $\alpha = 1$, à une fonction dont l'ordre dépasse 1 d'aussi peu qu'on veut peuvent correspondre des b_n pour lesquels $\sum_0^\infty b_n \dfrac{z^n}{n!}$ a un rayon de convergence nul (on prendra $z_n = n + 1$ et $a_n = (n!)^\delta$, avec δ positif arbitrairement petit; on a : $b_n > (n!)^\delta e^{(n+1)^{1+\delta}}$).

Considérons maintenant une fonction entière d'ordre fini $\sigma \geqslant 1$, ce qui permettra d'améliorer le résultat obtenu ci-dessus dans le cas $\alpha < 1$. Nous posons toujours $\sigma = \dfrac{1}{1 + \beta}$; ici $\beta \in]-1, 0]$. Soit $\gamma > -\beta$ ($\gamma < 1$). Les coefficients a_n de f vérifient à partir d'un certain rang $|a_n| < (n!)^\gamma$ et les b_n :

$$|b_n| < (n!)^\gamma\left(1 + (n+1)^\alpha (n+1)^\gamma + \dots + \frac{(n+1)^{\alpha p}(n+1)^\gamma \dots (n+p)^\gamma}{p!} + \dots\right).$$

Donc $\qquad$ (10) $\displaystyle |b_n| < (n!)^\gamma \sum_{p=0}^\infty \frac{(n+1)^{(\alpha+\gamma)p}}{(p!)^{1-\gamma}}.$

Pour majorer le second membre, nous utilisons les remarques suivantes. Soit $\delta \in]0,1[$; on a, pour tout $n > 0$, $(n!)^\delta > \Gamma(1 + \delta n)$ (c'est une conséquence de la convexité de la fonction $\log \Gamma(x)$). Par suite, pour $x > 0$, $\sum_0^\infty \frac{x^n}{(n!)^\delta}$ est majoré par

$$\sum_0^\infty \frac{x^n}{\Gamma(1+\delta n)} = \mathrm{E}_{1/\delta}(x).$$

Et on sait que la fonction de Mittag-Leffler $\mathrm{E}_{1/\delta}(x)$ est, pour x infiniment grand positif, équivalente à $\frac{1}{\delta}\, e^{x^{1/\delta}}$ (voir [5], p. 494). Il en résulte que, K désignant une constante convenable, on a : $|b_n| < \mathrm{K}\, e^{(n+1)^{\frac{\alpha+\gamma}{1-\gamma}}}(n!)^\gamma$.

Si $\frac{\alpha-\beta}{1+\beta} < 1$, il en sera de même de $\frac{\alpha+\gamma}{1-\gamma}$ si γ est choisi assez proche de $-\beta$, et l'ordre de g sera inférieur ou égal à celui de f. La condition trouvée signifie que l'ordre de f, déjà supposé $\geqslant 1$, est $< \frac{2}{\alpha+1}$. *Cette étude convient donc au cas* $\alpha < 1$ *dans lequel, en définitive, l'application* $f \to g$ *n'augmente l'ordre d'aucune fonction d'ordre* $< \frac{2}{\alpha+1}$.

Passons maintenant au *type. Nous supposons* f *d'ordre* < 1 *si* $\alpha \leqslant 1$, *et d'ordre* $< 1/\alpha$ *si* $\alpha > 1$; *on peut même supposer seulement, lorsque* $\alpha < 1$, *que* f *est d'ordre* $< \frac{2}{\alpha+1}$. Comme on vient de le voir, g a un ordre au plus égal à celui de f; dans le cas où f et g ont même ordre non nul, montrons que *le type de* g *est inférieur ou égal à celui de* f.

Soit donc f, d'ordre fini positif $\sigma = \frac{1}{\beta+1}$ et de type *fini* τ (il suffit évidemment de se borner à ce cas). Si $\mu > (\sigma\tau)^{1/\sigma}$, les a_n vérifient à partir d'un certain rang $|a_n| < \frac{\mu^n}{(n!)^\beta}$. Lorsque l'on a $\sigma < 1$, c'est-à-dire $\beta > 0$, le même calcul que pour les formules (8) et (9) donne :

$|b_n| < \frac{\mu^n}{(n\,!)^\beta}\, e^{\mu(n+1)^{\alpha-\beta}}$, donc le résultat si $\alpha - \beta < 1$. Lorsque l'on a $\sigma \geqslant 1$, c'est-à-dire $-1 < \beta \leqslant 0$, on établit, comme dans la formule (10),

$$|b_n| < \mathrm{K}\, \frac{\mu^n}{(n!)^\beta}\, e^{\mu(n+1)^{\frac{\alpha-\beta}{1+\beta}}},\ \text{donc le résultat si}\ \frac{\alpha-\beta}{1+\beta} < 1.$$

De tout ceci résulte en particulier que, ainsi qu'il a été dit, *si* $f \in \mathscr{E}_\alpha$, *il en est de même de* g.

Mais inversement, soit une fonction arbitraire $g \in \mathscr{E}_\alpha$. $\sum_0^\infty \frac{n\,|b_n|\,(n!)^\alpha}{(\log 2)^n}$ converge.

Le raisonnement fait en (II, 5) montre qu'il y a alors une et une seule fonction telle que $\sum_0^\infty \frac{|a_n|(n!)^\alpha}{(\log 2)^n}$ converge, et que $f^{(n)}(z_n) = b_n$ pour tout n. On va prouver que la croissance de f est inférieure ou égale à celle de g; il en résultera que $f \in \mathscr{E}_\alpha$, que f et g ont même croissance, et que l'*application* $f \to g$ *est un automorphisme de* $\mathscr{E}_\alpha$ *conservant la croissance.*

On a : $a_n = b_n + b_{n+1\ n+2}\, b_{n+1} + \ldots + b_{n+1\ n+p+1}\, b_{n+p} + \ldots$ Soit $\mathrm{G}(z) = \sum_0^\infty \mathrm{B}_n \frac{z^n}{n!}$ une fonction majorant g ($\mathrm{B}_n > |b_n|$ pour tout n), appartenant à $\mathscr{E}_\alpha$, de croissance aussi voisine qu'on voudra de celle de g, et telle que $\frac{\mathrm{B}_{n+1}}{\mathrm{B}_n} < \frac{\lambda}{(n+1)^\alpha}$ avec $\lambda < \log 2$ (on voit aisément que c'est possible). D'après la majoration des $b_{n+1\ p+1}$ on a :

$|a_n| < \mathrm{B}_n \left[1 + \ldots + \mathrm{C}\left(\frac{\lambda}{\log 2}\right)^p + \ldots \right]$. D'où le résultat.

En particulier, *sous la seule condition* $|z_n| \leqslant (n+1)^\alpha$ *pour tout* n, *on peut déterminer la croissance des fonctions* $f \in \mathscr{E}_\alpha$ *en utilisant les* $f^{(n)}(z_n)$ *au lieu des* $f^{(n)}(0)$.

Comme au paragraphe 2, on établit aisément les deux inégalités :

(11) $$\sum_0^\infty |b_n| \leqslant \sum_0^\infty \mu_{n\ \alpha}\, |a_n| \text{ , avec}$$

$$\mu_{n\ \alpha} = \frac{1}{n!} + \frac{2^{\alpha(n-1)}}{(n-1)!} + \ldots + \frac{(p+1)^{\alpha(n-p)}}{(n-p)!} + \ldots + 1,$$

et (12) $$\sum_0^\infty |a_n| \leqslant \mathrm{C}' \sum_0^\infty \frac{|b_n|(n!)^\alpha}{(\log 2)^n}.$$

Ces inégalités sont valables pour toute $f \in \mathscr{E}_\alpha$. Dans la première, qui résulte de $\mathrm{AX} = \mathrm{Y}$, la série du second membre est certainement convergente, puisqu'elle représente $\sum_0^\infty b_n$ lorsqu'on prend pour f la fonction $\sum_0^\infty \frac{|a_n|\, z^n}{n!}$ et que $z_n = (n+1)^\alpha$ pour tout n. Pour avoir la deuxième, on a majoré $\sum_{q=0}^n |b_{q+1\ n+1}|$ par $\mathrm{C}' \frac{(n!)^\alpha}{(\log 2)^n}$. C' étant une constante convenable.

5. — *CAS OU* $|z_n| \leqslant 1/(n+1)^\alpha$ $(0 < \alpha \leqslant 1)$.

Nous supposons maintenant : $r_n = \frac{1}{(n+1)^\alpha}$, *avec* $0 < \alpha \leqslant 1$, *et* $|z_n| \leqslant r_n$ *pour tout* n.

Étudions la matrice B correspondante. En (II, 4) nous avons établi que, pour tout $\lambda < \log 2$, il existe une constante $C > 1$ telle que, pour tout $p \geqslant 0$,

$$|b_{1\ p+1}| < \frac{C}{\lambda^p (p!)^\alpha}.$$

Mais nous avons besoin ici de majorer les éléments de *chaque* ligne de B.

Considérons les éléments de la $(m+1)^{ieme}$ ligne, et raisonnons comme en (II,4). Si on a trouvé deux nombres positifs $C > 1$ et $\lambda < 1$ tels que l'inégalité :

(13) $\quad |b_{m+1\ m+n+1}| < \dfrac{C}{\lambda^n}\left(\dfrac{m!}{(m+n)!}\right)^\alpha$ ait lieu pour $n = 0, 1, \ldots\ p-1$, on

voit que la même inégalité aura encore lieu pour $n = p$ si

$$\sum_{n=1}^{p} \frac{\lambda^n}{n!}\left(\frac{(p+m)(p+m-1)\ldots(p+m-n+1)}{(p+m-n+1)^n}\right)^\alpha < 1. \tag{14}$$

Or cette inégalité est entraînée par l'inégalité (5) de (II, 4) qui correspond à $m = 0$. On voit donc que, pour tout $\lambda < \log 2$, il existera un entier p_0 tel que l'inégalité (14) ait lieu pour $p \geqslant p_0$, et cela quel que soit m Montrons alors qu'on peut choisir C tel que l'inégalité (13) ait lieu pour $n = 0, 1, \ldots, p_0 - 1$, quel que soit m.

Il suffit de remarquer que, d'après ce qui a été vu en (II, 4, b) et rappelé au début du paragraphe 4, on a toujours :

$|b_{m+1\ m+n+1}| < \dfrac{K}{(\log 2)^n (m+1)^{\alpha n}}$, K étant une certaine constante (on a majoré en utilisant, pour le calcul de la $(m+1)^{ieme}$ ligne de B, la suite *constante* r_m au lieu de la suite $r_m, r_{m+1} \ldots$). D'autre part, pour $n = 0, 1, \ldots\ p_o - 1$, le quotient

$\left(\dfrac{\lambda}{\log 2}\right)^n \left(\dfrac{(m+1)(m+2)\ldots(m+n)}{(m+1)^n}\right)^\alpha$ est borné indépendamment de m.

En fin de compte on voit que *à tout nombre positif* $\lambda < \log 2$, *on peut faire correspondre* $C > 1$ *tel que l'on ait toujours*

$$|b_{n+1\ p+1}| < \frac{C}{\lambda^{p-n}}\left(\frac{n!}{p!}\right)^\alpha, \tag{15}$$

et *cette majoration vaut aussi pour les éléments de la matrice B* inverse à gauche de $A = 2\ I - A'$.

Nous tirons de là les mêmes conséquences qu'aux paragraphes 2 et 4, en nous limitant au cas $0 < \alpha < 1$ pour rester dans le cadre des fonctions entières. Le cas $\alpha = 1$ amènerait à considérer des séries $f(z)$ à rayon de convergence fini.

Soit f une fonction entière, g son associée. On a vu au paragraphe 1 que la croissance de g est inférieure ou égale à celle de f.

Soit $\mathscr{E}_{-\alpha}$ l'espace des fonctions entières de croissance moindre que

$$\left(\text{ordre } \frac{1}{1-\alpha} = \rho, \text{ type } \frac{(\log 2)^\rho}{\rho}\right).$$

Si $f \in \mathscr{E}_{-\alpha}$, il en est de même de g. Inversement (nous ne recommençons pas le raisonnement), à une fonction arbitraire $g \in \mathscr{E}_{-\alpha}$ correspond une et une seule fonction $f \in \mathscr{E}_{-\alpha}$ telle que $f^{(n)}(z_n) = b_n$ pour tout n, et f a même croissance que g. *L'application $f \to g$ est un automorphisme de $\mathscr{E}_{-\alpha}$ qui conserve la croissance.*

Quant aux relations d'inégalité entre les a_n et les b_n on peut toujours en établir. Mais ici $\sum_0^\infty |a_n|$ et $\sum_0^\infty |b_n|$ peuvent diverger, aussi faut-il multiplier les $|a_n|$ et les $|b_n|$ par des coefficients suffisamment petits pour obtenir des séries convergentes. C'est ainsi que de $X = BY$ on déduit, compte tenu des inégalités (15), que pour toute fonction $f \in \mathscr{E}_{-\alpha}$ on a :

$$\sum_0^\infty \frac{|a_n|}{(n!)^\alpha} \leqslant \frac{C}{1-\lambda} \sum_0^\infty \frac{|b_n|}{\lambda^n (n!)^\alpha}.$$

La série du premier membre est toujours convergente, celle du second l'est lorsque la croissance de f (et de g) est inférieure à

$$\left(\text{ordre } \frac{1}{1-\alpha} = \rho, \text{ type } \frac{\lambda^\rho}{\rho} = \tau\right),$$

et aussi pour certaines fonctions de croissance (ρ, τ).

Remarquons en terminant qu'il n'est pas possible d'élargir beaucoup les espaces $\mathscr{E}$, $\mathscr{F}$, $\mathscr{E}_\alpha$, $\mathscr{E}_{-\alpha}$ si l'on veut que les propriétés établies restent vraies. Si on remplace dans la définition de $\mathscr{E}$ le nombre $1/k$ par 0,7378, dans celle de $\mathscr{F}$ le nombre $1/e$ par un nombre plus grand, dans celle de $\mathscr{E}_\alpha$ et $\mathscr{E}_{-\alpha}$ le nombre log 2 par le nombre 0,7378, on peut, dans chaque cas, trouver pour une suite (z_n) convenable une fonction f non identiquement nulle qui a pour associée 0 (voir [2], [4] et [6]).

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. Combes. — Sur certains systèmes infinis d'équations linéaires. *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 4e série : partie (I), tome XXI, p. 255-265 ; parties (II) et (III), tome XXIII, p. 85-113.

[2] S. S. Macintyre. — An upper bound for the Whittaker constant W. *Journal of the London Math. Society*, vol. 22 (1947), p. 305-311.

[3] S. S. Macintyre. — On the zeros of successive derivatives of integral functions. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 67 (1949), p. 241-251.

[4] P. Davis. — Completeness theorems for sets of differential operators. *Duke Math. Journal*, 20 (1953), p. 345-357.

[5] G. Valiron. — *Théorie des fonctions*, Paris (Masson), 1942.

[6] J. Combes. — Sur les zéros des dérivées successives des fonctions analytiques (I et II). *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, tome 240 (1955), p. 39-41 et 145-146.