

R. HURON

**Contribution à l'étude de l'unicité des solutions du problème  
de représentation conforme de Helmholtz**

*Annales de la faculté des sciences de Toulouse 4<sup>e</sup> série*, tome 15 (1951), p. 5-78

[<http://www.numdam.org/item?id=AFST\\_1951\\_4\\_15\\_5\\_0>](http://www.numdam.org/item?id=AFST_1951_4_15_5_0)

© Université Paul Sabatier, 1951, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

ANNALES  
DE LA  
FACULTÉ DES SCIENCES  
DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE,  
POUR LES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET LES SCIENCES PHYSIQUES.

---

**CONTRIBUTION A L'ÉTUDE DE L'UNICITÉ DES  
SOLUTIONS DU PROBLÈME DE REPRÉSENTATION  
CONFORME DE HELMHOLTZ**

par **R. HURON**

**RÉSUMÉ**

---

Le but de notre étude est une généralisation de certains résultats sur l'unicité des solutions du problème de représentation conforme de Helmholtz.

Depuis les travaux de MM. LÉVI-CIVITA et VILLAT, on sait que ce problème est une traduction, sur le plan de l'analyse mathématique, du problème du sillage posé pour un obstacle tranchant heurté par un fluide parfait incompressible animé d'un mouvement plan permanent et soustrait à l'action de toute force extérieure.

Nous n'envisageons ce problème que sous l'angle mathématique. Les obstacles que nous avons considérés possèdent des points anguleux (ou pointes). Lorsque ces pointes sont tournées vers le fluide vif, les solutions si elles existent, donnent en ces points une vitesse infinie. Cette difficulté d'ordre physique est, comme l'a montré M. VILLAT, facilement levée en modifiant légèrement le schéma primitif de Helmholtz.

Dans l'ensemble notre travail est une illustration de la fécondité des méthodes mises au point par SCHAUDER et M. LERAY pour l'étude de l'existence et de l'unicité des solutions des équations fonctionnelles de la forme :

(1) 
$$x = F(x).$$

M. LERAY a lui-même montré comment cette méthode permettait d'aborder l'étude de l'existence et de l'unicité des solutions du système d'équations intégrales-différentielles auquel M. VILLAT avait ramené le

problème du sillage. Son étude se rapporte au cas où l'obstacle est lisse et placé dans un fluide indéfini. M. KRAVTCHENKO a repris ce problème dans le cas où l'obstacle est lisse et placé dans un canal rectiligne, M. OUDART dans le cas d'un canal de forme très générale<sup>(1)</sup>. L'introduction de parois limitant le courant fluide complique la mise en équation du problème qui en définitive repose sur les formules de M. VILLAT résolvant le problème de Dirichlet dans l'anneau. On sait que ces formules font intervenir les fonctions elliptiques construites à l'aide d'un paramètre  $q$  qui ici devient une fonctionnelle compliquée des caractéristiques géométriques du schéma.

Dans le cas où l'obstacle possède des pointes, il s'y ajoute des difficultés supplémentaires du fait de l'introduction de discontinuités dans la fonction qui définit l'obstacle. M. KRAVTCHENKO a réussi à établir l'existence des solutions du sillage posé pour certaines catégories d'obstacles de cette sorte. Il restait à étudier la question de l'unicité. C'est ce que nous avons tenté.

CHAPITRE I<sup>er</sup>. — Nous rappelons rapidement la mise en équation du problème. Chaque pointe  $P_j$  de l'obstacle peut être caractérisée par un nombre :  $1 - 2\alpha_j$ . ( $0 \leq \alpha_j < 1$ ).

Si  $1 - 2\alpha_i < 0$  la pointe est tournée vers le fluide mort (placé en arrière de l'obstacle).

Si  $1 - 2\alpha_i > 0$  la pointe est tournée vers le fluide vif (situé en avant de l'obstacle et entre les bords du canal et les lignes de jet qui forment le sillage a priori inconnu).

L'ensemble obstacle-canal est le squelette (C) du schéma de Helmholtz. Nous montrons comment à partir d'un squelette (C) donné les méthodes de M. VILLAT permettent de construire un nouveau squelette (C') et son sillage. Le problème revient alors à écrire :

$$(C') \equiv (C).$$

C'est la traduction de cette égalité symbolique qui donne le système intégral-différentiel de M. VILLAT.

CHAPITRE II. — Nous résumons très succinctement l'essentiel, pour notre objet, de la théorie de l'indice topologique de SCHAUDER et M. LERAY relative aux équations du type (1) où  $x$  est un élément d'un espace de Banach (E).

Nous mettons en évidence les critères d'unicité dont les points les plus délicats à préciser dans notre cas sont :

- a) ramener le système intégral-différentiel de M. VILLAT à une équation du type (1) et construire un espace (E) dans lequel opère la transformation ponctuelle  $F(x)$ ;

1. Les cas étudiés par M. OUDART sont cependant plus restrictifs que ne l'indiquent ses énoncés.

b) montrer que  $F(x)$  a une différentielle, au sens de M. FRÉCHET, au voisinage de toute solution  $x = a$  de (1).

c) montrer que l'équation aux variations :

$$(3) \quad x - a = dF(x - a)$$

a une solution unique.

CHAPITRE III. — Pour les obstacles polygonaux la différentielle de FRÉCHET existe quel que soit le signal des  $1 - 2\alpha_j$ . Pour les obstacles formés d'arcs de courbes il faut supposer  $1 - 2\alpha_j > 0$ . Dans ce dernier cas nous sommes amenés à établir une inégalité très générale qui contient certains résultats de MM. LERAY et KRAVTCHEKOV comme cas particuliers.

CHAPITRE IV. — Il est réservé au début de l'étude du problème (c).

Nous construisons le système aux variations de notre problème.

Nous montrons que la résolution de ce système est équivalente à celle d'un problème aux limites : détermination de la fonction  $\gamma(Z)$ , variation du potentiel complexe en un point fixe du plan du mouvement.

$\gamma(Z)$  est la fonction de M. WEINSTEIN, utilisée déjà par M. LERAY et M. KRAVTCHEKOV.

CHAPITRE V. — Nous résolvons le problème de Weinstein, c'est-à-dire la détermination de  $\gamma(Z)$  dans la demi-couronne (d) sur laquelle est représenté conformément le domaine occupé par le fluide en mouvement. Comme l'a montré M. LERAY, la résolution de ce problème fait appel à un lemme dû à M. FRIEDRICHS. Nous montrons que la nature de nos singularités n'altère pas la validité de ce lemme.

Dès lors la discussion de l'unicité des solutions se déroule en n'apportant que des modifications de détails, dans la forme que lui a donnée M. LERAY. Nous en déduisons que le problème de représentation conforme de Helmholtz posé pour un squelette formé d'un obstacle possédant des pointes et placé dans un canal à bords rectilignes parallèles possède une solution et une seule dans les cas suivants :

1<sup>er</sup> cas : *L'obstacle est une ligne polygonale symétrique par rapport à l'axe du canal.*

2<sup>me</sup> cas : *L'obstacle est formée d'arcs de courbes, il est symétrique par rapport à l'axe du canal et ses pointes sont tournées vers le fluide vif.*

3<sup>me</sup> cas : *L'obstacle est non symétrique par rapport à l'axe du canal, polygonal ou formé d'arcs de courbes, mais il est convexe par rapport au fluide vif.*

CHAPITRE VI. — Ce chapitre est un appendice dans lequel nous signalons pour le cas du bilame symétrique placé dans un canal à bords parallèles la propriété suivante de la solution unique du sillage :

*Si on représente conformément le domaine du fluide en mouvement sur le demi plan supérieur l'image de la ligne libre est un segment  $(l, b)$  [avec :  $b \geq l$ ] de l'axe réel :  $b$  est une fonction croissante de la largeur du canal.*

On en déduit que, dans le cas d'une lame placée perpendiculairement et symétriquement par rapport à l'axe du canal, la résistance *décroit* lorsque la largeur du canal augmente.

## BIBLIOGRAPHIE

---

- I. On pourra consulter : M. VILLAT. Aperçus théoriques sur la résistance des fluides. Collection Scientia, n° 38.
  - II. Commentarii Mathematici Helvetici, 8, 1936, p. 250.
  - III. Ann. de l'Ecole Normale Supérieure, 51, 1934, p. 45.
  - IV. Thèse, Paris, n° d'ordre 2.814, série A.
  - V. Sur le schéma de KIRCHHOF-HELMHOLTZ (Journal de Mathématiques, t. 22, 1943, pp. 245-321 et t. 23, 1944, pp. 1-37).
  - VI. « Sur l'existence des solutions du problème de HELMHOLTZ dans le cas des obstacles possédant des points anguleux. » Ann. de l'Ecole Normale Supérieure, 62, 1945, pp. 233-268.  
 « Sur l'existence des solutions du problème de représentation conforme de HELMHOLTZ : cas des arcs sans tangente. » Ann. de l'Ecole Normale Supérieure, 63, 1946, pp. 161-184.
  - VII. C. R. de l'Académie des Sciences. T. 228, pp. 290-392, Séance du 24 janvier 1949. — T. 228, pp. 357-358, Séance du 31 janvier 1949.
-

# CHAPITRE I

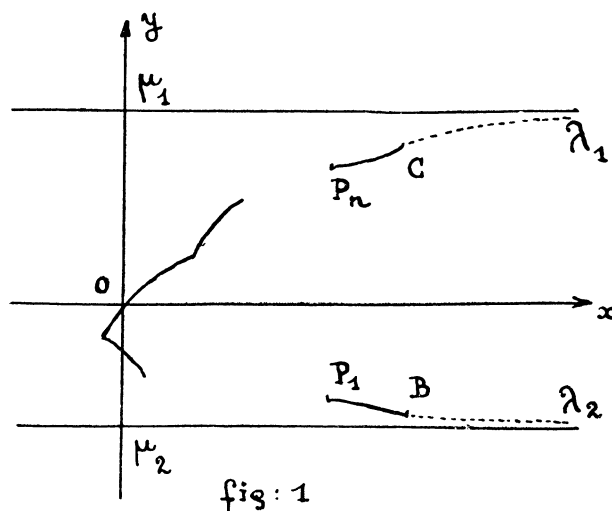
## MISE EN ÉQUATION DU PROBLÈME

---

### 1. — Hypothèse sur la nature de l'obstacle; squelette du schéma de Helmholtz.

Dans le plan de la variable complexe  $z = x + iy$  considérons une ligne  $\widehat{BC}$  formée d'arcs de courbes  $\widehat{BP_1}$ ,  $\widehat{P_1P_2}$ , ...  $\widehat{P_nC}$  (*fig. 1*) pourvus de tangentes en chacun de leurs points. L'arc  $\widehat{BC}$ , que nous appellerons l'obstacle est donc rectifiable. Nous le définirons par son équation intrinsèque :

$$(1) \quad \psi = \psi(l) \quad (\alpha \leq l \leq \beta)$$



qui relie l'abscisse curviligne  $l$  de  $\widehat{BC}$  à l'angle  $\psi$  que fait avec  $ox$  la demi-tangente à  $\widehat{BC}$  orientée dans le sens des  $l$  croissants;  $l = \alpha$  correspond au point B;  $l = \beta$  correspond au point C.

Nous supposons en outre :

$$(2) \quad 0 \leq \psi(l) \leq \pi$$

avec :

$$(3) \quad \psi(\alpha) \neq \pi, \quad \psi(\beta) \neq 0$$

enfin sur l'intervalle :  $(\alpha, \beta)$ ,  $\psi(l)$  ne pourra être identique ni à 0 ni à  $\pi$ .

Sur le plan géométrique nos hypothèses entraînent les conséquences suivantes :

1° Toute parallèle à  $ox$  ne rencontre  $\widehat{BC}$  qu'en un seul point, à moins que  $\widehat{BC}$  ne contienne des segments parallèles à  $ox$ . Cependant  $\widehat{BC}$  ne peut se réduire à une lame placée dans le fluide parallèlement à  $ox$ .

2° La demi-tangente en B ne peut être inversement parallèle à  $ox$ , et celle en C directement parallèle à  $ox$ .

La raison d'être des restrictions ainsi apportées aux variations de la fonction  $\psi(l)$  apparaîtra plus loin.

L'ordonnée  $y$  d'un point de  $\widehat{BC}$  est une fonction  $y = y(l)$  non décroissante de  $l$ . B est le point d'ordonnée minima et C le point d'ordonnée maxima.

L'obstacle ainsi défini est placé à l'intérieur d'une bande indéfinie à bords  $\mu_1$  et  $\mu_2$  rectilignes et parallèles à  $ox$ . La distance arithmétique de B à  $\mu_2$  est notée  $d_2$ , celle de C à  $\mu_1$  est notée  $d_1$ .

De (1) nous tirons :

$$dx = \cos \psi(l) dl; \quad dy = \sin \psi(l) dl$$

d'où :

$$(4) \quad \begin{cases} x = x_o + \int_a^l \cos \psi(l) dl \\ y = y_o + \int_a^l \sin \psi(l) dl \end{cases}$$

L'équation (1) ne définit donc BC qu'à une translation arbitraire près, il s'ensuit que la donnée des éléments :

$$(5) \quad \psi(l), \alpha, \beta, d_1, d_2;$$

ne définit le squelette  $\mathcal{C}$  (obstacle et parois) du schéma de Helmholtz qu'à une translation près.

Désignons par  $l_1, l_2, \dots, l_n$  les abscisses curvilignes des points  $P_1, P_2, \dots, P_n$  de  $\widehat{BC}$ .  $\psi(l)$  est continue sur chacun des intervalles :

$$\alpha \leq l \leq l_1; \quad l_1 \leq l \leq l_{j+1} \quad (j = 1, \dots, n-1); \quad l_n \leq l \leq \beta$$

Posons :

$$\begin{cases} \psi(l_j + o) - \psi(l_j - o) = (2\alpha_j - i) \pi \\ o \leq \alpha_j \leq 1 \end{cases} \quad (j = 1, \dots, n)$$

Les cas suivants peuvent se présenter :

$$1^\circ \quad -1 \leq 2\alpha_j - 1 < 0$$

$$a) \quad \alpha_j = 0$$

Alors

$$\psi(l_j + o) - \psi(l_j - o) = -\pi$$

$P_j$  est un point de rebroussement. A cause de (2) sa tangente ne peut être que parallèle à  $ox$ . D'autre part, son ouverture est tournée vers les  $x$  positifs; nous convenons de dire, et notre locution s'expliquera au N° 2 que le point de rebroussement est tourné vers le fluide vif.

$$b) \quad 0 < \alpha_j < \frac{1}{2}$$

Alors :

$$-\pi < \psi(l_j + o) - \psi(l_j - o) < 0$$

$P_j$  est un point anguleux, dont l'ouverture est encore tournée vers les  $x$  positifs. Nous disons que  $P_j$  est une pointe fermée vers le fluide vif.

$$2^\circ \quad 2\alpha_j - 1 = 0$$

$\alpha_j = \frac{1}{2}$ , l'obstacle est lisse en  $P_j$ .

$$3^\circ \quad 1 \geq 2\alpha_j - 1 > 0$$

$$a) \quad \frac{1}{2} < \alpha_j < 1$$

Alors :  $\psi(l_j + 0) - \psi(l_j - 0) = \pi$

Nous disons qu'en  $P_j$  la pointe est tournée vers le fluide mort.

$$b) \quad \alpha_j = 1$$

Alors :  $\psi(l_j + 0) - \psi(l_j - 0) = \pi$

$P_j$  est un point de rebroussement à tangente parallèle à  $ox$ , mais tournée vers le fluide mort.

Pour des raisons qui apparaîtront ultérieurement, nous supposons :

$$(6) \quad \alpha_j \neq 1$$

c'est-à-dire que nous écartons les obstacles à points de rebroussement tournés vers le fluide mort. En définitive, nous aurons :

$$(7) \quad \begin{aligned} \psi(l_j + 0) - \psi(l_j - 0) &= (2\alpha_j - 1) \pi \\ 0 &\leq \alpha_j < 1 \end{aligned} \quad (j = 1, 2 \dots n)$$

Enfin, nous admettrons que les arcs de courbes formant  $\widehat{BC}$  sont à courbure finie, extrémités comprises, ce qui se traduit par :

$$(8) \quad |\psi'(l)| \leq C l^\alpha \quad \text{pour} \quad \alpha \leq l \leq \beta$$

$\psi'(l_j + 0)$  et  $\psi'(l_j - 0)$  existent mais sont en général distincts.

## 2. — Énoncé du problème du sillage de Helmholtz.

Venant de l'infini en amont, le fluide en mouvement heurte l'obstacle  $\widehat{BC}$  fixe par rapport aux bords du canal. Pour échapper au paradoxe de d'Alembert<sup>(1)</sup> on est amené à poser qu'en un point  $O$  a priori inconnu de l'obstacle, la vitesse du fluide est nulle. La ligne de courant passant par ce point s'y bifurque en deux autres lignes de courants. L'une glisse le long de l'arc  $\widehat{OC}$  qui sera désigné par  $\omega_1$  l'autre le long de l'arc  $\widehat{OB}$  qui sera désigné par  $\omega_2$ .

En  $C$  et  $B$ , ces lignes de courant se détachent de l'obstacle et deviennent ce que l'on appelle alors les lignes libres ou lignes de jet :  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ . Il est capital de noter que la forme des lignes  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  est a priori inconnue, nous leur imposons seulement de se détacher en  $C$  et  $B$  et de ne pas se recouper en arrière de l'obstacle<sup>(2)</sup>. Dans ces conditions, l'obstacle et les lignes de jet définissent un domaine fluide s'étendant à l'infini en aval. On suppose ce fluide au repos, c'est le fluide mort.

1. Voir (I), p. 20.

2. On sait que dans le problème de la proue on ne suppose pas les points de détachement confondus avec les extrémités de l'obstacle (JKI, Chap. I, § 4).



Au contraire, le fluide vif est limité par  $(\mu_2)$ ,  $(\lambda_1)$ ,  $\widehat{BC}$ ,  $(\lambda_1)$  et  $(\mu_1)$ ; il occupe un domaine que nous désignerons par  $(\mathcal{A})$ .

Rapportons le squelette  $\mathcal{C}$  à des axes rectangulaires  $xoy$  ayant leur origine au point de bifurcation  $o$  (fig. 1) et soit :

$$(9) \quad f(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$$

le potentiel des vitesses qui existe étant donné les hypothèses faites et où les constantes additives arbitraires sont choisies de telle manière que  $f(o)$  soit nul. La fonction

$$f = f(z)$$

réalise la représentation conforme de  $(\mathcal{A})$  sur un domaine  $(F)$  du plan  $f = \varphi + i\psi$  (fig. 2).

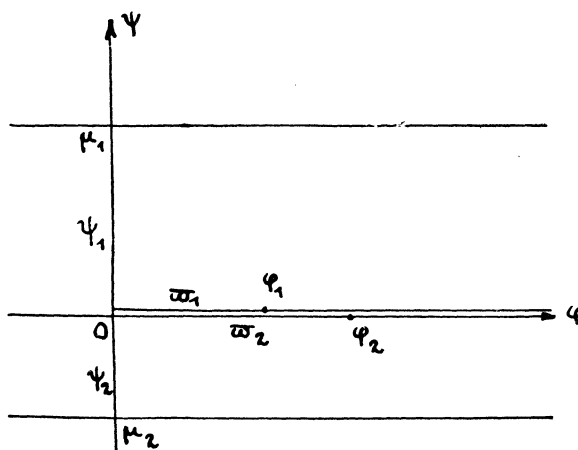


fig 2

Ce domaine a la forme d'une bande indéfinie :

$$-\psi_2 \leq \psi \leq \psi_1; \quad -\infty \leq \varphi \leq +\infty$$

entallée le long de la portion positive de l'axe  $o\varphi$ .

Dès lors avec MM. LERAY et KRAVTCHEVSKO on peut énoncer ainsi le problème du sillage :<sup>(3)</sup>

Définir dans  $(F)$  la fonction univalente  $z = z(f)$  de façon que :

1° Au domaine  $(F)$ ,  $z = z(f)$  fasse correspondre un domaine  $(\mathcal{A})$  du plan  $z$  compris entre  $\mu_1$  et  $\mu_2$ .

2° La portion de la frontière  $F'$  de  $(F)$  étrangère aux segments  $\varphi_1 \leq \varphi \leq +\infty$ ;  $\varphi_2 \leq \varphi \leq +\infty$  ( $\varphi_1 > 0$ ,  $\varphi_2 > 0$  de l'axe  $o\varphi$ , ait pour image dans le plan  $z$  le squelette  $\mathcal{C}$ . Ce squelette n'étant défini qu'à une translation près, on pourra prendre pour  $z = o$  le point de  $z(o)$ .

3° Au segment  $\psi = 0$ ,  $\varphi_1 \leq \varphi \leq +\infty$  (ou  $\varphi_2 \leq \varphi \leq +\infty$ ) de  $(F')$ ,  $z = z(f)$  fasse correspondre une ligne  $\lambda_1$  (ou  $\lambda_2$ ) inconnue a priori, située entre  $\mu_1$  et  $\mu_2$  et joignant le point C (ou B) au point  $x = +\infty$  et cela de manière à

3. JK<sub>2</sub>, p. 238.

conserver les longueurs <sup>(4)</sup>; en d'autres termes, on doit avoir

$$(10) \quad \left| \frac{dz}{df} \right| = 1 \text{ pour } \psi = 0 \quad \begin{cases} \psi_1 \leq \psi \leq +\infty \\ \psi_2 \leq \psi \leq +\infty \end{cases}$$

4° Aux points à l'infini de (F) où  $\varphi > 0$  on doit avoir

$$z = f + \text{série entière en } \frac{1}{f}$$

et

$$z = kf + \text{série entière en } \frac{1}{f}$$

aux points à l'infini de (F) où  $\varphi < 0$ ;  $k$  est une constante réelle a priori inconnue.

Il résulte de cet énoncé que : le domaine d'existence (F) de  $z = z(f)$  n'est pas donné a priori; il est caractérisé par quatre constantes positives  $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2$  a priori inconnues.

D'autre part, seule la portion  $\mathcal{C}$  de la frontière  $(\mathcal{A}')$  de  $(\mathcal{A})$  est une donnée du problème; la détermination de la portion restante  $\lambda_1 + \lambda_2$  de  $(\mathcal{A}')$  doit résulter justement de la condition isopérimétrique (10).

### 3. — Solution de M. Villat.

Les méthodes indiquées par M. VILLAT ramènent le problème à la résolution d'un système d'équations intégrales-différentielles. Voici les points essentiels de la méthode de M. VILLAT :

1° *Transformation du domaine (F) en une demi-couronne.*

Pour cela posons :

$$(11) \quad f = -\frac{\psi_2}{\pi} \text{Log.} \frac{t-a}{t_0-a} - \frac{\psi_1}{\pi} \text{Log.} \frac{t-b}{t_0-b} + i\psi_1$$

expression dans laquelle  $a$  et  $b$  désignent deux nombres réels tels que :  $a < -1, b > 1$ , où :

$$(12) \quad t_0 = \frac{a\psi_1 + b\psi_2}{\psi_1 + \psi_2} \text{ avec } -1 < t_0 < 1.$$

et où les logarithmes se réduisent à leur détermination arithmétique pour  $t$  réel supérieur à  $b$ .

On pose ensuite :

$$(13) \quad t = \frac{a+b}{4} + \frac{1}{2} \frac{p'(\omega_1 + \omega_3 - \frac{\gamma}{2} - \frac{\omega_1}{i\pi} \text{Log. } Z) - p'(\gamma)}{p(\omega_1 + \omega_3 - \frac{\gamma}{2} - \frac{\omega_1}{i\pi} \text{Log. } Z) - p(\gamma)}$$

4. Condition qui correspond au fait que l'intensité de la vitesse doit être constante et égale à l'unité sur les lignes libres (voir JK<sub>1</sub>, N° 7).

la fonction elliptique  $p(u_1 \omega_1 \omega_3)$  de Weierstrass étant construite à partir des périodes  $2\omega_1$  et  $2\omega_3$  telles que :

$$(14) \quad \begin{aligned} \omega_1 &= \int_{-1}^{+1} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(b-t)(t-a)}} \\ \frac{\omega_3}{i} &= \int_1^b \frac{dt}{\sqrt{(t^2-i)(b-t)(t-a)}} \\ \gamma &= 2 \int_b^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(t-b)(t-a)}} \end{aligned}$$

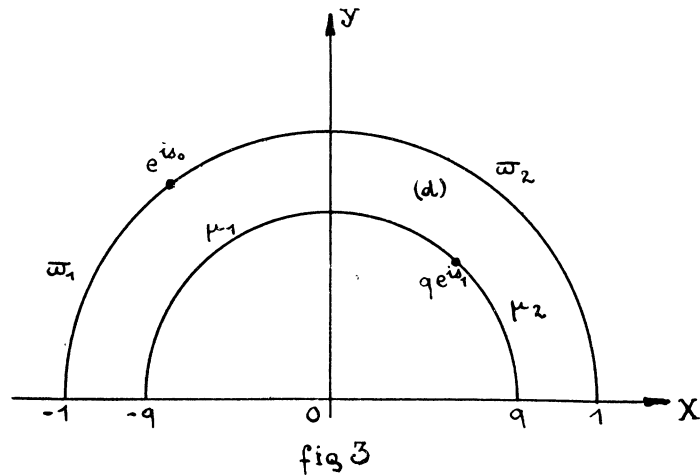
les intégrales (14) étant prises le long de l'axe réel du plan  $t$ . La relation (11) permet de substituer au groupe des quatre inconnues  $\psi_1, \psi_2, \varphi_1, \varphi_2$ , le groupe entièrement équivalent  $\psi_1 \psi_2 a b$ . D'un autre côté, le produit des transformations (11) (13) fait correspondre au domaine (F), la demi-couronne circulaire supérieure  $d$  du plan auxiliaire  $Z = X + iY$  :

$$q \leq |Z| \leq 1; Y \geq 0$$

avec

$$q = e^{-\frac{\pi \omega_3}{i \omega_1}}$$

Les éléments homologues sont mis en évidence sur la fig. 3.



Les points  $Z = e^{is_0}$  et  $Z = qe^{is_1}$  sont respectivement les images des points  $f = 0$ , ( $\psi = -\infty$   $\psi = 0$ ) de  $f$ . On démontre<sup>(5)</sup> que les groupes de paramètres  $a b \psi_1 \psi_2$ ;  $q, s_0, s_1$  et  $\psi_1$  sont entièrement équivalents.

Remarquons ce fait évident mais important que

$$(16) \quad f = f(Z)$$

est une fonction parfaitement déterminée dès que :  $a, b \psi_1$  et  $\psi_2$  sont connus.

5. JK1, N° 9.

2° Introduction de la fonction  $\Omega(Z)$  de Levi-Civita.

Posons par convention :

$$(17) \quad \frac{df}{dz} = e^{-i\Omega(Z)}$$

avec

$$(18) \quad \Omega(Z) = \Theta(X, Y) + iT(X, Y)$$

Si  $\Omega(Z)$  est connu, alors :

$$(19) \quad z = \int_{Z_0}^Z e^{i\Omega(Z)} df$$

Désignons par  $u$  et  $v$  les composantes de la vitesse d'une particule fluide. On sait que  $\frac{df}{dz} = u - iv$  de sorte que  $\Theta$  est l'argument du vecteur vitesse dans le plan des  $z$  et  $T = \log V$ ,  $V$  étant l'intensité de ce même vecteur. On vérifie facilement que la fonction inconnue  $\Omega(Z)$  doit vérifier dans la couronne ( $d$ ) les conditions suivantes :

- 1) être analytique, uniforme, régulière dans ( $d$ )
- 2)  $T = 0$  sur les segments  $(-1, -q)$  et  $(q, 1)$ ;

$$(20) \quad \Omega(q) = \Omega(-q) = 0$$

- 3)  $\Theta = 0$  sur  $|Z| = q$
- 4)  $T = -\infty$  au point  $e^{is_0}$ .

Il résulte de (20-2) que l'on peut prolonger  $\Omega(Z)$  à travers  $ox$  en appliquant le principe de la symétrie de Schwartz, et définir ainsi  $\Omega(Z)$  dans la couronne entière ( $C$ ).

Sur la circonférence  $|Z| = 1$  la partie réelle de  $\Omega(Z) = \Omega(e^{is})$  doit représenter toujours l'angle que fait le vecteur vitesse avec  $ox$ , lequel vecteur a pour support la tangente à  $BC$  au point correspondant. Ceci rappelé nous distinguerons deux cas :

## A. — L'obstacle est formé d'arcs de courbe.

Introduisons une fonction  $l(s)$  pour le moment arbitraire mais vérifiant cependant les conditions suivantes :  $l(s)$  est continue et croît de  $\alpha$  à  $\beta$  quand  $s$  varie de  $0$  à  $\pi$ . Il existe alors une suite croissante de valeurs de  $s$  :

$$0 < s_1 < s_2 < \dots < s_n < \pi$$

telle que :

$$l(s_j) = l_j \quad (j = 1, 2 \dots n)$$

Définissons  $s_0$  par :

$$(21) \quad s_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \psi[l(s)] ds = \frac{1}{\pi} \left\{ \int_0^{s_1} \psi[l(s)] ds + \dots + \int_{s_n}^\pi \psi[l(s)] ds \right\}$$

nous sommes assurés que :  $0 < s_0 < \pi$ . Posons enfin

$$(22) \quad \begin{cases} \Re \Omega(e^{is}) = \psi[l(s)] - \pi & \text{pour } 0 \leq s \leq s_0 \\ \Re \Omega(e^{is}) = \psi[l(s)] & \text{pour } s_0 \leq s \leq \pi \end{cases}$$

La partie réelle de  $\Omega(Z)$  est connue sur la circonférence  $|Z| = 1$ . Comme d'autre part cette partie réelle est nulle sur  $|Z| = q$ , il suffit pour déterminer  $\Omega(Z)$  d'appliquer les formules de M. VILLAT résolvant le problème de Dirichlet dans l'anneau <sup>(6)</sup>.

On obtient ainsi pour tout point  $Z$  intérieur à la couronne ou situé sur  $|Z| = q$  :

$$\Omega(Z) = \frac{i\omega_1}{\pi^2} \int_0^\pi \psi[l, s'] \left[ Z \left( \frac{\omega_1}{i\pi} \text{Log. } Z - \frac{\omega_1}{\pi} s' \right) + Z \left( \frac{\omega_1}{i\pi} \text{Log. } Z + \frac{\omega_1}{\pi} s' \right) \right] ds' \\ (23) \quad - i \text{Log.} \frac{\sigma \left[ \frac{\omega_1}{i\pi} \text{Log. } Z + \frac{\omega_1}{\pi} s_o \right]}{\sigma \left[ \frac{\omega_1}{i\pi} \text{Log. } Z - \frac{\omega_1}{\pi} s_o \right]}$$

Par un artifice classique (1), on rend cette formule valable pour  $|Z| = 1$  exception faite des points d'arguments :  $s_j$ ; ( $j = 0, 1, 2 \dots n$ ).

Pour  $Z = e^{is}$  on peut écrire en effet :

$$(24) \quad \left\{ \begin{aligned} \Omega(Z) &= \psi[l(s)] + \frac{2\tau_1 \omega_1}{\pi^2} \psi[l(s)] \text{Log. } Z \\ &+ \frac{i\omega_1}{\pi^2} \int_0^\pi \left\{ \psi[l(s)] - \psi[l(s')] \right\} \left[ \zeta \left( \frac{\omega_1}{i\pi} \text{Log. } Z - \frac{\omega_1}{\pi} s' \right) + \zeta \left( \frac{\omega_1}{i\pi} \text{Log. } Z + \frac{\omega_1}{\pi} s' \right) \right] ds' \\ &- i \text{Log.} \frac{\sigma \left( \frac{\omega_1}{i\pi} \text{Log. } Z + \frac{\omega_1}{\pi} s_o \right)}{\sigma \left( \frac{\omega_1}{i\pi} \text{Log. } Z - \frac{\omega_1}{\pi} s_o \right)} \end{aligned} \right.$$

On remarque que la condition (21) n'est autre que la condition de régularité de  $\Omega(Z)$  dans la couronne.

Connaissant  $\Omega(Z)$  nous en déduisons :

$$(19') \quad z(Z) = \int_{Z_0}^Z e^{i\Omega(Z)} \frac{df(Z)}{dZ} dZ$$

Donc la connaissance de :

$$\psi(l) \propto \beta$$

et la donnée *arbitraire* de :

$$l(s) \propto b \quad \psi_1 \psi_2 \quad (a < -1; b > 1)$$

permettent, à partir d'un squelette donné  $\mathcal{C}$ , de construire un nouveau squelette  $\mathcal{C}'$  et son sillage. (19) permet de calculer toutes les caractéristiques géométriques de  $\mathcal{C}'$  (<sup>7</sup>). L'obstacle sera un arc  $\widehat{B'C'}$  placé dans une bande limitée par deux droites parallèles  $\mu'_1$  et  $\mu'_2$ . Les lignes de jet seront les image des segments  $-1 \leq X \leq q$ ;  $q \leq X \leq 1$ ;  $Y = 0$  du plan  $Z$ . Comme  $T(X, 0) = 0$  pour  $q \leq |X| \leq 1$  la condition isopérimétrique (10) est satisfaite. Enfin l'angle de la tangente à  $\widehat{B'C'}$  avec  $ox$  prendra le long de  $\widehat{B'C'}$  la

6. (I) Chapitre II.

7. JK1, N° 12.

même succession de valeurs que le long de l'arc donné  $\widehat{BC}$ . Notons aussi que les lignes de jet seront telles que toute parallèle à  $ox$  qui les rencontre ne les coupera qu'en un seul point<sup>(8)</sup>. Tout danger de recoupement des lignes de jet en arrière de l'obstacle est donc écarté.

Pour résoudre notre problème, il reste à exprimer que  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$  coïncident.

Remarquons tout d'abord que la connaissance de  $s_0$  entraîne celle de  $t_0$ , donc celle du quotient  $\frac{\psi_2}{\psi_1}$ <sup>(9)</sup>.

D'autre part on tire de (19) :

$$(25) \quad \frac{dl'}{ds} = \varepsilon e^{-T(e^{is})} \frac{df(e^{is})}{ds} \quad (\varepsilon = \pm 1 \text{ pour } s \gtrless s_0)$$

$$\text{or} \quad df = -\frac{\psi_1 + \psi_2}{\pi} \frac{t - t_0}{(t-a)(t-b)} dt$$

de sorte que (25) ne définit la fonction croissante  $l'(s)$  qu'à une constante d'intégration additive et une constante multiplicative :  $\psi_1 + \psi_2$ , près. Pour que  $\widehat{BC}$  et  $\widehat{B'C'}$  aient même longueur il suffit de prendre ces deux constantes de telle manière que :

$$(26) \quad l'(0) = \alpha \quad l'(\pi) = \beta$$

en particulier  $\psi_1 + \psi_2$  est déterminé par :

$$\beta - \alpha = \int_0^\pi e^{-T(e^{is})} |df(s)|$$

En définitive,  $\psi_1$  et  $\psi_2$  sont parfaitement déterminés par la condition d'égalité des longueurs totales des obstacles et il ne reste comme inconnue que :  $l(s)$ ,  $a$  et  $b$ .

(25) et (26) donnent :

$$l'(s) = \int_0^s e^{-T(e^{is})} |df| + \alpha$$

Pour que  $\widehat{BC}$  et  $\widehat{B'C'}$  soient superposables, il faut

$$l'(s) \equiv l(s)$$

d'où :

$$l(s) = \int_0^s e^{-T(e^{is})} |df| + \alpha$$

Nous déterminerons  $a$  et  $b$  en écrivant que les distances  $d'_1$  et  $d'_2$  déduites de (19) sont égales aux distances  $d_1$  et  $d_2$  du squelette donné, on obtient :

$$(28) \quad \begin{cases} d_1 = \int_{-1}^{-q} \sin \Omega(X, 0) df(X, 0) + \psi_1 \\ d_2 = \int_q^{+1} \sin \Omega(X, 0) df(X, 0) + \psi_2 \end{cases}$$

8. JK1, N° 11.

9. JK1, N° 23.

En résumé, notre problème est ramené à la résolution par rapport à  $l(s)$ ,  $a$  et  $b$  du système intégral-différentiel de M. VILLAT :

$$(29) \quad \begin{cases} l(s) = \int_0^s e^{-T(e^{is})} |df| + \alpha \\ d_1 = \int_{-1}^{-q} \sin \Omega(X, 0) df(X, 0) + \psi_1 \\ d_2 = \int_q^1 \sin \Omega(X, 0) df(X, 0) + \psi_2 \end{cases}$$

B. — *L'obstacle est une ligne polygonale.*

Nous pouvons écrire :

$$(30) \quad \begin{aligned} \psi(l) &= \theta_1 && \text{pour } \alpha \leq l \leq l_1 \\ &\dots\dots\dots \\ \psi(l) &= \theta_i && \text{pour } l_{i-1} \leq l \leq l_i \quad (i=2, \dots, n) \\ &\dots\dots\dots \\ \psi(l) &= \theta_{n+1} && \text{pour } l_n \leq l \leq \beta \end{aligned}$$

Nous prendrons comme données du problème les nombres :

$$(31) \quad \begin{cases} \theta_1 & \theta_2 & \dots\dots\dots & \theta_{n+1} \\ \alpha & l_1 & \dots\dots\dots & l_n & \beta \\ d_1 & d_2 & & & \end{cases}$$

et comme inconnues les  $n$  nombres  $s_1, s_2, \dots, s_n$  tels que :

$$(32) \quad 0 < s_1 < s_2 < \dots < s_n < \pi$$

auxquels nous devons adjoindre :  $a, b, \psi_1$  et  $\psi_2$ .

Les idées essentielles étant identiques à celles utilisées dans le premier cas, nous exposerons celui qui nous occupe d'une manière plus concise.

Pour définir  $s_0$  nous avons d'après (21) :

$$(33) \quad \begin{aligned} s_0 &= \frac{1}{\pi} \left[ \int_0^{s_1} \theta_1 ds + \dots + \int_{s_n}^{\pi} \theta_{n+1} ds \right] \\ s_0 &= \frac{1}{\pi} \left[ \theta_1 s_1 + \sum_{i=1}^n \theta_{i+1} (s_{i+1} - s_i) + \theta_{n+1} (\pi - s_n) \right] \end{aligned}$$

De même on explicitera facilement  $\Omega(Z)$ ,  $\psi_1$  et  $\psi_2$  étant fixé comme précédemment, le système (29) deviendra ici :

$$(34) \quad \begin{cases} l_1 = \int_0^s e^{-T(e^{is})} |df| + \alpha \\ \dots\dots\dots \\ l_j = \int_{s_{j-1}}^{s_j} e^{-T(e^{is})} |df| + l_{j-1} \quad (j=2, 3, \dots, n) \\ \dots\dots\dots \\ d_1 = \int_{-1}^{-q} \sin \Omega(X, 0) df(X, 0) + \psi_1 \\ d_2 = \int_q^1 \sin \Omega(X, 0) df(X, 0) + \psi_2 \end{cases}$$

*Remarque.* — Les systèmes (29) et (34) montrent bien la différence entre les deux problèmes A et B. Dans le premier cas, il s'agit de déterminer la fonction  $l(s)$  et les deux nombres  $a$  et  $b$ , dans le second cas les inconnues sont uniquement des nombres :

$$s_1 s_2 \dots s_n a \text{ et } b$$

#### 4. — Propriétés des solutions.

Dans JK<sub>2</sub>, M. KRAVTCHENKO a démontré l'existence de solutions pour le système (29). Sa méthode ne distinguant pas les cas A et B du § précédent, on en déduit immédiatement l'existence de solutions pour le système (34).

Ces solutions jouissent des propriétés suivantes que nous ne faisons que mentionner<sup>(10)</sup> :

1° L'intersection des lignes libres  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  par toute parallèle à  $ox$  se réduit à un point unique;

2° Si  $d_1$  et  $d_2$  sont bornés inférieurement par une longueur fixe  $d$ ,  $a$  et  $b$  sont différents de  $-1$  et  $+1$ .

La relation  $d_1 = \infty$  (ou  $d_2 = \infty$ ) entraîne  $b = \infty$  (ou  $-a$ ) et réciproquement.

3° En admettant que  $\psi'(l)$  existe sur chacun des intervalles :

$$(35) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha \leq l \leq l_1 \\ l_j \leq l \leq l_{j+1} \\ l_n \leq l \leq \beta \end{array} \right. \quad (j = 1, 2 \dots n-1)$$

extrémités comprises et qu'elle est bornée, l'inconnue  $l(s)$  vérifie une condition  $\mathcal{L}_p(s)$ , sur tout l'intervalle  $0 \leq s \leq \pi$ . Cela veut dire que  $s$  et  $s'$  étant deux points de l'intervalle en cause, on a :

$$(36) \quad |l(s) - l(s')| \leq \frac{K}{\left| \text{Log} \frac{1}{s - s'} \right| p}$$

où  $p$  désigne un nombre positif aussi grand que l'on veut et  $K$  une constante bien déterminée, dépendant de  $\alpha, \beta, p$  et du maximum de :  $\psi'(l)$  sur  $\widehat{BC}^{(11)}$ .

4° A l'intérieur des intervalles (35)  $\frac{dl}{ds}$  existe et vérifie une condition  $\mathcal{L}_{p-1}(s)$ . Il en résulte que  $l(s)$  est lipchtizienne à l'intérieur des mêmes intervalles.

5° Dans le cas où :  $1 - 2\alpha_i > 0$  (pointe tournée vers le fluide vif)  $\frac{dl}{ds}$  s'annule pour  $s = s_i$  et vérifie une condition  $\mathcal{L}_{p-1}(s)$  dans le voisinage de cette valeur.

10. JK<sub>2</sub>, Nos 12 à 15 où on trouvera les démonstrations ou des renvois à JK<sub>1</sub>.

11. On sait qu'on doit à M. J. KRAVTCHENKO l'introduction des modules de continuité définis en (36).



Dans le cas où  $1 - 2\alpha_j < 0$  (pointe tournée vers le fluide mort)  $\frac{dl}{ds}$  devient infini pour  $s = s_j$ .

Au voisinage de  $s_j$  on peut écrire :

$$(37) \quad \frac{dl}{ds} = F(s) |s - s_j|^{1 - 2\alpha_j}$$

$F(s)$  désignant une fonction analytique en  $s_j$ . On en déduit facilement que :

$$|l(s) - l(s')| \leq C |s - s'|^\nu$$

sur tout l'intervalle  $0 \leq s \leq \pi$ ,  $\nu$  étant un nombre positif inférieur au plus petit des nombres  $2(1 - \alpha_j)$  <sup>(12)</sup> et  $C$  une fonctionnelle compliquée de  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\text{Max} |\psi'(l)|$  et de  $\frac{1}{d_1}, \frac{1}{d_2}$  bornée supérieurement au moyen des majorantes de ces paramètres.

6° Si la longueur  $l_j - l_{j-1}$  de l'arc  $\widehat{P_{j-1}P}$  de  $\widehat{BC}$  est bornée inférieurement, la différence  $s_j - s_{j-1}$  sera minorée par un nombre fixe  $\gamma$ , fonctionnelle de  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $p$ ,  $\frac{1}{d_1}, \frac{1}{d_2}$ ,  $\text{Max} |\psi'|$ .

---

12. On voit que c'est pour pouvoir postuler l'existence du nombre positif  $\nu$  que nous avons écarté le cas  $\alpha_i = 1$  (point de rebroussement à tangente parallèle à  $Ox$ , tourné vers le fluide mort).

## CHAPITRE II

### MÉTHODE GÉNÉRALE DE M. LERAY

---

#### 5. — Terminologie.

Dans les quelques lignes qui suivent nous rappelons la terminologie de M. LERAY <sup>(1)</sup>. C'est aussi celle adoptée par M. KRAVTCHENKO dans ses mémoires. Comme pour certaines démonstrations nous renvoyons à ses auteurs, nous avons cru devoir conserver leur terminologie.

##### A. — *Espaces abstraits et ensembles.*

Soit un espace abstrait linéaire (E) <sup>(2)</sup>, nous disons que cet espace est *normé* si tout élément  $x$  de (E) nous avons attaché un nombre positif non nul, noté  $\|x\|$  (lire : norme de  $x$ ) tel que <sup>(3)</sup> :

- a)  $\|x\| = 0$  entraîne  $x = 0$
- b)  $\|x + x'\| \leq \|x\| + \|x'\|$
- c)  $m$  étant réel on ait  $\|mx\| = |m| \cdot \|x\|$

Nous disons que (E) est *complet* s'il est possible de généraliser sur (E) le critère de convergence de Cauchy <sup>(4)</sup> c'est-à-dire si l'égalité :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|x_p - x_q\| = 0$$

entraîne l'existence d'un élément  $x \in (E)$  tel que :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|x - x_p\| = 0$$

Un espace linéaire, normé, complet, sera appelé espace de Banach.

Un ensemble d'éléments de (E) est dit : *compact* lorsque :

- ou bien il ne contient qu'un nombre fini d'éléments;
- ou bien s'il en contient une infinité, il est tel que tout sous-ensemble infini que l'on peut extraire admette au moins un élément limite appartenant à (E) <sup>(5)</sup>. Sur un tel ensemble le lemme de Borel-Lebesgue est vérifié <sup>(6)</sup>.

##### B. — *Transformations fonctionnelles.*

- a) Soit  $\omega$  un sous-ensemble de (E) ouvert et borné; soit  $\omega'$  sa fron-

1. J. LERAY et SCHAUDEUR. Topologie et équations fonctionnelles A.E.N.S., 1934.

2. Ou espace vectoriel.

3. Consulter BOURBAKI, livre III. Topologie générale, Chap. IX, § 3.

4. Rappelons qu'en général, on appelle « espace complet » un espace uniforme tel que tout filtre de Cauchy sur cet espace soit convergent. BOURBAKI, *loc. cit.*, chap. II, § 3.

5. L'élément limite appartenant à (E), l'ensemble est « compact en soi » au sens de M. CHITTENDEN (voir FRECHET. Espace abstrait, pp. 66 et suivantes). Pour les espaces compacts les plus généraux voir BOURBAKI, *loc. cit.*, chap. I, § 10.

6. Et réciproquement. BOURBAKI, *loc. cit.*

tière et  $\mathcal{F}(x)$  une transformation fonctionnelle définie sur l'ensemble fermé  $\mathcal{O} = \omega + \omega'$ ; supposons que le transformé  $\mathcal{F}(\omega)$  de  $\omega$  appartienne à (E). Nous disons que  $\mathcal{F}(x)$  est *complètement continue* lorsque :

1° elle est continue par rapport à son argument  $x$ ;

2°  $\mathcal{F}(\mathcal{O})$  est un ensemble compact C.

Il résulte du théorème d'Arzela<sup>(7)</sup> que si (E) est constitué par l'ensemble des fonctions possédant un même module de continuité et si on pose :

$$\|x\| = \text{Max } |x|$$

toute transformation  $F(x)$  opérant dans (E) est complètement continue dès qu'elle est continue.

b) *Différentielle au sens de M. Fréchet.*

Si  $F(x)$  opère sur un espace de Banach (E) nous disons que  $F(x)$  admet une différentielle de Fréchet au point  $a$ , s'il existe une transformation  $dF(x - a)$  linéaire, homogène par rapport à son argument et telle que :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{F(x) - F(a) - dF(x - a)}{x - a} = 0$$

## 6. — Théorie du degré topologique de Brouwer<sup>(8)</sup>.

Soit (E) un espace à  $n$  dimensions,  $\omega$  un ensemble ouvert et borné de (E),  $\omega'$  sa frontière et  $\mathcal{O} = \omega + \omega'$  son ensemble de fermeture. Soit  $F(x)$  une transformation continue définie sur  $\mathcal{O}$  faisant correspondre à tout point  $x$  de (E) un point  $x'$  du même espace. Posons

$$(38) \quad x' = F(x)$$

et désignons par  $F(\omega)$  l'image de  $\omega$  par (38), par  $F(\omega')$  celle de  $\omega'$ . On peut d'après M. BROUWER associer à chaque point  $x' = a$  de  $F(\omega)$  étranger à  $F(\omega')$  un entier positif ou négatif :

$$d(F, \omega, a)$$

appelé *degré topologique* et jouissant des propriétés suivantes :

a) Si  $d(F, \omega, a) \neq 0$  :  $a$  fait partie de  $F(\omega)$ ;

b)  $d(F, \omega, a)$  reste constant lorsque le point  $a$ ,  $F(\omega)$  et  $\omega$  varient continuellement, pourvu qu'au cours de la transformation envisagée  $a$  reste étranger à  $F(\omega')$ ;

c) Si  $\omega_1$  et  $\omega_2$  sont deux ensembles ouverts disjoints de frontières respectives  $\omega'_1$  et  $\omega'_2$  et si on pose  $\omega = \omega_1 + \omega_2$  on a :

$$d(F, \omega, a) = d(F, \omega_1, a) + d(F, \omega_2, a)$$

pourvu que  $a$  soit étranger à  $F(\omega'_1)$  et  $F(\omega'_2)$ .

## 7. — Généralisation de MM. Leray et Schauder : théorie de l'indice topologique.

(E) est maintenant un espace de Banach,  $x$  un élément de cet espace. Considérons l'équation fonctionnelle :

$$(39) \quad x = F(x)$$

7. VOLTERRA et PÉRÈS. Théorie générale des fonctionnelles, I, p. 20.

8. Mathematische Annalen, t. 71, 1911.

et associons lui la transformation :

$$(40) \quad y = x - F(x)$$

Soit  $\omega$  un domaine borné de (E) de frontière  $\omega'$ ,  $\omega'$  ne contenant aucune solution de (39). Si  $F(x)$  définie sur  $\bar{\omega} = \omega + \omega'$  est complètement continue, on peut d'après MM. LERAY et SCHAUDER étendre à la transformation (40) la définition et les propriétés du degré topologique. Dans ces conditions MM. LERAY et SCHAUDER appellent *indice total* des solutions de (39) contenues dans  $\omega$  le degré topologique :

$$d [x - F(x), \omega, o]$$

de la transformation (40) au point zéro.

Soit  $a$  une des solutions de (39) nous avons en posant dans (40) :

$$y = \Phi(x)$$

$$\Phi(a) = o$$

Considérons l'hypersphère :  $\|x - a\| \leq \rho$ ,  $\rho$  nombre positif non nul. S'il est possible de déterminer  $\rho$  pour que dans cette hypersphère  $a$  soit la seule solution de (35) nous disons que  $a$  est une solution isolée de  $\Phi(x) = o$

$\rho$  étant fixé, considérons les hypersphères  $S(\theta)$

$$\|x - a\| \leq \theta \rho \quad o \leq \theta \leq 1$$

alors  $d [\Phi, S(\theta), o]$  existe et d'après les propriétés du degré topologique est indépendant de  $\theta$ . Posons

$$i [\Phi, a] = \lim_{\theta \rightarrow 0} d [\Phi, S(\theta), a]$$

l'entier  $i$  est appelé : *l'indice topologique* de  $\Phi(x)$  au point  $a$ .

Admettons que (39) possède dans  $\omega$  un nombre fini de solutions  $x = a_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ). Pour chacune de ces solutions, nous avons une valeur de  $i [\Phi, a_j]$ , on a alors le théorème suivant :

**Théorème :** L'indice total de  $\Phi(x)$  dans  $\omega$  est égal à la somme des indices de  $\Phi(x)$  aux points  $a_j$ . C'est-à-dire que :

$$(41) \quad d [\Phi, \omega, o] = \sum_{j=1}^n i [\Phi, a_j]$$

### 8. — Application : critère d'unicité.

Admettons que nous ayons réussi à prouver que l'équation fonctionnelle (39) admette à l'intérieur d'un domaine borné  $\omega$  de (E), un nombre fini de solutions isolées et que pour chacune de ces solutions l'indice topologique soit égal à +1. Si d'autre part l'indice total est lui-même égal à +1, l'égalité (41) ne peut avoir lieu que si  $j = 1$ . L'équation (39) aura une solution unique dans  $\omega$ .

On voit donc que pour discuter de l'unicité des solutions il faut :

a) avoir résolu le problème de l'existence des solutions dans un domaine borné  $\omega$  de (E);

- b) avoir prouvé que ces solutions sont isolées dans le même domaine;
- c) savoir déterminer leur indice topologique;
- d) savoir déterminer l'indice total.

Le problème (a) ainsi posé peut être résolu par les méthodes de MM. LERAY et SCHAUDER. On se reportera aux mémoires de ses auteurs [3] ou aux notes de JK<sub>1</sub> n° 28.

Le problème (b) est résolu par l'affirmative si :

1° dans le voisinage de la solution  $x = a$  la transformation fonctionnelle  $F(x)$  admet une différentielle de Fréchet  $dF(x - a)$  complètement continue et si :

2° l'équation linéaire auxiliaire :

$$(42) \quad x - a - dF(x - a) = 0$$

appelée équation aux variations de (39) admet pour solution unique  $x = a$ .

Lorsqu'on a prouvé que les solutions sont isolées on est assuré de l'existence de l'indice  $i[\Phi, a]$ . Pour calculer cet indice, c'est-à-dire pour résoudre le problème (c) on remarque que  $i[\Phi, a]$  est égal à l'indice en  $a$  de la transformatoir linéaire :

$$(43) \quad x - a - dF(x - a)$$

indice plus facile à déterminer.

Le calcul effectif de cet indice, ainsi que celui de l'indice total, problème (d), repose sur l'utilisation de la deuxième propriété du degré topologique (N° 7 — b) : on construit une transformation auxiliaire  $F(x, k)$  où  $k$  est un nombre réel ( $0 \leq k \leq 1$ ) et telle que :

$$F(x, 1) = F(x)$$

$$F(x, 0) = F_1(x)$$

$F_1(x)$  étant une transformation particulièrement simple pour laquelle l'indice est connu.  $F(x, k)$  doit être supposée uniformément continue par rapport à  $k$ .

### 9. — Plan d'étude de l'unicité des solutions dans le problème de représentation conforme de Helmholtz.

Les indications précédentes permettent de fixer notre plan de l'étude de l'unicité des solutions sachant que leur existence a été établie par M. J. KRAVTCHEKO (JK<sub>2</sub>).

Nous aurons à déterminer un espace abstrait (E) jouissant des propriétés requises et sur lequel opèrera une transformation fonctionnelle déduite des systèmes (29) et (34) (9).

9. Cette transformation doit être définie sur  $G = \omega + \omega'$   $\omega$  étant un domaine borné de (E). Ceci conduit à la limitation des paramètres figurant dans (29) et (34). Cette limitation qui est indispensable pour l'établissement de l'existence des solutions a été étudiée par M. KRAVTCHEKO. D'autre part, pour pouvoir appliquer le théorème d'Arzela il est nécessaire de montrer que les fonctions  $l(s)$  correspondant à l'ensemble des obstacles de l'espèce considérée sont également continues. Ce fait, lui aussi nécessaire pour l'établissement de l'existence des solutions a été démontré par MM. LERAY et KRAVTCHEKO (voir JK<sub>2</sub>, N°s 12 à 15 et ci-dessus N° 4).

Nous devons montrer que cette transformation fonctionnelle admet une différentielle de Fréchet. Pour cela nous démontrerons que sous certaines conditions les équations (29) et (34) sont différentiables.

Nous étudierons ensuite l'équation aux variations de notre problème. La discussion de l'unicité des solutions de cette équation se ramènera à l'étude d'un nouveau problème que nous appelons problème de M. WEINSTEIN.

Ce problème résolu il nous sera facile de conclure.

# CHAPITRE III

## DIFFÉRENTIATION DES ÉQUATIONS DE M. VILLAT

### I. — CAS DES OBSTACLES POLYGONAUX.

10. — Nous avons vu au Chapitre I que le squelette du schéma était défini par la connaissance des nombres :

$$\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n+1} \text{ avec } 0 \leq \theta_i \leq \pi (i = 1, 2, \dots, n+1) \quad (1)$$

$$\text{et } \alpha, l_1, l_2, \dots, l_n, \beta, d_1 \text{ et } d_2$$

que nous considérons comme des données du problème. Les inconnues sont les nombres :  $s_1, s_2, \dots, s_n, a$  et  $b$ .

Donnons-nous deux systèmes d'éléments voisins :

$$(I) \quad \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n+1}; \alpha, l_1, \dots, l_n, \beta; s_1, \dots, s_n, a, b, d_1, d_2$$

$$(II) \quad \theta_1^*, \theta_2^*, \dots, \theta_{n+1}^*; \alpha^*, l_1^*, \dots, l_n^*, \beta^*; s_1^*, \dots, s_n^*, a^*, b^*, d_1^*, d_2^*,$$

A partir de (I) et (II) les seconds membres des équations (34) permettent de calculer les nombres :

$$L_1, \dots, L_n, D_1, D_2 \quad \text{et} \quad L_1^*, \dots, L_n^*, D_1^*, D_2^*$$

donc de faire correspondre à (I) et (II) deux schémas polygonaux nouveaux définis par :

$$(I') \quad \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n+1}, \alpha, L_1, \dots, L_n, \beta, a, b, D_1, D_2$$

$$(II') \quad \theta_1^*, \theta_2^*, \dots, \theta_{n+1}^*, \alpha^*, L_1^*, \dots, L_n^*, \beta^*, a^*, b^*,$$

Soit  $u$  le point de coordonnées :

$$(44) \quad \begin{aligned} x_1 &= \theta_1; \dots \quad x_{n+1} = \theta_{n+1} \\ x_{n+2} &= \alpha, \quad x_{n+3} = l_1, \dots \quad x_{2n+3} = \beta \\ x_{2n+4} &= s_1, \dots \quad x_{3n+3} = s_n \\ x_{3n+4} &= a, \quad x_{3n+5} = b, \quad x_{3n+6} = d_1, \quad x_{3n+7} = d_2 \end{aligned}$$

dans un espace euclidien  $\mathcal{E}$  de  $3n+7$  dimensions. (II) définit un point voisin  $u^*$  et  $u^* - u = \delta u$  sera défini par :

$$(45) \quad \begin{cases} \Delta \theta_i = \theta_i^* - \theta_i \quad (i = 1, 2, \dots, n+1) \\ \Delta \alpha = \alpha^* - \alpha; \quad \Delta \beta = \beta^* - \beta; \quad \Delta l_i = l_i^* - l_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \\ \Delta d_1 = d_1^* - d_1; \quad \Delta d_2 = d_2^* - d_2; \\ s_i^* - s_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \\ a^* - a \\ b^* - b \end{cases}$$

---

(1) Avec  $\theta_i \neq \pi$  et  $\theta_{n+1} \neq 0$  (Cf. n° 1).

La variation de  $u$  entraîne une variation de  $s_0$  dont la partie principale  $\delta s_0$  sera obtenue en différentiant (33) ; on obtient :

$$\delta s_0 = \frac{1}{\pi} \left\{ \Delta \theta_1 s_1 + \theta_1 (s_1^* - s) + \sum_{i=1}^n [\Delta \theta_{i+1} (s_{i+1} - s_i) + \theta_{i+1} (s_{i+1}^* - s_{i+1} - s_i^* + s_i)] + \Delta \theta_{n+1} (\pi - s_n) - \theta_{n+1} (s_n^* - s_n) \right\};$$

Pour l'étude de la différentiation du système (34) il suffit de faire les raisonnements sur la première des équations de ce système, les autres équations se traitant d'une manière absolument analogue.

Afin de mettre en évidence les termes présentant des singularités, il est classique de poser :

$$(48) \quad H(Z) = \Omega_0(Z) + \sum_{j=1}^n \frac{(2\alpha_j - 1)}{i} \text{Log.} \frac{Z - Z_j}{Z - \bar{Z}_j}$$

où :

$$\Omega_0(Z) = \Omega(Z) + i \text{Log.} \frac{\sigma \left( \frac{\omega_1}{\pi} \text{Log.} Z + \frac{\omega_1}{\pi} s_0 \right)}{\sigma \left( \frac{\omega_1}{\pi} \text{Log.} Z - \frac{\omega_1}{\pi} s_0 \right)} = \theta_0(X, Y) + i T_0(X, Y)$$

$$Z_j = e^{is_j}; \bar{Z}_j = e^{-is_j} \quad (j=1, 2 \dots n)$$

Il résulte de la définition de  $f(t)$  (Cf. N° 3 — 1°) que la détermination du logarithme à prendre est celle pour laquelle on a, si  $Z = 1$  :

$$\text{Log.} \frac{Z - Z_j}{Z - \bar{Z}_j} = i(s_j - \pi)$$

Posons :

$$\sum_{j=1}^n (2\alpha_j - 1) \text{Log.} \frac{e^{is} - e^{is_j}}{e^{is} - e^{-is_j}} = U(s) + i V(s)$$

Nous avons :

$$(2\alpha_j - 1) \text{Log.} \frac{e^{is} - e^{is_j}}{e^{is} - e^{-is_j}} = \text{Log.} \left| \frac{\sin \frac{s - s_j}{2}}{\sin \frac{s + s_j}{2}} \right| + i [s_j - \mu(s) \pi]$$

où  $\mu(s) = 1$  pour  $0 \leq s \leq s_j$

et  $\mu(s) = 2$  pour  $s_j \leq s \leq \pi$

Il en résulte que :

a) au voisinage des points  $Z = e^{is_j}$ ,  $U(s)$  se comporte comme :

$$\text{Log.} |s - s_j|^{2\alpha_j - 1} + F(s)$$



où comme il a été dit  $F(s)$  désigne une fonction analytique et régulière de ses arguments.

b)  $V(s)$  prend sur chaque segment  $s_{k-1} \leq s \leq s_k$  une valeur constante  $V_k$ , que cette fonction est discontinue en  $s_j$  et que sa discontinuité en ce point vient compenser celle de  $\Omega_0(e^{is})$ .

Il s'ensuit alors que :

$$\Re H(e^{is}) = \theta_1 + V_1 = \theta_2 + V_2 = \dots = C^{\text{te}}$$

et que sur le segment :  $s_{k-1} \leq s \leq s_k$

$$(50) \quad \Omega e^{is} = \theta_k + i \Im H(e^{is}) + i U(s) - i \operatorname{Log} \frac{\sigma \left[ \frac{\omega_1}{\pi} (s + s_0) \right]}{\sigma \left[ \frac{\omega_1}{\pi} (s - s_0) \right]}$$

La première équation du système (34) s'écrit alors :

$$(51) \quad L_1 = \int_0^{s_1} e^{-\Im H(e^{is})} e^{-U(s)} \frac{\sigma \left[ \frac{\omega_1}{\pi} (s + s_0) \right]}{\sigma \left[ \frac{\omega_1}{\pi} (s - s_0) \right]} \frac{df}{ds} ds + \alpha$$

Cette expression montre qu'au voisinage de  $s_j$  et à cause de la présence du terme  $e^{-U(s)}$ , le noyau de l'intégrale se comporte comme :

$$(52) \quad F(s) \cdot |s - s_j|^{1-2\alpha_j}$$

d'où :

$$\begin{aligned} \delta \Re H(e^{is}) &= \Delta \theta_i + \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{n-1} \left[ (s_j^* - s_j) \frac{\theta_{j+i} - \theta_j}{\pi} + (s_j - \pi) \frac{\Delta \theta_{j+i} - \Delta \theta_j}{\pi} \right] \\ &+ 2(s_n^* - s_n) \frac{\pi - s_n}{\pi} \end{aligned}$$

Cette fonction est indépendante de  $s$ . Donc la partie réelle de  $H(Z)$  vérifie sur le contour extérieur de la demi-couronne une condition du type :

$$\delta \Re H(e^{is}) = \sum_{i=1}^{2n+7} C_i \delta x_i$$

où les  $C_i$  sont des nombres bornés ne dépendant que des  $x_i$ .

D'autre part de :

$$H(Z) = \Omega_0(Z) - iU + V = \theta_0 + iT_0 - iU + V$$

et en se souvenant que  $T_0 = 0$  et  $U = 0$  pour  $z$  réel on en déduit que :

$$\delta \Im H(e^{is}) = 0.$$

pour  $z$  réel.

Enfin pour  $Z = qe^{is}$ ,  $\theta_0 = 0$  d'où :

$$\Re H(qe^{is}) = \Im \sum_{j=1}^n (2\alpha_j - 1) \operatorname{Log} \frac{qe^{is} - e^{is_j}}{qe^{is} e^{-is_j}} = V_q(s)$$

de sorte que :

$$\delta \Re H(q e^{is}) = \delta Vq(s)$$

est analytique et bornée sur le demi-cercle :  $|Z| = q$ ,  $Y = 0$ .

La fonction  $\delta H(Z)$  analytique dans la demi-couronne et réelle sur l'axe réel est prolongeable analytiquement dans la demi-couronne qui complète la première au-dessous de OX. Sa partie réelle étant connue sur les frontières nous pouvons l'exprimer à l'aide des formules de M. VILLAT qui résolvent le problème de Dirichlet dans l'anneau (2).

Nous en déduisons :

$$\begin{aligned} \delta \Re H(e^{is}) &= \frac{\omega_1}{\pi^2} \left\{ 2 \gamma_1 s \sum_{i=1}^{3n+7} C_i \delta x_i - \int_0^\pi \delta Vq(s') \left\{ \zeta_3 \left[ \frac{\omega_1}{\pi} (s-s') \right] \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \zeta_3 \left[ \frac{\omega_1}{\pi} (s+s') \right] \right\} \right\} ds' \\ \delta \Re H(e^{is}) &= \sum_{i=1}^{3n+7} A_i(s) \delta x_i \end{aligned}$$

où les  $A_i(s)$  sont des fonctions de  $s$  et des  $x_i$  seuls, analytiques et régulières de leurs arguments. Portant cette valeur de  $\delta \Re H(e^{is})$  dans (54) il vient :

$$\delta I_1 = \sum_{i=1}^{3n+7} A_i^1 \delta x_i$$

où les  $A_i^1$  sont des nombres bornés fonctions des  $x_i$  seuls.

#### b) Etude de

$$\delta I_2 = \int_0^s e^{-U(s)} \left[ \delta U(s) \right] F(s) ds$$

$F_1(s)$  gardant le sens général convenu, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \delta I_2 &= \int_0^{s_1} \left[ \delta F_1(s) |s-s_1|^{1-2\alpha_1} + F_1(s) |s-s_1|^{1-2\alpha_1} \text{Log. } |s-s_1| (s_1^* - s) \right. \\ &\quad \left. + F_1(s) |s-s_1|^{-2\alpha_1} (s_1^* - s) \right] F(s) ds \end{aligned}$$

(2) 1 p. 10 à 19. Si  $\Phi(s)$  est la valeur de  $\Omega(Z)$  sur le demi-cercle  $|Z| = 1$ ,  $Y \geq 0$  et  $\Psi(s)$  la valeur de  $\Omega(Z)$  sur  $|Z| = q$ ,  $Y \geq 0$ , les formules de M. VILLAT donnent :

$$\begin{aligned} \Omega(Z) &= \frac{i\omega}{\pi^2} \int_0^\pi \left[ \Phi(s') - \Phi(s) \right] \left[ \zeta \left( \frac{\omega_1}{i\pi} \text{Log. } Z - \frac{\omega_1}{\pi} s' \right) + \zeta \left( \frac{\omega_1}{i\pi} \text{Log. } Z \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\omega_1}{\pi} s' \right) \right] ds' + \Phi(s) + \frac{2\gamma_1 \omega_1}{\pi^2} \text{Log } Z \Phi(s) - i \frac{\omega_1}{\pi^2} \int_0^\pi \Psi(s') \left[ \zeta_3 \left( \frac{\omega_1}{i\pi} \text{Log. } Z \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\omega_1}{\pi} s' \right) + \zeta_3 \left( \frac{\omega_1}{2\pi} \text{Log. } Z + \frac{\omega}{\pi} s' \right) \right] ds' \end{aligned}$$

formule qui est valable sur le demi-cercle  $Z = 1$  si  $\Phi(s)$  vérifie en particulier une condition  $\mathcal{Q}_n(s)$ .

Etant donné l'hypothèse :  $1 - 2\alpha_1 > 0$  les intégrales écrites sont uniformément convergentes et nous pouvons écrire :

$$\delta I_2 = \sum_{i=1}^{3n+7} A_i^2 \delta x_i$$

les  $A_i^2$  étant des nombres bornés fonction des  $x_i$  seuls.

c) *Etude de  $\delta I_3$*

Cette étude est faite dans JK<sub>1</sub>, chapitre IV, n° 31. Il en résulte que  $\delta I_3$  est régulière même pour  $s = s_0$  et quel que soit le signe des nombres  $1 - 2\alpha_j$ . On peut écrire :

$$\delta I_3 = \sum_{i=1}^{3n+7} A_i^3 \delta x_i$$

où les  $A_i^3$  sont des nombres bornés fonctions des  $x_i$  seuls.

En résumé, dans le cas d'une pointe tournée vers le fluide vif nous avons :

$$(55) \quad \delta L_j = \sum_{i=1}^{3n+7} B_i \delta x_i$$

où les  $B_i$  sont des nombres bornés fonctions des  $x_i$  seuls.

## 12. --- Cas d'une pointe tournée vers le fluide mort : $1 - 2\alpha_j < 0$ .

Dans ce cas la différentiation sous le signe somme n'est plus légitime :  $\frac{dL(s_1)}{ds}$  est infini ainsi que les intégrales que l'on serait amené à écrire. Cependant la difficulté n'est qu'apparente, en fait on obtient une forme indéterminée.

Nous pouvons aussi raisonner directement, écrivons :

$$L_1 = \int_0^{s_1} (s_1 - s)^{1-2\alpha_1} F(s) ds$$

$F(s)$  étant régulière en  $s_1$  il est possible de trouver un nombre positif  $\sigma_1$  inférieur à  $s$  et distinct de  $s_1$ , tel que  $|s - \sigma_1|$  soit assez petit pour que sur l'intervalle :  $\sigma_1 \leq s \leq s_1$  on puisse écrire :

$$F(s) = F(s_1) + (s_1 - s) \Phi(s)$$

$\Phi(s)$  étant fonction régulière en  $s_1$ . Ecrivons alors :

$$L_1 = \int_0^{\sigma_1} (s_1 - s)^{1-2\alpha_1} F(s) ds + F(s_1) \frac{(s_1 - \sigma_1)^{2-2\alpha_1}}{2-2\alpha_1} + \int_{\sigma_1}^{s_1} (s_1 - s)^{1-2\alpha_1} \Phi(s) ds$$

soit :

$$L_1 = \int_0^{\sigma_1} (s_1 - s)^{1-2\alpha_1} F(s) ds + \int_{\sigma_1}^{s_1} (s_1 - s)^{1-2\alpha_1} [F(s_1) + (s_1 - s) \Phi(s)] ds$$

expression qui montre que  $\delta L_1$  est fini.

La formule (55) est donc vraie dans tous les cas.

La différentiation des deux dernières équations (34) ne présente pas de difficultés de sorte qu'en définitive nous pouvons affirmer que :

*les seconds membres des équations du systèmes (34) sont différentiables par rapport aux  $x_i$  quelle que soit la nature des pointes présentées par l'obstacle.*

### 13. — Différentielle de Fréchet.

Afin de pouvoir appliquer les théories de MM. LERAY et SCHAUDER nous écrirons le système (34) sous la forme suivante :

$$(56) \quad \begin{cases} s_1 = s_1 + \frac{1}{\lambda} \left[ l_1 - \alpha - \int_0^s e^{-T(e^{is})} |df| \right] \\ s_j = s_j + \frac{1}{\lambda} \left[ l_j - l_j - 1 - \int_{s_{j-1}}^{s_j} e^{-T(e^{is})} |df| \right] \quad (j = 2, 3, \dots, n) \\ \frac{1}{a+1} = \frac{1}{a+1} + \lambda \left[ \frac{1}{d_2} - \frac{1}{f'_j \sin \Omega(X, 0) df(X, 0) + \psi_2} \right] \\ \frac{1}{b-1} = \frac{1}{b-1} + \lambda \left[ \frac{1}{d_1} - \frac{1}{f'_{-j} \sin \Omega(X, 0) df(X, 0) + \psi_1} \right] \end{cases}$$

où  $\lambda$  est un paramètre fixe ayant les dimensions d'une longueur. On peut dire alors que (56) est équivalent à une équation unique du type de Schauder-Leray :

$$(57) \quad x = \mathcal{F}(x, \theta_j, l_k, \alpha, \beta, \frac{1}{d_1}, \frac{1}{d_2})$$

$$(j = 1, 2, \dots, n)$$

$$(k = 1, 2, \dots, n)$$

où  $x$  est l'élément générateur d'un espace euclidien  $E$  à  $n+2$  dimensions :  $s_1 s_2 \dots s_n, a$  et  $b$  et où  $\mathcal{F}$  est une transformation ponctuelle en  $x$  opérant sur  $E$ .

Posons

$$(58) \quad \|x\| = \sum_{j=1}^n |s_j| + |a| + |b|$$

$E$  est un espace borné complet particulier. Il résulte de JK<sub>2</sub> (pp. 255-262) qu'à tout  $x$  appartenant à une certaine hypersphère  $S$  dont le rayon est une fonctionnelle bornée des majorantes des données,  $\mathcal{F}$  fait correspondre un élément  $x'$  du même espace, intérieur à une hypersphère  $S'$  dont le rayon est encore borné supérieurement en fonction des majorantes des données.

Ceci posé prenons un point  $u[x, \theta_j, l_k, \alpha, \beta, \frac{1}{d_1}, \frac{1}{d_2}]$  de l'espace  $\mathcal{E}$  et posons :

$$\|u\| = \sum_{i=1}^{3n+7} |x_i|$$

le second membre de (57) lui associe le point  $x'(s'_1 \dots s'_n, a' l')$ ; de  $E$  sous ensemble de  $\mathcal{E}$ . Au point voisin

$$u + \delta u = u^* \left[ x + \delta x, \theta_j + \Delta \theta_j, l_n + \delta l_n, \frac{1}{d_1} + \Delta \left( \frac{1}{d_1} \right), \frac{1}{d_2} + \Delta \left( \frac{1}{d_2} \right) \right]$$

le second membre de (57) associe le point :

$$x'^* (s'_1{}^* \dots s_n'^*, a'^*, b'^*)$$

Désignons par :

$$\delta \mathcal{F} \left[ \delta x, x, \theta_j, l_k, \alpha, \beta, \frac{1}{d_1}, \frac{1}{d_2}, \Delta \theta_j, \Delta l_k, \Delta \alpha, \Delta \beta, \Delta \left( \frac{1}{d_1} \right), \Delta \left( \frac{1}{d_2} \right) \right]$$

la transformation ponctuelle obtenue en différentiant les seconds membres de (56). Cette transformation existe d'après les numéros 11 et 12 et est linéaire par rapport à  $\delta u$ . Posons :

$$\delta' x = \delta \mathcal{F}(\delta x_1, x, \dots)$$

alors

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}^* - \mathcal{F} - \delta \mathcal{F}\| &= \|x'^* - x' - \delta x'\| \\ &= \sum \left| s'^*_j - s'_j - \delta s'_j \right| + \left| \frac{1}{a'^*+1} - \frac{1}{a'+1} - \delta \left( \frac{1}{a'+1} \right) \right| \\ &\quad + \left| \frac{1}{b'^*+1} - \frac{1}{b'+1} - \delta \left( \frac{1}{b'+1} \right) \right| \end{aligned}$$

Or nous savons que :  $\delta s'_i \dots$  est la partie principale de  $(s'^*_j - s'_j) \dots$  donc :

$$\left| s'^*_j - s'_j - \delta s'_j \right| = \left| \sum_{i=1}^{i=3n+7} \varepsilon^j_i \delta x_i \right|; \dots$$

tous les  $\varepsilon^j_i$  tendant vers zéro avec les  $|\delta x_i|$ . Il résulte que :

$$\frac{\|\mathcal{F}^* - \mathcal{F} - \delta \mathcal{F}\|}{\|\delta u\|} \rightarrow 0 \quad \text{avec } \|\delta u\|$$

c'est-à-dire que :  $\delta \mathcal{F}(\delta x, x, \dots)$  est la différentielle au sens de M. FRÉCHET de  $\mathcal{F}(x, \theta_j, l_n, \alpha, \beta, 1/d_1, 1/d_2)$ .

## II. — CAS DES OBSTACLES FORMÉS D'ARCS DE COURBE.

### 14. — Posons :

$$\begin{aligned} \psi_1(l) &= \psi(l) && \text{pour } \alpha \leq l \leq l_1 \\ \dots \dots \dots & && \\ \psi_j(l) &= \psi(l) && \text{pour } l_{j-1} \leq l \leq l_j \quad (j=1, 2, \dots, n) \\ \dots \dots \dots & && \\ \psi_{n+1}(l) &= \psi(l) && \text{pour } l_n \leq l \leq \beta \end{aligned}$$

Prolongeons les  $\psi_j(l)$  en dehors de leur intervalle de définition. Plus précisément supposons, ce qui est toujours possible, que  $\psi_j(l)$  est une fonction à dérivée hœldérienne, définie même pour  $l \leq l_{j-1}$  et  $l \geq l_j$  et telle que :

$$\psi_j(l) = \psi(l) \quad \text{pour } l_{j-1} \leq l \leq l_j$$

Dans ces conditions les données du problème seront :

$$\psi_1(l) \psi_2(l) \dots \psi_{n+1}(l) \propto l_1 l_2 \dots l_n \beta d_1 d_2$$

Si  $l(s)$  est connue et résout le problème posé nous savons que cette fonction est continue et croît de  $\alpha$  à  $\beta$  lorsque  $s$  varie de  $0$  à  $\pi$ . Les nombres :  $s_1, s_2, \dots, s_n$  sont alors définis univoquement par les équations :

$$l(s_j) = l_j \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

Inversement, si nous nous donnons l'élément

$$(60) \quad x = x [l(s) \ s_1 \ s_2 \ \dots \ s_n \ a \ b]$$

les expressions :

$$\int_0^{s_1} e^{-T(e^{is})} |df| + \alpha$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\int_{s_{j-1}}^{s_j} e^{-T(e^{is})} |df| + l_{j-1} \quad (j = 2, \dots, n)$$

permettent de calculer des nombres  $l_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) et si l'élément choisi est une solution du problème nous devons avoir :

$$(61) \quad l_j = l'_j \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

En définitive, nous pouvons introduire  $n$  inconnues supplémentaires  $s_1, s_2, \dots, s_n$ , à condition de poser les  $n$  équations supplémentaires (61). Pour ramener le système ainsi obtenu à une équation formelle du type Schauder-Leray, nous l'écrivons sous la forme :

$$(62) \quad \left\{ \begin{array}{l} l(s) = \int_0^s e^{-\Im H(e^{is})} \prod_{j=1}^n \left| \frac{\sin \frac{s-s_j}{2}}{\sin \frac{s+s_j}{2}} \right|^{1-2z_j} \left| \frac{\sigma \left[ \frac{\omega_1}{\pi} (s+s_0) \right]}{\sigma \left[ \frac{\omega_1}{\pi} (s-s_0) \right]} \right| \frac{df}{ds} ds + \alpha \\ s_1 = s_1 + \frac{1}{\lambda} \left[ l_1 - \alpha - l(s_1) \right] \\ \dots \dots \dots \\ s_j = s_j + \frac{1}{\lambda} \left\{ l_j - l_{j-1} - \left[ l(s_j) - l(s_{j-1}) \right] \right\} \\ \quad \quad \quad (i = 2, \dots, n) \\ \frac{1}{a+1} = \frac{1}{a+1} + \lambda \left[ \frac{1}{d_2} - \frac{1}{f_q^1 \sin \Omega(X, 0) df(X, 0) + \psi_2} \right] \\ \frac{1}{b-1} = \frac{1}{b-1} + \lambda \left[ \frac{1}{d_1} - \frac{1}{f_q^{-1} \sin \Omega(X, 0) df(X, 0) + \psi_1} \right] \end{array} \right.$$

$$\text{avec : } H(Z) = \Omega_0(Z) + \sum \frac{2z_j - 1}{i} \text{Log} \frac{Z - Z_j}{Z - \bar{Z}_j}$$

et où  $\lambda$  est un paramètre ayant les dimensions d'une longueur.

*Différentiation des seconds membres de (62) au voisinage d'une solution (3).*

15. — Soit  $u$  un point de l'espace abstrait :

$$\varepsilon \left[ \psi_1(l) \psi_2(l) \dots \psi_{n+1}(l) \propto l_1 \dots l_n \beta \frac{1}{d_1} \frac{1}{d_2} \right. \\ \left. l(s) s_1 s_2 \dots s_n \frac{1}{a+1} \frac{1}{b-1} \right]$$

vérifiant (62). Le point voisin  $u^*$  aura pour coordonnées abstraites :

$$\psi_1^*(l) \dots \psi_{n+1}^*(l) \propto l_1^* \dots l_n^* \beta^* \frac{1}{d_1^*} \frac{1}{d_2^*} l^*(s) \quad s_1^*, \dots, s_n^* \frac{1}{a^*+1} \frac{1}{b^*-1}$$

et  $\delta u = u^* - u$  sera défini par :

$$(63) \quad \begin{cases} \Delta \psi_j(l) = \psi_j^*(l) - \psi_j(l) & (j = 1, 2, \dots, n+1) \\ \Delta \alpha = \alpha^* - \alpha & \Delta \beta = \beta^* - \beta \\ \Delta l_j = l_j^* - l_j & (j = 1, 2, \dots, n) \\ \Delta \left( \frac{1}{di} \right) = \frac{1}{d_i^*} - \frac{1}{d_i} & (i=1,2) \\ l^*(s) - l(s) \\ s_j^* - s_j & (j = 1, 2, \dots, n) \\ \frac{1}{a^*+1} - \frac{1}{a+1} \\ \frac{1}{b^*-1} - \frac{1}{b-1} \end{cases}$$

La variation de  $\psi_j[l(s)]$  aura pour partie principale :

$$(64) \quad \delta \psi_j[l(s)] = \Delta \psi_j[l(s)] + \psi_j[l(s)] \delta l(s) \quad (j = 1, 2, \dots, n+1)$$

En admettant, pour un instant, que les symboles écrits ont un sens,

(62<sub>1</sub>) donne :

$$(66) \quad \begin{cases} \delta l(s) = \Delta z + \int_0^s e^{-\Im H(e^{is})} \delta \left[ -\Im H(e^{is}) \right] \prod_{j=1}^n \left| \frac{\sin \frac{s-s_j}{2}}{\sin \frac{s+s_j}{2}} \right|^{1-2\alpha_j} \\ \times \left| \frac{\sigma \left[ \frac{\omega_1}{\pi}(s+s_0) \right]}{\sigma \left[ \frac{\omega_1}{\pi}(s-s_0) \right]} \cdot \frac{df}{ds} \right| ds \\ + \int_0^s e^{-\Im H(e^{is})} \delta \left\{ \prod_{j=1}^n \left| \frac{\sin \frac{s-s_j}{2}}{\sin \frac{s+s_j}{2}} \right|^{1-2\alpha_j} \right\} \left| \frac{\sigma \left[ \frac{\omega_1}{\pi}(s+s_0) \right]}{\sigma \left[ \frac{\omega_1}{\pi}(s-s_0) \right]} \cdot \frac{df}{ds} \right| ds \\ + \int_0^s e^{-\Im H(e^{is})} \prod_{j=i}^n \left| \frac{\sin \frac{s-s_j}{2}}{\sin \frac{s+s_j}{2}} \right|^{1-2\alpha_j} \delta \left| \frac{\sigma \left[ \frac{\omega_1}{\pi}(s+s_0) \right]}{\sigma \left[ \frac{\omega_1}{\pi}(s-s_0) \right]} \cdot \frac{df}{ds} \right| ds \end{cases}$$

3. Rappelons que d'après JK<sub>2</sub> on est assuré de l'existence de ces solutions.

expression dans laquelle  $\delta s_0$  doit être remplacé par sa valeur tirée de (21). Comme au N° 11 nous écrirons :

$$\delta l(s) = \Delta\alpha + \delta I_1 + \delta I_2 + \delta I_3$$

**16. — Cas d'une pointe tournée vers le fluide vif :  $1 - 2\alpha_j > 0$ .**

L'étude de  $\delta I_2$  et  $\delta I_3$  est identique à celle faite au N° 11. Pour  $\delta I_1$  il faut définir  $\delta \mathcal{H}(e^{is})$ . Nous avons maintenant :

$$(67) \quad \Re H(e^{is}) = \psi[l(s)] + \Re \sum_{j=1}^n \frac{2\alpha_j - 1}{i} \operatorname{Log} \frac{e^{is} - e^{is_j}}{e^{is} - e^{-is_j}}$$

Tenant compte des hypothèses faites au N° 14 relativement aux  $\psi_j(l)$  nous pouvons poser :

$$(68) \quad \delta \Re H(e^{is}) = \delta \psi[l(s)] + \sum_{j=1}^n \left[ (2\alpha_j - 1)(s_j^* - s_j) + 2(s_j - \pi)\delta\alpha_j - 2\Delta(s)\pi\delta\alpha_j \right]$$

$\Delta(s)$  désignant un nombre égal à zéro pour  $s_j \geq s$  et à l'unité pour  $s \geq s_j$ .  $\delta \Re H(e^{is})$  est continue en  $s$  sur tout l'intervalle  $(0, \pi)$ .

Comme au N° 11, nous remarquons que  $\delta \Re H(qe^{is})$  est analytique et bornée, que  $\delta \mathcal{H}(X, 0)$  est réelle analytique et bornée pour  $q \leq |X| \leq 1$ , donc que  $\delta H(Z)$  est parfaitement définie par un problème mixte harmonique direct, résoluble par les formules de M. VILLAT, formules qui permettent d'expliciter  $\delta \mathcal{H}(e^{is})$  comme une fonctionnelle linéaire et homogène par rapport aux coordonnées de  $\delta u$ .

**17. — Cas d'une pointe tournée vers le fluide mort :  $1 - 2\alpha_j < 0$ .**

La méthode utilisée au N° 12 n'est plus applicable. En effet reportons-nous aux calculs faits à ce numéro et plaçons-nous au voisinage de  $s_1$ . Nous aurons ici :

$$L_1(s) = \int_0^s (s_1 - s)^{1-2\alpha_1} F(s) ds$$

et le seul terme gênant sera :

$$f(s) = F(s_1) \int_{\sigma_1}^s (s_1 - s)^{1-2\alpha_1} ds \quad \text{avec } \sigma_1 \leq s \leq s_1$$

L'intégration donne :

$$f(s) = \frac{F(s_1)}{2-2\alpha} \left[ (s_1 - \sigma_1)^{2-2\alpha} - (s_1 - s)^{2-2\alpha} \right]$$

Cette expression contient le terme  $(s_1 - s)^{2-2\alpha}$  qui était nul au N° 12. En différentiant  $f(s)$  par rapport à  $s_1$  et  $\alpha$  nous introduirons le terme :

$$-(2-2\alpha)(s_1 - s)^{1-2\alpha}(s_1^* - s_1)$$

qui seul dans  $\delta f(s)$  tendra vers l'infini avec :  $\frac{1}{s_1 - s}$



*Conséquences.* — A partir de maintenant, et dans toute la suite lorsqu'il s'agira d'obstacles formés d'arcs de courbes, nous supposons  $1 - 2\alpha_j > 0$ . L'égalité étant exclue nous sommes assurés qu'au voisinage d'une solution et pour  $\delta u$  suffisamment petit, les  $1 - 2\alpha_j^*$  seront eux aussi positifs. Nous verrons d'ailleurs que l'hypothèse  $1 - 2\alpha_j > 0$  apparaît comme fondamentale dans les calculs suivants.

18. —  $\delta l(s)$  étant définie, la différentiation des seconds membres des autres équations (62) se fait sans difficulté. Par exemple la différentielle du second membre de (62)<sub>j+1</sub> s'écrira :

$$\delta s_j = s_j^* - s_j + \frac{1}{\lambda} \left\{ \Delta l_j - \Delta l_j - 1 - \left[ \partial l(s_j) \quad \partial l(s_j - 1) \right] \right\} \\ (j = 1, 2, \dots, n)$$

De même nous appellerons  $\partial \left( \frac{1}{a+1} \right)$  et  $\partial \left( \frac{1}{b-1} \right)$  les différentielles des seconds membres des deux dernières équations (62).

#### DIFFÉRENTIELLE DE FRÉCHET.

19. — Posons :

$$(69) \quad ||\psi_j(l)||_{1,\lambda} = \text{Max } |\psi_j(l)| + C\psi_j + \text{Max } |\psi'_j(l)| + C\psi'_j \\ (j = 1, 2, \dots, n+1)$$

et

$$(70) \quad ||l(s)|| = \text{Max } |l(s)| + G$$

$C\psi_j$ ,  $C\psi'_j$ , et  $C$  désignant les plus petites constantes telles que :

$$\begin{aligned} |\psi_j(l) - \psi_j(l')| &\leq C\psi_j |l - l'|_{\lambda} \\ |\psi'_j(l) - \psi'_j(l')| &\leq C\psi'_j |l - l'|_{\lambda} \\ |l(s) - l(s')| &\leq C |s - s'|_{\lambda} \end{aligned}$$

Posons encore :

$$(71) \quad ||u|| = ||x|| + \sum_{i=1}^{n+1} ||\psi_i(e)|| + |x| + \sum_{i=1}^n |l_i| + |\beta| + \left| \frac{1}{d_1} \right| + \left| \frac{1}{d_2} \right|$$

avec

$$(72) \quad ||x|| = ||l(s)|| + \sum_{i=1}^n |s_i| + \left| \frac{1}{a+1} \right| + \left| \frac{1}{b-1} \right|$$

$\mathcal{E}$  est dès lors un espace de Banach et (62) est équivalent à une équation fonctionnelle unique :

$$(73) \quad x = \mathcal{F} \left[ x, \psi_1(e), \dots, \psi_{n+1}(l), x, l_1, \dots, l_n, \beta, \frac{1}{d_1}, \frac{1}{d_2} \right]$$

du type de Schauder-Leray.

Il résulte de JK<sub>2</sub> (pp. 255-262) qu'à tout  $x$  appartenant à une certaine hypersphère  $S$  dont le rayon est une fonctionnelle bornée des majorales des

données  $\mathcal{F}$  fait correspondre un élément  $x'$  du même espace, intérieur à une hypersphère  $S'$  dont le rayon est encore borné supérieurement en fonction des majorantes des données.

Posons :

$$x^* = \mathcal{F}^* = \mathcal{F} [x + \delta x, \psi_1(l) + \Delta \psi_1(l) \dots]$$

Remarquons que  $x^*$  ne coïncide pas nécessairement avec  $x + \delta x$ , en général nous aurons :

$$x^* = x^* [L^*(s) S^*_1 S^*_2 \dots S^*_n A^* B^*]$$

Désignons par :

$$\delta \mathcal{F} [\delta x, x, \psi_1(e) \dots \psi_{n+1}(e) \alpha l_1 \dots l_n \beta \frac{1}{d_1} \frac{1}{d_2} \\ \Delta \psi_1(e) \dots \Delta \psi_{n+1}(e) \Delta \alpha l_1 \dots \Delta l_n \Delta \beta \Delta \left( \frac{1}{d_1} \Delta \frac{1}{d_2} \right) ]$$

la transformation fonctionnelle obtenue en différentiant les seconds membres de (62).

Cette transformation existe d'après les N<sup>os</sup> 15 à 18 si  $1 - 2\alpha_j > 0$ . Elle est linéaire par rapport aux composantes de  $\delta u$ . Nous poserons :

$$\delta x' = \delta \mathcal{F} (\delta x_1 \ x \dots)$$

Dès lors :

$$\| \mathcal{F}^* - \mathcal{F} - \delta \mathcal{F} \| = \| x^* - x - \delta x \|$$

c'est-à-dire d'après (72) :

$$(74) \quad \| L^*(s) - l(s) - \delta l(s) \| + \sum | S^*_j - s_j - \delta s_j | \\ + \left| \frac{1}{A^*+1} - \frac{1}{a+1} - \delta \left( \frac{1}{a+1} \right) \right| + \left| \frac{1}{B^*-1} - \frac{1}{b-1} - \delta \left( \frac{1}{b-1} \right) \right|$$

Il faut montrer que :

$$\frac{\| x^* - x - \delta x' \|}{\| \delta u \|} \rightarrow 0 \quad \text{avec} \quad \| \delta u \|$$

Ce qui revient à prouver successivement que :

$$(75) \quad \frac{\| L^*(s) - l(s) - \delta l(s) \|}{\| \delta u \|} \rightarrow 0 \quad \text{avec} \quad \| \delta u \| \\ \frac{| S^*_j - s_j - \delta s_j |}{\| \delta u \|} \rightarrow 0 \quad \text{avec} \quad \| \delta u \| \\ \frac{\left| \frac{1}{A^*+1} - \frac{1}{a+1} - \delta \left( \frac{1}{a+1} \right) \right|}{\| \delta u \|} \rightarrow 0 \quad \text{avec} \quad \| \delta u \| \\ \frac{\left| \frac{1}{B^*-1} - \frac{1}{b-1} - \delta \left( \frac{1}{b-1} \right) \right|}{\| \delta u \|} \rightarrow 0 \quad \text{avec} \quad \| \delta u \parallel$$

20. — Établissement d'un résultat général <sup>(4)</sup>.

(20<sub>1</sub>) Considérons une fonction  $f(s, \lambda_1, \lambda_2)$  hœldérienne en  $s$  et possédant des dérivées partielles  $\frac{df}{d\lambda_i}, \frac{df}{d\lambda_i}$  hœldériennes par rapport à  $s, \lambda_1$  et  $\lambda_2$ . Posons :

$$\lambda_i = \lambda_i(s) \quad (i = 1, 2)$$

$\lambda_i(s)$  étant une fonction continue en  $s$ , vérifiant une condition de Lipschitz. Soient :  $f^*(s, \lambda_1, \lambda_2)$ ;  $\lambda^*(s)$  des fonctions voisines de  $f(s, \lambda_1, \lambda_2)$  et  $\lambda_1(s)$  respectivement. Posons successivement :

$$\begin{aligned} \Delta f(s, \lambda_1, \lambda_2) &= f^*(s, \lambda_1, \lambda_2) - f(s, \lambda_1, \lambda_2) \\ \Delta f(s, \delta_1, \lambda_2) &= f^*(s, \lambda_1, \lambda_2) - f(s, \lambda_1, \lambda_2) \\ \Delta f'_{\lambda_i} &= f'_{\lambda_i}^*(s, \lambda_1, \lambda_2) - f'_{\lambda_i}(s, \lambda_1, \lambda_2) \quad (i = 1, 2) \\ \Delta \lambda_1(s) &= \lambda_1^*(s) - \lambda_1(s) \end{aligned} \quad (76)$$

$$\delta f(s, \lambda_1, \lambda_2) = \Delta f(s, \lambda_1, \lambda_2) + \frac{\partial f(s, \lambda_1, \lambda_2)}{\partial \lambda_1} \Delta \lambda_1(s)$$

$$\begin{aligned} \delta^2 f(s) &= f^*[s, \lambda_1^*(s), \lambda_2^*(s)] - f[s, \lambda_1(s), \lambda_2(s)] - \delta f(s, \lambda_1, \lambda_2) \\ \gamma(h, s) &= f'^*_{\lambda_1}[s, \lambda_1(s) + h\Delta \lambda_1(s), \lambda_2(s)] - f'_{\lambda_1}[s, \lambda_1(s), \lambda_2(s)] \end{aligned}$$

Enfin pour toute fonction  $\Phi(s)$  hœldérienne posons en outre :

$$\|\Phi(s)\| = \text{Max } |\Phi(s)| + C$$

$C$  étant la plus petite constante de la condition de Hölder vérifiée par  $\Phi(s)$  (70).

Nous tirons de (76<sub>6</sub>) :

$$\int_0^1 \gamma(h, s) dh = \frac{1}{\Delta \lambda_1(s)} \left\{ f^*[s, \lambda_1(s) + \Delta \lambda_1(s), \lambda_2(s)] - f^*[s, \lambda_1(1), \lambda_2(1)] \right\} - f'^*_{\lambda_1}[s, \lambda_1(s), \lambda_2(s)]$$

d'où :

$$(77) \quad \delta^2 f(s) = \Delta \lambda_1(s) \int_0^1 \gamma(h, s) dh$$

D'un autre côté nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \gamma(h, s) &= f'^*_{\lambda_1}[s, \lambda_1(s) + h\Delta \lambda_1(s), \lambda_2(s)] - f'^*_{\lambda_1}[s, \lambda_1(s), \lambda_2(s)] \\ &\quad + f'^*_{\lambda_1}[s, \lambda_1(s), \lambda_2(s)] - f'_{\lambda_1}[s, \lambda_1(s), \lambda_2(s)] \end{aligned}$$

d'où en tenant compte des hypothèses faites sur la continuité de  $f'_{\lambda_i}$  :

$$|\gamma(h, s)| \leq K_i |h \Delta \lambda_1(s)|^\mu + |\Delta f'_{\lambda_1}|$$

Mais  $h$  est borné et  $\mu$  positif inférieur à 1, on aura donc à fortiori :

$$(78) \quad |\gamma| \leq K \left\{ |\Delta \lambda_1(s)| + |\Delta f'_{\lambda_1}| \right\}^\mu$$

4. Les notations de ce numéro sont sans rapport avec l'ensemble de nos notations. D'autre part le symbole  $K_i$  représente une borne supérieure des fonctions bornées qui interviennent dans les calculs et qu'il est inutile d'explicitier. Les  $K_i$  ne gardent pas nécessairement la même valeur quand on passe d'une inégalité à l'autre.

Nous tirons de la :

$$(79) \quad |\gamma(h, s') - \gamma(h, s)| \leq |\gamma(h, s')| + |\gamma(h, s)| \leq K_s \left\{ \text{Max } |\Delta \lambda_i(s)| + \text{Max } |\Delta f'_{\lambda_i}| \right\}^\mu$$

D'autre part, d'après 76<sub>6</sub>), nous avons :

$$\begin{aligned} |\gamma(h, s') - \gamma(h, s)| &= \left\{ f'^*_{\lambda_i} \left[ s', \lambda_i(s') + h \Delta \lambda_i(s'), \lambda_2(s') \right] \right. \\ &\quad \left. - f'^*_{\lambda_i} \left[ s, \lambda_i(s) + h \Delta \lambda_i(s), \lambda_2(s) \right] \right. \\ &\quad \left. - \left\{ f'_{\lambda_i} \left[ s', \lambda_i(s'), \lambda_2(s') \right] - f'_{\lambda_i} \left[ s, \lambda_i(s), \lambda_2(s) \right] \right\} \right\} \end{aligned}$$

Le second membre peut s'écrire :

$$\begin{aligned} &f'^*_{\lambda_1} [s', \lambda_1(s') + h \Delta \lambda_1(s'), \lambda_2(s')] - f'^*_{\lambda_1} [s, \lambda_1(s) + h \Delta \lambda_1(s), \lambda_2(s)] \\ &+ f'^*_{\lambda_1} [s, \lambda_1(s') + h \Delta \lambda_1(s'), \lambda_2(s')] - f'^*_{\lambda_1} [s, \lambda_1(s) + h \Delta \lambda_1(s), \lambda_2(s)] \\ &- f'^*_{\lambda_1} [s, \lambda_1(s') + h \Delta \lambda_1(s'), \lambda_2(s')] - f'^*_{\lambda_1} [s, \lambda_1(s) + h \Delta \lambda_2(s), \lambda_2(s)] \\ &- f'_{\lambda_1} [s', \lambda_1(s'), \lambda_2(s')] - f'_{\lambda_1} [s, \lambda_1(s'), \lambda_2(s')] \\ &\quad + f'_{\lambda_1} [s, \lambda_1(s'), \lambda_2(s')] - f'_{\lambda_1} [s, \lambda_1(s), \lambda_2(s')] \\ &\quad + f'_{\lambda_1} [s, \lambda_1(s), \lambda_2(s')] - f'_{\lambda_1} [s, \lambda_1(s), \lambda_2(s)] \end{aligned}$$

et tenant compte des hypothèses faites sur la continuité des dérivées partielles de  $f(s, \lambda_1, \lambda_2)$  :

$$\begin{aligned} |\gamma(h, s') - \gamma(h, s)| &\leq K_1 |s' - s|^\mu + K_2 |\lambda_1(s') + h \Delta \lambda_1(s') - \lambda_1(s) - h \Delta \lambda_1(s)|^\mu \\ &\quad + K_3 |\lambda_2(s') - \lambda_2(s)|^\mu + K_4 |s' - s|^\mu \\ &\quad + K_5 |\lambda_1(s') - \lambda_1(s)|^\mu + K_6 |\lambda_2(s') - \lambda_2(s)|^\mu \end{aligned}$$

Mais par hypothèse :

$$|\Delta \lambda_i(s') - \Delta \lambda_i(s)| = \left| \lambda_i(s') - \lambda_i(s) \right| \leq C^{\text{te}} |s' - s|$$

d'où :

$$(80) \quad |\gamma(h, s') - \gamma(h, s)| \leq K |s' - s|^\mu$$

Soit alors  $\rho$  une constante quelconque comprise entre 0 et 1, (79) donne :

$$(81) \quad |\gamma(h, s') - \gamma(h, s)|^{1-\rho} \leq K_s^{1-\rho} \left\{ \text{Max } |\Delta \lambda_i(s)| + \text{Max } |\Delta f'_{\lambda_i}| \right\}^{\mu(1-\rho)} |s' - s|^{\mu\rho}$$

(80) donne :

$$(82) \quad |\gamma(h, s') - \gamma(h, s)|^\rho \leq K^\rho |s' - s|^{\mu\rho}$$

Faisons le produit de (91) et (82) membre à membre :

$$(83) \quad |\gamma(h, s') - \gamma(h, s)| \leq K \left\{ \text{Max } |\Delta \lambda_i(s)| + \text{Max } |\Delta f'_{\lambda_i}| \right\}^{\mu(1-\rho)} |s' - s|^{\mu\rho}$$

D'un autre côté d'après (77) nous avons :

$$\begin{aligned} |\partial^2 f(s') - \partial^2 f(s)| &= |\partial \lambda_1(s') \int_0^1 \gamma(h, s') dh - \Delta \lambda_1(s) \int_0^1 \gamma(h, s) dh| \\ &= |\Delta \lambda_1(s') \int_0^1 [\gamma(h, s') - \gamma(h, s)] dh \\ &\quad + [\Delta \lambda_1(s') - \Delta \lambda_1(s)] \int_0^1 \gamma(h, s) dh| \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} |\partial^2 f(s') - \partial^2 f(s)| &\leq \text{Max } |\Delta \lambda_1(s)| \int_0^1 |\gamma(h, s') - \gamma(h, s)| dh \\ (84) \quad &\quad + \text{Max } |\gamma(h, s)| \cdot |\Delta \lambda_1(s') - \Delta \lambda_1(s)| \end{aligned}$$

$\Delta \lambda_1(s)$  est lipschitzienne, donc a fortiori höeldérienne d'où :

$$\|\Delta \lambda_1(s)\| = \text{Max } |\Delta \lambda_1(s)| + C$$

C étant la plus petite constante de l'inégalité :

$$|\Delta \lambda_1(s') - \Delta \lambda_1(s)| \leq C |s' - s|^\mu$$

Il en résulte que nous pouvons écrire :

$$(85) \quad |\Delta \lambda_1(s') - \Delta \lambda_1(s)| \leq \|\Delta \lambda_1(s)\| \cdot |s' - s|^\mu$$

(83), (78) et (84) donnent alors :

$$\begin{aligned} |\partial^2 f(s') - \partial^2 f(s)| &\leq K, \text{Max } |\Delta \lambda_1(s)| \left\{ \text{Max } |\Delta \lambda_1(s)| + \text{Max } |\Delta f'_{\lambda_1}| \right\}^{\mu(1-\varrho)} |s' - s|^{\mu\varrho} \\ &\quad + K_2 \left\{ \text{Max } |\Delta \lambda_1(s)| + \text{Max } |\Delta f'_{\lambda_1}| \right\}^\mu \|\Delta \lambda_1(s)\| \cdot |s' - s|^\mu \end{aligned}$$

c'est-à-dire en tenant compte de la définition de la norme et du fait que  $\rho$  et  $1 - \rho$  sont positifs et inférieurs à 1 :

$$(86) \quad |\partial^2 f(s') - \partial^2 f(s)| \leq K \left\{ \|\Delta \lambda_1(s)\| + \|\Delta f'_{\lambda_1}\| \right\}^{1+\mu(1-\varrho)} |s' - s|^{\mu\varrho}$$

Enfin de (77) et (78) nous tirons :

$$\text{Max } |\partial^2 f(s)| \leq K \|\Delta \lambda_1(s)\| \cdot \left\{ \|\Delta \lambda_1(s)\| + \|\Delta f'_{\lambda_1}\| \right\}^\mu$$

C'est-à-dire à fortiori :

$$(87) \quad \text{Max } |\partial^2 f(s)| \leq K \left\{ \|\Delta \lambda_1(s)\| + \|\Delta f'_{\lambda_1}\| \right\}^{1+\mu(1-\varrho)}$$

(86) et (87) peuvent se résumer dans :

$$(88) \quad \|\partial^2 f(s)\| \leq K \left\{ \|\Delta \lambda_1(s)\| + \|\Delta f'_{\lambda_1}\| \right\}^{1+\mu(1-\varrho)}$$

qui est l'inégalité à laquelle nous voulions parvenir.

#### REMARQUES.

1) Si  $\lambda_2 = 0$  et  $f(s, \lambda_1)$  ne dépend pas explicitement de  $s$  et si on tient compte de (69) on retrouve le résultat de MM. LERAY et KRAVTCHEV (JK<sub>1</sub>, p. 221).

2) On peut supposer que  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont indépendants de  $s$ .

3) On peut supposer aussi que  $f$  ne varie pas. Alors  $\Delta f = 0$  et

$$\gamma(h, s) = f'_{\lambda_1} [s, \lambda_1(s) + h \Delta \lambda_1(s), \lambda_2(s)] - f'_{\lambda_1} [s, \lambda_1(s), \lambda_2(s)]$$

(20<sub>2</sub>). — Généralisation.

Supposons maintenant que  $\lambda_2$  varie à son tour. Nous posons :

$$\Delta \lambda_i(s) = \lambda_i^*(s) - \lambda_i(s) \quad (i = 1, 2)$$

et :

$$\delta f(s, \lambda_1, \lambda_2) = \Delta f(s, \lambda_1, \lambda_2) + \frac{\partial f(s, \lambda_1, \lambda_2)}{\partial \lambda_1} \Delta \lambda_1(s) + \frac{\partial f(s, \lambda_1, \lambda_2)}{\partial \lambda_2} \Delta \lambda_2(s)$$

$$\delta^2 f^*(s) = f[s, \lambda_1^*(s), \lambda_2^*(s)] - \delta f[\lambda_1(s), \lambda_2(s)]$$

Nous pouvons écrire :

$$\delta^2 f = A + B + C$$

avec :

$$A(s) = f^*(s, \lambda_1^*, \lambda_2^*) - f(s, \lambda_1, \lambda_2^*) - \Delta f(s, \lambda_1, \lambda_2^*) - f'_{\lambda_1}(s, \lambda_1, \lambda_2^*) \Delta \lambda_1$$

$$B(s) = f^*(s, \lambda_1, \lambda_2^*) - f(s, \lambda_1, \lambda_2) - \Delta f(s, \lambda_1, \lambda_2) - f'_{\lambda_2}(s, \lambda_1, \lambda_2) \Delta \lambda_2$$

$$C(s) = [f'_{\lambda_1}(s, \lambda_1, \lambda_2^*) - f'_{\lambda_1}(s, \lambda_1, \lambda_2)] \Delta \lambda_1$$

D'après le paragraphe précédent :

$$\|A(s)\| \leq K_1 \left\{ \|\Delta \lambda_1\| + \|\Delta f'_{\lambda_1}\| \right\}^{1+\mu(1-\varepsilon)}$$

$$\|B(s)\| \leq K_2 \left\{ \|\Delta \lambda_2\| + \|\Delta f'_{\lambda_2}\| \right\}^{1+\mu(1-\varepsilon)}$$

Etude de  $C(s)$ .

$$|\text{Max } C(s)| \leq \|\Delta \lambda_1\| \cdot K |\lambda_2^*(s) - \lambda_2(s)|^\mu$$

d'où :

$$(89) \quad |\text{Max } C(s)| \leq K \|\Delta \lambda_1\| \cdot \|\Delta \lambda_2\| K \left[ \|\Delta \lambda_1\| + \|\Delta \lambda_2\| \right]^{1+\mu(1-\varepsilon)}$$

D'autre part :

$$|C(s) - C(s')| = |C_1(s, s') + C_2(s, s')|$$

avec :

$$C_1(s, s') = [\Delta \lambda_1(s) - \Delta \lambda_1(s')] \left\{ f'_{\lambda_1}[s, \lambda_1(s), \lambda_2^*(s)] - f'_{\lambda_1}[s, \lambda_1(s), \lambda_2(s)] \right\}$$

$$C_2(s, s') = \Delta \lambda_1(s) \left[ \left\{ f'_{\lambda_1}[s, \lambda_1(s), \lambda_2(s)] - f'_{\lambda_1}[s, \lambda_1(s), \lambda_2(s)] \right\} \right. \\ \left. - \left\{ f'_{\lambda_1}[s', \lambda_1(s'), \lambda_2^*(s')] - f'_{\lambda_1}[s', \lambda_1(s'), \lambda_2(s')] \right\} \right]$$

La fonction de  $s$  :

$$\Phi(s) = f'_{\lambda_1}[s, \lambda_1(s), \lambda_2(s) + \Delta \lambda_2(s)] - f'_{\lambda_1}[s, \lambda_1(s), \lambda_2(s)]$$

peut être considérée comme une fonction  $\gamma(h, s)$  particulière (voir remar-

que 3 du paragraphe précédent). D'après (83) nous avons alors

$$|\Phi(s) - \Phi(s')| = |\gamma(1, s) - \gamma(1, s')| \leq K [\text{Max } |\Delta\lambda_2(s)|]^{\mu(1-\rho)}. \quad |s' - s|^{\mu\rho}$$

De sorte que :

$$(90) \quad |C_2(s, s_1)| \leq K \|\Delta\lambda_1\| \cdot \|\Delta\lambda_2\|^{\mu(1-\rho)} |s^1 - s|^{\mu\rho} \\ \leq K [\|\Delta\lambda_1\| + \|\Delta\lambda_2\|]^{1+\mu(1-\rho)} |s' - s|$$

D'un autre côté d'après (85) et les hypothèses faites sur la continuité de  $f'_{\lambda_1}$  :

$$(91) \quad |C_1(s, s')| \leq K \|\Delta\lambda_1\| |s' - s|^{\mu} : \|\Delta\lambda_2\|^{\mu}$$

$$|C_1(s, s')| \leq K [\|\Delta\lambda_1\| + \|\Delta\lambda_2\|]^{1+\mu(1-\rho)} |s^1 - s|^{\mu\rho}$$

D'où :

$$(92) \quad |C(s) - C(s')| \leq K [\|\Delta\lambda_1\| + \|\Delta\lambda_2\|]^{1+\mu(1-\rho)} |s' - s|^{\mu\rho}$$

(89) et (92) peuvent se résumer dans l'inégalité :

$$(93) \quad \|C(s)\| \leq K [\|\Delta\lambda_1\| + \|\Delta\lambda_2\|]^{1+\mu(1-\rho)}$$

Comme :

$$\|\delta^2 f\| \leq \|A\| + \|B\| + \|C\|$$

nous avons finalement :

$$(94) \quad \|\delta^2 f(s, \lambda_1, \lambda_2)\| \leq K [\|\Delta\lambda_1\| + \|\Delta\lambda_2\| + \|\Delta f'_{\lambda_1}\| + \|f'_{\lambda_2}\|]^{1+\mu(1-\rho)}$$

qui est l'inégalité à laquelle nous voulions parvenir.

*Remarques.*

- 1) (94) se généraliserait de proche en proche pour un nombre fini de  $\lambda_i$ .
- 2) Ces  $\lambda_i$  peuvent être indépendants de  $s$ .

## 21. — Application du résultat précédent.

Nous pouvons déduire de ce qui précède des résultats obtenus par M. LERAY et qui nous seront utiles. Nous les rappelons rapidement en les adaptant à notre objet<sup>(5)</sup>.

Les fonctions  $\psi_j(l)$  sont des fonctions  $f[s, \lambda_1, \lambda_2]$  particulières, celles pour lesquelles  $f$  ne dépend pas de  $s$ ,  $\lambda_1 = l$  et  $\lambda_2 = o$ . Considérées comme des fonctions de  $l$  seul, elles sont des éléments de l'espace de Banach  $E_1$ , dont la norme est définie en (69). Si  $l = l(s)$ ,  $\psi_j[l(s)]$  est un élément d'un espace de Banach  $H(s)$  dont la norme est définie en (70) et que nous noterons  $\|\psi_j[l(s)]\|_{\mu}$ . En remarquant que :

$$\|\Delta \psi_j[l(s)]\|_{\mu} \leq \|\Delta \psi_j(l)\|_{1, \mu}$$

la relation (94) devient<sup>(6)</sup> :

$$(95) \quad \|\delta^2 \psi_j[l(s)]\|_{\mu} \leq K \left\{ \|\Delta l(s)\| + \|\Delta \psi_j(l)\|_{1, \mu} \right\}^{1+\mu(1-\rho)}$$

5. JK<sub>1</sub>, p. 219.

6. C'est l'inégalité (4.3) de JK<sub>1</sub>. M. KRAVTCHEKO pose au n° 31  $\delta l(s) = l^*(s) - l(s)$ . Comme au n° 32 de JK<sub>1</sub> ce symbole change de sens (notule 132) nous préférons écrire, pour éviter les confusions  $\Delta l(s) = l^*(s) - l(s)$ ;  $\delta l(s)$  est la différentielle du second membre de (62).

Considérons alors une fonction  $w(s)$  définie par la relation :

$$(96) \quad w(s) = \int_a^b \frac{\psi_j[l(s)] - \psi_j[l(s')]}{s - s'} K(s, s') ds'$$

dans laquelle  $K(s, s')$  désigne une fonction analytique régulière de ses arguments; d'après le théorème de Fatou et de Priwaloff  $\omega(s)$  est dans  $(a, b)$  un élément de  $H_\mu(s)$ . Posons

$$w^*(s) - w(s) - \delta w(s) = \int_a^b \frac{\delta^2 \psi_j[l(s)] - \delta^2 \psi_j[l(s')]}{s - s'} K(s, s') ds'$$

il résulte de (95) que, dans  $(a, b)$  :

$$(97) \quad \|w^*(s) - w(s) - \delta w(s)\|_\mu \leq K \left\{ \|\Delta l(s)\| + \|\Delta \psi_j[l(s)]\|_{1,\mu} \right\}^{1+\mu(1-\varepsilon)}$$

qui est le résultat que nous voulions rappeler (7).

*Etude de  $\|l^*(s) - l(s) - \delta l(s)\|$ .*

22. — Revenons au problème posé au n° 19.

On sait (JK<sub>2</sub>, N° 17) que si la longueur  $l_j - l_{j-1}$  de l'arc  $\widehat{P_{j-1}P_j}$  de  $\widehat{BC}$  est inférieurement bornée, la différence  $s_j - s_{j-1}$  est minorée par un nombre positif, fonctionnelle de  $\alpha \beta p 1/d_1 1/d_2 \max |\psi'(l)|$ . Il en résulte qu'au voisinage d'une solution les  $s_j$  sont distincts. Dès lors, et pour alléger l'écriture, nous pouvons raisonner dans le cas d'un seul point anguleux. Nous posons  $s_1 = \sigma$  et  $n = 1$  nous avons alors :

$$l(s) = \int_0^s e^{-\Im H(e^{is})} (s - \sigma)^{1-2x_1} F(s) ds + \alpha$$

$$l^*(s) = \int_0^s e^{-\Im H^*(e^{is})} (s - \sigma^*)^{1-2x_1^*} F^*(s) ds + \alpha^*$$

Désignons par  $\delta^2 l(s)$  la partie principale de  $l^*(s) - l(s) - \delta l(s)$ . Nous avons :

$$\delta^2 l(s) = -\delta^2 J_1(s) + \delta^2 J_2(s) + \delta^2 J_3(s)$$

avec :

$$\delta^2 J_1(s) = \int_0^s e^{-\Im H(e^{is})} \left[ \Im H^*(e^{is}) - \Im H(e^{is}) - \delta \Im H(e^{is}) \right] (s - \sigma)^{1-2x_1} F(s) ds$$

$$\delta^2 J_2(s) = \int_0^s e^{-\Im H(e^{is})} \left\{ (s - \sigma^*)^{1-2x_1^*} - (s - \sigma)^{1-2x_1} - \delta \left[ (s - \sigma)^{1-2x_1} \right] \right\} F(s) ds$$

$$\delta^2 J_3(s) = \int_0^s e^{-\Im H(e^{is})} (s - \sigma)^{1-2x_1} \left[ F^*(s) - F(s) - \delta F(s) \right] ds$$

Comme :  $\|\delta^2 l(s)\| \leq \|\delta^2 J_1(s)\| + \|\delta^2 J_2(s)\| + \|\delta^2 J_3(s)\|$

Il nous suffit de prouver que :

$$\|\delta^2 J_k(s)\| < \varepsilon \|\delta u\| \quad (k = 1, 2, 3)$$

$\varepsilon$  tendant vers zéro avec  $\|\delta u\|$



### 23. — Étude de $\|\delta^2 J_1(s)\|$ .

Pour éviter les confusions posons  $s = t$  dans l'intégrale  $\delta^2 J_1(s)$  et désignons par  $\Phi(t)$  une fonction analytique, régulière de ses arguments sur l'intervalle fermé  $(0, \pi)$ ; nous pouvons écrire

$$(98) \quad \delta^2 J_1(s) = \int_0^s \delta^2 \mathcal{H}(e^{it})(t - \sigma)^{1-2\alpha_1} \Phi(t) dt$$

avec :

$$\delta^2 \mathcal{H}(e^{it}) = \mathcal{H}^*(e^{it}) - \mathcal{H}(e^{it}) - \delta \mathcal{H}(e^{it})$$

Nous savons d'autre part<sup>(8)</sup> que  $\delta^2 \mathcal{H}(e^{it})$  est défini par une formule de M. VILLAT, de la forme :

$$(99) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta^2 \mathcal{H}(e^{it}) &= \int_0^\pi \frac{\delta^2 \mathcal{R}\mathcal{H}(e^{it}) - \delta^2 \mathcal{R}\mathcal{H}(e^{is'})}{t - s'} K_1(t, s') ds' \\ &+ \frac{2b_1 \omega_1}{\pi^2} t \delta^2 \mathcal{R}\mathcal{H}(e^{it}) - \int_0^\pi \delta^2 \mathcal{R}\mathcal{H}(qe^{it}) K_2(t, s') ds' \end{aligned} \right.$$

où  $K_1(t, s')$  et  $K_2(t, s')$  sont des fonctions analytiques, régulières de leurs arguments pour  $0 \leq t \leq \pi$ ;  $0 \leq s' \leq \pi$  et où :

$$\delta^2 \mathcal{R}\mathcal{H}(Z) = \mathcal{R}\mathcal{H}^*(Z) - \mathcal{R}\mathcal{H}(Z) - \delta \mathcal{R}\mathcal{H}(Z)$$

D'après (67) et (68) nous avons :

pour  $0 \leq t \leq \sigma$  :

$$\mathcal{R}\mathcal{H}(e^{it}) = \psi_1[l(t)] + (\sigma - \pi)(2\alpha_1 - 1) = A_1(t)$$

pour  $\sigma \leq t \leq \pi$  :

$$\mathcal{R}\mathcal{H}(e^{it}) = \psi_2[l(t)] + (\sigma - 2\pi)(2\alpha_1 - 1) = A_2(t)$$

avec :

$$(2\alpha_1 - 1)\pi = \psi_2[l(\sigma)] - \psi_1[l(\sigma)]$$

On calculera de même :

$$\mathcal{R}\mathcal{H}^*(e^{it}) = A_1^*(t) \text{ pour } \sigma^* \leq t \leq \pi$$

$$\mathcal{R}\mathcal{H}^*(e^{it}) = A_2^*(t) \text{ pour } 0 \leq t \leq \sigma^*$$

et

$$\mathcal{R}\mathcal{H}(e^{it}) = \delta A_1(t) \text{ pour } 0 \leq t \leq \sigma$$

$$\mathcal{R}\mathcal{H}(e^{it}) = \delta A_2(t) \text{ pour } \sigma \leq t \leq \pi$$

Nous avons vu<sup>(9)</sup> que  $\delta \mathcal{R}\mathcal{H}(e^{it})$  était hœldérienne pour  $0 \leq t \leq \pi$ .

Il en sera donc de même de :

$$\delta^2 \mathcal{R}\mathcal{H}(e^{it}) = \mathcal{R}\mathcal{H}^*(e^{it}) - \mathcal{R}\mathcal{H}(e^{it}) - \delta \mathcal{R}\mathcal{H}(e^{it})$$

Ceci posé, prenons pour fixer les idées :  $\Delta\sigma > 0$ ,  $t$  peut être situé dans l'un des intervalles suivants :  $(0, \sigma)$ ;  $(\sigma, \sigma^*)$ ;  $(\sigma^*, \pi)$ .

*Etude de  $\|\delta^2 \mathcal{R}\mathcal{H}(e^{it})\|$ .*

A) *Etude de  $\text{Max} |\delta^2 \mathcal{R}\mathcal{H}(e^{it})|$ .*

8. N° 11, la transposition au cas présent est immédiate.

9. Remarquons que les fonctions  $A_i(t)$  sont définies en dehors des intervalles considérés dans le texte (Cf. n° 14).

Si  $0 \leq t \leq \sigma$

$$\delta^2 \mathcal{R}H(e^{it}) = A_1^*(t) - A_1(t) - \delta A_1(t) = \delta^2 A_1(t)$$

Si  $\sigma^* \leq t \leq \pi$

$$\delta^2 \mathcal{R}H(e^{it}) = \delta^2 A_2(t)$$

Les résultats du n° 20 s'appliquent immédiatement, il en résulte qu'a fortiori on a sur chacun des intervalles en cause :

$$\text{Max } |\delta^2 A_i(t)| \leq \varepsilon \|\delta u\| \quad (i = 1, 2)$$

$\varepsilon$  tendant vers zéro avec  $\|\delta u\|$  <sup>(10)</sup>

Si  $\sigma \leq t \leq \sigma^*$

$$\delta^2 \mathcal{R}H(e^{it}) = A_1^*(t) - A_2(t) - \delta A_2(t) = \Delta_1(t)$$

Grâce au fait que les fonctions  $A_i(t)$  existent sur tout l'intervalle  $(0, \pi)$  nous pouvons écrire :

$$\Delta_1(t) = A_1^*(t) - A_2^*(t) + \delta^2 A_2(t)$$

Il suffit donc de prouver que :  $\text{Max } |A_1^*(t) - A_2^*(t)| \leq \varepsilon \|\delta u\|$ . En explicitant il vient :

$$(100) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_1^*(t) - A_2^*(t) = \psi_1^*[l^*(t)] - \psi_1^*[l^*(\sigma^*)] + \psi_2^*[l^*(\sigma^*)] - \psi_2^*[l^*(t)] \\ = \left\{ \psi_1^*(\lambda) \left[ \frac{dl^*}{dt} \right]_{t=\tau} - \psi_2^*(\lambda') \left[ \frac{dl^*}{dt} \right]_{t=\tau'} \right\} (t - \sigma^*) \end{array} \right.$$

$\lambda$  et  $\lambda'$  étant compris entre  $l^*(t)$  et  $l^*(\sigma)$ ;  $\tau$  et  $\tau'$  entre  $t$  et  $\sigma^*$ .

Mais 
$$\frac{dl^*}{dt} = (t - \sigma^*)^{1-2\alpha^*} F(t)$$

de sorte que :  $\left| \left[ \frac{dl^*}{dt} \right]_{t=\tau} \right| = |\tau - \sigma^*|^{1-2\alpha^*} F(t) \leq K \overline{\Delta\sigma}^{1-2\alpha^*}$ ,

Il en résulte que le coefficient de  $(t - \sigma^*)$  dans (109) tend vers zéro avec  $\Delta\sigma$ . Nous pouvons écrire :

$$\text{Max } |A_1^*(t) - A_2^*(t)| \leq \varepsilon \|\delta u\|$$

d'où :

$$\text{Max } |\Delta_1(t)| \leq \varepsilon \|\delta u\|$$

En résumé sur tout l'intervalle  $0 \leq t \leq \pi$  nous avons

$$\text{Max } |\delta^2 \mathcal{R}H(e^{it})| \leq \varepsilon \|\delta u\|$$

B) *Etude de la continuité de  $\delta^2 \mathcal{R}H(e^{it})$*  —

Prenons deux valeurs voisines  $t$  et  $t'$ , supposons  $t' < t$ . Si l'on a  $t' < \sigma < t < \sigma^*$  (ou  $\sigma < t' < \sigma^* < t$ ) on partage l'intervalle  $(t', t)$  en deux autres :

$$(t', \sigma) \text{ et } (\sigma, t) \quad \text{ou} \quad [(t', \sigma^*) \text{ et } (\sigma^*, t)]$$

de sorte qu'il n'y a lieu d'examiner que les cas :

$$0 \leq t' \leq t \leq \sigma; \quad \sigma \leq t' \leq t \leq \sigma^*; \quad \sigma^* \leq t' \leq t \leq \pi$$

a) *Etude du cas :  $0 \leq t' \leq t \leq \sigma$  (ou  $\sigma^* \leq t' \leq t \leq \pi$ )*

Dans le cas :

$$|\delta^2 \mathcal{R}H(e^{it}) - \delta^2 \mathcal{R}H(e^{it'})| = |\delta^2 \psi_j[l(t)] - \delta^2 \psi_j[l(t')]| \quad (j=1,2)$$

10. Dans tout ce qui suit et d'une manière générale, sans que nous le rappelions chaque fois,  $\varepsilon$  désignera une quantité tendant vers zéro avec  $\|\delta u\|$ .

Les résultats du n° 20 s'appliquent d'où :

$$|\delta^2 \mathcal{RH}(e^{it}) - \delta^2 \mathcal{RH}(e^{it'})| \leq K \|\delta u\|^{1+\mu(1-\rho)} |t - t'|^\mu$$

b) *Etude du cas* :  $\sigma \leq t' \leq t \leq \sigma^*$ .

Dans ce cas :

$$|\delta^2 \mathcal{RH}(e^{it}) - \delta^2 \mathcal{RH}(e^{it'})| = |\Lambda_1^*(t) - A_2(t) - \delta A_2(t) - A_1^*(t) + A_2(t') + \delta A_2(t')|$$

Moyennant les hypothèses du N° 14 nous pouvons écrire :

$$|\delta^2 \mathcal{RH}(e^{it}) - \delta^2 \mathcal{RH}(e^{it'})| \leq |\psi_1^*[l(t)] - \psi_1^*[l(t')] - \psi_2^*[l(t)] + \psi_2^*[l(t')]| + |\delta^2 \psi_2[l(t)] - \delta^2 \psi_2[l(t')]|$$

Nous avons :

$$\psi_j^*[l(t)] - \psi_j^*[l(t')] = \psi_j^{*\prime}(\lambda) \left[ \frac{dl}{dt} \right]_{t=\tau} (t - t')$$

$\lambda$  étant un nombre compris entre  $l(t')$  et  $l(t)$  et  $\tau$  un nombre compris entre  $t'$  et  $t$ . Mais  $\frac{dl}{dt} = (t - \sigma)^{1-2\alpha_1} F(t)$  de sorte que

$$\left| \left[ \frac{dl}{dt} \right]_{t=\tau} \right| = \left| (\tau - \sigma)^{1-2\alpha_1} F(\tau) \right| \leq K \frac{1}{\Delta \sigma} 1 - 2\alpha_1$$

En écrivant  $|t - t'| = |t - t'|^{1-\mu\rho}$ ,  $|t - t'|^{\mu\rho}$  et en tenant compte du fait que :  $|t - t'| \leq \Delta\sigma$  nous avons :

$$|\psi_j^*[l(t)] - \psi_j^*[l(t')]| < K \Delta\sigma^{1-2\alpha_1} \Delta\sigma^{1-\mu\rho} |t - t'|^{\mu\rho}$$

Soit  $\nu$  le plus petit des  $1 - 2\alpha_j$ ;  $\nu$  est positif par hypothèse, alors :

$$|\psi_j^*[l(t)] - \psi_j^*[l(t')]| < K \|\delta u\|^{1+\nu-\mu\rho} |t - t'|^{\mu\rho}$$

Jusqu'ici  $\rho$  est un nombre arbitraire compris entre 0 et 1; prenons dès maintenant  $\rho$  tel que l'on ait en outre :

$$\nu - \mu\rho > 0$$

soit :

$$(102) \quad \varepsilon < \frac{\nu}{\mu}$$

ce qui est possible, alors :

$$(103) \quad |\psi_j^*[l(t)] - \psi_j^*[l(t')]| < \varepsilon \|\delta u\| |t - t'|^{\mu\rho}$$

Reprenons (101); en tenant compte du résultat précédent et du fait que :  $|\delta^2 \psi_2[l(t)] - \delta^2 \psi_2[l(t')]|$  relève des calculs du N° 20, nous pouvons conclure que :

$$|\delta^2 \mathcal{RH}(e^{it}) - \delta^2 \mathcal{RH}(e^{it'})| \leq \varepsilon \|\delta u\| |t - t'|^\mu$$

En résumé nous pouvons dire que pour  $0 \leq t \leq \pi$

$$(104) \quad \|\delta^2 \mathcal{RH}(e^{it})\| \leq \varepsilon \|\delta u\|$$

*Conséquences.* — Reportons-nous à (99). La première intégrale du second membre est du type (96); nous pouvons lui appliquer le résultat (97). Sa valeur absolue est donc majorée par  $\varepsilon \|\delta u\|$ . Il en est de même du terme  $\frac{2\eta_1 \omega_1}{\pi^2} t \delta^2 \mathcal{RH}(e^{it})$  et de la dernière intégrale puisque  $\mathcal{RH}(qe^{it})$  est une fonction

analytique et régulière de ses arguments. En définitive, nous pouvons conclure :

$$\| \partial^2 \mathfrak{J}H(e^{it}) \| \leq \varepsilon \| \partial u \|$$

De (98) nous tirons :

$$\text{Max } | \partial^2 J_1(s) | \leq K. \text{Max } | \partial^2 \mathfrak{J}H(e^{it}) | \leq \varepsilon \| \partial u \|$$

et

$$| \partial^2 J_1(s) - \partial^2 J_1(s') | = \left| \int_{s'}^s \partial^2 \mathfrak{J}H(e^{it}) (t - \sigma)^{1-2\alpha_1} \Phi(t) dt \right|$$

d'où :

$$| \partial^2 J_1(s) - \partial^2 J_1(s') | \leq K. \text{Max } | \partial^2 \mathfrak{J}H(e^{it}) | \cdot |s - s'| \leq \varepsilon \| \partial u \| \cdot |s - s'|$$

d'où finalement :

$$(105) \quad \| \delta^2 J_1(s) \| \leq \varepsilon \| \delta u \|$$

#### 24. — Étude de $\| \delta^2 J_2(s) \|$ .

Nous pouvons écrire :

$$\partial^2 J_2(s) = \int_0^s \partial^2 \left[ (s - \sigma)^{1-2\alpha_1} \right] \Phi(s) ds$$

$$\text{Posons} \quad f(s, \sigma, \alpha_1) = \int_0^s (s - \sigma)^{1-2\alpha_1} \Phi(s) ds$$

nous en tirons :

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma} = \int_0^s (2\alpha_1 - 1) (s - \sigma)^{-2\alpha_1} \Phi(s) ds$$

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha_1} = \int_0^s (s - \sigma)^{1-2\alpha_1} \text{Log}(s - \sigma) \Phi(s) ds$$

Ces dérivées sont hœldériennes en  $s$ ; le théorème général du N° 20 s'applique, nous en déduisons que :

$$(106) \quad \| \delta^2 J_2(s) \| \leq \varepsilon \| \delta u \|$$

#### 25. — Étude de $\| \delta^2 J_3(s) \|$ .

$F(s)$  étant une fonction analytique, régulière par rapport à tous ses arguments le théorème général du N° 20 permet d'écrire

$$\| \delta^2 F(s) \| \leq \varepsilon \| \delta u \|$$

Reprenant alors le raisonnement qui termine le N° 23 et qui donne (105) nous pouvons dire :

$$(107) \quad \| \delta^2 J_3(s) \| \leq \varepsilon \| \delta u \|$$

#### 26. — Conclusions.

La réunion de (107), (108), (109) permet d'affirmer que

$$(108) \quad \| l^*(s) - l(s) - \delta l(s) \| \leq \varepsilon \| \delta u \| \quad \text{C. Q. F. D.}$$

**27. — Étude de  $|S_j^* - s_j - \delta s_j|$ .**

Nous avons d'après (62)

$$S_j^* = s_j^* + \frac{1}{\lambda} \left\{ l_j^* - l_{j-1}^* - [L^*(s_j^*) - L^*(s_{j-1}^*)] \right\}$$

en se reportant au N° 18 nous en déduisons :

$$S_j^* - s_j - \delta s_j = \frac{1}{\lambda} \left\{ [L^*(s_{j-1}^*) - l_{j-1}^* - \delta l(s_{j-1}^*)] - [L^*(s_j^*) - l_j^* - \delta l(s_j^*)] \right\}$$

Etudions par exemple :  $L^*(s_j^*) - l_j^* - \delta l(s_j^*)$ .  $x$  vérifie par hypothèse (62) nous avons donc  $l_j = l(s_j)$ ; nous pouvons alors écrire :

$$\begin{aligned} L^*(s_j^*) - l_j^* - \delta l(s_j^*) &= L^*(s_j^*) - L^*(s_j) + [L^*(s_j) - l(s_j) - \delta l(s_j)] \\ &= \left[ \frac{dL^*}{ds} \right]_{s=c} (s_j^* - s_j) + \delta^2 l(s_j) \end{aligned}$$

$c$  étant compris entre  $s_j$  et  $s_j^*$ . Mais :

$$\frac{dL^*}{ds} = (s - s_j^*)^{1-2\alpha_j} F(s)$$

de sorte que :

$$\left| \left( \frac{dL^*}{ds} \right)_{s=c} \right| \leq K. |s_j^* - s_j|^{1-2\alpha_j} < K. \|\delta u\|^{1-2\alpha_j}$$

En tenant compte de (108) pour le terme  $\delta^2 l(s_j)$  nous pouvons conclure :

$$(109) \quad |S_j^* - s_j - \delta s_j| \leq K. \varepsilon \|\delta u\|$$

**28. — Étude des deux dernières relations (75).**

Cette étude ne présente aucune difficulté du fait de l'analyticité de  $\delta\Omega(Z)$  pour  $Z$  réel. On pourra se reporter à JK<sub>1</sub>, pp.224-225.

**29. — Conclusion du chapitre.**

La réunion des résultats des N°s 26, 27, 28 nous permet de conclure (Cf. N° 19) :

*dans l'espace de Banach  $\mathcal{E}$ , et au voisinage de toute solution de (73).*

$\mathcal{F}[x, \psi_1(l) \dots \dots \frac{1}{d_s}]$  admet une différentielle au sens de M. Fréchet :  $\delta\mathcal{F}$

Ceci, rappelons-le, dans le cas où :  $1 - 2\alpha_j > 0$  ( $j = 1, 2 \dots \dots n$ ).

## CHAPITRE IV

### SYSTÈME AUX VARIATIONS DU PROBLÈME, ÉNONCÉ DU PROBLÈME DE M. WEINSTEIN

30. — Dans ce qui suit il n'y a pas lieu de distinguer le cas des obstacles polygonaux de celui des obstacles formés d'arcs de courbes. Nous nous placerons dans le second cas, les raisonnements que nous allons exposer se transposant immédiatement, en se simplifiant, dans le premier.

Considérons dans le plan  $z$  deux squelettes voisins définis au moyen des éléments :

$$\psi_1(l), \psi_2(l) \dots \dots \psi_{n+1}(l); \alpha, l_1, l_2 \dots \dots l_n, \beta, d_1, d_2;$$

et

$$\psi_1^*(l), \psi_2^*(l) \dots \dots \psi_{n+1}^*(l); \alpha^*, l_1^* \dots \dots l_n^*, \beta^*, d_1^*, d_2^*;$$

Relativement à chacun de ces squelettes, nous savons, d'après JK<sub>2</sub> que le problème de représentation conforme de Helmholtz admet au moins une solution :

$$l(s); s_1, s_2 \dots \dots s_n; a, b;$$

$$l^*(s); s_1^*, s_2^* \dots \dots s_n^*; a^*, b^*;$$

chacune de ces solutions constituant un élément  $x$  d'un sous-espace E de l'espace  $\mathcal{E}$ . Nous appelons système aux variations de notre problème le système <sup>(1)</sup> :

$$\begin{aligned} \delta l(s) = W [\psi_1(l) \dots \dots \psi_{n+1}(l), \alpha, l_1 \dots \dots l_n, \beta, l(s), s_1 \dots \dots s_n, a, b; \\ \Delta \psi_1(l) \dots \dots \Delta \psi_{n+1}(l); \Delta \alpha, \Delta l_1 \dots \dots \Delta b] \\ (110) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta s_1 &= \delta s_1 + \frac{1}{\lambda} \left[ \Delta l_1 - \Delta z - W(s) \right] \\ \delta s_j &= \delta s_j + \frac{1}{\lambda} \left\{ \Delta l_j - \Delta l_{j-1} - \left[ W(s_j) - W(s_{j-1}) \right] \right\} \quad (j = 2 \dots n) \end{aligned} \right. \\ \delta \left( \frac{1}{a+1} \right) &= \delta \left( \frac{1}{a+1} \right) + \nu \left[ \frac{\Delta d_2}{d_2^2} - \frac{\Delta_2}{D_2^2} \right] \\ \delta \left( \frac{1}{b-1} \right) &= \delta \left( \frac{1}{b-1} \right) + \nu \left[ \frac{\Delta d_1}{d_1^2} - \frac{\Delta_1}{D_1^2} \right] \end{aligned}$$

où les seconds membres représentent les transformations fonctionnelles obtenues en différentiant les seconds membres de (62) et où *les inconnues sont maintenant* :

$$(111) \quad \delta l(s), \delta s_1 \dots \dots \delta s_n; \delta a, \delta b;$$

---

1.  $\delta l(s) \dots \dots \delta b$  désignent ici les parties principales des différences  $l^*(s) - l(s); \dots \dots b^* - b$ .

L'ensemble de ces inconnues peut être considéré comme un élément :

$$\delta x = \delta x [\delta l(s); \delta s_1 \dots \delta s_n, \delta a, \delta b]$$

d'un sous-espace E de l'espace  $\mathcal{E}$  précédemment défini.

D'autre part, d'après le chapitre précédent nous savons que les fonctionnelles qui figurent au second membre de (110) sont linéaires par rapport aux arguments :

$$\Delta \psi_1(l) \dots \Delta \psi_{n+1}(l); \Delta \alpha, \Delta l_1 \dots \Delta l_n, \Delta \beta, \Delta \left( \frac{1}{d_1} \right), \Delta \left( \frac{1}{d_2} \right);$$

et aussi par rapport aux nouvelles inconnues (111). L'ensemble de ces fonctionnelles définit donc une transformation opérant dans l'espace E, complètement continue par rapport à tous ces arguments y compris les valeurs infinies des paramètres  $a, b, d_1$ , et  $d_2$ . Il suit de là que (110) est équivalent à une équation de Fredholm :

$$(112) \quad \delta x = \delta \mathcal{F} \left[ \delta x, x, \psi_1(l) \dots \psi_{n+1}(l), \alpha, l_1 \dots l_n, \beta, \frac{1}{d_1}, \frac{1}{d_2}, \right. \\ \left. \Delta \psi_1(l) \dots \Delta \psi_{n+1}(l), \Delta \alpha, \Delta l_1 \dots \Delta l_n, \Delta \beta, \Delta \left( \frac{1}{d_1} \right), \Delta \left( \frac{1}{d_2} \right) \right]$$

où  $\delta \mathcal{F}$  désigne une fonctionnelle linéaire en  $\delta x$ .

Toujours d'après le chapitre précédent  $\delta \mathcal{F}$  peut être considérée comme la différentielle de Fréchet de la transformation  $\mathcal{F}(x)$  figurant au second membre de (62).

Admettons que (110) ou (112) ait une *solution unique*, nous pouvons alors affirmer les conclusions suivantes <sup>(2)</sup> :

a) lorsque les accroissements :

$$\Delta \psi_1(l) \dots \Delta \psi_{n+1}(l), \Delta \alpha, \Delta l_1 \dots \Delta l_n, \Delta \beta, \Delta \left( \frac{1}{d_1} \right), \Delta \left( \frac{1}{d_2} \right);$$

sont petits en valeur absolue, il existe au moins une solution :

$$x^* = x^* \left[ l^*(s), s^*, \dots s_n^*, \frac{1}{a^*+1}, \frac{1}{b^*-1} \right]$$

du problème de Helmholtz posé pour le nouveau squelette voisin du squelette initial qui est elle-même voisine de :

$$x = x \left[ l(s), s_1, \dots s_n, \frac{1}{a+1}, \frac{1}{b-1} \right]$$

De plus  $\delta x$  est la partie principale de  $x^* - x$ , différence de  $x$  avec l'une quelconque des solutions voisines.

D'après le N° 8 :

$$b) \text{ l'élément : } x = x \left[ l(s), s_1, \dots s_n, \frac{1}{a+1}, \frac{1}{b-1} \right]$$

est une solution isolée de (62). Il en résulte qu'à l'intérieur d'un ensemble  $\omega$  ouvert de E, (62) ou l'équation équivalente (73), ne peut avoir qu'un nombre fini de solutions.

2. Cf. Chapitre II.

c) l'indice topologique  $i [\delta x - \delta \mathcal{F}(\delta x, x), \delta x]$  de la solution  $\delta x$  de (112) supposée unique est égal à celui de la solution correspondante de (73).

d) l'indice total  $d [x - \mathcal{F}(x), \omega, o]$  des solutions de (73) dans  $\omega$  est égal à la somme des indices de chacune de ces solutions. On a donc :

$$\begin{aligned} d [x - \mathcal{F}(x), \omega, 0] &= \sum_{k=1}^{k=n} i [x - \mathcal{F}(x), x_k] \\ &= \sum_{k=1}^{k=n} i [\delta x - \delta \mathcal{F}(\delta x, x_k), \delta x] \end{aligned}$$

où  $n$  est le nombre des solutions contenues dans  $\omega$ . Or d'après JK<sub>2</sub>, § 27, le premier membre est égal à  $+1$ , si donc l'indice  $i [\delta x - \delta \mathcal{F}(\delta x, x_k), \delta x]$  d'une solution éventuelle de (99) vaut aussi  $+1$ , il en résultera que  $n = 1$ , c'est-à-dire que la solution sera unique.

On voit donc que notre problème se ramène au suivant : former des catégories d'obstacles pour lesquels l'équation aux variations (112) correspondante ne possède qu'une seule solution.

Pratiquement, nous profiterons de ce que les solutions éventuelles  $\delta x$  de l'équation linéaire (112) varient continuellement lorsque les variations des données :  $\Delta\psi_1(l) \dots \Delta(1/d_2)$  tendent vers zéro et aussi du fait que l'indice de la solution  $\delta x$  de (112) reste constant au cours de cette transformation. Il nous suffira donc de vérifier que l'équation homogène en  $\delta x$  :

$$(113) \quad \delta x = \delta \mathcal{F} [\delta x, x, \psi_1(l) \dots \psi_{n+1}(l), \alpha, l_1 \dots l_n, \beta, \frac{1}{d_1}, \frac{1}{d_2}, 0, 0, 0 \dots 0]$$

n'a d'autre solution que  $\delta x = 0$  et ceci fait déterminer l'indice

$$i [\delta x - \delta \mathcal{F}(\delta x, x), o]$$

d'une solution éventuelle de (112) correspondante à un obstacle de l'espèce visée ci-dessus.

Nous allons maintenant nous occuper du premier problème posé ci-dessus, savoir : chercher des obstacles pour lesquels l'équation (113) n'a d'autres solutions que  $\delta x = 0$ .

### 31. — Introduction de la fonction $\gamma(Z)$ .

La méthode de M. LERAY, appliquée aussi par M. KRAVTCHEKO, utilise une idée de M. WEINSTEIN; elle ramène l'étude de l'équation (112) à celle d'un problème aux limites de la théorie des fonctions harmoniques.

Reprenons les deux groupes d'éléments voisins du N° 23. Par définition, nous appelons fonction de M. WEINSTEIN, notée :

$$\gamma(Z) = \alpha + i\beta$$

la partie principale de la variation qui subit le potentiel complexe  $f$  en un point fixe  $z$  du plan du mouvement.

Si nous représentons par  $\delta$  l'opération de différentiation en un point  $Z$  fixe du plan de la demi-couronne,  $\delta f(Z)$  et  $\delta \Omega(Z)$  seront les parties principales des variations que subissent  $f(Z)$  et  $\Omega(Z)$  en ce point.



Considérons alors  $f = f[z(Z)]$ ; en tout point où les symboles écrits ont un sens nous avons :

$$(113) \quad \delta f(Z) = \gamma(Z) + \frac{df}{dz} \delta z(Z)$$

D'autre part de :

$$dz = e^{i\Omega(Z)} df$$

nous tirons en prenant les différentielles logarithmiques et intervertissant les  $d$  et les  $\delta$  :

$$\frac{d\delta z}{dz} = i\delta\Omega(Z) + \frac{d\delta f}{df}$$

L'élimination de  $\delta z$  entre (113) et la dernière relation suivie du remplacement  $\frac{dz}{df}$  par sa valeur  $e^{i\Omega(Z)}$  conduit à l'équation différentielle linéaire :

$$\frac{d\gamma}{df} + i \frac{d\Omega}{df} (\gamma - \delta f) = -i\delta\Omega$$

ou :

$$(114) \quad \frac{d\gamma}{dZ} + i \frac{d\Omega}{dZ} (\gamma - \delta f) = -i\delta\Omega \frac{df}{dZ}$$

En intégrant cette équation nous obtenons :

$$(115) \quad \gamma = i e^{-i\Omega} \left\{ \int e^{i\Omega} [\delta f d\Omega - \delta\Omega df] \right\}$$

expression dépendant d'une constante d'intégration qui doit être choisie de telle manière que  $\gamma(Z)$  s'annule lorsque la déformation imposée au squelette est elle-même nulle.

Ces différentes formules prouvent que  $\gamma(Z)$  est une fonction analytique et régulière de  $Z$  pour  $q \leq Z < 1$  sauf peut-être pour  $Z = Z_1$  et  $Z = \pm q$  points en lesquels  $\delta f(Z)$  n'est pas régulière<sup>(3)</sup>.

D'autre part, les fonctions  $\delta\Omega(e^{is})$  et  $\frac{d\Omega(e^{is})}{ds}$  sont hœlderiennes pour  $0 \leq s \leq \pi$  exception faite des valeurs :

$$s = s_0 \quad \text{et} \quad s = s_j \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

Il en résulte que les coefficients de l'équation différentielle linéaire définissant  $\gamma$  le sont aussi pour ces mêmes valeurs de  $s$  et que par suite  $\gamma(Z)$  est elle-même hœlderienne en même temps que sa dérivée pour  $q \leq Z \leq 1$  sauf peut-être pour :

$Z = Z_0$ ;  $Z = Z_j = e^{is_j}$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ );  $Z = \pm 1$ ;  $Z = \pm q$ ;  $Z = Z_1$  points en lesquels la formule (113) n'est plus valable.

### 32. — Étude de $\gamma(Z)$ le long du demi-cercle $Z = e^{is}$ ( $0 \leq s \leq \pi$ ).

a) Plaçons-nous d'abord à l'intérieur d'un intervalle  $s_{k-1} < s < s_k$ . En

3. JK, pp. 215-16.

procédant comme pour l'obtention de la formule (50) nous avons :

$$\Omega(e^{is}) = \psi_k[l(s)] + i \operatorname{Log}(e^{is}) + i U(s) - i \operatorname{Log} \frac{\sigma \left[ \frac{\omega_1}{\pi} (s + s_0) \right]}{\sigma \left[ \frac{\omega_1}{\pi} (s + s_0) \right]}$$

Nous savons aussi que :

$$\frac{dl}{ds} = \left| e^{i \Omega(e^{is})} \right| \cdot \left| \frac{df}{ds} \right|$$

Formons alors :

$$\delta \Omega + i \frac{\delta dl}{dl} = \delta \left[ \Omega + i \operatorname{Log} \frac{dl}{ds} \right] = \delta \left\{ \psi_k[l(s)] + i \operatorname{Log} \left| \frac{df}{ds} \right| \right\}$$

nous en déduisons :

$$(116) \quad \delta \Omega(e^{is}) = \psi'_k(l) \delta l + \Delta \psi_k(l) + i \frac{d \delta f}{df} - i \frac{d \delta l}{dl}$$

Portons cette valeur dans (114) il vient :

$$\frac{d}{dz} (\delta z) = i \psi'_k(l) \delta l + i \Delta \psi_k(l) + \frac{d}{dl} (\delta l)$$

Mais sur l'intervalle en cause :

$$dz = e^{i \psi_k(l)} dl$$

d'où :

$$d(\delta z) = i e^{i \psi_k(l)} \psi'_k(l) \delta l dl + i \Delta \psi_k(l) e^{i \psi_k(l)} dl + e^{i \psi_k(l)} d(\delta l)$$

ou encore :

$$d(\delta z) = d[e^{i \psi_k(l)} dl] + i \Delta \psi_k(l) e^{i \psi_k(l)} dl$$

et en intégrant :

$$\delta z(e^{is}) = e^{i \psi_k(l)} \delta l + i \int e^{i \psi_k(l)} \Delta \psi_k(l) dl$$

Mais :

$$z(l) = \int_{l_{k-1}}^l e^{i \psi_k(l)} dl + z(l_{k-1})$$

il s'ensuit que le dernier terme de  $\delta z$  représente la variation  $\Delta z(l)$  que subit l'abscisse  $z(l)$  du point de l'obstacle d'abscisse curviligne  $l$  du fait de la déformation imposée au squelette;  $\Delta z(l)$  est donc une quantité connue. Nous écrirons :

$$\delta z = e^{i \psi_k(l)} \delta l + \Delta z(l)$$

$\delta z$  dépend d'une constante d'intégration, nous choisissons celle-ci de manière que  $\delta z$  s'annule avec  $\delta l$  et  $\Delta z(l)$ .

D'autre part :

$$\Omega(e^{is}) = \psi_k - \pi + iT \quad \text{pour} \quad s_{k-1} < s \leq s_0 < s_k$$

et

$$\Omega(e^{is}) = \psi_k + iT \quad \text{pour} \quad s_{k-1} < s_0 \leq s < s_k$$

d'où :

$$\begin{aligned}\psi_k &= \Omega - iT + \pi & \text{pour } s_{k-1} < s \leq s_0 < s_k \\ \psi_k &= \Omega - iT & \text{pour } s_{k1} < s_0 \leq s < s_k\end{aligned}$$

Il s'ensuit que :

$$\delta z(e^{is}) = j e^{i\Omega} \cdot e^T \cdot dl + \Delta z(l)$$

avec  $j = 1$  pour  $s < s_0$  et  $j = +1$  pour  $s > s_0$ .

Portons cette valeur dans :

$$\gamma = \alpha + i\beta = \delta f - \frac{df}{dz} \delta z = \delta f - e^{-i\Omega} \delta z$$

nous obtenons :

$$(117) \quad \gamma(e^{is}) = \delta f - j e^{T(e^{is})} \delta l(s) - e^{-i\Omega(e^{is})} \Delta z(l)$$

Comme  $\delta f(e^{is})$  est réel nous en tirons :

$\beta(e^{is}) = -$  Partie imaginaire de  $[e^{-i\Omega} \Delta z(l)]$  ou encore en explicitant :

$$\beta(e^{is}) = - \text{Partie imaginaire de} \left[ e^{-i\psi_k(e)} e^{jH(e^{is})} e^{U(s)} \frac{\sigma \left[ \frac{\omega_1}{\pi} (s - s_0) \right]}{\sigma \left[ \frac{\omega_1}{\pi} (s + s_0) \right]} \Delta z(l) \right]$$

Il en résulte que la fonction harmonique  $\beta(X, Y)$  prend à l'intérieur de chacun des intervalles  $(s_{k-1}, s_k)$  des valeurs connues lorsque on impose au squelette une déformation très petite.

b) Etude de  $\gamma(Z)$  et de  $\frac{d\gamma}{dZ}$  au voisinage de  $Z = Z_j$  :

Remarquons tout d'abord que  $\gamma(Z)$  reste bornée au voisinage de  $Z = Z_j$ . En effet, au voisinage de ces points  $z(Z)$  est bornée,  $f(z)$  qui fait la représentation conforme de  $(\mathcal{A})$  sur  $(F)$  l'est également, donc  $f[z(Z)]$  est bornée et même continue au voisinage de  $Z = Z_j$ ; il en sera de même de :

$$f^*[z(Z^*)] = f[z(Z)]$$

donc de  $\gamma(Z)$  sa partie principale. D'autre part  $\gamma(Z)$  est uniforme et analytique dans la demi-couronne; elle est donc entièrement déterminée par l'équation différentielle (114) et la connaissance de sa valeur initiale.  $\gamma(Z)$  étant continue sur le demi-cercle  $|Z| = 1, Y \geq 0$ , même, d'après ce qui précède au voisinage des  $Z_j$ , pour préciser l'allure de  $\gamma(Z)$  en ces points il suffira de prolonger cette expression à partir d'un point  $Z_0$  de (d) jusqu'à la frontière le long d'un arc de courbe de Jordan rectifiable joignant  $Z_0$  à  $Z_j$ .

Ceci posé nous distinguerons deux cas :

Premier cas :  $s_j \neq s_0$ .

Il résulte de :

$$\Omega(Z) = H(Z) + i \sum_{j=1}^n (2z_j - 1) \text{Log.} \frac{Z - Z_j}{Z - \bar{Z}_j} - i \text{Log.} \frac{\sigma \left[ \frac{\omega_1}{i\pi} \text{Log.} Z + \frac{\omega_1}{\omega} s_0 \right]}{\sigma \left[ \frac{\omega_1}{i\pi} \text{Log.} Z - \frac{\omega_1}{\pi} s_0 \right]}$$

qu'au voisinage de  $Z_j$  on peut écrire :

$$(118) \quad \Omega(Z) = i(2\alpha_j - 1) \operatorname{Log}(Z - Z_j) + F(Z)$$

$F(Z)$  désignant comme toujours une fonction holomorphe régulière en  $Z_j$ .

Nous en déduisons :

$$(119) \quad \frac{d\Omega}{dZ} = \frac{i(2\alpha_j - 1)}{Z - Z_j} + \frac{dF}{dZ}$$

$$(120) \quad \partial\Omega(Z) = 2i\partial\alpha_j \operatorname{Log}(Z - Z_j) - i(2\alpha_j - 1) \frac{\partial Z_j}{Z - Z_j} + \partial F$$

Désignons par ... des fonctions hœlderiennes au point  $Z = Z_j$  et nulles en ce point, nous pouvons écrire successivement :

$$\begin{aligned} e^{i\Omega} &= (Z - Z_j)^{1-2\alpha_j} \left[ e^{iF(Z_j)} + \dots \right] \\ e^{-i\Omega} &= (Z - Z_j)^{2\alpha_j-1} \left[ e^{-iF(Z_j)} + \dots \right] \end{aligned}$$

D'autre part on sait (JK<sub>1</sub>, N° 31) que  $\delta f(Z)$  est une fonction analytique de  $Z$  dans la demi-couronne  $(d)$ , qu'elle est régulière en chaque point intérieur à  $(d)$  et sur ses frontières, exception faite des points  $Z = \pm q$  et  $Z = Z_1$ . On en déduit qu'au voisinage de chaque point  $Z = Z_j$  on peut écrire :

$$\delta f(Z) = \delta f(Z_j) + \dots$$

Enfin de la définition même de  $f(Z)$  il résulte que :

$$\frac{df}{dZ} = \left[ \frac{df}{dZ} \right]_{Z=Z_j} + \dots$$

Portons ces différentes expressions dans (103) il vient :

$$\begin{aligned} \gamma(Z) &= i(Z - Z_j)^{2\alpha_j-1} \left[ e^{-iF(Z_j)} + \dots \right] \\ &\times \int (Z - Z_j)^{1-2\alpha_j} \left[ e^{iF(Z_j)} + \dots \right] \left\{ \frac{i(2\alpha_j-1)}{Z - Z_j} \left[ \delta f(Z_j) + \left( \frac{df}{dZ} \right)_{Z=Z_j} \right] \right. \\ &\quad \left. - 2\alpha_j i \partial\alpha_j \operatorname{Log}(Z - Z_j) \left( \frac{df}{dZ} \right)_{Z=Z_j} \right\} dZ \end{aligned}$$

et après intégration :

$$\gamma(Z) = \left[ \delta f + \frac{df}{dZ} \partial Z_j \right]_{Z=Z_j} + \dots$$

d'où :

$$(121) \quad \gamma(Z_j) = \left[ \delta f + \frac{df}{dZ} \partial Z_j \right]_{Z=Z_j}$$

$f(e^{18})$  étant réelle  $\gamma(Z_j)$  est réel. Il en résulte que  $\beta(X, Y) = 0$  aux points  $Z = Z_j$ .

Pour l'étude de  $\frac{d\gamma}{dZ}$  nous partirons de l'expression (114). En y portant les valeurs déjà calculées de  $\delta f, \frac{df}{dZ}, \frac{d\Omega}{dZ}, \delta\Omega, \gamma$  on trouve :

$$(122) \quad \frac{d\gamma}{dZ} = 2 \delta z_j \left[ \frac{df}{dZ} \right]_{Z=Z_j} \text{Log.} (Z - Z_j) + \dots$$

$\frac{d\gamma}{dZ}$  présente donc en général au point  $Z = Z_j$  un infini logarithmique. Il en résulte que  $\gamma(Z)$  est hœlderienne pour  $Z = Z_j$  l'exposant de Hœlder étant voisin de 1 que l'on voudra.

*Deuxième cas :*  $s_j = s_0$ .

Le point de bifurcation est confondu avec une pointe. Désignons par  $2\alpha_0 - 1$  la valeur de  $2\alpha_j - 1$  en ce point particulier. Nous avons :

$$\Omega(Z) = i(2z_0 - 1) \text{Log.} (Z - Z_0) + i \text{Log.} \left[ \frac{\omega_1}{\pi} \text{Log.} \frac{Z}{Z_0} \right] + F(Z)$$

d'où :

$$\Omega(Z) = i 2\alpha_0 \text{Log.} (Z - Z_0) + A_0 + A_1 (Z - Z_0) + \dots$$

de sorte que ce cas ne diffère du précédent qu'en ce que  $2\alpha_j - 1$  est remplacé par  $2\alpha_0$ . Nous avons donc :

$$\gamma(Z_0) = \left( \delta f + \frac{df}{dZ} \delta Z_0 \right)_{Z=Z_0}$$

or nous savons (\*) que :

$$(123) \quad \delta f(Z_0) = 0 \text{ et } \frac{df}{dZ} \simeq (Z - Z_0) \left( \frac{d^2 f}{dZ^2} \right)_{Z=Z_0}$$

il en résulte que :

$$(124) \quad \gamma(Z_0) = 0.$$

De même :

$$\left[ \frac{d\gamma}{dZ} \right]_{Z=Z_0} = \left[ 2 \delta z_0 \text{Log.} (Z - Z_0) \frac{df}{dZ} \right]_{Z=Z_0} + F'(Z_0)$$

En tenant compte de (123) on voit que cette expression est finie pour  $Z = Z_0$ .

33. — Il resterait à étudier  $\gamma(Z)$  aux points  $Z = \pm 1$ ;  $Z = \pm q$ ;  $Z = Z_1$ . Cette étude a été faite par M. KRAVTCHEVSKOY (5) il est inutile d'y revenir. En résumé nous pouvons dire :

1°  $\gamma(e^{is})$  et  $\frac{d\gamma(e^{is})}{ds}$  existent pour  $0 \leq s \leq \pi$  sauf aux points  $Z = Z_j$  où  $\frac{d\gamma}{dZ}$  présente une singularité logarithmique. Dans tous les cas :

$$\gamma(e^{is_0}) = 0 \text{ et } \left[ \frac{d\gamma}{ds} \right]_{s=s_0} \text{ est finie.}$$

$\beta(e^{is})$  est une donnée,  $\beta(e^{is_j}) = 0$ .

4. JK1, p. 248.

5. JK1, pp. 272-274. Nous transcrivons ci-dessous les conclusions nécessaires à notre étude.

2°  $\frac{d\gamma}{df}$  considérée comme une fonction de  $Z$  possède un pôle simple aux points  $Z = \pm 1$  et dans le voisinage de ces points on peut écrire <sup>(5)</sup> :

$$(125) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\gamma}{df} = m \frac{Z-1}{Z+1} + m' + \varepsilon(Z-1) \\ \frac{d\gamma}{df} = n \frac{Z+1}{Z-1} + n' + \varepsilon(Z-1) \end{array} \right.$$

développements dans lesquels  $m, m', n$  et  $n'$  désignent des constantes complexes données s'annulant avec les variations des données et qu'il est inutile d'explicitier.

3° Le long de l'axe réel  $Y = 0$ ,  $\beta(X, 0)$  vérifie la relation <sup>(5)</sup> :

$$(126) \quad \frac{1}{\beta} \frac{d\beta}{dn} = \frac{dT}{dn} \quad \text{pour } q < |X| < 1$$

4° La fonction  $\gamma(qe^{is})$  est analytique, régulière dans chacun des intervalles :  $0 < s < s_1$ ;  $s_1 < s < \pi$  extrémités exclues. Sur chacun d'eux elle est définie à une constante additive près a priori inconnue et égale à  $-\delta\psi_2$  sur le premier intervalle à  $\delta\psi_1$  sur le second.  $\gamma(Z)$  est continue pour  $Z = \pm q$  lorsque les distances  $d_1$  et  $d_2$  sont finies.  $\gamma(Z)$  présente pour  $Z = Z_1$  une singularité logarithmique tant que  $Z_1 \neq q$  (c'est-à-dire que  $d_1, d_2 \neq \infty$ ). Au voisinage de  $Z = Z_1$  on a :

$$(127) \quad \gamma(Z) = -i \frac{\psi_1 + \psi_2}{\pi} \left[ \Omega'(Z_1) \delta Z_1 + \delta \Omega(Z_1) \right] \text{Log.}(Z - Z_1) + \delta F(Z)$$

expression qui montre que le coefficient du logarithme est une constante a priori inconnue.

Enfin <sup>(6)</sup> :

$$(128) \quad \begin{aligned} \beta(qe^{is}) &= \delta\psi_1 - \Delta_1 e^{T(qe^{is})} \quad \text{pour } s_1 < s < \pi \\ \beta(qe^{is}) &= -\delta\psi_2 + \Delta_1 e^{T(qe^{is})} \quad \text{pour } 0 < s < s_1 \end{aligned}$$

Nous appelons conditions W l'ensemble des conditions précédentes.

**34.** — Il nous reste à prouver maintenant qu'il y a équivalence entre la détermination de  $\gamma(Z)$  et la résolution de (110).

La connaissance des données :

$$\psi_1(l) \dots \psi_{n+1}(l); \alpha, l_1 \dots l_n, \beta, d_1, d_2$$

qui définissent le squelette initial, et de leurs variations :

$$\Delta\psi_1(l) \dots \Delta\psi_{n+1}(l) \Delta\alpha \Delta l_1 \dots \Delta l_n \Delta\beta \Delta d_1 \Delta d_2$$

qui définissent le squelette voisin et d'autre part de :

$$x = x[l(s), s_1 \dots s_n a b] \quad \text{et de } \delta x = \delta x[\delta l(s), \delta s_1 \dots \delta s_n, \delta a, \delta b]$$

permet de définir  $\gamma(Z)$  ainsi que nous venons de le voir.

6. JK<sub>1</sub>, p. 274.

Inversement, supposons connues les données, leurs variations  $x$  et  $\gamma(Z)$ . L'équation (117) permet d'exprimer  $\delta l(s)$  sous la forme d'une fonction linéaire en  $\gamma$  et  $\delta a$ ,  $\delta b$  ( $\tau$ ). Les relations (121) qui s'écrivent

$$\gamma(e^{is_j}) = \delta f(e^{is_j}) + i \left[ \frac{df(e^{is})}{dZ} \right]_{s=s_j} e^{is_j} \delta s_j$$

( $j = 1, 2, \dots, n$ )

permettent à leur tour de calculer les  $\delta s_j$  sous forme de fonctions linéaires de  $\gamma$  et de  $\delta a$  et  $\delta b$ .

D'autre part on peut dans les relations (128) faire respectivement  $s = \pi$  et  $s = 0$ . Nous obtenons alors deux équations linéaires en  $\delta a$  et  $\delta b$  par l'intermédiaire de  $\delta \psi_1$  et  $\delta \psi_2$  dont les coefficients et les seconds membres sont connus. Ce système, qui est résoluble, fournira :  $\delta a$  et  $\delta b$ , en portant les valeurs ainsi trouvées dans  $\delta l(s)$  et dans les  $\delta s_j$  on en déduira  $\delta x$ .

*Conclusion.* — Il y a donc équivalence entre la résolution du système aux variations (110) et la détermination de  $\gamma(Z)$ . Nous appelons problème de M. WEINSTEIN le problème qui consiste à déterminer la fonction  $\gamma(Z)$  assujettie à vérifier les conditions W.

---

7. JK<sub>1</sub>, N° 31.  $\delta f$  dépend de  $\delta \psi_1$  et  $\delta \psi_2$ , eux-mêmes fonctions linéaires de  $\delta a$ ,  $\delta b$ .

CHAPITRE V

**DISCUSSION DU PROBLÈME DE M. WEINSTEIN**  
**THÉORÈMES D'UNICITÉ**

---

**35. — Préliminaires.**

On sait <sup>(1)</sup> que cette discussion repose sur un lemme important dû à M. FRIEDRICHS, lemme que nous rappellerons au moment opportun. Ce lemme repose lui-même sur l'application de la formule :

$$(129) \quad \int_C \left[ \beta \frac{d\beta}{dn} - \frac{\beta^2}{\beta_0} \frac{d\beta_0}{dn} \right] ds = \iint_D \left[ \left( \frac{\partial \beta}{\partial X} - \frac{\beta}{\beta_0} \frac{\partial \beta_0}{\partial X} \right)^2 + \left( \frac{\partial \beta}{\partial Y} - \frac{\beta}{\beta_0} \frac{\partial \beta_0}{\partial Y} \right)^2 - \frac{\beta^2}{\beta_0} \left( \frac{\partial^2 \beta_0}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \beta_0}{\partial Y^2} \right) \right] dX dY$$

dans laquelle C désigne un contour d'intégration fermé rectifiable limitant un domaine D simplement connexe,  $\beta$  une fonction harmonique quelconque régulière à l'intérieur de D et dérivable le long de C,  $\beta_0$  une fonction surharmonique positive quelconque, c'est-à-dire une fonction vérifiant les conditions :

$$\beta_0(X, Y) > 0$$

$$(130) \quad \frac{\partial^2 \beta_0}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \beta_0}{\partial Y^2} \leq 0$$

en tout point de D. Enfin le quotient  $\frac{\beta^2}{\beta_0}$  est supposé borné dans D.

La formule (129) est une conséquence immédiate de la formule de Green-Riemann; nous allons montrer qu'elle est encore applicable lorsque  $\beta(X, Y)$  est la partie imaginaire d'une fonction analytique dans (D)

$$(131) \quad \gamma(Z) = \alpha(X, Y) + i\beta(X, Y)$$

bornée et continue en tout point de (C) mais présentant en un point  $Z_0$  de ce contour la singularité suivante :

$$\left( \frac{d\gamma}{dZ} \right)_{Z=Z_0} = \lambda \text{ Log. } (Z - Z_0) + F(Z - Z_0)$$

où  $\lambda$  est une constante finie et  $F(Z - Z_0)$  une fonction holomorphe en  $Z_0$ .

**36. —** A cet effet nous étudierons tout d'abord l'intégrale :

$$(132) \quad I = \int_C \beta \frac{d\beta}{dn} ds = - \int_C \beta \frac{\partial \beta}{\partial Y} dX - \beta \frac{\partial \beta}{\partial X} dY$$

---

1. JK<sub>1</sub>, pp. 227 et suivantes.



Utilisons le procédé classique qui consiste à isoler le point  $Z_0$  par un cercle centré en  $Z_0$  et de rayon  $\rho$ . Soit  $(\Gamma)$  l'arc de ce cercle intérieur à  $(D)$ , d'extrémités  $A$  et  $B$  sur  $(C)$ ; l'arc  $\widehat{AB}$  de  $(C)$  contenant  $Z_0$ ; nos hypothèses sur la nature de  $(C)$  entraînent l'existence d'un tel arc.

Désignons par  $(C')$  l'arc complémentaire de  $\widehat{AB}$  par rapport à  $(C)$ .  $AB$  et  $(\Gamma)$  limitent un domaine  $\Sigma$ . Soit  $D'$  le domaine complémentaire de  $\Sigma$  par rapport à  $(D)$ , nous avons le droit d'écrire :

$$\int_{C'+\Gamma} P dX + Q dY = \int \int_{D'} \left( \frac{\partial Q}{\partial X} - \frac{\partial P}{\partial Y} \right) dX dY$$

avec :

$$P = \beta \frac{\partial \beta}{\partial Y} ; Q = -\beta \frac{\partial \beta}{\partial X}$$

En tenant compte que  $\Delta\beta = 0$  nous obtenons <sup>(2)</sup> :

$$(133) \quad \int_{C'+\Gamma} \beta \frac{\partial \beta}{\partial n} ds = \int \int_{D'} \left[ \left( \frac{\partial \beta}{\partial X} \right)^2 + \left( \frac{\partial \beta}{\partial Y} \right)^2 \right] dX dY$$

Posons  $Z = Z_0 + \rho e^{i\varphi}$  et  $\lambda = k_1 + ik_2$ . En tout point de  $(D')$  et de sa frontière, où  $\gamma(Z)$  est analytique, nous pouvons écrire <sup>(3)</sup> :

$$\frac{d\gamma}{dZ} = \frac{\partial \beta}{\partial Y} + i \frac{\partial \beta}{\partial X} = (k_1 + i k_2) (\text{Log. } \rho + i \varphi) + \Phi_1(\rho, \varphi) + i \Phi_2(\rho, \varphi)$$

d'où par identification :

$$(134) \quad \begin{cases} \frac{\partial \beta}{\partial X} = k_2 \text{Log. } \rho + k_1 \varphi + \Phi_2(\rho, \varphi) \\ \frac{\partial \beta}{\partial Y} = k_1 \text{Log. } \rho - k_2 \varphi + \Phi_1(\rho, \varphi) \end{cases}$$

Étude de  $J_1 = \int_{\Gamma} \beta \frac{\partial \beta}{\partial Y} dX - \beta \frac{\partial \beta}{\partial X} dY$

On peut se borner à l'étude de  $J'_1 = \int_{\Gamma} \beta \frac{\partial \beta}{\partial Y} dX$ . Nous avons :

$$J'_1 = \int_{\Gamma} \beta (X_0 + \rho \cos \varphi, Y_0 + \rho \sin \varphi) [k_1 \text{Log. } \rho - k_2 \varphi + \Phi_1(\rho, \varphi)] \rho \cos \varphi d\varphi$$

$\beta(X, Y)$  et  $\Phi_2(\rho, \varphi)$  étant bornés sur  $(\Gamma)$  nous pouvons écrire :

$$(135) \quad |J'_1| < 2\pi M_1 |\rho \text{Log } \rho| + M_2 \rho$$

2. Voir Appel, tome III, Chapitre XXVIII.

3.  $\Phi_i$  désigne d'une manière générale une fonction analytique de  $\rho$  et  $\varphi$  dans  $(D)$  et sur sa frontière;  $M_i$  une borne supérieure des fonctions continues qui interviennent dans le calcul.  $M_i$  ne garde pas nécessairement la même valeur lorsqu'on passe d'une inégalité à une autre.

Cette inégalité prouve que  $|J'_1|$  tend vers zéro avec  $\rho$ . Il en sera de même de  $J_1$ .

Étude de 
$$J_2 = \int \int_{\Sigma'} \left[ \left( \frac{\partial \beta}{\partial X} \right)^2 + \left( \frac{\partial \beta}{\partial Y} \right)^2 \right] dX dY$$

Traçons un deuxième cercle centré en  $Z_0$  et de rayon  $\rho' < \rho$ ;  $\Sigma'$  est le domaine intérieur à  $\Sigma$  ne contenant pas  $Z_0$ . Dans  $\Sigma'$  les formules (134) sont valables, elles donnent :

$$J_2 = \int \int_{\Sigma'} \left\{ (k_1^2 + k_2^2) \left[ \overline{\text{Log. } \varphi}^2 + \varphi^2 \right] + \Phi_1^2 + \Phi_2^2 - 2 k_1 \varphi \Phi_1 - 2 k_2 \varphi \Phi_2 + 2 (k_1 \Phi_1 + k_2 \Phi_2) \text{Log. } \varphi \right\} \varphi d\varphi d\varphi$$

d'où :

$$\left| J_2 \right| < M_1 \int \int_{\Sigma'} \overline{\text{Log. } \varphi}^2 d\varphi d\varphi + M_2 \left| \int \int_{\Sigma'} \varphi \text{Log. } \varphi d\varphi d\varphi \right| + M_3 \int \int_{\Sigma'} \varphi d\varphi d\varphi$$

On en déduit :

$$\left| J_2 \right| < 2\pi \left[ M_1 \int_{\varphi'}^{\varphi} \overline{\text{Log. } \varphi}^2 d\varphi + M_2 \left| \int_{\varphi'}^{\varphi} \varphi \text{Log. } \varphi d\varphi \right| + M_3 \int_{\varphi'}^{\varphi} \varphi d\varphi \right]$$

On sait que ces intégrales tendent vers zéro,  $\rho$  et  $\rho'$  tendent vers zéro indépendamment l'un de l'autre.

Ceci posé, la fin du raisonnement est classique. Soit une suite décroissante :  $\rho_1 \rho_2 \dots \rho_n \dots$  de valeurs de  $\rho$ . Les cercles centrés en  $Z_0$  et de rayons  $\rho_1 \rho_2 \dots \rho_n \dots$  définissent une suite de domaines emboîtés :  $\Sigma_1 \Sigma_2 \dots \Sigma_n \dots$  et une suite de domaines :  $D_1 D_2 \dots D_n \dots$  tendent vers  $D$ .

Posons :

$$S_n = \int \int_{D_n} \left[ \left( \frac{\partial \beta}{\partial X} \right)^2 + \left( \frac{\partial \beta}{\partial Y} \right)^2 \right] dX dY$$

nous avons :

$$(136) \quad S_{n+p} - S_n = \int \int_{\Sigma'} \left[ \left( \frac{\partial \beta}{\partial X} \right)^2 + \left( \frac{\partial \beta}{\partial Y} \right)^2 \right] dX dY$$

avec  $\Sigma' = \Sigma_n - \Sigma_{n+p}$ . D'après ce qui précède le deuxième membre de (136) tend vers zéro lorsque  $n$  et  $p$  tendent vers l'infini indépendamment l'un de l'autre. Il en résulte que les  $S_n$  forment une suite convergente. On en déduit que le second membre de (133) a une limite finie lorsque  $\rho$  tend vers zéro.

Comme dans le même temps :  $\int_{\Gamma} \beta \frac{d\beta}{dn} ds$  tend aussi vers zéro on peut écrire à la limite :

$$(137) \quad \int_G \beta \frac{d\beta}{dn} ds = \int \int_D \left[ \left( \frac{\partial \beta}{\partial X} \right)^2 + \left( \frac{\partial \beta}{\partial Y} \right)^2 \right] dX dY$$

37. — Il reste à étudier l'intégrale :

$$\int_C \frac{\beta^2}{\beta_0} \frac{d\beta_0}{dn} ds = - \int_C \frac{\beta^2}{\beta_0} \left[ \frac{\partial \beta_0}{\partial Y} dX - \frac{\partial \beta_0}{\partial X} dY \right]$$

On procède comme au N° 28 en posant :

$$P = - \frac{\beta^2}{\beta_0} \cdot \frac{\partial \beta_0}{\partial Y}; Q = \frac{\beta^2}{\beta_0} \frac{\partial \beta_0}{\partial X}$$

on est alors ramené à l'étude de l'intégrale

$$(138) \quad \int \int_{D'} \left\{ \frac{2\beta}{\beta_0} \left( \frac{\partial \beta}{\partial X} \cdot \frac{\partial \beta_0}{\partial X} + \frac{\partial \beta}{\partial Y} \cdot \frac{\partial \beta_0}{\partial Y} \right) - \frac{\beta^2}{\beta_0^2} \left[ \left( \frac{\partial \beta_0}{\partial X} \right)^2 + \left( \frac{\partial \beta_0}{\partial Y} \right)^2 \right] + \frac{\beta^2}{\beta_0} \left( \frac{\partial^2 \beta_0}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \beta_0}{\partial Y^2} \right) \right\} dX dY$$

qui se fait encore comme au N° 36. En retranchant la limite de (138) et (137) on trouve (129). Il est évident que (128) est encore valable s'il existe sur le contour (C) un nombre fini de points  $Z_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) tels que  $Z_0$ .

38. — **Hypothèse de Friedrichs.**

Envisageons la solution  $x = x \left[ l(s), s_1, \dots, s_n, \frac{1}{a+1}, \frac{1}{b-1} \right]$  du problème de représentation conforme de Helmholtz posé pour les données :

$$\psi_1(l), \dots, \psi_{n+1}(l), \alpha, l_1, \dots, l_n, \beta, d_1, d_2$$

Nous conviendrons de dire que cette solution vérifie l'hypothèse de Friedrichs lorsque dans la demi-couronne ( $d$ ) correspondante on peut définir une fonction  $B(X, Y)$  assujettie à vérifier les conditions suivantes que nous appellerons conditions (E) (4).

1°  $B(X, Y)$  est positive dans son domaine de définition.

2°  $B(X, Y)$  possède dans son domaine de définition des dérivées partielles du premier ordre hœlderiennes dans ( $d$ ) et le long de ses frontières, sauf peut être en un nombre fini de points  $Z_j$  où ces dérivées peuvent présenter une singularité logarithmique du type (134).

3°  $B(X, Y)$  est surharmonique dans son domaine de définition.

4° Le long des segments  $q \leq |X| \leq 1$  de l'axe  $Y = 0$  on a :

$$(139) \quad \frac{1}{B} \cdot \frac{dB}{dn} = \frac{dT}{dn}$$

où  $T(X, Y)$  est la fonction de M. VILLAT construite à partir des données (126).

4. Nos hypothèses ne coïncident pas tout à fait avec celles de MM. LERAY et KRAVCHENKO. Les modifications à apporter aux raisonnements de ces auteurs ne portent que sur des détails. Nous avons cru cependant utile de refaire ceux de ces raisonnements qui étaient essentiels pour notre objet.

Dans le cas où le squelette est symétrique par rapport à  $Ox$  (problème symétrique du sillage) le domaine de définition de  $B(X, Y)$  se réduit à la moitié :  $X \geq 0$ ;  $Y \geq 0$  de la demi-couronne ( $d$ );  $B(X, Y)$  vérifiera la relation (139) le long du segment  $q \leq X \leq 1$  seulement.

Si nous nous reportons au chapitre précédent, nous voyons que la fonction  $\beta(X, Y)$  de M. WEINSTEIN correspondante à une déformation quelconque du squelette satisfait à une partie des conditions (F) et non à d'autres : elle ne vérifie pas nécessairement la première et est irrégulière aux points  $Z = Z_1$  et  $Z = \pm q$  <sup>(5)</sup>.

### 39. — Squelette permettant la réalisation de l'hypothèse de Friedrichs.

Nous allons chercher des variations des données qui entraînent pour la fonction  $\beta(X, Y)$  correspondante de vérifier toutes les hypothèses (F).

Faisons subir au squelette une translation  $\Delta z = C^e$ . Les équations aux variations correspondantes admettent évidemment les solutions :

$$\delta\Omega(Z) = 0; \quad \delta f(Z) = 0.$$

Portons ces valeurs dans (115) il reste :

$$\gamma(Z) = \lambda e^{-i\Omega(Z)}$$

$\lambda$  étant une constante que nous déterminons grâce à (117). En se rappelant la signification de  $\Delta z$  on trouve :

$$(140) \quad \gamma(Z) = -\Delta z_0 e^{-i\Omega(Z)} = -\Delta z e^{-i\Omega(Z)}$$

valable en tout point de la couronne et de son contour sauf aux points  $Z_1$ . L'expression (140) montre que maintenant  $\gamma(Z)$  est régulière aux points  $Z = Z_1$  et  $Z = \pm q$ ; la condition  $F_2$  est satisfaite.

Il reste à satisfaire à  $F_1$ ; nous distinguerons deux cas :

a) *Squelette symétrique par rapport à l'axe du canal.*

On sait <sup>(6)</sup> qu'il existe au moins une solution symétrique et qu'elle vérifie pour  $X \geq 0$ ,  $Y \geq 0$  l'inégalité :

$$(141) \quad -\pi \leq \theta(X, Y) \leq 0$$

Prenons pour  $\Delta z$  une valeur réelle et négative, (140) donne :

$$\beta(X, Y) = \Delta z e^{\tau \sin \theta}$$

quantité qui d'après (141) et nos hypothèses est positive ou nulle. Donc en tout point  $Z$  distinct des  $Z_j$  :  $\beta(X, Y) \geq 0$ . Comme en ces points  $\beta(X, Y) = 0$  (N° 32) on peut choisir pour  $B$  la fonction  $\beta(X, Y)$  correspondante à la variation du squelette indiquée ci-dessus, ainsi : *l'hypothèse de Friedrichs est toujours vérifiée dans le cas des obstacles symétriques.*

b) *Cas général.*

A priori nous ignorons la position du point de bifurcation; nous examinerons successivement les cas qui peuvent se présenter.

5. JK<sub>1</sub>, pp. 273-274. (Remarquons que la singularité en  $Z = \pm q$  est de même nature que celle aux points  $Z = Z_j$ . Elle n'est donc pas gênante comme nous le verrons.)

6. JK<sub>2</sub>, N°s 28-29.

*Premier cas :  $Z_0$  est différent d'un  $Z_j$  et est situé sur l'arc  $\overline{P_{j-1}P_j}$ .*

$\gamma(Z)$  est continue et nulle en ce point. Au voisinage de  $Z_0 = e^{is_0}$  nous avons d'après (140) et le N° 32 :

$$(142) \quad \gamma(e^{is}) = -e^{-i\psi_j[l(s)]} \frac{H(e^{is})}{e^{i\psi_j[l(s)]}} \cdot e^{i\psi_j[l(s)]} \frac{U(s) \sigma \left[ \frac{\omega_1}{\pi} (s-s_0) \right]}{\sigma \left[ \frac{\omega_1}{\pi} (s+s_0) \right]} \cdot \Delta z$$

Si  $s_{j-1} < s < s_0 < s_j$  l'avant-dernier facteur est négatif donc quand  $s$  tend vers  $s_0$  par valeurs inférieures à  $s_0$  l'argument de  $\gamma(Z)$  atteint la valeur :

$$(143) \quad \text{Arg } \Delta z - \psi_j[l(s_0)]$$

Si  $s_0 < s < s_j$  l'avant-dernier facteur devient positif et lorsque  $s$  tend vers  $s_0$  l'argument de  $\gamma(Z)$  atteint la valeur :

$$\text{Arg } \Delta z - \psi_j[l(s_0)] + \pi$$

Cet argument subit en  $s_0$  une discontinuité égale à  $\pi$ .

Posons :

$$\Delta z = |\Delta z| e^{i\psi_j[l(s_0)]}$$

il en résulte :

$$\text{Arg } \gamma[e^{i(s_0-\varepsilon)}] = \pi + \psi_j[l(s_0)] - \psi_j[l(s_0 - \varepsilon)]$$

Pour qu'au point  $Z = e^{i(s_0-\varepsilon)}$  la fonction  $\beta(X, Y)$  soit positive ou nulle il faut :

$$(144) \quad \psi_j[l(s_0)] - \psi_j[l(s_0 - \varepsilon)] \leq 0$$

D'autre part :

$$\text{Arg } \gamma[e^{i(s_0+\varepsilon)}] = 2\pi + \psi_j[l(s_0)] - \psi_j[l(s_0 + \varepsilon)]$$

$\beta(X, Y)$  sera positive ou nulle au point  $Z = e^{i(s_0+\varepsilon)}$  si :

$$(145) \quad \psi_j[l(s_0)] - \psi_j[l(s_0 + \varepsilon)] \geq 0.$$

La comparaison de (144) et (145) montre qu'au voisinage de  $l(s_0)$ ,  $\psi_j(l)$  doit être une fonction non croissante de  $l$ .

Or  $s_0$  est indéterminée, il faut donc que cette propriété ait lieu tout le long de l'obstacle, c'est-à-dire que celui-ci soit ou bien rectiligne ou bien convexe par rapport au fluide vif. En nous plaçant dans ce dernier cas qui est le seul qui nous occupe ici, cela entraîne :

$$1 - 2\alpha_j > 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

*Deuxième cas :  $Z_0 = Z_j$ .*

Nous avons encore  $\gamma(Z_0) = 0$ ;  $\beta(X_0, Y_0) = 0$  (N° 32).

En procédant comme ci-dessus on trouve pour les valeurs extrêmes d'Arg.  $\gamma(Z)$  :

$$\text{Arg } \Delta z - \psi_j(l_j) \quad \text{et} \quad \text{Arg } \Delta z - \psi_{j+1}(l_j) + \pi$$

La discontinuité est égale à :

$$(146) \quad \Delta = 2\pi(1 - \alpha_j)$$

Comme  $0 < \alpha < \frac{1}{2}$  cette discontinuité est comprise entre  $\pi$  et  $2\pi$ .

Prenons :

$$\Delta z = - |\Delta z| e^{i \psi_j(l_j)}$$

on trouve :

$$\text{Arg. } \gamma \left[ e^{i(s_0 - \varepsilon)} \right] = \pi - \left\{ \psi_j[l(s_0 - \varepsilon)] - \psi_j[l_j] \right\} = \pi - \varepsilon_1$$

$\beta(X, Y)$  est donc positive ou nulle au point :  $Z = e^{i(s_0 - \varepsilon)}$ .

De même :

$$\text{Arg. } \gamma \left[ e^{i(s_0 + \varepsilon)} \right] = 2\pi - \left\{ \psi_{j+1}[l(s_0 + \varepsilon)] - \psi_j[l_j] \right\} = 2\pi + \varepsilon_2$$

$\beta(Z, Y)$  est positive ou nulle au point :  $Z = e^{i(s_0 + \varepsilon)}$ .

En résumé nous voyons que dans tous les cas, pour les obstacles convexes par rapport au fluide vif, il suffit de poser :

$$(147) \quad \Delta z = - |\Delta z| e^{i \psi[l(s_0 - \theta)]}$$

pour que la fonction de M. WEINSTEIN soit sûrement positive (ou nulle) sur le cercle  $|Z| = 1$  au voisinage du point image du point de bifurcation.

Il est facile de voir alors que  $\beta(X, Y)$  sera positive ou nulle dans toute la demi-couronne ( $d$ ).

En effet, il résulte de (140) que :

$$(148) \quad \beta(X, Y) = e^{\int_0^\pi |\Delta z| \sin \{ \psi_j[l(s_0 - \theta)] - \Theta(X, Y) \}}$$

or nous savons que  $\theta(X, Y)$  est une fonction harmonique dans toute la couronne et qu'elle est nulle sur le cercle intérieur. Elle atteint donc ses maxima et minima sur le cercle extérieur  $|Z| = 1$ . Sur cette partie de la frontière on a

$$\begin{aligned} \theta &= \psi[l(s)] - \pi & \text{pour } 0 \leq s \leq s_0 \\ \theta &= \psi[l(s)] & \text{pour } s_0 \leq s \leq \pi \end{aligned}$$

de sorte que :

$$\begin{aligned} \psi_j[l(s_0 - 0)] - \Theta &= \pi + \psi_j[l(s_0 - 0)] - \psi[l(s)] & \text{pour } 0 \leq s \leq s_0 \\ \psi_j[l(s_0 - 0)] - \Theta &= \psi_j[l(s_0 - 0)] - \psi[l(s)] & \text{pour } s_0 \leq s \leq \pi \end{aligned}$$

D'après nos hypothèses on est assuré que ces quantités sont comprises entre 0 et  $\pi$ . Il en résulte d'après (148) que :

$$\beta(X, Y) \geq 0$$

dans toute la demi-couronne ( $d$ ). C. Q. F. D.

Nous pouvons donc conclure :

*les obstacles convexes vers le fluide vif vérifient l'hypothèse de Friedrichs.*

*Remarque :* On peut voir de la même manière que pour les obstacles concaves vers le fluide vif l'hypothèse de Friedrichs n'est pas satisfaite (7).

#### 40. — Lemme de Friedrichs.

Ceci posé prenons un squelette vérifiant l'hypothèse de Friedrichs. Soit  $B(X, Y)$  la fonction de Friedrichs correspondante qui suivant la nature du

7. Consulter par exemple JK<sub>1</sub>, p. 280.

squelette correspond à une des déformations indiquées au numéro précédent. Soit  $\beta(X, Y)$  une solution du problème de M. WEINSTEIN correspondant à une déformation quelconque des données (on exclut le cas où  $\beta$  serait proportionnelle à  $B$ ). Considérons les lignes d'équations :  $\beta(X, Y) = 0$  et appelons  $\Delta$  les domaines d'un seul tenant en lesquels les lignes  $\beta = 0$  partagent la demi-couronne. La frontière  $(\Delta')$  de  $\Delta$  peut donc comprendre :

- 1) des arcs d'équation  $\beta(X, Y) = 0$  intérieurs à  $(d)$
- 2) des arcs  $|Z| = 1$
- 3) des arcs  $|Z| = q$
- 4) des portions de  $Y = 0$ .

Désignons par  $(\Delta_1)$  ceux des  $(\Delta)$  dont la frontière ne contient aucun arc de la deuxième et de la troisième sortes sur lesquels on aurait  $\beta \neq 0$ . (Autrement dit si sur  $|Z| = 1$  et  $|Z| = q$  il existe des arcs sur lesquels  $\beta = 0$ , ces arcs peuvent appartenir à  $(\Delta'_1)$ ).

*Le lemme de Friedrichs précise que  $(\Delta'_1)$  contient  $Z^1 = qe^{i\pi}$ .*

Pour vérifier ce lemme nous utiliserons la formule (129). Admettons que ce lemme soit en défaut, il existe alors un domaine  $\Delta_1$  le long de la frontière  $(\Delta'_1)$  duquel la fonction  $\beta$  de M. WEINSTEIN serait régulière et nulle sauf peut-être sur les portions de l'axe  $y = 0$ , si ces portions appartiennent à  $(\Delta'_1)$  (car  $\beta$  n'est pas a priori nécessairement nulle sur cet axe) et aux points  $Z_j$  si  $(\Delta'_1)$  passe par certains de ces points. D'après nos hypothèses  $\beta$  ne change pas de signe dans  $(\Delta_1)$ . Formons :

$$(149) \quad \begin{cases} \beta_0 = B + \beta & \text{si } \beta > 0 & \text{dans } (\Delta_1) \\ \beta_0 = B - \beta & \text{si } \beta < 0 & \text{dans } (\Delta_1) \end{cases}$$

$\beta$  étant harmonique et  $B$  surharmonique,  $\beta_0$  l'est aussi. De plus  $B$  étant positive :

$$|\beta_0| \geq |\beta| \text{ d'où } \left| \frac{\beta}{\beta_0} \right| \leq 1$$

le quotient  $\frac{\beta}{\beta_0}$  est donc borné et la formule (129) s'applique au domaine  $\Delta_1$  même si sa frontière  $(\Delta'_1)$  contient des  $Z_j$ .

Sur les portions de  $(\Delta'_1)$  où  $\beta = 0$  l'intégrale du premier membre de (117) est nulle. Le restant de la frontière ne peut être alors constitué que par des portions de l'axe  $Y = 0$ . Or sur cet axe on a d'après (126) :

$$\frac{dB}{B} = \frac{d\beta}{\beta} = \frac{dB}{B} \pm \frac{d\beta}{\beta} = \frac{d\beta_0}{\beta_0}$$

Il en résulte que le crochet de l'intégrale du premier membre de (129) est identiquement nul sur cet axe d'où :

$$(150) \quad \iint_{\Delta_1} \left[ \left( \frac{\partial \beta}{\partial X} - \frac{\beta}{\beta_0} \frac{\partial \beta_0}{\partial X} \right)^2 + \left( \frac{\partial \beta}{\partial Y} - \frac{\beta}{\beta_0} \frac{\partial \beta_0}{\partial Y} \right)^2 - \frac{\beta^2}{\beta_0} \left( \frac{\partial^2 \beta_0}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \beta_0}{\partial Y^2} \right) \right] dX dY = 0$$

Les trois termes de (150) étant positifs, l'intégrale n'est nulle que si :

$$\frac{1}{\beta} \frac{\partial \beta}{\partial X} \equiv \frac{1}{\beta_0} \frac{\partial \beta_0}{\partial X} \quad \frac{1}{\beta} \frac{\partial \beta}{\partial Y} \equiv \frac{1}{\beta_0} \frac{\partial \beta_0}{\partial Y}$$

ce qui entraîne :

$$\frac{\beta}{\beta_0} = C_{\equiv}$$

$\beta$  et  $B$  sont alors proportionnelles ce qui est contraire à notre hypothèse. Il faut donc que la formule (117) ne soit pas applicable, c'est-à-dire que  $(\Delta'_1)$  passe par le point singulier  $Z^1$  où  $\gamma(Z)$  présente une singularité logarithmique<sup>(8)</sup>.

#### 41. — Conséquences du lemme de Friedrichs.

Elles sont identiques à celles mises en évidence par MM. LÉRAY et KRAVTCHEKO. En particulier on peut en déduire quelques propriétés des configurations dont les squelettes vérifient l'hypothèse de M. FRIEDRICHS<sup>(9)</sup>. Ces propriétés se généralisent aux squelettes considérés dans ce travail et vérifiant toujours l'hypothèse de Friedrichs. Nous nous contenterons de les énoncer :

##### Propriété I :

Si l'on déforme un squelette symétrique de manière que l'obstacle demeure invariable de forme et de position alors que les parois  $\mu_1$  et  $\mu_2$  subissent des translations égales et de sens contraires ( $\Delta d_1 = \Delta d_2$ ), les accroissements correspondants des paramètres  $\delta\psi_1$  et  $\delta y_1$  ( $\delta\psi_2$  et  $\delta y_2$ ) sont du signe de  $\Delta d_1$  (de  $\Delta d_2$ ).

##### Propriété II :

Si on déforme une configuration vérifiant l'hypothèse de Friedrichs de manière que l'obstacle et l'une des parois demeurent invariables de forme et de position alors que la deuxième paroi  $\mu_2$  pour fixer les idées subit une translation égale à  $\Delta d_2$ , les accroissements correspondants des paramètres  $\delta\psi_2$  et  $\delta y_2$  sont du signe de  $\Delta d_2$ .

Par contre rappelons l'essentiel des raisonnements conduisant aux conséquences utiles pour l'établissement de nos théorèmes d'unicité.

Prenons un squelette vérifiant l'hypothèse de Friedrichs et étudions la fonction  $\beta(X, Y)$  dans le cas où le squelette est invariable de forme et de position, c'est-à-dire où :

$$\Delta\psi_1(l) = 0 \dots \Delta\psi_{n+1}(l) = 0; \Delta\alpha = 0, \Delta l_1 = 0 \dots \Delta l_n = 0, \Delta\beta = 0, \\ \Delta d_1 = \Delta d_2 = 0.$$

Il résulte alors de (117) et du fait que  $\beta(X_j, Y_j) = 0$  que  $\beta(X, Y) \equiv 0$  le long du demi-cercle  $|Z| = 1, Y \geq 0$ . D'autre part (125) montre que :

$$(151) \quad \frac{d\gamma}{df} = 0 \quad \text{pour } Z = \pm 1.$$

8. JK<sub>1</sub>, p. 274.

9. JK<sub>1</sub>, N° 34.



Enfin de (128) on déduit

$$(152) \quad \beta(qe^{is}) = \begin{cases} -\delta\psi_2 & \text{pour } 0 \leq s \leq s_1 \\ \delta\psi_1 & \text{pour } s_1 \leq s \leq \pi \end{cases}$$

Or on sait d'après un théorème de M. MAGNIER<sup>(10)</sup> que si U et V sont les parties réelles et imaginaires d'une fonction analytique dans un domaine (d), la disposition des courbes  $U = C^e$  et  $V = C^e$  passant par un point  $Z_0$  de la frontière où la tangente est continue est au voisinage de ce point identique à celle qu'y présente le développement de  $U + iV$  arrêté à son premier terme.

Ce théorème rappelé, plaçons-nous aux points  $Z = \pm 1$ . Du fait que  $\beta(X, Y) \equiv 0$  sur  $|Z| = 1$ , que  $\frac{d\gamma}{df} = 0$  aux points  $Z = \pm 1$  et par application du théorème ci-dessus, on déduit<sup>(11)</sup> que les points  $Z = \pm 1$  sont les origines de lignes d'équations

$$\beta(X, Y) = \beta(\pm 1, 0) = 0$$

intérieures au domaine (d). Etudions les extrémités de ces lignes.

Si une de ces lignes aboutit en un point  $Z = e^{is}$  elle limitera avec l'arc correspondant de  $|Z| = 1$  un domaine dans lequel la fonction harmonique  $\beta$  sera régulière et sur la frontière duquel elle sera nulle et continue. Il en résultera d'après un théorème élémentaire sur les fonctions harmoniques la nullité de  $\beta$  dans tout le domaine (d), ce qui d'après (152) entraînera :

$$(153) \quad \delta\psi_1 = \delta\psi_2 = 0.$$

Aucune de ces lignes ne peut revenir directement vers l'axe des X car alors elle limiterait avec celle-ci un domaine ( $\Delta_1$ ) or nous savons d'après le lemme de Friedrichs que la frontière d'un tel domaine passe par  $Z_1$ , si bien que la ligne envisagée ne revient pas directement vers l'axe des X. Nous aboutissons à une contradiction.

Il ne reste que l'hypothèse d'après laquelle la ligne envisagée aboutirait en un point  $Z = qe^{is}$ . Soit  $\varepsilon_1$  l'argument de l'extrémité de cette ligne, supposons  $\varepsilon_1 \neq s_1$ . La fonction  $\beta$  est continue pour  $Z = qe^{i\varepsilon_1}$ , comme un ligne  $\beta$  aboutit à ce point  $\beta(qe^{i\varepsilon_1}) = 0$ . Il en résulte d'après (143) qu'au moins un des accroissements  $\delta\psi_1$  ou  $\delta\psi_2$  est nul et que  $\beta = 0$  sur l'un au moins des arcs  $0 \leq s < s_1$  ou  $s_1 < s \leq \pi$ .

Mais alors il existe au moins un domaine ( $\Delta_1$ ) dont la frontière ( $\Delta'_1$ ) contient cette ligne et dont la partie de la frontière située sur  $|Z| = q$  ne contient pas  $Z_1$ . Ce qui est contraire au lemme de Friedrichs. Donc  $\varepsilon_1 = s_1$ .

En résumé les lignes  $\beta = 0$  issues des points  $Z = \pm 1$  :

a) ou bien aboutissent sur le demi-cercle  $|Z| = 1$ ,  $Y \geq 0$  et alors  $\beta(X, Y) \equiv 0$  dans (d).

10. C. R. Académie des Sciences, t. 200, 1935, p. 1275.

11. JK<sub>1</sub>, p. 249 : pour que l'emploi du théorème de M. MAGNIER soit légitime, il faut raisonner dans le domaine F.

b) ou bien aboutissent au point  $Z_1$ .

Or nous avons rappelé au numéro précédent qu'en ce point  $\gamma(Z)$  présentait une singularité logarithmique. L'application d'un autre théorème de M. MAGNIER montre que la deuxième éventualité n'est pas possible. La contradiction ne peut être levée que si  $\beta \equiv 0$ . Donc dans toutes les éventualités possibles  $\beta \equiv 0$  dans (d) et nous pouvons conclure :

*Le problème de M. Weinstein posé pour un squelette vérifiant l'hypothèse de Friedrichs et lorsque les variations des données sont identiquement nulles n'admet d'autre solution que  $\beta \equiv 0$ .*

$\beta = 0$  étant la seule solution possible, il en résulte que  $\gamma(Z) \equiv 0$  dans (d) est aussi la seule solution possible<sup>(12)</sup> d'où :

$$(154) \quad \gamma(Z) \equiv 0 \quad \delta\psi_1 = 0 \quad \delta\psi_2 = 0$$

Nous reportant au N° 33 nous en déduisons :  $\delta a = \delta b = 0$  c'est-à-dire :

$$\delta l(s) = 0 \quad \delta s_j = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

En définitive :

$\delta x = 0$  est la seule solution de l'équation aux variations

$$\delta x = \partial F \left[ \partial x, x, \psi_1(l) \dots \psi_{n+1}(l), \alpha, l_1 \dots l_n, \beta \frac{1}{d_1}, \frac{1}{d_2}, 0, 0, 0 \dots \right]$$

posée pour tout squelette vérifiant de Friedrichs.

#### 42. — Détermination de l'indice topologique des solutions de l'équation aux variations (99).

Nous reportant à la fin du N° 30 nous voyons que nous pouvons déduire du résultat précédent le résultat suivant :

*l'équation (112) posée pour un squelette vérifiant l'hypothèse de Friedrichs possède une seule solution.*

Il nous reste à calculer :

$$(155) \quad i [\partial x - \partial F(\partial x, x), \partial x]$$

Pour déterminer cet indice on utilise la propriété d'invariance de celui-ci, propriété rappelée au N° 8. A cet effet, nous allons construire une équation :

$$(156) \quad \partial x = \partial F(\partial x, x, k)$$

vérifiant toutes les hypothèses de l'énoncé précédent et se réduisant à (112) pour  $k = 1$  et, pour  $k = 0$ , à une équation dont la solution a un indice connu.

Introduisons à cet effet un squelette auxiliaire  $\mathcal{C}(k)$  dépendant du paramètre réel  $k$  ( $0 \leq k \leq 1$ ) et défini de la manière suivante :

Prenons un obstacle rectiligne d'inclinaison

$$\psi^1(l) = s_0$$

---

12. Rappelons que  $\gamma(Z)$  doit par hypothèse s'annuler avec les variations des données, ce qui élimine la solution  $\gamma(Z) = \text{constante}$ .

de ce choix et de l'équation de définition de  $s_0^1$  :

$$\pi s_0^1 = \int_0^\pi \psi^1(l) ds$$

il résulte que :  $s_0 = s_0^1$ .

Prenons encore :  $a^1 = a$ ,  $b^1 = b$ ;  $\psi^1_1 = \psi^1$ ;  $\psi^1_2 = \psi_2$ .

Soient  $\Phi^1(s)$  et  $\Omega^1(Z)$  les fonctions de MM. VILLAT et LÉVI-CIVITA construites à partir de ces éléments et  $\Phi(s)$  la fonction de M. VILLAT liée au squelette donné.

Considérons alors la configuration  $\mathcal{C}(k)$  dépendant du paramètre  $k$  ( $0 \leq k \leq 1$ ) construite par les procédés de M. VILLAT à partir des éléments :

$$(157) \quad \Phi(s, k) = k \Phi(s) + (1 - k) \Phi^1(s); a, b, \psi_1, \psi_2$$

Pour  $k = 1$ ,  $\mathcal{C}(k)$  se réduit à la configuration donnée; pour  $k = 0$  à la configuration auxiliaire. On vérifie aisément<sup>(13)</sup> qu'à partir des éléments (157) on peut, par les méthodes de M. VILLAT, construire la fonction  $\Omega(Z, k)$ ; qu'elle est telle :

$$\Omega(Z, k) = k \Omega(Z) + (1 - k) \Omega^1(Z)$$

et que si  $\mathcal{C}(0)$  et  $\mathcal{C}(1)$  vérifient l'hypothèse de Friedrichs  $\mathcal{C}(k)$  la vérifie aussi. Nous en concluons que l'équation aux variations relative à  $\mathcal{C}(k)$ , qui est continue par rapport à  $k$ , possède une seule solution quel que soit  $k$  ( $0 \leq k \leq 1$ ). Donc :

$$(158) \quad i [\partial x - \partial \mathcal{F}_k(\partial x, x), \partial x] = i [\partial x - \partial \mathcal{F}(\partial x, x), \partial x] \\ = i [\partial x - \partial \mathcal{F}_0(\partial x, x), \partial x]$$

Or le troisième membre de (158) est l'indice de la solution de (112) posée pour un obstacle rectiligne placé dans un canal à bords rectilignes. On sait<sup>(14)</sup> que cet indice est égal à + 1. Donc :

*L'indice topologique d'une solution de l'équation aux variations (112) supposée écrite pour une configuration vérifiant l'hypothèse de Friedrichs est égal à + 1.*

### 35. — Conséquences et conclusions.

Nous reportant au N° 30 nous en déduisons que (73) a une solution unique.

Avant d'énoncer nos conclusions faisons un rappel de certaines des hypothèses que nous avons dû faire concernant la nature du squelette.

Pour les obstacles polygonaux la différentiation du système de M. VILLAT est valable sans restriction, mais l'hypothèse de Friedrichs n'est sûrement satisfaite que pour les obstacles symétriques par rapport à l'axe du canal ou pour les obstacles dissymétriques convexes vers le fluide vif.

Pour les obstacles formés d'arcs de courbe ayant une courbure finie en chaque point, nous avons dû à plusieurs reprises supposer que l'on avait :

$$0 \leq 1 - 2\alpha_j < 1 \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

13. JK<sub>1</sub>, N° 35.

14. JK<sub>1</sub>, N° 35.

Les pointes de l'obstacles doivent donc être tournées vers le fluide vif, mais si l'obstacle est symétrique par rapport à l'axe du canal, la concavité de ses arcs constitutifs est arbitraire puisque l'hypothèse de Friedrichs est toujours satisfaite.

Pour les obstacles dissymétriques de cette nature, il faut que l'obstacle, dans son ensemble, soit convexe, par rapport au fluide vif.

En résumé nous pouvons conclure :

*Le problème de représentation conforme de Helmholtz posé sur un squelette formé d'un obstacle possédant des pointes et placé dans un canal à bords rectilignes parallèles possède une solution et une seule dans les cas suivants :*

*Premier cas :* l'obstacle est une ligne polygonale symétrique par rapport à l'axe du canal.

*Deuxième cas :* l'obstacle est formé d'arcs de courbe, il est symétrique par rapport à l'axe du canal et ses pointes sont tournées vers le fluide vif.

*Troisième cas :* l'obstacle est non symétrique par rapport à l'axe du canal, polygonal ou formé d'arcs de courbe, mais il est convexe par rapport au fluide vif.

---

## CHAPITRE VI

### APPLICATION AU BILAME SYMÉTRIQUE (1)

36. — Rappel des résultats de MM. Villat et Cisotti (2).

Soit un bilame BOC, symétrique par rapport à  $Ox$ , placé dans un canal  $(\mu_1, \mu_2)$  de largeur  $2D$  (fig. 4). Désignons par  $\mathcal{C}$ , la lame  $oc$ , soit dans le plan du mouvement, soit dans les plans sur lesquels nous représenterons confor-

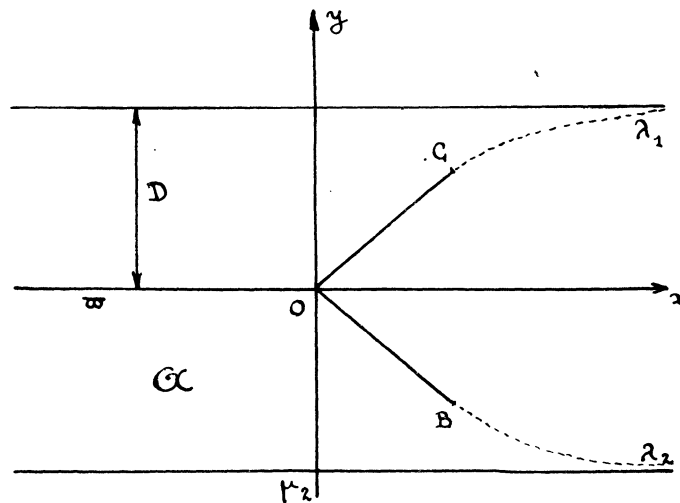


fig 4

mément le domaine du fluide en mouvement  $\mathcal{A}$ . Nous pouvons assimiler la partie de  $ox$  située dans  $\mathcal{A}$  à une paroi solide  $\mathcal{C}$  de telle sorte que nous aurons seulement à prendre en considération la moitié supérieure du domaine occupé par le fluide (fig. 5).

Soit toujours :

$$f(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$$

le potentiel complexe. Dans  $f$  nous aurons la représentation (II) (fig. 6). Pour transformer (II) en demi-cercle (III) (fig. 7) il suffit de poser :

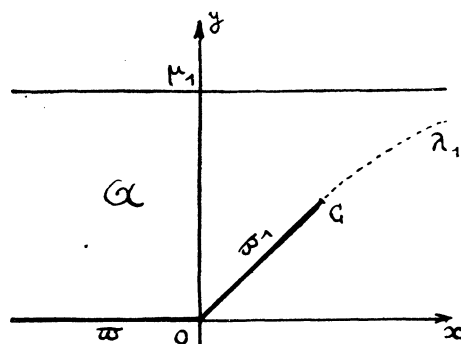
1. Nous nous proposons dans un travail ultérieur d'étendre la méthode utilisée dans ce chapitre à des cas plus généraux.

2. H. VILLAT. — Bulletin de la Société des Sciences mathématiques (1912), I, chap. VII, p. 73. CISOTTI. — Circolo di Palermo (1909).

$$(159) \quad f = A - \frac{\psi_1}{\pi} \operatorname{Log.} \frac{(1-Z)^2}{1+Z^2}$$

avec :

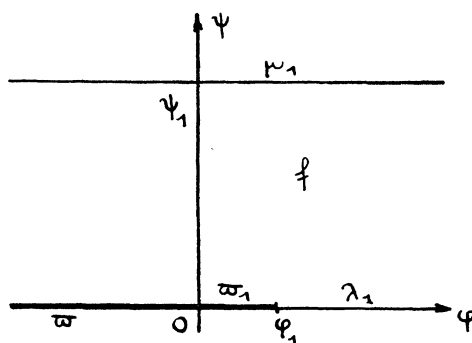
$$(160) \quad \begin{cases} A + \frac{\psi_1}{\pi} \operatorname{Log.} \frac{-\cos s_0}{1 - \cos s_0} = 0 \\ A - \frac{\psi_1}{\pi} \operatorname{Log.} 2 = \varphi_1 \end{cases}$$



I - fig 5

Si  $\alpha$  désigne l'angle que fait  $oc$  avec  $ox$  (fig. 4) les formules de M. VILLAT donnent <sup>(3)</sup> :

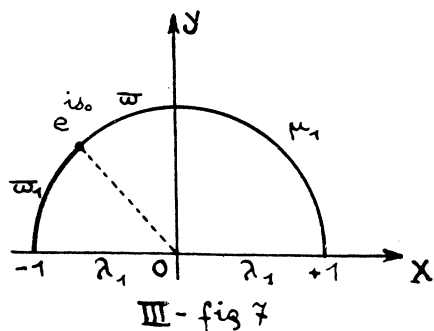
$$\pi(Z) = \frac{\alpha}{\pi} \int_0^\pi \frac{1-Z^2}{1-2Z\cos s + Z^2} ds = \frac{\alpha}{2} + \frac{i\alpha}{\pi} \operatorname{Log.} \left[ i \frac{Z - e^{is_0}}{1 - Ze^{is_0}} \right]$$



II - fig 6

1. (I), p. 75.

la détermination du logarithme étant celle qui se réduit à  $-i \frac{\pi}{2} + is_0$  pour  $Z = 0$ .



La vitesse  $V_\infty$  en amont est fournie par la partie imaginaire de  $\Omega(i)$  (fig. 7), on trouve

$$T = \frac{\alpha}{\pi} \text{Log. tg} \left( \frac{s_0}{2} - \frac{\pi}{4} \right)$$

d'où :

$$V_\infty = e^T = \left[ \text{tg} \left( \frac{s_0}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right]^{\frac{\alpha}{\pi}}$$

et

$$\psi_i = D \cdot V_\infty = D \left[ \text{tg} \left( \frac{s_0}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right]^{\frac{\alpha}{\pi}}$$

La longueur  $\mathcal{O}_i$  de la lame vaut :

$$\mathcal{O}_i = -\frac{\psi_i}{\pi} \int_{s_0}^{\pi} \left( \frac{\sin \frac{s+s_0}{2}}{\sin \frac{s-s_0}{2}} \right)^{\frac{\alpha}{\pi}} \cotg \frac{s}{2} \cdot \frac{ds}{\cos s}$$

Posons avec M. VILLAT :  $\pi - s_0 = \gamma_0$ ;  $\pi - s = \gamma$ , puis :

$$t = \frac{\text{tg} \frac{\gamma_0}{2} - \text{tg} \frac{\gamma}{2}}{\text{tg} \frac{\gamma}{2} + \text{tg} \frac{\gamma_0}{2}}; \tau_0 = \frac{1 - \text{tg} \frac{\gamma_0}{2}}{1 + \text{tg} \frac{\gamma_0}{2}} = \text{tg} \left( \frac{s_0}{2} - \frac{\pi}{4} \right)$$

on obtient

$$\mathcal{O}_i = \frac{\psi_i}{\pi} \int_0^1 \left[ -2 \frac{t^{-\alpha/\pi}}{1+t} + \frac{t^{-\alpha/\pi}}{t+1/\tau_0} + \frac{t^{-\alpha/\pi}}{t+\tau_0} \right] dt$$

Soit  $\Delta = 2 \varpi_1 \sin \alpha$  l'envergure de la lame et R la résistance directe, on a :

$$R = \frac{(D - \varpi_1)^2}{D}$$

$$\text{d'où : } \frac{R}{\Delta} = \frac{D}{2 \varpi_1 \sin \alpha} \left(1 - \tau_0^{\alpha/\pi}\right)^2$$

**37. — Transformation du domaine (III).**

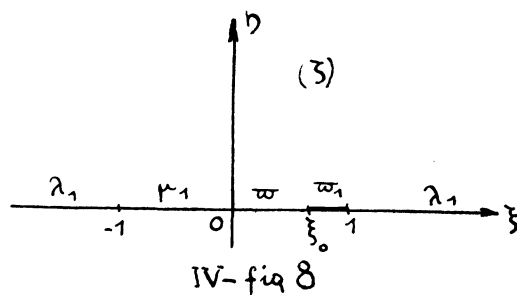
$$\zeta = -\frac{1}{2} \left( Z + \frac{1}{2} \right) \quad (\zeta = \xi + i \eta)$$

Nous transformons (III) en un demi-plan  $\zeta$  en posant :

$$\zeta = -\frac{1}{2} \left( Z + \frac{1}{2} \right) \quad (\zeta = \xi + i \eta)$$

on obtient (IV) avec :

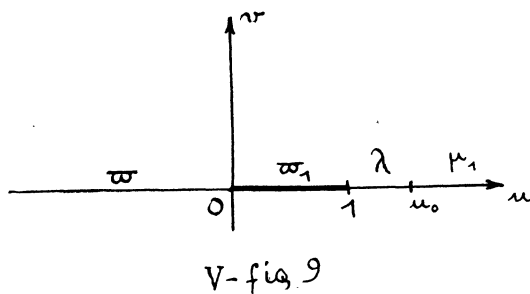
$$\xi_0 = -\frac{1}{2} [e^{is_0} + e^{-is_0}] = -\cos s_0$$



Faisons maintenant la transformation homographique :

$$w = \frac{\zeta - \xi_0}{(1 - \xi_0) \zeta} \quad (w = u + i v)$$

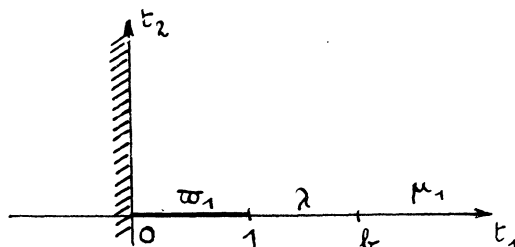
Elle donne (V) (fig. 9) avec  $u_0 = \frac{1 + \xi_0}{1 - \xi_0}$





Enfin posons  $t = \sqrt{w}$  nous obtenons (VI) (fig. 10) avec :

$$b = \sqrt{\frac{1+\tau_0}{1-\tau_0}} = \operatorname{tg} \frac{s_0}{2}$$



VI - fig 10

Il en résulte que :

$$\tau_0 = \frac{b-1}{b+1}$$

donc :

si  $b$  varie de 1 à  $+\infty$   $\tau_0$  est une fonction croissante de  $b$ .

### 38. — Étude de la variation de $b$ et de $D$ .

Donnons-nous un squelette défini par :

$$\alpha, \zeta_1, D$$

D'après nos théorèmes d'unicité nous savons qu'il existe une solution et

une seule pour un tel squelette. Posons  $\frac{\alpha}{\pi} = k$  nous avons :

$$\psi_1 = D \tau_0^k$$

$$\zeta_1 = \frac{\psi_1}{\pi} \int_0^1 \left( \frac{t^{-k}}{t+\tau_0} + \frac{t^{-k}}{t+\frac{1}{\tau_0}} - 2 \frac{t^{-k}}{1+t} \right) dt$$

d'où

$$\zeta_1 = \frac{D}{\pi} F(\tau_0)$$

avec :

$$(161) \quad F(\tau_0) = \tau_0^k \int_0^1 \left( \frac{t^{-k}}{t+\tau_0} + \frac{t^{-k}}{t+\frac{1}{\tau_0}} - 2 \frac{t^{-k}}{1+t} \right) dt$$

Pour déterminer l'inconnue  $\tau_0$  nous avons donc l'équation

$$(162) \quad F(\tau_0) - \pi \frac{\zeta_1}{D} = 0$$

qui doit avoir une racine et une seule comprise entre 0 et 1.

Laissons  $\mathcal{O}_1$  et  $\alpha$  fixes et faisons varier  $D$  et  $\Delta D$ . Il en résulte une variation  $\delta \tau_0$  pour  $\tau_0$  et l'on a d'après (162)

$$(163) \quad \frac{\Delta D}{D} = - \frac{\delta F(\tau_0)}{F(\tau_0)}$$

comme  $D$  et  $F(\tau_0)$  sont positifs  $\Delta D$  et  $\delta F(\tau_0)$  sont des signes contraires. Nous sommes alors ramenés à étudier  $\delta F(\tau_0)$ .

Posons :

$$(164) \quad y = F(\tau) = \tau^k \int_0^1 \left( \frac{-2t^{-k}}{1+t} + \frac{t^{-k}}{t+\frac{1}{\tau}} + \frac{t^{-k}}{t+\tau} \right)$$

avec :  $0 < k < 1; \quad 0 \leq \tau \leq 1$

D'après ce qui précède pour chaque valeur de  $y$  nous avons une seule valeur de  $\tau$  dans l'intervalle  $(0, 1)$  :  $\tau$  est une fonction uniforme de  $y$ ; comme d'après son expression même  $y$  est une fonction uniforme et analytique de  $\tau$ , il en résulte que :

$$y = F(\tau)$$

est une fonction monotone de  $\tau$ .

Étudions les deux cas limites.

Si  $\tau \rightarrow 1, y \rightarrow 0$ .

$$\text{Si } \tau \rightarrow 0 \quad y = \lim_{\tau=0} \tau^k \int_0^1 \frac{t^{-k}}{t+\tau} = dt$$

qui s'écrit en posant  $u = \frac{\tau}{t}$

$$\int_0^{+\infty} \frac{du}{u^k(1+u)}$$

c'est une intégrale classique. Elle est égale à :  $\frac{\pi}{\sin \alpha}$

Donc quand  $\tau$  varie de 0 à 1,  $F(\tau)$  décroît de  $\frac{\pi}{\sin \alpha}$  à 0 et  $F'(\tau) \leq 0$  pour  $0 \leq \tau \leq 1$ .

En se rapportant à (163) on peut en déduire que :

$\Delta D$  et  $\Delta \tau_0$  sont de même signe

d'où d'après le n° 37 :

$\Delta D$  et  $\delta b$  sont de même signe

c'est la propriété que nous voulions signaler.

**39. — Application à une lame placée symétriquement et normalement au courant.**

On a (4)

$$\frac{R}{\Delta} = \frac{\pi (1 - \sqrt{\tau_0})}{2 [\pi - 2 (1 + \sqrt{\tau_0}) \text{Arc tg } \sqrt{\tau_0}]}$$

D'après ce qui précède nous savons que si  $D$  croît de  $\sin \alpha$  à  $+\infty$ ,  $\tau_0$  croît de 0 à 1. L'étude très simple de la fonction :

$$y = \frac{1 - x}{\frac{\pi}{2} - (1 + x) \text{Arc tg } x}$$

montre que  $\frac{R}{\Delta}$  décroît de la valeur  $\frac{1}{2}$  à la valeur  $\frac{\pi}{4 + \pi}$

Donc :

la résistance directe *décroît* lorsque la largeur du canal augmente.