

DUSAN MITROVIĆ

**Étude théorique d'un principe nouveau de construction  
des machines électriques servant à résoudre les systèmes  
d'équations algébriques linéaires**

*Annales de la faculté des sciences de Toulouse 4<sup>e</sup> série*, tome 16 (1952), p. 169-203

[http://www.numdam.org/item?id=AFST\\_1952\\_4\\_16\\_\\_169\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AFST_1952_4_16__169_0)

© Université Paul Sabatier, 1952, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# ETUDE THEORIQUE D'UN PRINCIPE NOUVEAU DE CONSTRUCTION DES MACHINES ÉLECTRIQUES SERVANT À RÉSOUDRE LES SYSTÈMES D'ÉQUATIONS ALGÈBRIQUES LINÉAIRES

par Dušan MITROVIĆ

---

RÉSUMÉ. — Introduction des tensions de dissymétrie. Relations entre ses tensions et les tensions d'erreur. Discussion de la convergence et de la stabilité. Description d'une maquette réalisée au Laboratoire des Mathématiques Appliquées de la Faculté des Sciences de Toulouse.

## INTRODUCTION

Les machines à résoudre les systèmes d'équations algébriques linéaires basées sur l'analogie électrique, ont donné lieu à de nombreuses études et plusieurs modèles ont été proposés ou exécutés. Cependant, on peut remarquer qu'il n'existe que deux types différents : les machines à amplificateurs et celles faisant intervenir un procédé d'itération quelconque.

Ces deux types utilisent comme signal les tensions d'erreur. Cependant, il n'est pas toujours possible de trouver la solution du système proposé. L'instabilité des machines à amplificateurs et la non convergence des itérations sur les machines utilisant le procédé de Gauss peuvent être un obstacle à l'obtention des résultats.

Le problème de stabilité a été surtout étudié par M. RAYMOND [1], [10]. Il a montré que les machines à amplificateurs peuvent être considérées comme des servo-mécanismes linéaires à plusieurs variables.

Le présent mémoire introduit les tensions de dissymétrie que l'on s'attachait toujours à supprimer dans les méthodes précédentes. Après avoir établi les relations entre ces tensions et les tensions d'erreur, il nous a été possible de proposer des méthodes nouvelles et de les discuter au point de vue de la convergence et de la stabilité.

Afin de conserver à cet exposé une certaine unité, nous présenterons d'abord une partie historique, qui nous permettra d'aborder ensuite l'étude des méthodes basées sur l'existence des tensions de dissymétrie.<sup>(1)</sup>

---

1. Développement d'une note parue aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, t. 234, pp. 589-591 :

D. MITROVIC, R. HURON, R. TOMOVIC. — Sur un principe nouveau de construction des machines servant à résoudre les systèmes linéaires par analogie électrique.

# CHAPITRE I

## PRINCIPES DES MACHINES EXISTANTES

---

Dans plusieurs domaines de la technique et des sciences théoriques ou appliquées on est amené à résoudre des systèmes d'équations algébriques linéaires. Bien que les mathématiciens aient examiné ce problème dans tous ses détails, on est souvent dans l'impossibilité de parvenir aux résultats numériques par le trop grand nombre des opérations mathématiques élémentaires à effectuer. C'est toujours le cas quand il s'agit d'un système dont le nombre d'équations est élevé ou quand il faut faire plusieurs calculs pour des valeurs diverses d'un ou plusieurs coefficients.

On a donc cherché des moyens pour surmonter cette difficulté et on a été conduit à construire des machines électriques permettant de résoudre les équations algébriques linéaires. Elles n'ont pas seulement réussi à raccourcir la durée des opérations, mais elles ont aussi réduit le nombre des erreurs accidentelles. L'application de ces machines a même dépassé les limites de l'algèbre linéaire [1].

Ce sont les principes des machines basées sur l'analogie électrique qui seront le sujet du début de ce travail.

### 1) L'analogie directe.

Cette méthode utilise des réseaux électriques, dont les grandeurs physiques sont liées par les équations algébriques linéaires semblables au système à résoudre.

On sait que la répartition des courants dans un circuit électrique complexe composé de mailles indépendantes, conduit à la résolution d'équations algébriques linéaires de la forme

$$(1) \quad \sum_{k=1}^n r_{ik} I_k = E_i \quad i = 1, 2, \dots, n$$

1)  $r_{ii}$  représente la résistance totale de la maille indépendante,

$r_{ik}$  représente la résistance commune des mailles  $i$  et  $k$ ,

$E_i$  représente la somme des forces électromotrices contenues dans la maille;

2) L'application des éléments actifs dans des réseaux analogues au système à résoudre nécessite une mise en œuvre de moyens matériels très impor-

tants et par suite on est obligé d'utiliser des circuits passifs, dans lesquels on a toujours :

$$r_{ik} > 0$$

et

$$r_{ik} = r_{ki}$$

Il en résulte que le système (1) est symétrique.

Soit à résoudre le système suivant :

$$(2) \quad \sum_{k=1}^n a_{ik} X_k = b_i \quad (i = 1, 2 \dots n)$$

En comparant les équations (1) et (2) on conclut aisément qu'on peut trouver les inconnues  $X_k$  en mesurant les courants  $I_k$  dans un réseau électrique, dont les résistances  $r_{ik}$  sont égales ou proportionnelles aux coefficients  $a_{ik}$  et les forces électromotrices  $E_i$  aux seconds membres. Evidemment, le système (2) doit être symétrique et ses coefficients tous positifs. Ces conditions sont donc très restrictives <sup>(1)</sup>. Remarquons aussi qu'il est très difficile de réaliser un circuit électrique dont les résistances  $r_{ik}$  sont données à l'avance.

Cette méthode a été utilisée pour résoudre des équations algébriques linéaires à coefficients réels (complexes) à l'aide d'une table à calcul à courant alternatif [2].

## 2) L'analogie à l'aide de l'itération suivant la méthode de Gauss.

Pour éviter les difficultés rappelées ci-dessus, il est nécessaire d'appliquer l'analogie indirecte, c'est-à-dire une analogie qui ne devient parfaite qu'après un procédé d'itération.

2. 1° La condition, pour les coefficients :  $a_{ik}$  et  $-b_i$  du système mis sous la forme

$$\sum_{i=1}^n a_{ik} x_i - b_i = 0 \quad (i = 1, 2 \dots n)$$

d'être positif est moins restrictive qu'il ne paraît au premier abord, car on peut facilement former un système équivalent au système donné où elle est remplie.

Pour être simple raisonnons sur un exemple, soit le système :

$$(E) \quad \begin{aligned} 2x - 3y + z - t - 2 &= 0 \\ x - 2y + 3z - 2t + 1 &= 0 \\ -3x + 4y - z + t + 2 &= 0 \\ 7x - y - z - 3t - 5 &= 0 \end{aligned}$$

Prenons une équation quelconque,  $E_1$  par exemple et ramenons-la à une équation à coefficients positifs en :

multipliant ses deux membres par  $-1$ , ce qui donne :

$$-2x + 3y - z + t + 2 = 0$$

puis en posant :

$$x = -x' \quad ; \quad z = -z'$$

Soit à résoudre le système linéaire (2) dont le déterminant, dit  $(a_{ik})$ , est différent de zéro et les coefficients tous réels. Le réseau analogue est représenté sur la figure 1. Chaque potentiomètre  $P_{ik}$  peut être branché sur l'un ou l'autre des feeders (désignés par  $V_k$  et  $-V_k$ ). Les deux tensions  $V_k$  et  $-V_k$  sont réglables simultanément par une seule opération. On suppose que les modules de ces tensions sont toujours égaux ce qui signifie que la symétrie des tensions ne doit pas être détruite pendant le procédé d'itération.

Supposons aussi que  $|a_{ik}| \leq 1$  et  $|b_i| \leq 1$  ce qui est toujours réalisable après une réduction préalable du système à résoudre. L'analogie électrique de la matrice du système donné s'effectue alors en plaçant l'index de chaque potentiomètre dans une position telle que ce potentiomètre fournisse une fraction égale à  $a_{ik}$  de la tension qui sera appliquée à ses bornes. Cette fraction devient  $a_{ik}$  grâce au branchement du potentiomètre  $P_{ik}$  selon le signe. L'analogie des seconds membres est réalisée par les potentiomètres  $P_i$  de la même manière.

Toutes les résistances  $R$  sont égales et connectées comme indiqué sur la figure 1. La tension de sortie  $V_{ik}$  du potentiomètre  $P_{ik}$  sous la condition

dans tout le système on obtient

$$(E') \quad \begin{aligned} 2x' + 3y + z' + t + 2 &= 0 \\ -x' - 2y - 3z' - 2t + 1 &= 0 \\ 3x' + 4y + z' + t + 2 &= 0 \\ -7x' - y + z' - 3t - 5 &= 0 \end{aligned}$$

Formons maintenant les combinaisons linéaires :

$$E''_i = \lambda_i E'_1 + E'_i = 0 \quad (i = 2, 3, 4)$$

$\lambda_i$  étant un nombre positif tel que  $E''_i$  ait tous ses coefficients positifs. Par exemple on peut prendre :

$$\begin{aligned} \lambda_2 = 3 \quad & \text{d'où } E''_2 = 5x' + 4y + z' + t + 7 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \quad & \text{d'où } E''_3 = 3x' + 4y + z' + t + 2 = 0 \\ \lambda_4 = 4 \quad & \text{d'où } E''_4 = x' + 11y + z' + t + 3 = 0 \end{aligned}$$

Le système  $(E'')$  où  $E''_1 = E'_1 = 0$  a tous ses coefficients positifs.

Cette remarque nous sera utile ultérieurement.

2° tout système peut se ramener à un autre équivalent dont la matrice des coefficients est symétrique.

Si le système donné est :

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

on forme :

$$\sum_{i=1}^n \epsilon_i a_{ik} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

avec :

$$\epsilon_i = \sum_{j=1}^n a_{ji} x_j - b_i$$

que l'impédance appliquée est grande devant la résistance totale du potentiomètre, est donnée par :

$$(3) \quad v_{ik} = a_{ik} V_k$$

Partant de la relation (3) on peut écrire la condition qui précise que la somme des courants qui se joignent à une même barre est nulle :

$$(n+1) \frac{d_i}{R} = \sum_{k=1}^n \frac{a_{ik} V_k}{R} - u \frac{b_i}{R}$$

ou

$$i = 1, 2, \dots, n$$

$$(4) \quad (n+1) d_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} V_k - u b_i$$

$u$  étant la tension constante qui alimente les potentiomètres  $P_i$  et  $d_i$  la tension de la barre  $i$ . En comparant les équations (4) avec le système à résoudre, on conclut aisément que, si toutes les tensions  $d_i$  étaient nulles,

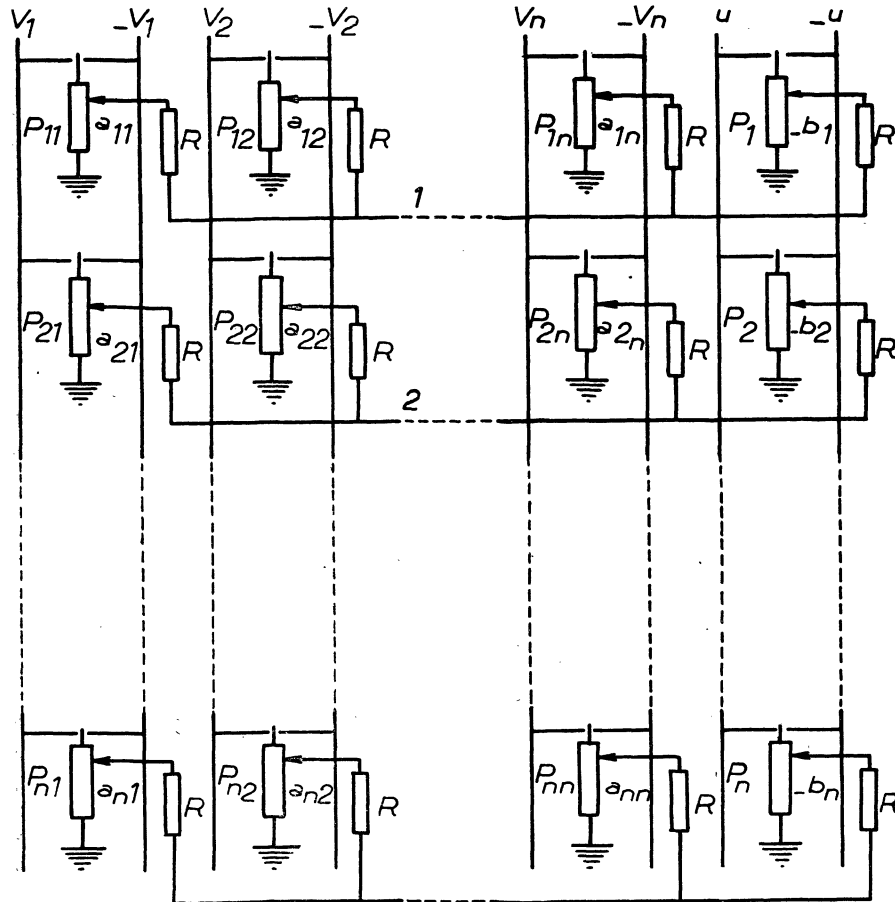


FIG. 1

les inconnues pourraient être obtenues en mesurant les tensions  $V_k$  et  $u$  et en utilisant les relations suivantes :

$$(5) \quad X_k = \frac{V_k}{u} \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

Les tensions  $V_k$  étant réglables, il est évident qu'on peut appliquer n'importe quelle méthode d'itération et procéder de la même manière que dans les calculs numériques. Prenons par exemple le procédé d'itération de Gauss <sup>(2)</sup>. On règle d'abord la tension  $V_1$  de manière que  $d_1 = 0$ , puis la tension  $V_2$  de telle sorte que  $d_2 = 0$ , etc... Ce réglage se poursuit en plusieurs cycles. Le procédé d'itération est terminé lorsqu'on obtient approximativement  $d_1 = d_2 = \dots = d_n = 0$ . Il ne reste qu'à mesurer les tensions  $V_k$  et  $u$  et à calculer les inconnues à l'aide des équations (5).

Plusieurs machines sont construites selon ce principe [3]. On sait que le procédé d'itération de Gauss est sûrement convergent si la matrice du système (2) est symétrique et définie positive <sup>(3)</sup>. Mais il est plus difficile

## 2. Procédé d'itération de Gauss-Seidel

On commence par attribuer aux inconnues des valeurs arbitraires

$$x_1^0, x_2^0, x_3^0, \dots, x_n^0$$

On substitue dans la première équation les valeurs  $x_2^0, x_3^0, \dots, x_n^0$  aux inconnues correspondantes et on résout par rapport à  $x_1$ .

Soit  $x_1^1$  la solution.

On substitue, dans la deuxième équation :  $x_1^1, x_3^0, x_4^0, \dots, x_n^0$  aux inconnues correspondantes, on en déduit  $x_2^1$ , etc...

Le premier cycle est terminé lorsqu'on a obtenu :

$$x_1^1, x_2^1, \dots, x_n^1$$

A partir de ces valeurs on commence un deuxième cycle, etc...

On démontre [4] que les conditions suivantes sont suffisantes, mais non nécessaires, pour que l'itération converge vers la solution du système proposé, il faut à la fois :

- 1)  $a_{ij} = a_{ji}$ , c'est-à-dire que la matrice du système soit symétrique
- 2) que cette matrice soit définie positive.

## 3. Matrice définie positive

Afin d'éviter tout malentendu précisons bien les définitions.

Une matrice carrée d'ordre  $n$  :  $\|a_{ij}\| = M$  est définie positive si la forme quadratique :

$$\mu = \sum_i \sum_j a_{ij} x_i x_j$$

est positive quels que soient les  $x_i, x_j$  sauf bien entendu pour  $x_i = 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ )

Si  $M$  est symétrique, une condition nécessaire et suffisante pour qu'elle soit définie positive est [4] que l'on ait la séquence :

$$a_{11} > 0 \quad \left| \begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{array} \right| > 0 \quad \left| \begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} \end{array} \right| > 0$$

qui exprime en même temps que la forme quadratique symétrique associée à la matrice est définie positive.

Notons qu'il est facile de donner une condition analogue pour une matrice non symétrique :

$$\text{Posons } a_{ij} = \frac{1}{2} (a_{ij} + a_{ji})$$

La forme quadratique peut alors s'écrire :

$$\mu = \sum_i \sum_j a_{ij} x_i x_j$$

et devient symétrique.

Donc  $\mu$  et  $M$  seront définies positives si la matrice  $\|a_{ij}\| = M_s = \frac{1}{2}(M + M')$  que l'on peut associer à  $M$  est définie positive, c'est-à-dire si

$$a_{11} > 0 \quad \left| \begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{array} \right| > 0 \text{ etc... soit } a_{11} > 0 \quad \left| \begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{array} \right| > \frac{1}{4} (a_{12} - a_{21})^2 \text{ etc...}$$

de reconnaître si une matrice est définie positive que de résoudre le système donné, ce qui rend cette condition très restrictive. Ainsi est-on obligé de tâtonner en permutant les colonnes de la matrice et du système donné ou de multiplier la matrice donnée par sa matrice transposée afin de parvenir à une matrice définie positive. On voit que la question de convergence du procédé d'itération de Gauss est pleine de difficultés et on a été obligé de chercher d'autres méthodes.

### 3) L'analogie à l'aide de l'itération par la méthode des moindres carrés.

Au point de vue du calcul numérique, on peut aussi résoudre le système (2) par la méthode suivante :

on donne aux inconnues les valeurs arbitraires  $X'_k$ . Les équations (2) ne sont donc pas satisfaites, ce qui signifie qu'il se présente dans chaque équation  $i$  une erreur  $d_i$ . On obtient ainsi :

$$(6) \quad \sum_{k=1}^n a_{ik} X'_k - b_i = d_i \quad i = 1, 2 \dots n$$

Le procédé d'itération par la méthode des moindres carrés est alors le suivant :

on fait varier  $X'_1$  pour obtenir un minimum de  $\sum_{i=1}^n d_i^2$  puis  $X'_2$  pour avoir un autre minimum de  $\sum_{i=1}^n d_i^2$  etc... On fait tendre ainsi  $\sum_{i=1}^n d_i^2$  vers zéro. Evidemment, si  $\sum_{i=1}^n d_i^2 \rightarrow 0$  c'est aussi que  $X'_k \rightarrow X_k$  ( $k = 1, 2 \dots n$ ).

On sait que ce procédé est toujours convergent.

L'application de la méthode des moindres carrés dans les calculs numériques n'est pas intéressante parce qu'il est très difficile de chercher les minima de  $\sum_{i=1}^n d_i^2$ . Au contraire, il est facile dans l'analogie électrique de les obtenir sous forme de la déviation d'un appareil indicateur, ce qui est montré dans la figure 2. Les équations (6) sont remplacées par les équations (4), c'est-à-dire les erreurs  $d_i$  sont représentées par les tensions  $d_i$ . Chaque redresseur fournit<sup>(5)</sup> à sa sortie un courant proportionnel au carré de la tension appliquée à son entrée. La déviation du microampère-mètre sera évidemment proportionnelle à  $\sum_{i=1}^n d_i^2$ . C'est la déviation de cet instrument qu'on doit ramener à zéro en changeant les valeurs des tensions  $V_1, V_2 \dots V_n$ .

4. On vérifie que la matrice du système  $\sum_{i=1}^n \varepsilon_i \alpha_{ik} = 0$  (note page 4) est symétrique et définie positive.

5. Si les courants sont assez faibles.



On règle la tension  $V_1$  de telle sorte que la déviation du microampère-mètre soit minimum, puis on cherche un autre minimum en réglant  $V_2$  etc... On obtient les résultats en mesurant les tensions  $V_k$  et  $u$  et en appliquant les relations (5) (6).

Cette méthode a été proposée par M. F.-J. MURRAY [4].

Elle a été aussi utilisée pour la construction de machines à calculer [5].

Cette méthode résout entièrement le problème de convergence, mais on est obligé d'introduire un dispositif supplémentaire pour la réalisation de  $\sum d_i^2$ . D'autre part, et c'est très important, il est très difficile de réaliser à l'aide de servomécanismes, l'automatisme du procédé d'itération.

#### 4) Réalisation de l'automatisme à l'aide d'amplificateurs électroniques.

Plusieurs applications des machines à résoudre les équations algébriques linéaires ont exigé un automatisme du procédé d'itération, c'est-à-dire la réduction de la durée des tâtonnements. On a même réussi à construire plusieurs machines à marche entièrement automatique [1], [7], [8], [9]. Elles représentent des réalisations de la notion du servomécanisme linéaire à plusieurs variables, comme l'a bien souligné M. RAYMOND [10]. Le schéma d'une machine à amplificateurs électroniques est montré dans la fig. 3. Le réseau analogue est identique à ceux des figures 1 et 2. Désignons par  $A_i$  l'amplificateur dont l'entrée est connectée à la barre  $i$  et influencée par la tension  $d_i$ . La sortie de chaque amplificateur  $A_i$  alimente un feeder  $V_k$  comme il est indiqué sur la figure 3 (7). Les signes négatifs sont réalisés à l'aide des amplificateurs  $A'_k$  de gain  $-1$ . La symétrie de la tension  $V_k$  c'est-à-dire l'égalité des modules des tensions  $V_k$  et  $-V_k$  est donc toujours réalisée.

Si l'on désigne par  $G$  le gain d'un amplificateur, on a

$$(7) \quad V_k = G \cdot d_i$$

$G$  étant très grand,  $d_i$  est de toutes manières petit devant  $V_k$ . On peut alors négliger les  $d_i$  avec une approximation d'autant plus élevée que  $G$  est plus grand; les relations (4) deviennent :

$$(8) \quad \sum_{k=1}^n a_{ik} V_k - u b_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

On obtient les inconnues à l'aide des équations (5).

La résolution n'est possible qu'à la condition que le fonctionnement de la machine soit stable. Il est bien connu que ce sera le cas si la matrice du système à résoudre est définie positive. Nous avons vu que cette condition

6. Au point de vue de l'exécution technique le dispositif pour la réalisation de peut être plus développée [5], [6].

7. On peut aussi permuter les connexions entre les sorties des amplificateurs  $A_i$  et le feeder  $V_k$ .

est gênante. On est obligé de permuter les connexions entre les sorties des amplificateurs  $A_i$  et les feeders  $V_k$ . Une règle pratique permettant un mini-

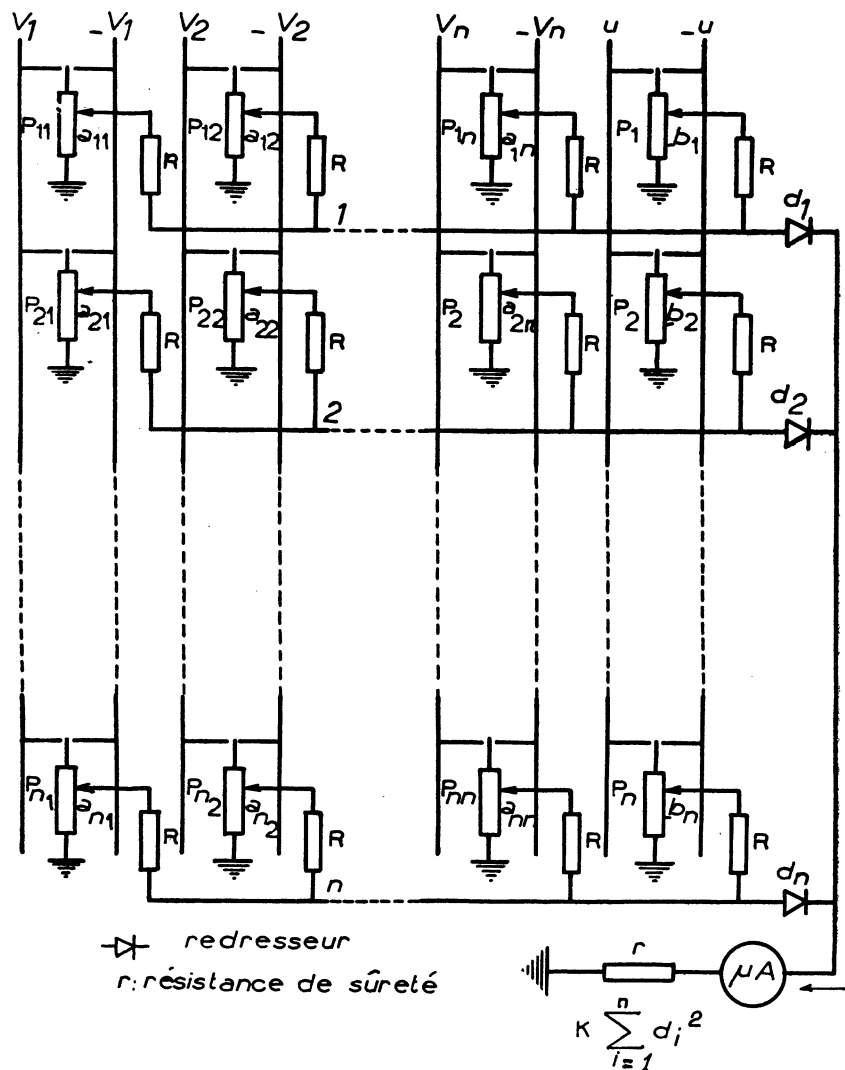


FIG. 2

num de tâtonnement réside dans le fait qu'une matrice a de grandes chances d'être définie positive, si les coefficients diagonaux sont les plus grands, en valeurs algébriques, ces coefficients étant positifs. Cette règle a été vérifiée par les expériences de divers auteurs américains et français [10].

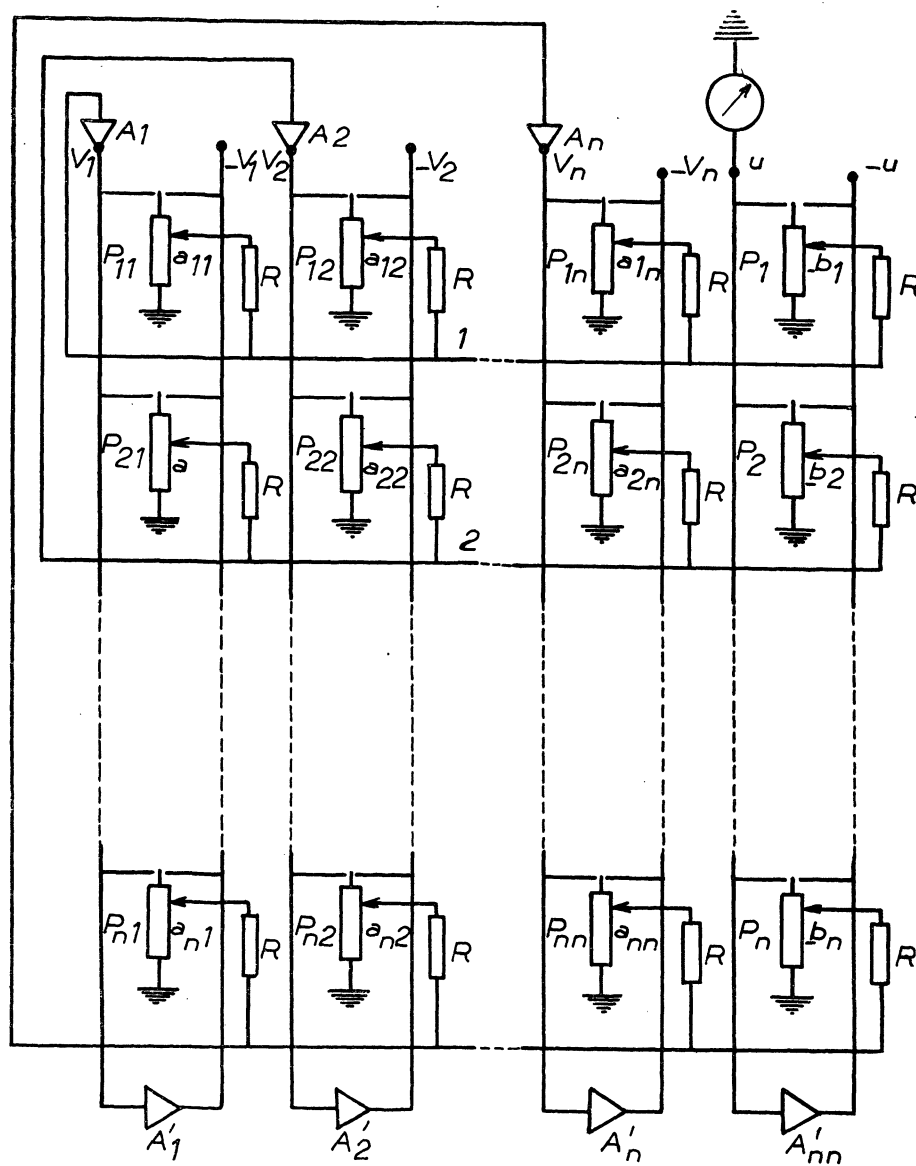


FIG. 3

## CHAPITRE II

### MÉTHODES PROPOSÉES

---

Pour mieux marquer la différence entre les méthodes précédentes et celles proposées dans ce mémoire, nous allons d'abord résumer les traits caractéristiques des machines précédentes.

L'idée commune de toutes les méthodes exposées <sup>(1)</sup> réside dans le fait que les tensions  $V_k$  dans le réseau analogue de la figure 1 deviennent une mesure des inconnues du système à résoudre, dès que toutes les tensions d'erreur  $d_i$  sont, avec une approximation suffisante, égales à zéro. Les méthodes précédentes ne se distinguent que par la manière dont on fait tendre  $d_i$  vers zéro.

L'autre trait commun consiste dans le fait que la symétrie permanente des tensions  $V_k$  et  $-V_k$  c'est-à-dire l'égalité des modules de ces tensions, est une condition *sine qua non*. On est toujours obligé de construire les dispositifs particuliers de façon à assurer cette symétrie <sup>(2)</sup>.

L'application de la méthode d'itération de Gauss et celle des machines à amplificateurs électroniques est rendue très difficile par la condition de stabilité déjà signalée : la matrice des inconnues du système à résoudre doit être définie positive. On n'a pas trouvé à notre connaissance, de règle simple qui pourrait exclure le tâtonnement. On ne peut non plus réaliser aucun réseau correctionnel pour stabiliser le fonctionnement des machines à amplificateurs électroniques.

Au contraire, l'idée fondamentale des méthodes proposées, dans ce mémoire, est la suivante : il existe des conditions pour lesquelles on peut permettre la dissymétrie des tensions  $V_k$  et  $-V_k$ , cette dissymétrie s'annulant au bout du procédé. On montrera que cette dissymétrie peut être représentée par les tensions de dissymétrie et qu'il est possible d'utiliser ces tensions pour le procédé d'itération à la place des tensions  $d_i$ .

Les répercussions de cette modification seront discutées plus tard.

#### 1) Méthode de contrôle de la symétrie des tensions.

Soit donné le système d'équations algébriques linéaires

$$(2) \quad \sum_{k=1}^n a_{ik} X_k - b_i = 0 \quad (i = 1, 2 \dots n)$$

En représentant les coefficients par les conductances et les inconnues par les tensions, on obtient un réseau analogue figure 4. Les signes des

---

1. Sauf la méthode de l'analogie directe, qui n'est pas considérée ici.

2. Dans ce but, la machine française l'OME.14 est munie d'amplificateurs de gain  $-1$ .

coefficients sont réalisés par les conductances  $m^+_k$  et  $m^-_k$ . La symétrie des tensions est ajustable par les potentiomètres  $P_k$ , c'est-à-dire par les changements des conductances  $m^+_k$  et  $m^-_k$ . On ne peut pas avoir les solutions immédiatement et on ne les obtient qu'après un procédé d'itération.

On peut expliquer ce procédé en écrivant les conditions pour lesquelles la somme de tous les courants qui se joignent à une barre  $i$  est nulle.

$$(9) \quad \sum_{k=1}^n a_{ik} (V_k \mp d_i) - b_i (u \pm d_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

où  $d_i$  désigne la tension de la barre  $i$  ici et dans la suite. Les signes supérieurs correspondant aux valeurs positives des  $a_{ik}$  et  $(-b_i)$ . On peut aussi écrire les équations (9) sous la forme :

$$(10) \quad \sum_{k=1}^n a_{ik} V_k - b_i u = d_i \left( \sum_{k=1}^n |a_{ik}| + |b_i| \right) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Le signe  $||$  désignant ici : valeur absolue de...

On voit que sous les conditions

$$(11) \quad d_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

les inconnues seront données par les relations (5). Ainsi, pour obtenir les solutions du système donné, on est obligé de faire tendre tous les  $d_i$  vers zéro en utilisant une méthode d'itération quelconque. Cependant, chaque changement d'une des tensions  $V_k$  (ce qui est nécessaire pour réaliser les conditions (11)) détruit la symétrie des tensions et on doit la rétablir à l'aide de tous les potentiomètres  $P_k$ . Evidemment la manipulation est très longue.

Cette méthode est applicable sur la table à calcul à courant alternatif. Le procédé d'itération s'effectue par une des manières suivantes :

a) *Méthode d'itération de Gauss* : On change  $V_1$  pour obtenir  $d_1 = 0$  puis  $V_2$  pour ajuster  $d_2 = 0$  etc... Le procédé est terminé quand toutes les conditions (11) se trouvent vérifiées.

b) *Méthode d'itération des moindres carrés* : On change  $V_1$  pour obtenir un minimum de  $\sum d_i^2$  <sup>(3)</sup>, puis  $V_2$  pour trouver un autre minimum de  $\sum d_i^2$  etc... Le procédé d'itération est terminé quand on atteint avec une approximation suffisante la condition

$$(12) \quad \sum_{i=1}^n d_i^2 = 0$$

---

3. La réalisation de  $\sum_{i=1}^n d_i^2$  sur la table à calcul à courant alternatif sera expliquée au chapitre IV.

## 2) Méthode de la symétrie spontanée.

Cette méthode utilise le même réseau figure 4, mais grâce à une modification du procédé, elle évite entièrement toutes les difficultés relatives à la symétrie des tensions. On peut prouver qu'il existe des conditions pour lesquelles toutes les dissymétries s'annulent spontanément pendant le procédé d'itération.

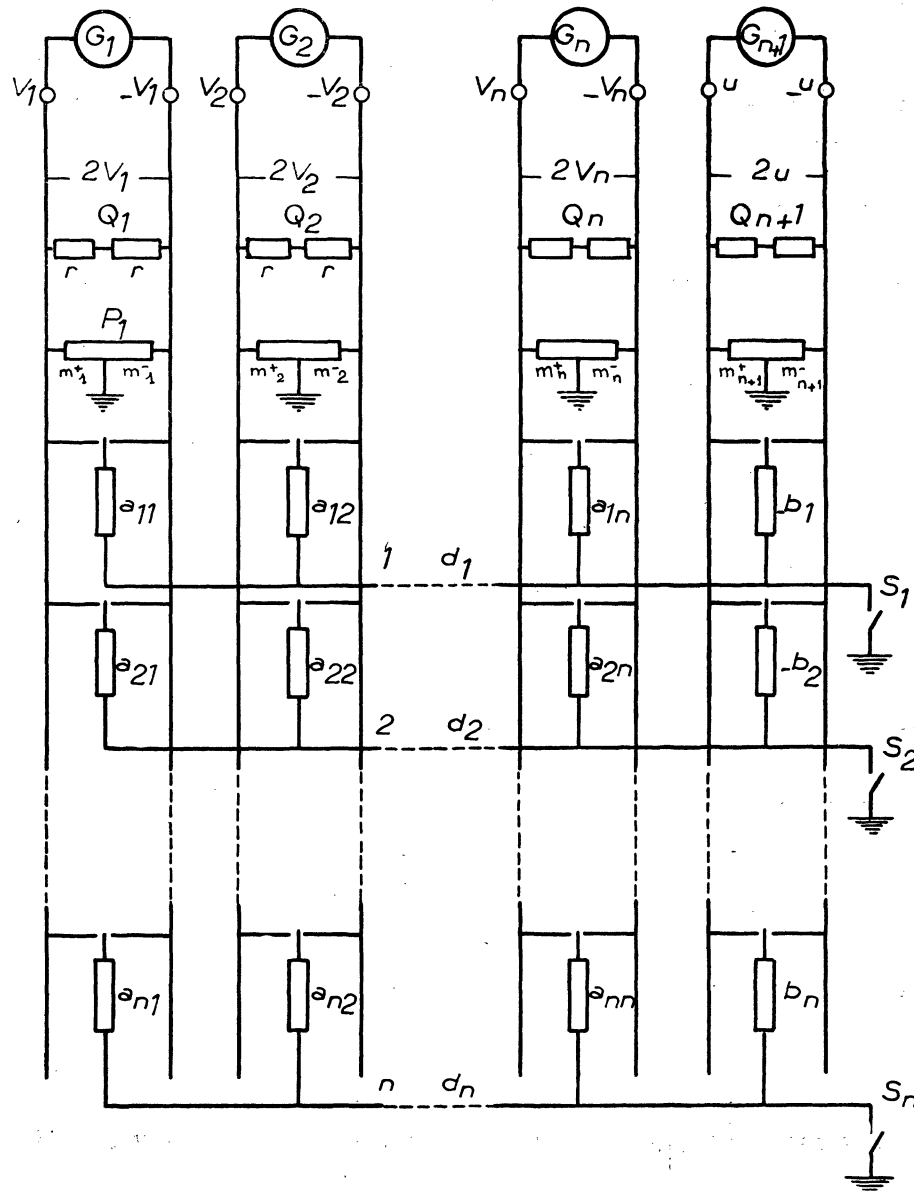


FIG. 4

Supposons que le réseau analogue soit déjà établi et que les tensions soient appliquées, mais que la symétrie ne soit pas encore réalisée. Les tensions  $E_k$  des points  $Q_k$ <sup>(4)</sup> sont donc différentes du zéro. La condition que le même courant entre et sort de chaque générateur  $G_k$  donne les relations suivantes :

$$(13) \quad \sum_{i=1}^n (V_k \pm \varepsilon_k \mp d_i) a_{ik} + (V_k + \varepsilon_k) m_{-k}^+ - (V_k - \varepsilon_k) m_{-k}^- = 0$$

$$(13') \quad \sum_{i=1}^n (u \pm \varepsilon_u \mp d_i) (-b_i) + (u + \varepsilon_u) m_{-n+1}^+ - (u - \varepsilon_u) m_{-n+1}^- = 0.$$

avec pour les signes la convention déjà signalée. Les relations (13) et (13') peuvent s'écrire :

$$(14) \quad V_k \left( \sum_{i=1}^n a_{ik} + m_{-k}^+ - m_{-k}^- \right) + \varepsilon_k \left( \sum_{i=1}^n |a_{ik}| + m_{-k}^+ + m_{-k}^- \right) = \sum_{i=1}^n |a_{ik}| d_i$$

( $k = 1, 2, \dots, n$ )

$$(14') \quad u \left( - \sum_{i=1}^n b_i + m_{-n+1}^+ - m_{-n+1}^- \right) + \varepsilon_u \left( - \sum_{i=1}^n |b_i| + m_{-n+1}^+ + m_{-n+1}^- \right) = \sum_{i=1}^n |b_i| d_i$$

avec les conditions :

$$(15) \quad \sum_{i=1}^n a_{ik} + m_{-k}^+ - m_{-k}^- = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

et

$$(15') \quad - \sum_{i=1}^n b_i + m_{-n+1}^+ - m_{-n+1}^- = 0$$

les équations (14) et (14') deviennent :

$$(16) \quad \sum_{i=1}^n |a_{ik}| d_i = 2 m_{-k} \varepsilon_k$$

$$(16') \quad - \sum_{i=1}^n |b_i| d_i = 2 m_{-n+1} \varepsilon_u$$

( $k = 1, 2, \dots, n$ )

$$\text{où on a posé : } \sum_{i=1}^n |a_{ik}| + m_{-k}^+ + m_{-k}^- = 2 m_{-k}; \quad \sum_{i=1}^n |b_i| + m_{-n+1}^+ + m_{-n+1}^- = 2 m_{-n+1};$$

---

4. Par rapport à la masse.

Grâce à ces équations on peut énoncer la conclusion suivante : *si les conditions (15) et (15') sont réalisées, toutes les tensions  $E_k$ ,  $E_u$  s'annulent au bout du procédé d'itération et la symétrie se rétablit spontanément.*

Pratiquement, les conditions (15) et (15') sont facilement réalisables, *parce que les conductances  $m^+_k$  et  $m^-_k$  sont arbitraires et nous pouvons les choisir en fonction de ces conditions.* Le même résultat peut être atteint en appliquant le procédé suivant : le réseau analogue étant établi et les tensions  $V_k$  appliquées, nous mettons toutes les barres  $i$  à la masse et, à l'aide des potentiomètres  $P_k$  nous réglons les tensions des points  $Q_k$  de telle sorte qu'elles soient égales à zéro. Quand ce réglage est terminé, les conditions (15) et (15') sont satisfaites et il ne reste plus qu'à séparer les barres de la masse. Elles prennent alors les tensions  $d_i$  et les points  $Q_k$  les tensions  $E_k$  ( $E_u$ ), la symétrie est détruite.  $d_i$  et  $E_k$  (et  $E_u$ ) étant liés par les relations (16) et (16'), on peut procéder de la même façon que dans le cas des équations (10), sauf qu'on ne doit pas ajuster la symétrie.

Pratiquement, c'est ce procédé qui rend possible l'application de la table à calcul à courant alternatif pour la résolution des équations algébriques linéaires. Les machines construites spécialement pour ce problème, peuvent utiliser le même principe.

### 3) Méthode d'itération à l'aide des tensions de dissymétrie.

Posons maintenant la question inverse : si à l'aide des  $V_k$  on fait tendre les tensions  $E_k$  vers zéro, les tensions  $d_i$  tendent-elles aussi vers zéro? Sous quelles conditions cette itération sera-t-elle toujours convergente?

Une réponse affirmative aurait des répercussions très importantes. D'abord, on pourrait résoudre le problème sur la table à calcul à courant alternatif sans y adjoindre de dispositifs supplémentaires et avec la certitude que le système serait convergent. D'autre part, dans les machines munies d'amplificateurs électroniques, on pourrait éviter les inconvénients causés par l'instabilité.

Pour répondre à la question posée, supposons que la symétrie de la tension  $u$  ne peut pas être détruite, c'est-à-dire que  $\varepsilon_u$  est constamment nul<sup>(5)</sup>. Les relations entre  $\varepsilon_k$  et  $d_i$  ne sont alors données que par les équations (16) :

$$(16) \quad \sum_{i=1}^n |a_{ik}| d_i = 2 m_k \cdot \varepsilon_k \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

On en déduit que si l'on fait tendre les tensions  $\varepsilon_k$  vers zéro, les tensions  $d_i$  tendent aussi spontanément vers zéro, à condition que le déterminant des  $|a_{ik}|$  soit différent de zéro.

5. On verra que cette hypothèse n'entraîne aucune restriction.



La résolution du système donné peut donc être effectuée en appliquant un procédé d'itération quelconque sur les tensions de dissymétrie.

Pour examiner la convergence, dans le cas où l'on applique la méthode d'itération de Gauss, posons les conditions pour lesquelles la somme des courants qui se joignent à chaque barre doit être nulle :

$$(17) \quad \sum_{k=1}^n a_{ik} (V_k \pm \varepsilon_k \mp d_i) - b_i (u \mp d_i) = 0$$

( $i = 1, 2 \dots n$ )

ce qu'on peut aussi écrire sous la forme

$$(18) \quad \sum_{k=1}^n a_{ik} V_k + \sum_{k=1}^n |a_{ik}| \varepsilon_k - u b_i = d_i \left( \sum_{k=1}^n |a_{ik}| + |b_i| \right)$$

Pour faciliter la présentation, nous allons écrire les équations (16) et (18) sous forme vectorielle :

$$(19) \quad A^+ \vec{d} = 2 M \vec{\varepsilon}$$

et

$$(20) \quad \vec{A}V + A^+ \vec{\varepsilon} - u \vec{b} = S \vec{d}$$

$\vec{d}$ ,  $\vec{\varepsilon}$ ,  $V$  et  $\vec{b}$  étant respectivement les vecteurs des composantes  $d_i$ ,  $\varepsilon_k$ ,  $V_k$  et  $b_i$ ,  $A^+$  la matrice déduite de  $A$  en prenant les valeurs absolues des éléments de  $A$ ,  $A^+_{\text{t}}$  la transposée de  $A^+$ ,  $M$  la matrice diagonale  $m_k$  et  $S$  la matrice diagonale  $\sum_{k=1}^n |a_{ik}| + |b_i|$ .

Les équations (19) et (20) donnent

$$(21) \quad \vec{A}V - u \vec{b} = [(S A^+_{\text{t}})^{-1} 2 M - A^+] \vec{\varepsilon}$$

Si la matrice  $[(S A^+_{\text{t}})^{-1} 2 M - A^+]$  n'est pas singulière, on peut écrire :

$$[S(A^+_{\text{t}})^{-1} 2 M - A^+]^{-1} \vec{A}V - u [S(A^+_{\text{t}})^{-1} 2 M - A^+]^{-1} \vec{b} = \vec{\varepsilon}$$

De par sa définition la matrice  $S$  n'est pas singulière, donc on a :

$$\begin{aligned} [S(A^+_{\text{t}})^{-1} 2 M - A^+]^{-1} &= [S(A^+_{\text{t}})^{-1} (2 M - A^+_{\text{t}} S^{-1} A^+)]^{-1} \\ &= (2 M - A^+_{\text{t}} S^{-1} A^+)^{-1} A^+_{\text{t}} S^{-1} \end{aligned}$$

et

$$(22) \quad (2 M - A^+_{\text{t}} S^{-1} A^+)^{-1} A^+_{\text{t}} S^{-1} \vec{A}V - u [S(A^+_{\text{t}})^{-1} 2 M - A^+]^{-1} \vec{b} = \vec{\varepsilon}$$

Le procédé d'itération doit donc être appliqué au système (22) où  $V$  devient l'inconnue. Si on applique le procédé d'itération de Gauss on peut ramener l'étude de la convergence à celle de la matrice :

$$(2 M - A^+_{\text{t}} S^{-1} A^+)^{-1} A^+_{\text{t}} S^{-1} A$$

Nous allons montrer que les conditions de convergence sont faciles à réaliser.

*Condition a.*

Examinons sous qu'elles conditions la matrice  $A + S^{-1} A$  est symétrique et définie positive. Ses éléments sont de la forme :

$$\sum_{i=1}^n |a_{ik}| a_{ij} \frac{1}{S_i}$$

si donc  $|a_{ik}| = a_{ik}$ , la matrice est symétrique. Ceci exige que tous les coefficients du système soient positifs mais nous avons vu que par un calcul simple on se ramène à ce cas.

Supposons donc ces conditions remplies et montrons qu'alors :  $A + S^{-1} A$  est définie positive.

Il faut prouver que :

$$(23) \quad \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^n a_{ik} a_{ij} \frac{1}{S_i} \right) X_j X_k > 0$$

avec :

$$(24) \quad S_i = \sum_{k=1}^n |a_{ik}| + |b_i|$$

Or le premier membre de (23) s'écrit :

$$(25) \quad \sum_{i=1}^n \frac{1}{S_i} \left( \sum_{k=1}^n a_{ik} X_k \right) \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} X_j \right) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{S_i} \left( \sum_{k=1}^n a_{ik} X_k \right)^2$$

quantité positive puisque les  $S_i$  sont positifs.

En résumé la condition se réduit à :

*les  $a_{ik}$  sont positifs*

ce qui, redisons-le, peut être toujours réalisé.

*Condition b.*

Supposons la condition a) satisfaite, c'est-à-dire la matrice  $A + S^{-1} A$  définie positive. Ses éléments diagonaux sont donc les plus grands et nous pouvons exprimer la condition b) en comparant les éléments diagonaux des deux matrices :  $2M$  et  $A + S^{-1} A$ . En remarquant que  $m_k$  devient  $m^{-}_k$ , nous obtenons les conditions :

$$(26) \quad 2 m^{-}_k \geq \sum_{i=1}^n \frac{(a_{ik})^2}{S_i} \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

Si ces conditions sont réalisées nous pouvons très approximativement remplacer la matrice  $(2M - A^+, S^{-1}A^+)^{-1}$  par :

$$(27) \quad \frac{1}{2} M^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2m_1^-} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{2m_2^-} & & & \\ & 0 & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \frac{1}{2m_n^-} \end{bmatrix}$$

Mais de (26) et (15) résulte aussi que les nombres  $\frac{1}{2m_k^-}$  sont très voisins les uns des autres; nous pouvons dire par conséquent que la matrice :

$$(28) \quad \frac{1}{2} M^{-1} A^+, S^{-1} A$$

est très approximativement symétrique et très probablement définie positive.

Donc, pour obtenir la solution du système donné en utilisant la méthode d'itération à l'aide des tensions de dissymétrie et pour que le procédé soit convergent en appliquant la méthode d'itération de Gauss on doit :

- 1) transformer ce système comme il a été dit page 4, note 1;
- 2) satisfaire aux conditions (15), (15') et (26).

Les conditions (15) et (15') sont réalisées par une simple manipulation et (26) par construction en choisissant  $m_k^-$  et  $m_k^+$  suffisamment grands.

#### 4) Application à la table à calcul à courant alternatif.

La table à calcul à courant alternatif [11], [12], [13] était originellement destinée aux problèmes de transport et de distribution de l'énergie électrique [14]. Son application à ces problèmes augmentait constamment et elle passa bientôt dans les domaines des autres sciences. Cependant bien que la table à calcul fût principalement un appareil de type linéaire, on ne l'a pas utilisée avec succès pour résoudre les équations algébriques linéaires.

Les causes paraissent en être les suivantes :

d'abord, il est très difficile de trouver le réseau directement analogue au système donné et on ne peut représenter que les systèmes symétriques; ensuite, on n'avait pas trouvé de solution convenable pour assurer la symétrie des tensions ce qui est spécialement difficile dans le cas des réseaux analogues avec des conductances. Ce sont les principes de la symétrie spontanée et de l'itération à l'aide des tensions de dissymétrie, qui permettent l'emploi de la table à calcul dans le domaine des équations algébriques linéaires.

Le réseau analogue que l'on doit réaliser sur une table à calcul à courant alternatif, est celui schématisé dans la fig. 4. Nous allons maintenant expliquer le procédé avec plus de détails.

Tout d'abord on choisit une échelle pour les conductances, tenant compte des courants, et on réalise le réseau de la figure (4), en prenant en considération les conditions (26) <sup>(6)</sup>.

Toutes les tensions des générateurs  $G_k$  doivent être en phase. Le procédé d'itération a déjà été expliqué dans les chapitres précédents, mais, si l'on applique la méthode d'itération à l'aide des tensions de dissymétrie, on doit avant chaque changement de  $V_k$  ajuster la symétrie de la tension  $u$ , puisqu'il est nécessaire que cette symétrie ne soit pas détruite.

Si l'on veut appliquer le procédé d'itération qui utilise la valeur  $\Sigma d^2$ , ou  $\Sigma \varepsilon_k^2$  (évidemment la méthode des moindres carrés s'applique aussi aux tensions de dissymétrie) on doit préparer un dispositif auxiliaire (fig. 5). On applique des tensions  $d_i$  comme indiqué dans la figure. Les courants redressés passent le microampèremètre et le font dévier proportionnellement à  $\Sigma d^2$ , (ou  $\Sigma \varepsilon_k^2$ ). C'est la déviation de cet instrument qu'on doit ramener à zéro.

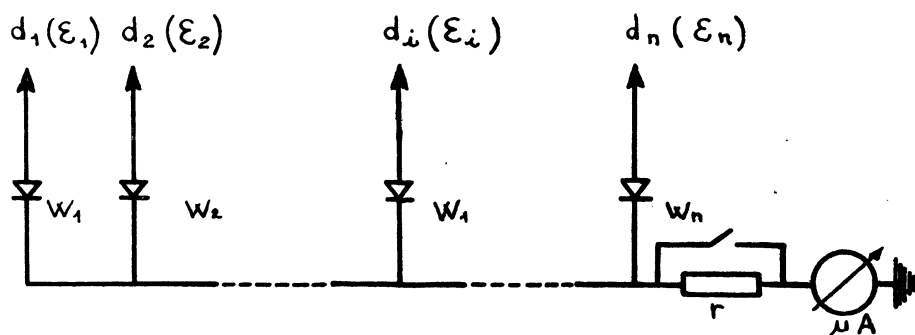


FIG. 5

$W_i$  redresseur (par exemple, "WESTECTOR" 6 W)  
 $r$  résistance de sûreté.

Le procédé d'itération quelconque terminé, on obtient les résultats par les mesures des tensions  $V_k$  et  $u$  et en appliquant les relations (5).

On peut appliquer les mêmes méthodes sur la table à calcul à courant continu, mais on doit toujours disposer de  $n + 1$  sources indépendantes, dont les tensions sont réglables par des potentiomètres.

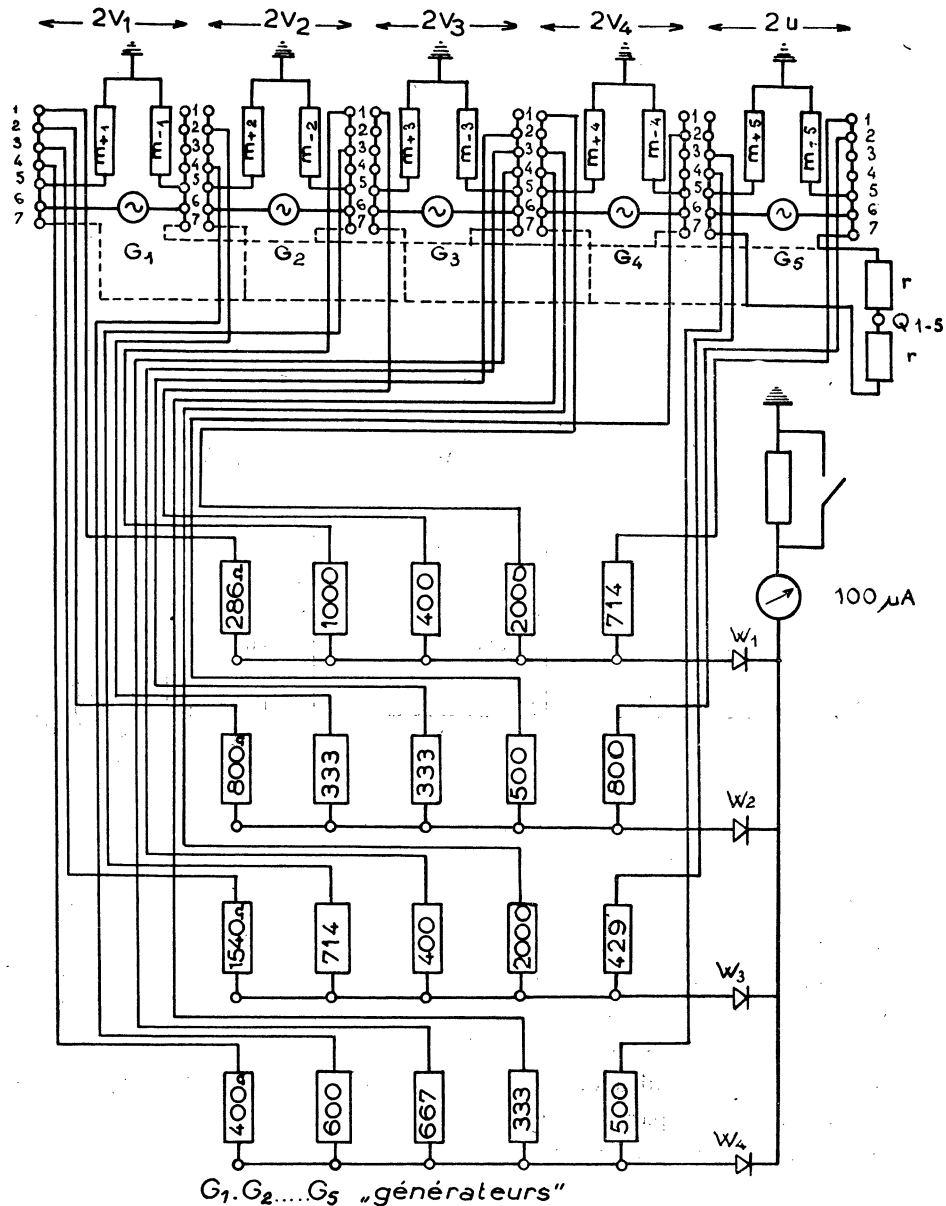
Voici un exemple qui a été résolu sur la table à calcul à courant alternatif à Belgrade (13) par la méthode de la symétrie spontanée.

Les équations données étaient :

$$\begin{aligned} 7 X_1 - 2 X_2 + 5 X_3 + X_4 &= 2,8 \\ 2,5 X_1 + 6 X_2 - 6 X_3 - 4 X_4 &= 2,5 \\ 1,3 X_1 - 2,8 X_2 - 5 X_3 + X_4 &= -4,66 \\ 5 X_1 + 4 X_2 - 3 X_3 + 6 X_4 &= -4 \end{aligned}$$

6. Si c'est nécessaire au point de vue de la méthode d'itération.

Le réseau analogue plus détaillé et les valeurs des résistances sont données sur la fig. 6. On a obtenu les valeurs suivantes :



$G_1, G_2, \dots, G_5$  „générateurs”

$W_1, W_2, W_3, W_4$  redresseurs Westector 6W

Les valeurs de  $1/a_{ik}$  sont multipliées par 2000

FIG. 6

$$X_1 = 0,198(0,2)$$

$$X_3 = 0,605(0,6)$$

$$X_2 = 0,408(0,4)$$

$$X_4 = -0,813(-0,8)$$

ce qui est bien d'accord avec les valeurs exactes (citées en parenthèses (<sup>7</sup>)).

### 5) Dispositif avec amplificateurs électroniques et coefficients représentés par des conductances.

Il est évident qu'on peut rendre automatique plusieurs des procédés précédents. On ne va proposer ici qu'un seul dispositif avec amplificateurs électroniques, dirigés par les tensions de dissymétrie  $\varepsilon_k$ . Ce type est intéressant parce qu'on peut facilement arranger les équations données pour assurer la stabilité. Le principe est représenté sur la figure 7.

Les amplificateurs  $A_k$  ( $k = 1, 2 \dots n$ ) donnent à leurs sorties, comme dans tous les autres dispositifs munis d'amplificateurs, les valeurs des tensions qui résultent aux maxima des tensions appliquées à leurs entrées. A l'aide de l'amplificateur  $A_{n+1}$  de gain  $-1$ , on obtient la tension  $-u$ . La symétrie de la tension  $u$  existe donc en permanence. On réalise le réseau analogue comme nous l'avons déjà expliqué.

Pour examiner la stabilité d'une telle machine, partons de l'équation

$$(21) \quad \vec{A}\vec{V} + (\vec{A} + \vec{S}(\vec{A}^+)^{-1} 2\vec{M}) \vec{\varepsilon} - u \vec{b} = 0$$

L'entrée de l'amplificateur  $A_k$  est réunie au point  $Q_k$  ce qui donne la relation

$$(29) \quad \vec{V} = \vec{G} \vec{\varepsilon}$$

$\vec{G}$  étant le gain d'un amplificateur. En éliminant  $\varepsilon$  entre (21) et (29) on obtient

$$\left( \vec{A} + \frac{\vec{A}^+}{\vec{G}} - \frac{\vec{S}(\vec{A}^+)^{-1} 2\vec{M}}{\vec{G}} \right) \vec{V} - u \vec{b} = 0$$

7. On sait que la précision peut être augmentée de la manière suivante : soit à résoudre le système  $\vec{A}\vec{X} = \vec{b}$  et supposons que nous ayons trouvé les valeurs approximatives  $\vec{X}'_k$  des composantes  $\vec{X}$ . Si l'on introduit ces valeurs dans le système proposé, celui-ci ne sera pas tout à fait satisfait. Calculons les erreurs  $\vec{\delta}_i$  dans chaque équation  $i$  à l'aide des équations suivantes  $\vec{\delta} = \vec{A}\vec{X}' - \vec{b}$  et posons  $\vec{\delta}$  à la place de  $\vec{b}$  du système donné. Nous obtenons donc le système suivant :  $\vec{A}\vec{y} = \vec{\delta}$  dont les solutions sont égales aux erreurs faites sur les inconnues  $\vec{X}_k$ . On peut vérifier cela en écrivant

$$\vec{A}\vec{y} = \vec{A}\vec{x}' - \vec{b}$$

d'où

$$\vec{A}(\vec{x}' - \vec{y}) = \vec{b}$$

Remarquons que les erreurs seront aussi calculées approximativement. Si l'on exige donc une grande précision, le procédé doit être appliqué plusieurs fois.

Si l'erreur  $\vec{y}$  doit être calculée à l'aide d'une machine analogue pour augmenter la précision il est nécessaire de multiplier  $\vec{\delta}$  avec un nombre positif  $c$  (par exemple 10) et de chercher la solution du système,  $\vec{A}\vec{y} = c\vec{\delta}$ . Evidemment les résultats  $\vec{y}_k$  doivent être divisés par  $c$ .

Si la matrice  $(S(A^+)^{-1} 2M - A^+)$  n'est pas singulière, on peut aussi écrire :

$$\left[ (S(A^+)^{-1} 2M - A^+)^{-1} A - \frac{I_n}{G} \right] \vec{V} - u (S(A^+)^{-1} 2M - A^+)^{-1} \vec{b} = 0$$

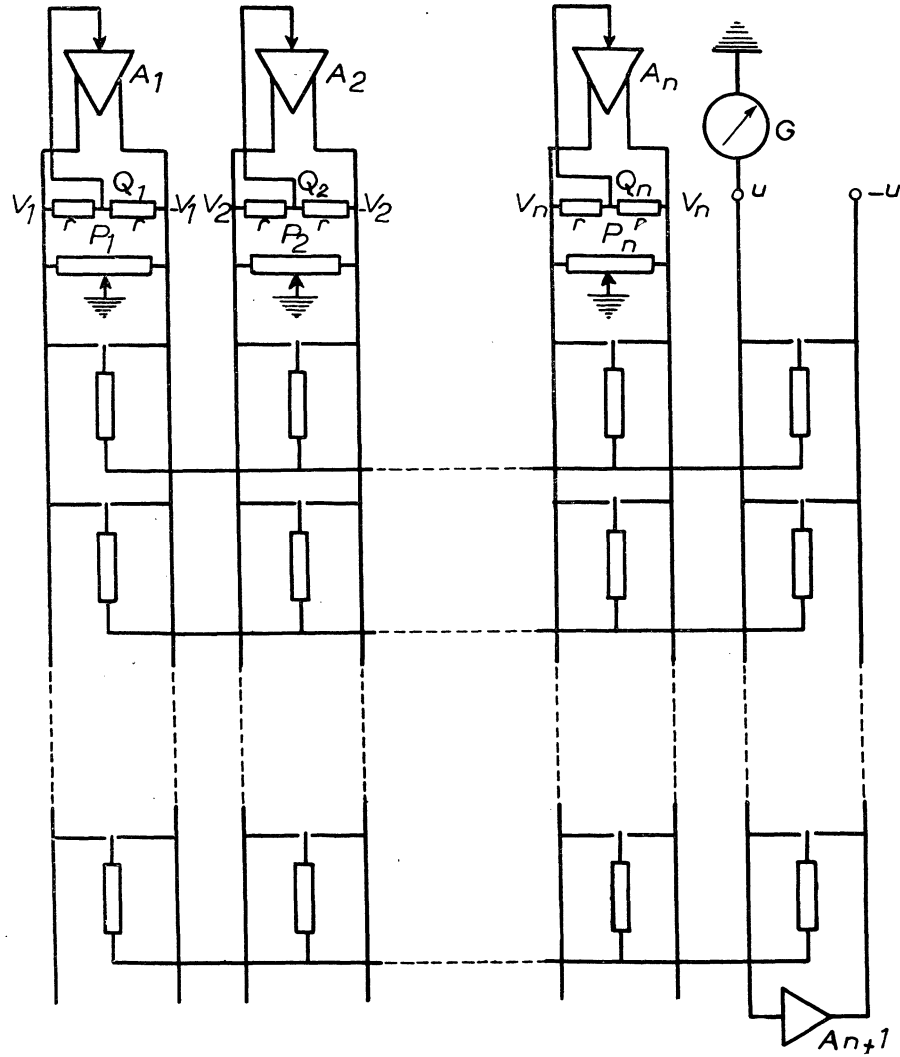


FIG. 7

$I_n$  étant la matrice unité d'ordre  $n$ . Si la matrice  $S$  n'est pas singulière on a finalement

$$(30) \left[ (2M - A^+ S^{-1} A^+)^{-1} A^+ S^{-1} A - \frac{I_n}{G} \right] \vec{V} - u [S(A^+)^{-1} 2M - A^+]^{-1} \vec{b} = 0$$

Si l'on représente par  $G(p)$  le coefficient isomorphe de transfert d'un amplificateur, l'image de l'équation (30) au sens de la transformée de Laplace est donnée par

$$(31) \left[ (2M - A^+ S^{-1} A^+)^{-1} A^+ S^{-1} A - \frac{I_n}{G(p)} \right] \vec{V}(p) - u [S(A^+)^{-1} 2M - A^+]^{-1} \frac{\vec{b}}{p} = 0$$

Si l'équilibre existe, il est défini par la limite de  $V_{(t)}$  lorsque  $t = \infty$  donc d'après la relation connue :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V_{(t)} = \lim_{p \rightarrow 0} p V_{(p)}$$

l'équilibre sera donné par la relation suivante :

$$(32) \left[ (2M - A^+ S^{-1} A^+)^{-1} A^+ S^{-1} A - \frac{I_n}{G(0)} \right] \vec{V}_\infty - u [S(A^+)^{-1} 2M - A^+]^{-1} \vec{b} = 0$$

On voit que cette équation coïncide avec le système à résoudre si  $G(0) \gg 1$ .

Le régime transitoire sera décrit par une somme d'exponentielles  $e^{p_v t}$  dont les arguments  $p_v$  sont les racines de (8).

$$(33) \det \left| (2M - A^+ S^{-1} A^+)^{-1} A^+ S^{-1} A - \frac{I_n}{G(p)} \right| = 0$$

Il sera stable si aucune racine de (33) n'est à partie réelle positive. Si nous posons  $\frac{1}{G(p)} = \mu$ , l'équation (33) devient

$$(34) \det \left| (2M - A^+ S^{-1} A^+)^{-1} A^+ S^{-1} A - \mu I_n \right| = 0$$

et les racines de (33) seront données par les  $n$  valeurs caractéristiques  $\mu_v$  de la matrice  $(2M - A^+ S^{-1} A^+)^{-1} A^+ S^{-1} A$  et par les relations suivantes :

$$(35) \frac{1}{G(p)} = \mu_v \quad (v = 1, 2, \dots, n)$$

Si les amplificateurs sont construits de telle manière qu'ils aient la propriété suivante

$$(36) \quad \Re G(p) < 0 \quad \text{lorsque} \quad \Re(p) > 0$$

( $\Re$  signifiant « partie réelle de »)

alors les racines caractéristiques  $p$  de (33) ou, ce qui revient au même, de (35), ne peuvent être dans le demi-plan  $\Re(p) > 0$  si  $\Re(\mu_v) > 0$ . Cela nous conduit à la conclusion :

*La machine sera stable si la matrice  $(2M - A^+ S^{-1} A^+)^{-1} A^+ S^{-1} A$  est définitive positive.*

Nous sommes donc parvenus aux mêmes conditions que celles obtenues dans l'étude d'itération à l'aide des tensions de dissymétrie (méthode de Gauss) (15), (26) et (28). Il faut procéder de la même façon.

---

7. L'inconnue est  $\frac{1}{G(p)}$



En considérant le dispositif de fig. 7 comme un servomécanisme linéaire à plusieurs variables [10] on pourrait conclure que  $2M - A + S^{-1}A +)^{-1} A + S^{-1}$  est la matrice d'un réseau correcteur. Cela est vrai et on peut influencer la stabilité du régime transitoire en changeant les valeurs des éléments de la matrice  $M$ , mais il n'est pas possible de séparer le réseau correcteur du réseau analogue. On peut arriver à la même conclusion en considérant la matrice  $(2M - A + S^{-1}A +)^{-1} A + S^{-1}$  qui s'exprime en fonction de  $M$  et  $A$  à la fois. On constate qu'il n'est pas possible de séparer le réseau correctionnel du réseau analogue, aussi bien sur le plan physique que sur le plan mathématique.

#### 6) Dispositif avec amplificateurs électroniques, les coefficients étant représentés par des potentiomètres en charge.

Toutes les machines à résoudre les équations algébriques linéaires avec amplificateurs, utilisent un réseau analogue avec des potentiomètres. Nous avons vu que, dans ce cas, les coefficients du système à résoudre doivent être inférieurs à 1. Les résistances du réseau sommateur sont très grandes pour faire fonctionner les potentiomètres à vide.

Nous proposons un réseau analogue avec des potentiomètres en charge (fig. 8). L'impédance appliquée à chaque potentiomètre n'est donc pas grande devant la résistance totale du potentiomètre, ce qui cause les tensions de dissymétrie  $\varepsilon_k$ . L'entrée de l'amplificateur  $A_k$  est réunie au point  $Q_k$ . La sortie est connectée au feeder  $f_k$ .

Les intensités  $I'_{ik}$  du courant qui passe dans un potentiomètre  $P_{ik}$  et  $I''_{ik}$  du courant qui passe dans la résistance du réseau sommateur sont données (fig. 9) par les relations suivantes :

$$(37) \quad V_k \pm \varepsilon_k - \frac{\gamma_{ik} - G}{\gamma_{ik}} I_{ik} - \frac{1}{\gamma_{ik}} (I'_{ik} - I''_{ik}) = 0$$

$$(38) \quad (I'_{ik} - I''_{ik}) \frac{1}{\gamma_{ik}} - \frac{1}{G} I'_{ik} \mp d_i = 0$$

d'où :

$$(39) \quad I'_{ik} = [(V_k \pm \varepsilon_k) (g + \gamma_{ik}) \mp g d_i] \frac{G \gamma_{ik}}{\gamma_{ik} (g + \gamma_{ik}) - G g}$$

$$(40) \quad I''_{ik} = \left[ (V_k \pm \varepsilon_k) g \mp \frac{g}{G} \gamma_{ik} d_i \right] \frac{G \gamma_{ik}}{\gamma_{ik} (g + \gamma_{ik}) - G g}$$

$G$  étant la conductance totale de chaque potentiomètre,  $g$  la conductance d'un élément du réseau sommateur et  $\gamma_{ik}$  la conductance d'une partie du potentiomètre  $P_{ik}$  comme il est indiqué sur la fig. 9.

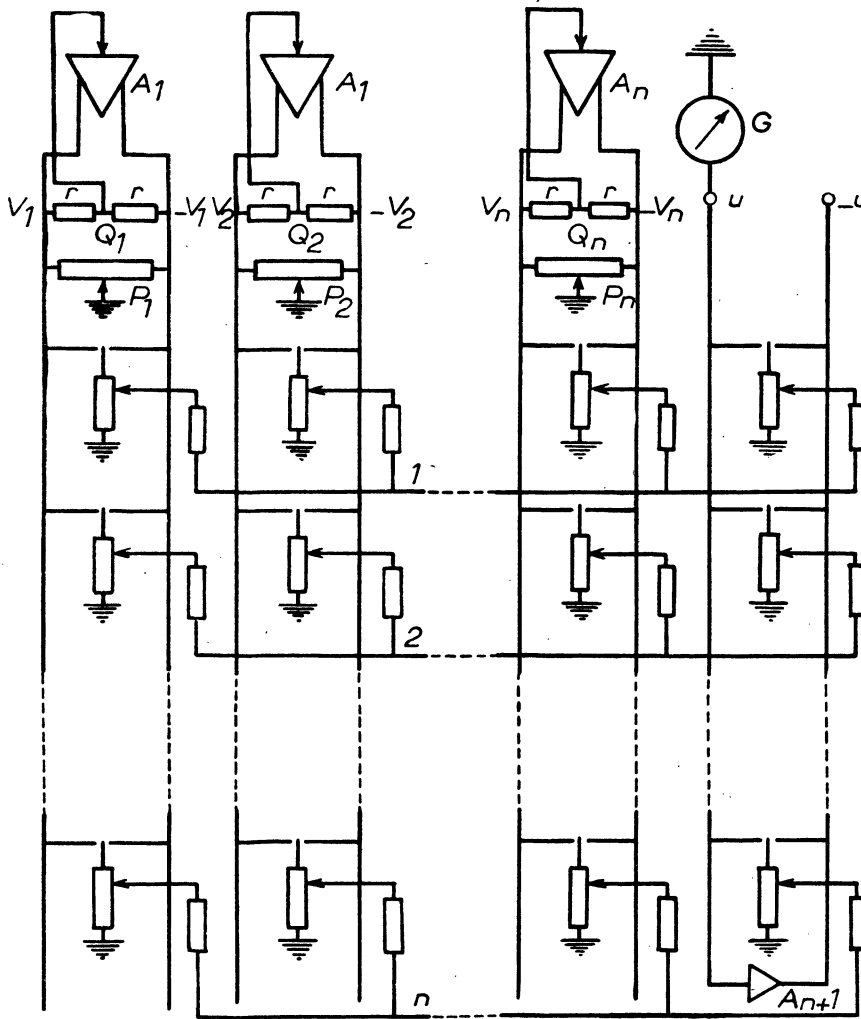


FIG. 8

Si l'on affiche chaque coefficient  $a_{ik}$  à l'aide de la tension du point  $S_{ik}$ ,  $H_i$  étant connecté à la masse, entre les conductances ci-dessus et les coefficients du système donné existe la relation suivante :

$$(41) \quad |a_{ik}| = \frac{G \gamma_{ik}}{\gamma_{ik}(g + \gamma_{ik}) - Gg}$$

qui exprime la condition que le rapport de la résistance entre le point  $S_{ik}$  et la masse à celle entre le point  $T_{ik}$  et la masse doit être égale à  $|a_{ik}|$ .

Grâce à (41) les équations (39) et (40) deviennent

$$(42) \quad I'_{ik} = [(V_k \pm \varepsilon_k)(g + \gamma_{ik}) \mp g d_i] a_{ik}$$

et

$$(43) \quad I_{ik} = \left[ (V_k \pm \varepsilon_k) g \mp \frac{g}{G} \gamma_{ik} d_i \right] a_{ik}$$

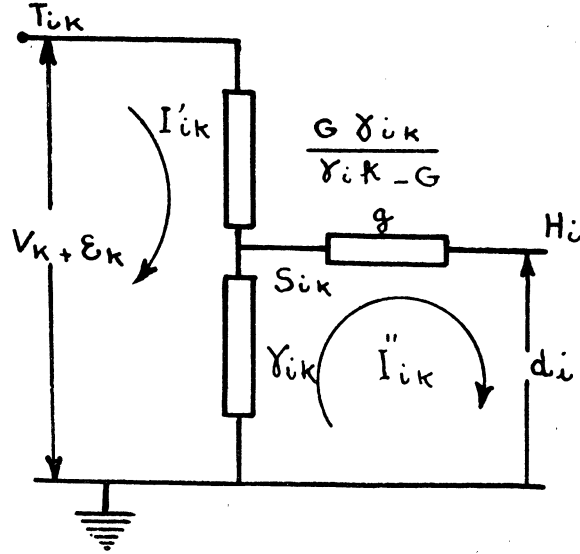


FIG. 9

Supposons que la symétrie de tension  $u$  soit tenue en permanence, les conditions que le même courant entre et sort de chaque générateur donnent

$$\sum_{i=1}^n [V_k \pm \varepsilon_k] (g + \gamma_{ik}) \mp g d_i] a_{ik} + (V_k + \varepsilon_k) m^+_k - (V_k - \varepsilon_k) m^-_k = 0$$

ou

$$(44) \quad V_k \left[ \sum_{i=1}^n (g + \gamma_{ik}) a_{ik} + m^+_k - m^-_k \right] + \varepsilon_k \left[ \sum_{i=1}^n (g + \gamma_{ik}) |a_{ik}| + m^+_k - m^-_k \right] = g \sum_{i=1}^n |a_{ik}| d_i$$

Sous les conditions

$$(45) \quad \sum_{i=1}^n (g + \gamma_{ik}) a_{ik} + m^+_k - m^-_k = 0 \quad (k = 1, 2 \dots n)$$

les équations (44) prennent la forme

$$(46) \quad \sum_{i=1}^n |a_{ik}| d_i = \frac{2}{g} m_k \varepsilon_k \quad (k=1, 2 \dots n)$$

où on a posé : 
$$2 m_k = \sum_{i=1}^n (g + \gamma_{ik}) |a_{ik}| + m_k^+ + m_k^-$$

Le déterminant  $|a_{ik}|$  étant supposé différent de zéro, on conclut que si  $\varepsilon_k = 0$  ( $k=1, 2 \dots n$ ) les  $d_i$  ( $i=1, 2 \dots n$ ) doivent aussi être nuls et vice-versa. On peut donc appliquer les tensions de dissymétrie aux entrées des amplificateurs, comme déjà indiqué à la fig. 8.

La valeur  $(g + \gamma_{ik}) a_{ik}$  est la conductance totale entre le point  $T_{ik}$  et masse (fig. 9), lorsque le point  $H_i$  est connecté à la masse. Les conditions (45) signifient donc comme dans le réseau analogue avec des conductances, que les sommes des conductances connectées au feeder positif et au feeder négatif de chaque tension  $V_k$  doivent être égales. Pour les satisfaire on est obligé d'abord d'afficher tous les coefficients  $a_{ik}$  (points  $H_i$  connectés à la masse) puis d'ajuster la symétrie des tension  $V_k$  en maintenant tous les points  $H_i$  réunis à la masse. Pour faire marcher la machine, on doit ensuite séparer toutes les barres  $H_i$  de la masse.

Posons maintenant que la somme de tous les courants qui se joignent à une barre  $i$  doit être nulle :

$$(47) \quad \sum_{k=1}^n \left[ (V_k \pm \varepsilon_k) g \mp \frac{g}{G} \gamma_{ik} d_i \right] a_{ik} - \left( u g \mp \frac{g}{G} \gamma_i d_i \right) b_i = 0$$

$i=1, 2 \dots n$

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} V_k + \sum_{k=1}^n |a_{ik}| \varepsilon_k - u b_i = \frac{d_i}{G} \left( \sum_{k=1}^n \gamma_{ik} |a_{ik}| + \gamma_i |b_i| \right)$$

$(i=1, 2 \dots n)$

Pour examiner la stabilité et pour faciliter le calcul, écrivons les équations (46) et (47) sous forme vectorielle :

$$(48) \quad A^+ \vec{d} = \frac{2}{g} \vec{M} \vec{\varepsilon}$$

et

$$(49) \quad A \vec{V} + A^+ \vec{\varepsilon} - u \vec{b} = \frac{S}{G} \vec{d}$$

$S_p$  étant la matrice diagonale  $(\sum_{k=1}^n \gamma_{ik} |a_{ik}| - \gamma_i |b_i|)$ .

En éliminant  $\vec{d}$  entre (48) et (49) on obtient

$$(50) \quad A\vec{V} + A^+ \vec{\varepsilon} - u \vec{b} = \frac{2}{gG} S_p (A^+)^{-1} M \vec{\varepsilon}$$

Si la matrice  $\left[ \frac{2}{gG} S_p (A^+)^{-1} M - A^+ \right]$  n'est pas singulière, on peut écrire l'équation (50) sous la forme

$$\left[ \frac{2}{gG} S_p (A^+)^{-1} M - A^+ \right]^{-1} A\vec{V} - u \left[ \frac{2}{gG} S_p (A^+)^{-1} M - A^+ \right]^{-1} \vec{b} = \vec{\varepsilon}$$

ou, si la matrice  $S_p$  n'est pas singulière :

$$(51) \quad \left( \frac{2}{Gg} M - A^+ S_p^{-1} A^+ \right)^{-1} A^+ S_p^{-1} A\vec{V} - u \left[ \frac{2}{gG} S_p (A^+)^{-1} M - A^+ \right]^{-1} \vec{b} = \vec{\varepsilon}$$

Le procédé d'itération s'effectue donc sur le système (51) comparable à (22). Le procédé d'analyse de la stabilité est par suite le même et les conditions seront :

$$(52) \quad \text{les } a_{ik} \text{ positifs}$$

$$(53) \quad \frac{2}{gG} m_k^- \geq \sum_{i=1}^n \frac{(a_{ik})^2}{S_{p_i}} \quad (k = 1, 2 \dots n)$$

Le régime transitoire sera donc stable si les conditions (52 et (53) sont satisfaites, les conditions (45) étant nécessaires en principe.

Si l'on prend la conductance  $G$  pour unité et qu'on exprime toutes les autres conductances en valeurs relatives, tous les  $\gamma_{ik}$  deviennent  $\gg 1$ . Il est alors évident qu'on peut choisir les valeurs  $m_k^-$  (c'est-à-dire la conductance totale du potentiomètre  $P_k$ ) et  $g$  afin que les conditions (53) soient toujours satisfaites. Il est aussi possible d'installer deux potentiomètres  $P_k$  : l'un ayant la valeur normale de la conductance et l'autre une conductance plus grande. On utiliserait toujours le premier potentiomètre. Si l'on trouvait que le système des équations n'est pas stable, il faudrait passer aux autres potentiomètres. Ainsi on pourrait éliminer de nos considérations les conditions (53).

Il est très important de remarquer qu'on peut influencer la stabilité en choisissant la valeur  $g$ . Evidemment  $g$  doit être inférieur à 1 en valeur relative. La valeur de  $g$  ne peut pas être changée au cours de l'exploitation de la machine.

Au point de vue de l'introduction des coefficients, il est préférable d'utiliser un potentiomètre à décades et un appareil de zéro ainsi que le montre la fig. 11.

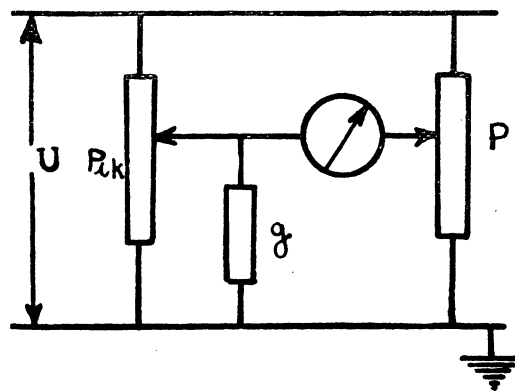


FIG. 10  
Potentiomètre à décades

On peut également rendre automatique le schéma de la fig. 10 à l'aide d'un servomécanisme. Le potentiomètre à décades sera alors remplacé par un potentiomètre linéaire étalonné.

### CHAPITRE III

#### DESCRIPTION D'UNE MAQUETTE PERMETTANT LA RÉALISATION D'UN SYSTÈME LINÉAIRE DE QUATRE ÉQUATIONS A QUATRE INCONNUES

---

Pour vérifier les relations (16) nous avons construit <sup>(1)</sup> une maquette permettant de résoudre les systèmes linéaires de quatre équations à quatre inconnues. Cette maquette est prévue pour l'application des méthodes suivantes

- 1) Méthode du contrôle de la symétrie des tensions
- 2) Méthode de la symétrie spontanée.

On peut appliquer deux méthodes d'itération :  
celle de Gaus ou celle des moindres carrés.

Le procédé d'itération n'est donc pas automatisé.

La figure 11 est une reproduction de la maquette. Son schéma principal est donné sur la figure 12.

L'alimentation est faite à l'aide d'un variac V. Les quatre tensions des inconnues  $V_k$  ( $k=1,2,3,4$ ) et la tension  $u$  des seconds membres sont réalisées par cinq secondaires d'un même transformateur. La valeur absolue de ces tensions est réglable grâce aux potentiomètres  $P_{xk}$  et  $P_u$ . La position des inverseurs  $J_k$  détermine les signes des inconnues. Le réseau analogue est identique à celui de la fig. 8.

Les amplificateurs  $A_i$ , amplifient les tensions d'erreur  $d_i$ ; les redresseurs  $R_i$  donnent des courants proportionnels à  $d_i^2$ . Le courant qui passe

dans le microampèremètre est donc proportionnel à  $\sum_{i=1}^{i=4} d_i^2$

Ce même microampèremètre connecté à l'amplificateur A et à son redresseur sert comme dispositif de zéro dans l'affichage des coefficients et le réglage de la symétrie des tensions.

La résistance totale de chaque potentiomètre pour l'affichage des coefficients est 20.000  $\Omega$ . La valeur de la résistance R, 50.000  $\Omega$ , ce qui entraîne que sa consommation ne peut être négligée. La résistance totale des potentiomètres  $P_k$  est 10.000  $\Omega$  c'est-à-dire du même ordre de grandeur que les résistances précédentes. Pour appliquer la méthode de la symétrie spontanée il est donc nécessaire de satisfaire aux conditions (45)

Pratiquement

1° on affiche les coefficients comme cela a été déjà expliqué (fig. 10).

---

1. Grâce au concours du Laboratoire d'Electrotechnique de la Faculté des Sciences. Nous tenons à remercier ici M. le professeur TEISSIÉ-SOLIER et ses collaborateurs en particulier MM. LAGASSE et SANCERY.

Pendant cette opération toutes les barres doivent être connectées à la masse. Comme il a été déjà dit l'amplificateur A sert pour l'indication du

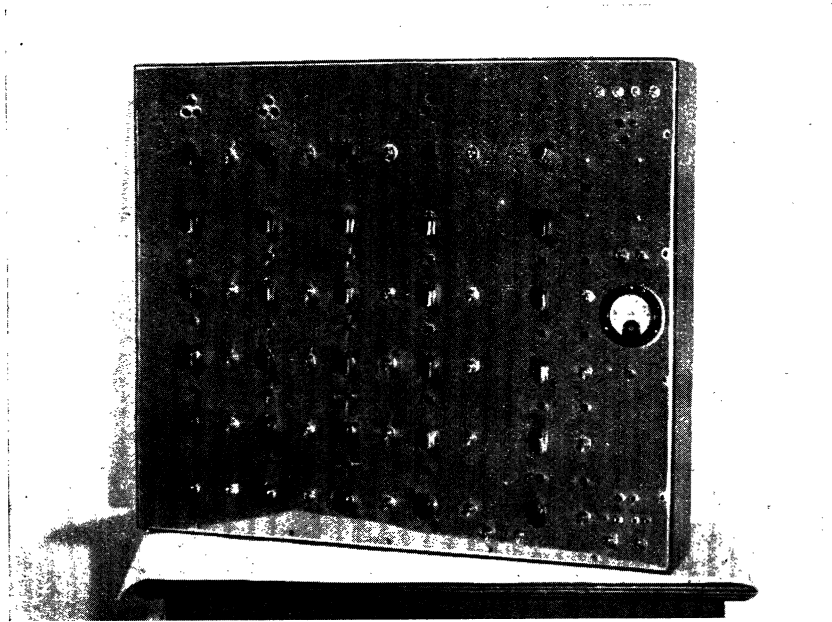


FIG. 11.

zéro. Le signe de chaque coefficients est obtenu au moyen d'un inverseur.

2° on satisfait aux conditions (45). Les coefficients et les signes posés et les barres connectées à la masse, on applique la tension du point  $Q_1$  à l'entrée de l'amplificateur A; à l'aide du potentiomètre  $P_1$  on annule cette tension. On a alors :

$$\sum_{i=G}^n (g + \gamma_{ii}) a_{i1} + m_{+1} - m_{-1} = 0$$

On refait cette opération en  $Q_2, Q_3, Q_4$ .

3° on applique le procédé l'itération choisi, après avoir séparé les barres de la masse.

Pour la méthode de Gauss on utilise l'amplificateur A.

Pour la méthode des moindres carrés on doit utiliser les quatre amplificateurs :  $A_1 A_2 A_3 A_4$  (fig. 12).

L'itération s'effectue en changeant les tensions  $V_k$  à l'aide des potentiomètres  $P_{zk}$  et c'est la déviation du microampèremètre que l'on doit faire tendre vers zéro.

Les valeurs des inconnues s'obtiennent en mesurant les tensions :  $V_1 V_2 V_3 V_4$  et  $u$  et en appliquant les formules (5).



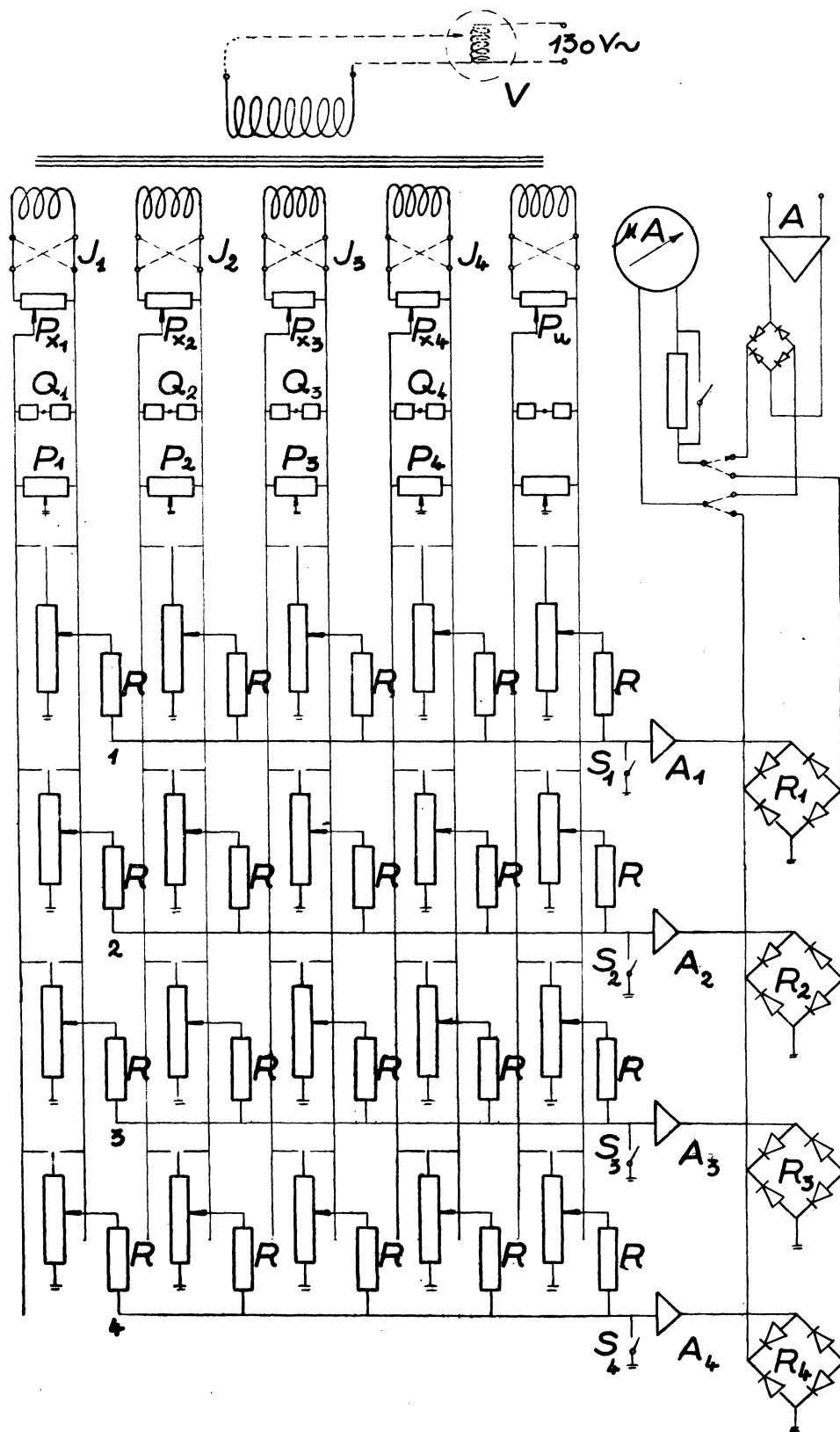


FIG. 12.

## CONCLUSION

---

Dans les méthodes précédemment utilisées, l'existence de la dissymétrie des tensions constituait toujours un obstacle et on s'attachait à l'éviter. Au contraire, dans les méthodes proposées dans ce mémoire, on utilise ces tensions de dissymétrie pour le procédé d'itération.

C'est la première fois que les points d'orientation sont introduits et qu'on utilise des conductances  $m^+_k$   $m^-_k$  de valeur assez faible pour que les dissymétries deviennent très remarquables. A l'aide des points d'orientation  $Q_k$  ces dissymétries des tensions sont réalisées et définies comme les tensions entre  $Q_k$  et la masse. Il a été également possible d'établir des relations entre  $\varepsilon_k$  et  $d_i$  [équ. (16) et (46)] ce qui nous a conduit à deux méthodes d'itération : méthode de la symétrie spontanée et méthode d'itération à l'aide des tensions de dissymétrie.

La deuxième méthode est surtout importante. D'abord, elle a rendu possible l'application pratique de la table à calcul courant alternatif à la résolution d'équations algébriques linéaires; puis, grâce à cette méthode, il a été possible de construire une machine électronique permettant la résolution d'équations algébriques linéaires, c'est-à-dire d'obtenir un servomécanisme linéaire à plusieurs variables, dont la stabilité peut être assurée sans aucun tâtonnement, bien que la matrice du système ne soit pas définie positive.

C'est également la première réalisation d'un réseau correctionnel pour la stabilisation d'un servomécanisme linéaire à plusieurs variables. Cependant, il n'est pas possible de séparer le réseau correctionnel du réseau analogue, ce qui nous a obligés à suivre un procédé d'analyse différent de ceux qui ont été déjà proposés.

---

## BIBLIOGRAPHIE

---

- [1] F.-H. RAYMOND : « Sur un type général de machines mathématiques algébriques » — Annales des Télécommunications, t. 5, n° 1, janvier 1950.
  - [2] L. M. HAUPT : « Solution of simultaneous equations through the use of the A. C. Network calculator » — The Review of Scientific Instruments, Vol. 21, n° 8.
  - [3] CLIFFORD E. BERRY, DOYLE E. WILCOX, SIBYL M. ROCK and H. W. WASHBURN : « A computer for solving linear simultaneous equations », Journal of Applied Physics, Vol. 17, April 1946, p. 262.
  - [4] F. J. MURRAY : « The theory of mathematical machines ». King's Crown Press, New York, 1948.
  - [5] Robert M. WALKER : « An analogue computer for the solution of linear simultaneous equations », Proceedings of the I.R.E., Vol. 37, n° 12.
  - [6] C. C. EAGLESFIELD : « Concerning computer for solving linear simultaneous equations », Journal of Applied Physics, Vol 17, déc. 1946, p. 1125.
  - [7] L. J. GUTENMACHER : « Les machines électriques multidimensionnelles à amplificateurs », Bull. Acad. Sciences U.R.S.S. (Ser. Tech.), 1947, n° 5.
  - [8] E. A. GOLDBERG, G. W. BROWN : « An electronic simultaneous equation solver » — Journal of Applied Physics, Vol. 19, n° 4 (avril 1948).
  - [9] B. A. SOKOLOFF : « Principe et réalisation d'une machine mathématique dite — Opérateur mathématique électronique (O.M.E.) » — Annales des Télécommunications, tome 5, n° 4 (avril 1950).
  - [10] F.-M. RAYMOND : « L'électronique et les mathématiques expérimentales » — L'Onde Electrique, n° 274 (janvier 1950).
  - [11] H. P. KUCHNI and R. G. LORRAINE : « A new A. C. Network Analyser », AIEE Trans., Vol 57, 1948, p. 67.
  - [12] F. COHEN : « Une nouvelle table à calcul à courant alternatif ». — Revue générale de l'électricité, t. 58, 1949.
  - [13] D. MITROVIC and R. TOMOVIC : « A. C. Network analyser of the electric power engineering Institute in Belgrade » — Supplement to « Elektroprivreda », n° 4, avril 1950.
  - [14] G. LYON : « Some experience with a British A. C. Network analyser » — The Proceedings of the Institution of Electrical Engineers, Part II, N° 60, Vol. 97.
  - [15] A. LICHNERSWICZ : « Algèbre et analyse linéaire ». Editeurs Masson et Cie, Paris, 1947.
-

## TABLE DES MATIÈRES

---

I. — PRINCIPES DES MACHINES EXISTANTES. . . . .	170
1. L'analogie directe. . . . .	170
2. L'analogie à l'aide de l'itération suivant la méthode de Gauss. . . . .	171
3. L'analogie à l'aide de l'itération par la méthode des moindres carrés. . . . .	175
4. Réalisation de l'automatisme à l'aide d'amplificateurs électroniques. . . . .	176
II. — MÉTHODES PROPOSÉES. . . . .	179
1. Méthode de contrôle de la symétrie des tensions. . . . .	179
2. Méthode de la symétrie spontanée. . . . .	181
3. Méthode d'itération à l'aide des tensions de dissymétrie. . . . .	183
4. Application à la table à calcul à courant alternatif. . . . .	186
5. Dispositif avec amplificateurs électroniques et coefficients représentés par des conductances. . . . .	189
6. Dispositif avec amplificateurs électroniques, les coefficients étant représentés par des potentiomètres en charge. . . . .	192
III. — DESCRIPTION D'UNE MAQUETTE. . . . .	198
IV. — CONCLUSION. . . . .	201

---