ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

JEAN COMBES

Sur certains systèmes infinis d'équations linéaires (I)

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 4e série, tome 21 (1957), p. 255-265
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1957_4_21__255_0>

Sur certains Systèmes Infinis d'Équations Linéaires (I)

par Jean COMBES

---

1. **Introduction.** — Dans des articles antérieurs ([2], [3])* consacrés aux dérivées successives des fonctions analytiques, j'ai utilisé la méthode des systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues. La résolution de problèmes du type d'ABEL-GONTCHAROFF** équivaut à la résolution de systèmes de cette forme, mais particulièrement simples parce que, dans la matrice à une infinité de lignes et de colonnes constituée par les coefficients, tous les éléments situés au-dessous de la diagonale principale sont nuls, tandis que ceux de la diagonale principale sont égaux à 1. De tels systèmes seront dits *triangulaires réguliers.* C'est à eux qu'est consacré cet article. Ils possèdent les propriétés suivantes :

a) si les seconds membres sont « assez petits », il existe une seule solution qui soit « petite »;

b) en particulier les solutions d'un système homogène ne peuvent être « trop petites » sans se réduire à la solution banale.

J'avais établi et utilisé ces résultats dans des cas particuliers; j'en donne ici un exposé systématique. Les mêmes idées se trouvent, avec une présentation différente, dans un article antérieur de P. DAVIS [4], auquel il sera souvent référé. L'auteur y exprime la propriété *b*) ci-dessus en disant que le système possède une *restriction positive*; il caractérise aussi les systèmes possédant une restriction *semi-positive*, ou une restriction *non-nulle*, en étudiant si un système quelconque se ramène ou non à un système triangulaire régulier.

La partie (I) de cet article concerne l'étude générale des systèmes triangulaires réguliers. Après avoir établi les propriétés *a*) et *b*), je rappelle certains résultats de E. BOREL et G. PÓLYA sur l'existence des solutions d'un système infini d'équations linéaires; pour que l'exposé soit complet, j'en donne une démonstration, en me limitant, pour le théorème de Pólya, au seul cas que j'aurai à utiliser.

La partie (II), qui sera publiée dans le prochain tome de la même revue, contient diverses applications, notamment la démonstration de résultats classiques ou nouveaux sur les dérivées successives des fonctions analyti-

---

* Les chiffres entre crochets renvoient à la bibliographie placée en fin de l'article.

** Recherche de fonctions $f(z)$, holomorphes pour $|z| < R$, et satisfaisant à la suite de conditions $f^{(n)}(z_n) = b_n$ ($n = 0, 1, 2 \ldots$; z_n et b_n donnés).

ques, et la démonstration de résultats analogues sur les restes successifs des séries de Taylor. Pour les théorèmes connus qui sont redémontrés, la méthode employée ne donne pas toujours les résultats les meilleurs, que fournissent des techniques particulières plus poussées. Mais il m'a semblé qu'il n'était pas inintéressant de montrer qu'un grand nombre de théorèmes d'unicité peuvent être groupés comme conséquences communes d'une propriété simple et générale.

2. Systèmes triangulaires réguliers. — Soit le système

$$(1) \qquad \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\, x_j = y_i \qquad (i = 1, 2, \ldots n \ldots)$$

les coefficients a_{ij}, les seconds membres y_i, les inconnues x_i étant réels ou complexes. On peut l'écrire plus simplement AX = Y, A désignant la matrice (a_{ij}), X et Y les vecteurs représentés par les matrices à une colonne (x_i) et (y_i). X et Y sont des éléments de l'espace vectoriel E des suites de nombres complexes (espace vectoriel sur le corps des complexes, avec les opérations ordinaires). Chacune des équations scalaires du système (1) peut aussi s'écrire de façon condensée. Si A_i désigne la matrice à une ligne formée de la i^{eme} ligne de A, la i^{eme} équation s'écrit $A_i X = y_i$, en confondant une matrice à une ligne et une colonne et son unique élément.

Les plus simples des systèmes (1) sont ceux pour lesquels $a_{ij} = 0$ pour $j > i$. Si on suppose de plus les a_{ii} non nuls, on a un système *récurrent,* où les inconnues se calculent de proche en proche. Tous les éléments de A situés au-dessus de la diagonale principale sont nuls.

Nous considérons ici — et nous leur réserverons le nom de systèmes *triangulaires* — les systèmes pour lesquels $a_{ij} = 0$ pour $j < i$. Lorsque, en plus tous les a_{ii} seront différents de 0, nous dirons qu'on a affaire à un système *triangulaire régulier.* Sans nuire à la généralité, on pourra supposer les a_{ii} égaux à 1. Les matrices correspondantes seront aussi dites *triangulaires,* ou *triangulaires régulières.*

3. Matrices triangulaires. — Parmi les matrices à une infinité de lignes et de colonnes, les matrices triangulaires ont des propriétés particulièrement simples; et c'est pour cette raison que l'étude des systèmes triangulaires est plus facile que celle des systèmes linéaires généraux.

Le produit de deux matrices triangulaires existe toujours, et on voit immédiatement qu'il est encore triangulaire; la multiplication des matrices triangulaires est *associative* (cela résulte du fait que les calculs à effectuer pour déterminer un élément des matrices produits ne font intervenir que des sommes finies, et non des séries; et ces propriétés seraient encore vraies si, par exemple, on supposait seulement que les matrices sont à *colonnes finies*, chaque colonne ne contenant qu'un nombre fini d'éléments non nuls, nombre variable avec la colonne).

Si $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ sont triangulaires, et si $C = AB = (c_{ij})$, on a : $c_{ii} = a_{ii}\, b_{ii}$, de sorte que le produit de deux matrices triangulaires *régulières* est une matrice triangulaire *régulière;* si les a_{ii} et les b_{ii} sont égaux à 1, il en est de même des c_{ii}; sous cette hypothèse, notons encore que, si A et B ont tous leurs éléments positifs ou nuls, on a, pour $j > i$, $c_{ij} \geqslant a_{ij} + b_{ij}$, d'après la formule même qui donne c_{ij}.

Enfin la propriété des matrices *triangulaires régulières* qui jouera un rôle fondamental est la suivante : *une telle matrice* A *possède une matrice inverse à gauche unique* B, dont les éléments se calculent par la résolution de systèmes récurrents; B *est aussi inverse à droite, et c'est une matrice triangulaire régulière. Nous supposerons toujours les a_{ii} égaux à 1.* Les éléments de la première ligne de B sont fournis par :

$$(2) \quad b_{11} = 1, \quad b_{11}\, a_{12} + b_{12} = 0, \quad \dots, \quad b_{11}\, a_{1j} + b_{12}\, a_{2j} + \dots + b_{1j} = 0, \quad \dots,$$

les éléments de la $i^{\text{ème}}$ par :

$$(3) \qquad b_{i1} = b_{i2} = \dots = b_{i,i-1} = 0, \quad b_{ii} = 1, \quad b_{ii}\, a_{i,i+1} + b_{i,i+1} = 0, \dots$$

Si A n'était pas régulière, on ne pourrait déterminer B.

Observons que, si on supprime dans A les $(i-1)$ premières lignes et colonnes, et qu'on cherche l'inverse à gauche de la matrice ainsi obtenue, la première ligne sera précisément formée de $b_{ii}, b_{i,i+1} \dots$ Pour le système (1) lui-même, il est évident qu'on sait le résoudre si on sait résoudre le système formé par (1) privé des $(i-1)$ premières équations.

D'autre part il est important de noter que, si on désigne par I la matrice infinie unité, par $A^{(n)}$, $B^{(n)}$, $I^{(n)}$ les matrices *tronquées* obtenues en supprimant dans A, B, I les lignes et les colonnes de rang supérieur à n, on a, d'après les relations qui donnent les b_{ij} , $B^{(n)}\, A^{(n)} = I^{(n)}$. Il en résulte $A^{(n)}\, B^{(n)} = I^{(n)}$, et par suite $AB = I$. B *est aussi inverse à droite.*

On savait qu'il devait bien en être ainsi en vertu de l'associativité de la multiplication des matrices triangulaires (cf. par exemple R. COOKE, [6], chap. II); de plus B est la seule matrice *triangulaire,* ou même seulement à *colonnes finies,* qui soit inverse de A à droite. Il n'est pas exclu que A possède une infinité d'autres inverses à droite $\overline{B}$, pour lesquelles le produit $BA\overline{B}$ n'est pas associatif.

Notons enfin, relativement à l'*existence* et à *l'associativité* d'un produit fini de matrices *quelconques,* les propriétés suivantes. Soit A, B, ... L une suite finie de matrices quelconques, dont toutes ou certaines admettent une infinité de lignes, ou une infinité de colonnes, ou une infinité de lignes et de colonnes, *aucune ligne ni colonne n'ayant tous ses éléments nuls.*

1. Supposons que toutes les matrices aient leurs éléments *positifs ou nuls,* et que l'un des produits AB ... L, obtenu en associant les matrices de façon quelconque sans changer leur ordre, existe. Alors tous les produits

analogues existent et sont égaux, et seront tous notés AB ... L. Tous les produits partiels formés avec des matrices consécutives existent.

2. Supposons les éléments quelconques. Soient A′, B′, ... L′ les matrices obtenues en remplaçant dans A, B, ... L chaque élément par son module. Si A′B′ ... L′ existe, tous les produits formés avec A, B... L, associés de façon quelconque mais laissés dans l'ordre, existent et sont égaux; on les notera AB ... L.

Cela résulte des propriétés des séries multiples absolument convergentes.

4. Calcul et majoration des b_{ij}. — Soit A une matrice triangulaire régulière. La détermination de la matrice B inverse à gauche peut se faire par les relations (2), (3), qui traduisent BA = I.

On peut aussi déterminer les j éléments non identiquement nuls de la j^{eme} colonne de B par les relations ci-dessous, que fournit la j^{eme} colonne du produit AB = I :

$$b_{jj} = 1,\ b_{j-1,\,j} + b_{jj}\ a_{j-1,\,j} = 0,\ \ldots,\ b_{1j} + a_{12}\,b_{2j} + \ldots + a_{1j}\,b_{jj} = 0.$$

Remarquons que b_{ij} est la valeur de l'inconnue x_i lorsqu'on réduit le système (1) aux n premières équations et n premières inconnues (n quelconque supérieur ou égal à i et j) et qu'on prend des seconds membres tous nuls sauf $y_j = 1$.

Enfin les b_{ij} peuvent s'exprimer par des déterminants, par exemple :

$$b_{1j} = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \ldots & a_{1j} \\ 0 & 1 & \ldots & a_{2j} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{j+1} \begin{vmatrix} a_{12} & \ldots & a_{1j} \\ 1 & \ldots & a_{2j} \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & a_{j-1,j} \end{vmatrix}$$

Nous serons amenés dans la suite, pour énoncer des résultats simples, à utiliser des *majorations* des modules des b_{ij}. En voici une. Les relations (2) qui fournissent les éléments de la première ligne de B montrent immédiatement que $|b_{1j}| \leq \beta_j$, la suite β_j étant donnée par le système récurrent

(4) $\quad \beta_1 = 1,\ \beta_2 = |a_{12}|\ \beta_1 = |a_{12}|,\ \ldots,\ \beta_j = |a_{1j}|\ \beta_1 + |a_{2j}|\ \beta_2 + \ldots + |a_{j-1,j}|\ \beta_{j-1}$

Pour les éléments de la i^{eme} ligne on pourrait opérer de façon semblable; mais, si on compare les relations qui les fournissent : $b_{ii} = 1$, $b_{ii}\,a_{i,i+1} + b_{i,i+1} = 0$, ... à celles qui donnent les β_j, soit :

$$\beta_{i+1} = (\ldots) + |a_{i,i+1}|\beta_i,$$

... on voit que, si $\beta_i \neq 0$, $|b_{ij}| \leq \dfrac{\beta_j}{\beta_i}$.

La condition « $\beta_i \neq 0$ pour tout i » sera certainement vérifiée si la première ligne de A ne comporte *aucun élément nul,* puisqu'alors $\beta_i \geqslant |a_{1i}|$.

Cette majoration, qui fait intervenir seulement les modules des a_{ij}, vaut pour les inverses B de toutes les matrices A dont les différents éléments ont des modules donnés, c'est-à-dire qui correspondent à la même matrice A′. Observons d'ailleurs que β_j est la valeur qu'aurait b_{1j} si dans A, pour $j > i$, les a_{ij} étaient $\leqslant 0$. Parmi toutes les matrices A dont les éléments ont des modules fixés, il y en a une, $2I - A'$, pour laquelle chaque coefficient b_{ij} de l'inverse atteint son module maximum, les b_{ij} étant alors tous $\geqslant 0$.

5. Propriété des petites solutions. — Soit A une matrice triangulaire régulière, dont les a_{ii} sont égaux à 1, et soit un couple de vecteurs X, Y vérifiant l'égalité AX = Y.

En multipliant à gauche par l'inverse à gauche B, on en déduit X = BY, *lorsque ce calcul est légitime.*

On a aisément une condition *suffisante* très simple pour qu'il en soit ainsi : en utilisant les remarques et les notations de la fin du paragraphe 3, on voit* qu'il suffit que B′A′X′ existe. Dans ce cas B′Y′ existe, puisque les éléments de Y′ sont majorés par ceux de A′X′. Donc :
si AX = Y *et si* B′A′X′ *existe,* X = BY *et* B′Y′ *existe.*
En particulier, pour le système homogène, *si* AX = 0 *et si* B′A′X′ *existe, nécessairement* X = 0. C'est là la source d'un grand nombre de théorèmes d'unicité.

Remarques. — 1) X = BY se traduit par les formules de Cramer

$$x_i = \sum_{j \geqslant i} b_{ij}\, y_j$$

2) Le résultat précédent sera souvent utilisé sous la forme suivante : *si on a* AX = Y *et* $X \neq BY$, — en particulier si X est une solution de AX = 0 autre que la solution banale X = 0 —, nécessairement B′A′X′ *n'existe pas,* c'est-à-dire que l'*une au moins des séries*

$$\sum_{j=i}^{\infty} |x_j| \left(\sum_{k=i}^{j} |b_{ik}\, a_{kj}| \right) \; \textit{diverge}\; (i = 1, 2, \ldots). \tag{5}$$

Dans le cas du système homogène AX = 0, on peut même affirmer que, pour une solution $X \neq 0$, *une infinité de séries* (5) *divergent.* Si en effet toutes les séries à partir de $i = n$ étaient convergentes, il suffirait de considérer le système (1) privé des $(n-1)$ premières équations. Les inconnues x_n et suivantes seraient nulles, donc aussi $x_1, \ldots x_{n-1}$.

Dans les applications, la propriété obtenue — divergence d'au moins une des séries (5) — sera utilisée soit, si c'est possible, en calculant exactement le coefficient de $|x_j|$, soit en *le majorant.* Par exemple si, dans la $j^{\text{ème}}$ colonne de la matrice B′A′, le plus grand élément *au-dessus* de la diagonale principale vaut M_j, on peut écrire :

$$\Sigma\, M_j \; |x_j| \; \textit{diverge},$$

* Les choses sont ici plus simples : on n'a pas à supposer que les coordonnées de X (lignes de la matrice X) sont différentes de 0.

Ou encore, observons que si, dans A, pour $j > i$, on a $a_{ij} \leqslant 0$, les b_{ij} sont $\geqslant 0$. $B = B'$, $A = 2I - A'$, et $AB = BA = I$ donne $B'A' = A'B' = 2B - I$. Le coefficient de $|x_j|$ dans la $i^{ème}$ série (5) est donc $2b_{ij}$, pour $j > i$. D'après la remarque finale du paragraphe 4, pour toutes les matrices A dont les éléments ont des modules *donnés,* on peut majorer le coefficient de $|x_j|$ dans (5) par $2b_{ij}$, *calculé pour l'inverse de la matrice* $2I - A'$. Si on suppose, — ce qui sera réalisé dans les applications que nous traiterons —, que les β_i précédemment introduits sont tous $\neq 0$, on voit qu'on peut écrire :

$$\Sigma\beta_j\,|x_j|\ \textit{diverge.}$$

Dans tous les cas, de la connaissance des a_{ij} ou d'hypothèses faites sur eux, on déduira des propriétés des b_{ij}, donc des coefficients des séries (5), et il en résultera qu'une solution de AX = Y autre que la solution de Cramer ne peut être « *trop petite* », puisqu'elle doit assurer la divergence d'au moins une série (5).

3) Remarquons enfin que les résultats précédents peuvent être remplacés par d'autres plus précis, mais dont, pratiquement, l'application effective ne sera pas toujours facile.

Supposons l'égalité AX = Y *vérifiée.* Considérons les p premières équations scalaires, et éliminons $x_2, \dots x_p$, ce qu'on obtient en additionnant les équations après multiplication respective par $b_{11}, \dots b_{1p}$. On a :

$$(6)\qquad \sum_{j=p+1}^{\infty} x_j\,(b_{11}\,a_{1j} + \dots + b_{1p}\,a_{pj}) = b_{11}\,y_1 + \dots + b_{1p}\,y_p - x_1.$$

Notant ξ_{1p} le premier membre de (6), on voit que x_1 *est donné par la formule de Cramer si et seulement si* $\xi_{1p} \to 0$ *lorsque* $p \to \infty$. Dans le cas du système *homogène,* on pourra même affirmer que $x_1 = 0$ dès qu'on aura reconnu qu'une suite *partielle* de $\xi_{1p} \to 0$. De la même façon, x_i est donné par la formule de Cramer si et seulement si

$$\xi_{ip} = \sum_{j=p+i}^{\infty} x_j \left(\sum_{k=i}^{i+p-1} b_{ik}\,a_{kj} \right) \to 0 \quad \text{lorsque } p \to \infty.$$

Donc, *pour une solution autre que celle de Cramer, il n'est pas possible que, pour chaque* i, $\xi_{ip} \to 0$ *quand* $p \to \infty$.

Nous donnerons dans la partie (II) un exemple dans lequel, ayant calculé exactement les b_{ij}, nous utiliserons cette propriété. Si on se contente de majorer $|\xi_{ip}|$ par le reste de la $i^{ème}$ série (5) calculé à partir du terme de rang $j = p + i$, on revient aux conditions déjà données.

6. Solution de Cramer. — Nous avons jusqu'à présent supposé le système (1) vérifié par un couple X, Y. Le problème important qui se pose est évidemment de *résoudre* le système lorsque le second membre Y est donné.

Dans le cas du système *triangulaire régulier,* les résultats déjà obtenus apportent une réponse *partielle* en prouvant que, si les coordonnées de Y sont « *assez petites* », on peut former *une* solution.

Soit en effet Y tel que BY existe. BY est un certain vecteur X. X est-il solution de (1), c'est-à-dire l'égalité BY = X entraîne-t-elle Y = AX?

Il *suffit* pour qu'il en soit ainsi que A′B′Y′ existe (ce qui implique l'existence de BY), et alors A′X′ existe. Finalement, *si* Y *donné est tel que* A′B′Y′ *existe, l'équation* AX = Y *admet au moins la solution de Cramer* X = BY, *et pour cette solution* A′X′ *existe.*

Comme ci-dessus on peut énoncer des conditions plus précises. Y étant donné tel que BY existe, posons BY = X. Pour que X vérifie la première équation de (1), c'est-à-dire que $y_1 = \sum_j a_{1j} x_j$ il *faut et suffit* que

$$\eta_{1p} = \sum_{j=p+1}^{\infty} y_j (a_{11} b_{1j} + \dots + a_{1p} b_{pj}) \rightarrow 0 \text{ lorsque } p \rightarrow \infty.$$

Et de même pour les autres équations, avec les quantités analogues η_{ip}.

Pratiquement, on utilisera souvent la condition très simple : A′B′Y′ *existe.* En restreignant encore Y, on obtient d'autres résultats. Par exemple : *si* B′A′B′Y′ *existe, le système admet la solution de Cramer* X = BY; *pour cette solution* B′A′X′ *existe, et c'est la seule ayant cette propriété.*

L'existence de A′B′Y′ signifie que toutes les séries

$$(7) \qquad \sum_{j=i}^{\infty} \left| y_j \right| \left(\sum_{k=i}^{j} \left| a_{ik} b_{kj} \right| \right) \text{ sont } \textit{convergentes}\ (i = 1, 2, \dots).$$

Pour l'exprimer, ou bien on calcule exactement le coefficient de $|y_j|$, ou bien on le *majore,* comme on l'a fait au paragraphe 5.

Par exemple, si, dans la $j^{\text{ème}}$ colonne de la matrice triangulaire A′B′, le plus grand élément *au-dessus* de la diagonale principale vaut N_j, la *convergence de* $\Sigma N_j |y_j|$ *implique l'existence de* A′B′Y′ (on ferait de même, en considérant la matrice B′A′B′, pour obtenir une condition impliquant l'existence de B′A′B′Y′).

Ou encore, comme plus haut, on majore le coefficient de $|y_j|$ dans la i^{me} série (7) par $2b_{ij}$, calculé pour l'inverse de la matrice 2I — A′. Si les β_i sont tous $\neq 0$, *la convergence de* $\Sigma\beta_j |y_j|$ *implique l'existence de* A′B′Y′. Sous la même hypothèse, on voit aisément que *la convergence de* $\Sigma j\beta_j|y_j|$ *implique l'existence de* B′A′B′Y′ (on remplace A par 2I — A′; *pour cette nouvelle matrice* A, B′ = B, A′B′ = 2B — I, un élément quelconque de la matrice B′A′B′ est majoré par l'élément homologue de $2B^2$; or

$$\sum_{k=i}^{j} b_{ik}\, b_{kj} \leq j\ \frac{\beta_k}{\beta_i} \times \frac{\beta_j}{\beta_k} = j\ \frac{\beta_j}{\beta_i}\ \Big).$$

Dans l'article de P. DAVIS [4] est introduite dès le début l'hypothèse $|a_{ij}| \leqslant \psi(i)\ \varphi(j)$ pour $j > i$. Les résultats obtenus peuvent être appliqués à un système triangulaire régulier quelconque, en prenant $\psi(i)$ constant et égal à 1, et $\varphi(j)$ égal au plus grand élément *au-dessus* de la diagonale principale dans la j^{eme} colonne de A′. De nombreux résultats sont donnés concernant les systèmes homogènes ou les systèmes avec second membre. Ils découlent de l'inégalité suivante, qu'on établit facilement par récurrence :

$$\text{pour } j > i : \quad |\, b_{ij} \,| \leq \psi(i)\ \varphi(j) \prod_{n=1}^{j-i-1} \Big(1 + \psi(i+n)\ \varphi(i+n)\Big)$$

(il suffit d'utiliser les formules (3) ; Π est remplacé par 1 si $j = i + 1$).

Le double du second membre majore donc les coefficients de $|x_j|$ dans (5) et de $|y_j|$ dans (7).

7. Autres solutions. — Soit le système AX = Y où A est *triangulaire régulière,* les a_{ii} étant égaux à 1. *Supposons d'abord* Y = 0. La solution banale X = 0 est la seule solution petite; mais le système peut n'admettre aucune autre solution, ou en admettre une infinité.

Par exemple, si $a_{ij} = 1$ pour $j > i$, X = 0 est l'unique solution; si $a_{ij} = -1$ pour $j > i$, la solution générale est $x_j = \dfrac{K}{2^j}$, où K est arbitraire; si $a_{i,i+n} = c_n$ pour $n > 0$, la fonction $1 + c_1 t + \ldots + c_n t^n + \ldots$ étant holomorphe pour $|t| < R \leqslant \infty$ et admettant une infinité de zéros t_p, à chaque zéro t_p correspond la solution $x_j = k\, t^j_p$.

Il en résulte que, *dans le cas général* $Y \neq 0$, le système pourra être impossible, avoir une seule solution ou en avoir une infinité (cf. aussi [1] et les références qui y sont données).

Pour établir l'existence de solutions pour certains systèmes infinis d'équations linéaires, E. BOREL a employé dans sa thèse une méthode intéressante, basée sur la formation préalable de solutions *approchées.* Sa méthode, exposée de façon générale, donne le résultat suivant.

Soit un système (1) *quelconque* AX = Y (nous ne le supposons pas ici triangulaire). *Supposons qu'ait lieu la propriété suivante des coefficients* a_{ij} *:*

(8) *pour chaque entier positif n, on peut trouver un vecteur* X *tel que* $A'_n X'$ *n'existe pas, tandis que, si* $n > 1$, $A'_i X'$ *existe pour* $i < n$*.

Quel que soit Y, *le système peut alors être résolu de façon approchée, avec la précision que l'on veut.*

C'est-à-dire que, Y et une suite arbitraire de nombres $\varepsilon_i > 0$ étant donnés, on peut trouver un vecteur X tel que $|A_i X - y_i| < \varepsilon_i$ pour tout i.

On part de X_1 tel que $A'_1 X'_1$ n'existe pas. On modifie les arguments de

* Les notations sont celles des paragraphes 2 et 3 : A_i est la matrice à une ligne formée de la i^{eme} ligne de A, A'_i s'obtient en remplaçant dans A_i chaque élément par son module.

ses coordonnées x_j de façon que tous les termes $a_{1j}x_j$ aient même argument que y_1 (si $y_1 \neq 0$), et on prend le nombre n_1 de termes juste suffisant pour que $\left| \sum_1^{n_1} a_{1j}\, x_j \right|$ dépasse $|y_1|$; en diminuant le module de x_{n_1}, on réalise l'égalité : $\sum_1^{n_1} a_{1j}\, x_j = y_1$. Les quantités $x_1, \ldots x_{n_1}$ ainsi obtenues constitueront les n_1 premières coordonnées du vecteur X cherché.

On prend ensuite un vecteur X_2 tel que $A'_2X'_2$ n'existe pas, tandis que $A'_1X'_2$ existe et est inférieur à $\frac{\varepsilon_1}{2}$ (ce qu'on obtient en multipliant éventuellement le vecteur par un scalaire convenable). En opérant avec les coordonnées de X_2 à partir du rang $(n_1 + 1)$ comme on l'a fait avec celles du vecteur X_1, on réalise l'égalité $\sum_1^{n_2} a_{2j}\, x_j = y_2$, dans laquelle les x_j pour $1 \leq j \leq n_1$ sont ceux qui ont déjà été retenus, tandis que, du rang $(n_1 + 1)$ à un rang n_2 convenable, ils proviennent de X_2 après modification éventuelle des arguments, et diminution du module au rang n_2. On aura ainsi obtenu n_2 coordonnées vérifiant

$$\left| \sum_1^{n_2} a_{1j}\, x_j - y_1 \right| < \frac{\varepsilon_1}{2} \quad , \quad \sum_1^{n_2} a_{2j}\, x_j = y_2.$$

Et ainsi de suite. Au p^{eme} stade, en utilisant un vecteur X_p tel que $A'_1X'_p < \varepsilon_1/2^{p-1}$, ..., $A'_{p-1}X'_p < \frac{\varepsilon_{p-1}}{2}$, tandis que $A'_pX'_p$ n'existe pas, on aura obtenu des coordonnées jusqu'au rang n_p vérifiant :

$$\left| \sum_1^{n_p} a_{1j}\, x_j - y_1 \right| < \varepsilon_1\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{p-1}}\right), \ldots, \left| \sum_1^{n_p} a_{p-1,j}\; x_j - y_{p-1} \right| < \frac{\varepsilon_{p-1}}{2},$$

$$\sum_1^{n_p} a_{pj}x_j = y_p.$$

Finalement on obtiendra un vecteur X qui sera solution approchée à la précision requise.

On voit que, pour le vecteur construit, $A'X'$ existe. On voit aussi qu'on peut choisir arbitrairement les N premières coordonnées de X (N donné quelconque) : il suffit d'appliquer la méthode indiquée au système qui fournit les suivantes.

En fait, on peut obtenir mieux qu'une solution approchée. Par une analyse plus précise, G. PÓLYA a démontré le théorème suivant ([5]; voir aussi [6], p. 31-34) :
un système (1) *quelconque, satisfaisant à la condition* (8), *admet, pour tout second membre* Y, *une infinité de solutions, linéairement indépendantes, pour chacune desquelles* $A'X'$ *existe**.

* Voir par exemple [6] ; les hypothèses faites sont équivalentes à la condition (8).

Dans le cas des systèmes *triangulaires réguliers,* qui font l'objet de cet article, le théorème de Pólya est une conséquence facile des résultats déjà obtenus.

Soit une suite de nombres $\varepsilon_i > 0$ tels que, pour le vecteur V de coordonnées ε_i, A'B'V existé. Y étant donné, soit $\overline{X}$ une solution approchée telle que $A'\overline{X}'$ existe et que, pour chaque i, $|A_i\overline{X} - y_i| < \varepsilon_i$. On obtient une solution X telle que A'X' existe un prenant pour $X - \overline{X}$ la solution de Cramer correspondant au second membre $Y - A\overline{X}$.

N étant un entier donné quelconque, on peut d'ailleurs faire en sorte que les N premières coordonnées de X diffèrent respectivement d'aussi peu qu'on voudra de nombres donnés $\alpha_1, \dots \alpha_N$. Il suffit de prendre $\alpha_1, \dots \alpha_N$ comme N premières coordonnées de $\overline{X}$, ce qui est possible d'après une remarque antérieure, et de choisir les ε_i de façon que B'_1V, B'_2V, ... B'_NV soient suffisamment petits.

Ceci prouve qu'il existe une infinité de solutions linéairement indépendantes.

On retrouve aussi immédiatement le théorème de PÓLYA pour un système (1) dans lequel *toutes les matrices tronquées* $A^{(n)}$ *ont leur déterminant non nul* ($A^{(n)}$ s'obtient en supprimant dans A les lignes et colonnes de rang supérieur à n). En effet (1) est équivalent à un système triangulaire régulier (1') dont la $p^{\text{ième}}$ équation est une combinaison linéaire des p premières équations de (1), et si (1) satisfait à la condition (8), il en est de même de (1').

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. Combes : Sur une classe d'équations différentielles d'ordre infini. *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 4^{e} série, t. XV (1951), p. 195-205.

[2] J. Combes : Sur la détermination des fonctions analytiques par des conditions imposées à leurs dérivées successives. *Bulletin des Sciences Mathématiques*, 2^{e} série, t. LXXVIII (septembre-octobre 1954).

[3] J. Combes : Sur les zéros des dérivées successives des fonctions analytiques (I) et (II). *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. 240, p. 39-41 et p. 145-146.

[4] P. Davis : Some theorems for infinite systems of linear equations. *Journal of the Indian Math. Society*, vol. XIV (1950), p. 139 à 155.

[5] G. Pólya : Eine einfache... Bedingung für die Auflösbarkeit eines Systems unendlich vieler linearer Gleichungen. *Commentarii Math. Helvetici*, 11 (1938-39), p. 234-252.

[6] R. Cooke : *Infinite matrices and sequence spaces*, Londres, 1950.