ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

A. LIÉNARD

Électrodynamiques de Lorrentz et de Hertz et principe de la moindre action

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 4e série, tome 7 (1943), p. 71-98
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1943_4_7__71_0>

© Université Paul Sabatier, 1943, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (http://picard.ups-tlse.fr/~annales/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

ÉLECTRODYNAMIQUES DE LORENTZ ET DE HERTZ
ET PRINCIPE DE LA MOINDRE ACTION

Par A. LIÉNARD.

INTRODUCTION

1. — Dans une théorie restée justement célèbre, Maxwell a montré que les équations fondamentales de l'Électrodynamique pouvaient être mises sous la forme des équations de Lagrange pour les systèmes à liaison étudiés en Mécanique. Cette constatation laissait espérer qu'il serait possible un jour de trouver une explication mécanique de l'électricité. Remarquons cependant que, si l'existence d'une explication mécanique des phénomènes électriques exige que les lois régissant ces phénomènes puissent être mises sous la forme des équations de Lagrange [puisque cette forme d'équations est applicable à tous les systèmes mécaniques] il ne s'en suit pas que la condition nécessaire soit en même temps suffisante et il est permis d'en douter. La recherche d'une explication mécanique de l'électricité n'est d'ailleurs plus à l'ordre du jour et ce seraient plutôt les théories de la mécanique que l'on chercherait à faire rentrer dans les lois de l'électrodynamique.

Quel que soit le point de vue adopté à cet égard, la théorie de Maxwell n'en garde pas moins toute son importance : elle montre en effet qu'il y a un lien profond entre la Mécanique et l'Électricité puisque les phénomènes mécaniques et électriques font partie d'un ensemble régi par des lois de même forme.

Lorsqu'il a établi sa théorie, Maxwell n'a pu que suivre l'état de la Science à son époque. Il ne s'est occupé que de courants linéaires fermés [circuits où I a même valeur en tous points], dans l'hypothèses d'actions instantanées à distance et en l'absence de toute aimantation ou polarisation diélectrique.

H. Poincaré(¹) a étendu l'application de la théorie de Maxwell à la théorie électrodynamique de H. Lorentz, mais seulement en ce qui concerne les phénomènes

---

(¹) H. Poincaré, *Électricité et Optique*, 2ᵉ éd., 1901, §§ 333 à 352.

qui se présentent à un observateur ayant les sens très subtils. H. Poincaré ne considère ni courant de conduction, ni aimantation, ni polarisation (dont les variations développent des courants de déplacement dans le diélectrique), ces phénomènes n'étant que des apparences résultant du mouvement d'électrons. Poincaré ne considère que les courants de Rowland produits par le mouvement d'électrons indéformables et les courants de déplacement dans l'éther. Par contre, Poincaré ne suppose pas les actions instantanées et il fait intervenir dans ses raisonnements le champ électrique aussi bien que le champ magnétique alors que Maxwell ne considérait que ce dernier champ.

Dans une étude datant de 1929 sur la Stabilité de systèmes électriques(1), H. Chipart étend l'application des équations de Lagrange à des systèmes de circuits électriques en présence d'aimants permanents et temporaires en utilisant la notion de potentiel thermodynamique de systèmes magnétiques sans hystérèsis, notion que j'avais introduite en 1923(2); mais H. Chipart en reste (comme moi-même dans la dite étude) au cas de courants fermés avec action instantanée. De plus il laisse de côté l'influence de la température.

Ayant réussi depuis 1923 à montrer que la Théorie du potentiel thermodynamique peut être étendue à l'électrodynamique moderne avec courants non fermés et actions non instantanées(3) je me propose, en utilisant les travaux que je viens de citer, d'étendre la théorie de Maxwell aux théories électriques modernes concernant les corps en mouvement avec courants de conduction dans des corps à trois dimensions, substances magnétiques sans hystérèsis, diélectriques polarisés et en tenant compte des propriétés élastiques et thermodynamiques de la matière.

2. — Notations. J'emploierai les mêmes notations et les mêmes unités que dans le mémoire de 1941. Ainsi ρ est la densité électrique vraie; B, H, J, E, P et i sont les vecteurs représentant respectivement l'induction magnétique, la force magnétique, l'aimantation, la force électrique, la polarisation diélectrique et la densité de courant.

Je fais usage des unités d'Heaviside. En outre je suppose que la vitesse de la lumière dans le vide est prise comme unité de vitesse et que l'unité de charge électrique est telle que le coefficient de la loi de Coulomb ait la valeur un.

---

(1) H. Chipart. *Sur la stabilité séculaire des systèmes électrodynamiques*; Journal de l'École Polytechnique, 2e série, n° 27, p. 341-373.

(2) A. Liénard. *Équilibre et déformation de systèmes de conducteurs traversés par des courants et de corps magnétiques sans hystérèris.* Ann. de Physique, 9e série, t. XX, 1923.

(3) A. Liénard. *Application de la thermodynamique aux théories électrodynamiques de Hertz et de H. Lorentz pour les corps en mouvement.* Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 4e série, tome V, 1941, pages 1 à 47. Je signale en passant qu'il y a lieu de supprimer les deux dernières lignes de la note de la page 8 : la proposition énoncée est inexacte.

(A.B) et [A.B] désignent, suivant les notations de Grassmann, les produits scalaire et vectoriel de A par B. Le sens positif de rotation est de droite à gauche et les axes de coordonnées constituent un système à gauche. Les composantes de rot K sont $\frac{\partial K_z}{\partial y} - \frac{\partial K_y}{\partial z}$, etc...

Je fais usage de la notation tensorielle aussi bien que de la notation vectorielle, choisissant dans chaque cas la notation la plus simple.

Enfin je suppose qu'il n'existe dans le système aucune surface de discontinuité, celles qui existeraient naturellement étant remplacées par des couches de passage aussi minces qu'on le voudra, mais d'épaisseur finie. Je ferai en particulier une telle supposition en ce qui concerne le changement de vitesse au passage de la matière à l'éther pur.

CHAPITRE PREMIER

Rappel de résultats obtenus antérieurement.

3. — La notion de potentiel thermodynamique d'un système électrisé avec diélectriques et les propriétés de ce potentiel sont bien connues depuis les travaux d'Helmholtz et de Duhem. Il est inutile d'y revenir.

Pour les systèmes comprenant des courants électriques en présence ou non de substances magnétiques, P. Duhem était arrivé à cette conclusion que les notions d'entropie et de potentiel thermodynamique n'avaient plus de sens. P. Duhem était arrivé à cette conclusion parce qu'il avait considéré implicitement comme étant une conséquence forcée des principes de la thermodynamique que la relation entre l'énergie U et le potentiel Θ devait conserver la forme classique

$$U = \Theta - T\frac{\partial \Theta}{\partial T} \tag{1}$$

que possède cette relation en l'absence de courants. C'était une erreur comme je l'ai montré en 1923 en établissant l'existence d'une fonction Θ d'expression

$$\Theta = -\int_{0,0,}^{I,I',}(\Phi\, dI + \Phi' dI' + \dots) + \Theta_0$$

possédant les propriétés d'un potentiel. Θ_0 est le potentiel du même système sans courant; Φ, Φ',... sont les flux d'induction produits à travers chacun des circuits linéaires des courants I, I',..., compte tenu s'il y a lieu de l'aimantation prise par les substances magnétiques. Le travail fourni dans un déplacement quelconque (avec ou sans déformation), l'entropie et l'énergie sont liés à la fonction Θ par les relations

$$d\mathcal{T} = -d_{T,I}\Theta, \qquad S = -\frac{\partial \Theta}{\partial T}, \qquad \Phi = -\frac{\partial \Theta}{\partial I}, \tag{2}$$

$$U = \Theta + \Sigma TS + \Sigma I\Phi = \Theta - \Sigma T\frac{\partial \Theta}{\partial T} - \Sigma I\frac{\partial \Theta}{\partial I}. \tag{3}$$

La relation (3) diffère de (1) par le terme $\Sigma I \Phi$.

On peut encore écrire

$$\Theta = \int_{\text{espace}} \left\{ -\int_0^{\text{H}} (\text{B}.d\text{H}) \right\} d\tau + \Theta_0, \qquad \Sigma \text{I} \Phi = -\Sigma \text{I} \frac{\partial \Theta}{\partial \text{I}} = \int_{\text{espace}} (\text{B}.\text{H}) d\tau,$$

les quantités B et H étant l'induction et la force magnétique de l'élément de volume $d\tau$. L'intérêt d'introduire ces nouvelles expressions est qu'elles conservent un sens et qu'elles restent valables quand il ne s'agit plus de courants fermés avec action instantanée, mais de courants ouverts avec propagation à vitesse finie.

Compte tenu du champ électrique (résultant du champ électrostatique et de celui des forces électromotrices induites) il faut poser

$$\Theta = -\int_{\text{espace}} \psi(\text{H}, \text{P}, \text{T}, \text{déformation})\, d\tau$$

avec

$$\psi = \int_{0,0}^{\text{H},\text{P}} \{(\text{B}.d\text{H}) - (\text{E}_m.d\text{P})\} - \frac{\text{E}^2}{2} - \mathcal{F}_0. \tag{4}$$

La quantité E_m est la force électrique dans la matière, laquelle diffère de la force électrique E dans l'éther dans la théorie de H. Lorentz mais lui est égale dans la théorie de Hertz. L'intégration (4) doit être effectuée à température et déformation constantes, celles existant dans l'état d'aimantation et de polarisation pour lequel on veut connaître le potentiel. $\mathcal{F}_0$ est le potentiel thermodynamique de l'unité de volume de la matière en absence de champ électromagnétique. Bien entendu, nous supposons que tous les phénomènes sont réversibles, donc dénués d'hystérèsis, tout aussi bien au point de vue de la déformation qu'aux points de vue de l'aimantation et de la polarisation.

La fonction ψ jouera le rôle de fonction de Lagrange par unité de volume pour l'application du Principe de la moindre action.

Θ et la fonction ψ peuvent se décomposer de plusieurs manières en une somme de deux termes[1]. Il nous suffira de donner ici les deux décompositions suivantes intéressant les théories de H. Lorentz et de Hertz[2]

Th. de Lorentz : $$\psi = \frac{\text{B}^2 - \text{E}^2}{2} - \mathcal{F}(\text{J},\text{P}), \qquad \mathcal{F}(\text{J},\text{P}) = \int_{0,0}^{\text{J},\text{P}} (\text{B}.d\text{J}) + (\text{E}_m.d\text{P}) + \mathcal{F}_0, \tag{5}$$

Th. de Hertz : $$\psi = (\text{B}.\text{H}) - \frac{\text{H}^2 + \text{E}^2}{2} - \text{F}(\text{J}.\text{P}), \qquad \text{F}(\text{J}.\text{P}) = \int_{0,0}^{\text{J},\text{P}} (\text{H}.d\text{J}) + (\text{E}.d\text{P}) + \text{F}_0. \tag{5'}$$

---

[1] *Loc. cit.*, 1923, §§ 4 et suivants.
[2] *Loc. cit.*, 1941, §§ 7 et suivants.

Le passage de (4) à (5) ou (5') est immédiat en utilisant la relation connue(¹)

$$B = H + J. \tag{6}$$

Les fonctions $\mathcal{F}$ et F n'existent qu'aux points où se trouve de la matière et elles se réduisent à $\mathcal{F}_0$ ou F_0 dans les milieux non susceptibles d'aimantation et de polarisation. Pour nous en rendre compte, nous mettons $\mathcal{F} - \mathcal{F}_0$ sous la forme

$$(B.J) + (E_m.P) - \int_{0,0}^{B, E_m} (J.dB) + (P.dE_m). \tag{7}$$

Si l'on considère des matières de moins en moins magnétiques et polarisables, l'expression (7) devient de plus en plus petite car B et E_m, grandeurs physiques, sont essentiellement finies, tandis que J et P tendent vers zéro. $\mathcal{F} - \mathcal{F}_0$ s'annule donc à la limite. On ferait une démonstration analogue pour F.

4. — Pressions élastiques. On établit en thermodynamique que les pressions $p^{\mu\nu}$ développées à l'intérieur d'un fluide parfait ou d'un solide élastique sans hystérèsis sont liées au potentiel thermodynamique par unité de volume $\mathcal{F}$ par la relation

$$p^{\mu\nu}\delta_{\mu\nu} = -\frac{d_T(\sigma\mathcal{F})}{\sigma}. \tag{8}$$

σ est le volume spécifique, de sorte que $\sigma\mathcal{F}$ représente le potentiel pour l'unité de masse. Le tenseur $\delta_{\mu\nu}$ représente les dilatations et glissements. Je supposerai ici (comme je l'avais fait en 1923) que les $\delta_{\mu\nu}$ sont définies en fonction du déplacement imposé δs de composantes δx^1, δx^2, δx^3. On a(²)

$$\delta^{\mu}_{\nu} = \delta^{\nu}_{\mu} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\delta x^{\mu}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial\delta x^{\nu}}{\partial x^{\mu}}\right). \tag{9}$$

(¹) Signalons l'existence entre les dérivées des fonctions ψ, $\mathcal{F}$ et F des relations suivantes résultant des propriétés connues de la transformation de Legendre

$$\left.\begin{aligned} B &= \frac{\partial\psi}{\partial H} = \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial J}, \\ H &= \frac{\partial F}{\partial J}. \end{aligned}\right\} \quad E_m = -\frac{\partial\psi}{\partial P} = \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial P} = \frac{\partial F}{\partial P}, \quad \begin{aligned} S &= \frac{\partial\psi}{\partial T} = -\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial T} = -\frac{\partial F}{\partial T}, \\ -\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}d\alpha &= \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\alpha}d\alpha = \frac{\partial F}{\partial\alpha}d\alpha, \end{aligned}$$

α représente dans ces formules un paramètre dont dépendrait la déformation. Avec la fonction ψ, l'énergie par unité de volume a comme expression

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial H}.H\right) + \frac{\partial\psi}{\partial T}T - \psi(H, P, T, \alpha).$$

(²) Faisant exclusivement usage de coordonnées cartésiennes trirectangles, il n'y a pas à distinguer les composantes covariantes et contrevariantes et l'on peut faire monter ou descendre les indices à volonté.

Si les $\delta_{\mu\nu}$ sont des déformations virtuelles arbitraires, l'équation (8) permet de déterminer séparément les six composantes $p^{\mu\nu}$ et, s'il s'agit d'une déformation réelle, (8) permet d'évaluer le produit $p^{\mu\nu}\delta_{\mu\nu}$ [avec convention habituelle de sommation] sans avoir besoin d'évaluer d'abord séparément les six composantes.

La relation (8) n'est pas applicable sans précaution aux corps aimantés ou polarisés parce que les fonctions $\mathcal{F}$ ou F dépendent alors de J et P en plus de la température et de la déformation. J'ai montré(¹) qu'il est nécessaire d'imposer à J et P des variations virtuelles dépendant de la déformation $\delta_{\mu\nu}$ suivant la formule

$$\delta J_\mu = \left[\frac{1}{2}\operatorname{rot}\delta s . J\right]_\mu + C J_\nu \delta^\nu_\mu + C' J_\mu \delta^\nu_\nu .$$

C et C′ sont des constantes, à priori arbitraires. En fait, il n'y a que deux systèmes de valeurs intéressantes, savoir $C = -1$, $C' = 0$ [cf. mémoire de 1923, § 8, 1ʳᵉ convention], d'une part, et $C = +1$, $C' = -1$ [*loc. cit.*, 5ᵉ convention], d'autre part. Dans le premier cas, le courant équivalent à l'aimantation conserve une même valeur à travers tout élément de surface matérielle déformée; dans le second cas, c'est la masse de magnétisme équivalent se trouvant à l'intérieur de tout élément matériel qui reste invariable dans la déformation.

Pour la théorie de H. Lorentz il faut faire usage du premier système pour lequel

$$\delta J_\mu = -J_\nu \frac{\partial \delta x^\nu}{\partial x^\mu} \tag{10}$$

tandis que, pour la théorie de Hertz, c'est le second système qui convient avec

$$\delta J^\mu = J^\nu \frac{\partial \delta x^\mu}{\partial x^\nu} - J^\mu \frac{\partial \delta x^\nu}{\partial x^\nu} . \tag{10'}$$

Quant à la polarisation, elle doit subir une modification virtuelle donnée dans les deux théories par une relation du type (10′), c'est-à-dire

$$\delta P^\mu = P^\nu \frac{\partial \delta x^\mu}{\partial x^\nu} - P^\mu \frac{\partial \delta x^\nu}{\partial x^\nu} \qquad \text{ou} \qquad \delta P = (P.D)\delta s - P \operatorname{div} \delta s . \tag{11}$$

Cette condition exprime que le flux du vecteur P à travers tout élément de surface déformé a même valeur avant et après déformation.

(¹) *Loc. cit.*, 1941, § 4.

CHAPITRE II

Calculs préliminaires.

5. — Variation de la vitesse dans un mouvement infiniment peu varié. Soient $x^1 = x^1(a^1, a^2, a^3, t)$, x^2, x^3 les coordonnées d'un point matériel à l'instant t; a^1, a^2, a^3 étant les coordonnées du point à un instant particulier choisi comme instant initial (variables de Lagrange). Soit $x^\mu + \delta x^\mu$ un mouvement infiniment peu différent. La variation δV^μ de la vitesse du point à l'instant t est $\delta V^\mu = \frac{\partial \delta x^\mu}{\partial t}$, si δx^μ est exprimé au moyen des variables a^μ et t.

Supposons maintenant que les δx^μ soient exprimés au moyen des variables d'Euler x^1, x^2, x^3 et t et cherchons l'expression de δV^μ dans cette hypothèse. La théorie des changements de variables donne immédiatement

$$\delta V^\mu = \frac{\partial \delta x^\mu}{\partial t} + \frac{\partial \delta x^\mu}{\partial x^\nu}\frac{dx^\nu}{dt} = \frac{\partial \delta x^\mu}{\partial t} + V^\nu \frac{\partial \delta x^\mu}{\partial x^\nu}. \tag{12}$$

La variation calculée se rapporte au point matériel qui, à l'instant t, se trouve en $x^\mu + \delta x^\mu$ dans le mouvement varié au lieu d'être en x^μ. Soit d'autre part $\delta_1 V$ la variation de vitesse au point x^μ, c'est-à-dire la différence de vitesse des points matériels passant en x^μ au temps t, suivant qu'il s'agit du mouvement normal ou du mouvement varié. Il existe entre les symboles δ et δ_1 la relation

$$\delta = \delta_1 + \frac{\partial}{\partial x^\nu}\delta x^\nu, \tag{13}$$

d'où l'on déduit pour $\delta_1 V$ l'expression

$$\delta_1 V^\mu = \frac{\partial \delta x^\mu}{\partial t} + V^\nu \frac{\partial \delta x^\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial V^\mu}{\partial x^\nu}\delta x^\nu, \tag{14}$$

les variables étant celles d'Euler.

6. — Choix de la variable servant à définir les intensités de courants. On sait que la variable choisie par Maxwell pour définir les courants est la quantité d'électricité q ayant traversé une section du conducteur depuis une époque déterminée. Maxwell ne considérait que des courants linéaires fermés de sorte que la connaissance de la quantité q suffit à fixer la position des charges électriques aux diverses époques, ainsi que le note expressément H. Poincaré[1]. De même la connaissance du débit d'un fluide incompressible dans une canalisation très étroite permet de fixer la position des divers éléments du fluide à tous instants.

Les conditions changent lorsque l'on considère le mouvement d'une matière fluide ou élastique dans un espace à trois dimensions : le débit à travers des éléments de surface fixes n'est lié aux coordonnées des éléments matériels que par l'intermédiaire d'équations différentielles alors qu'il faudrait n'avoir que des relations de la forme $f(x^i, q^r) = 0$ pour que l'on puisse prendre indifféremment l'un ou l'autre groupe de variables pour appliquer les équations de Lagrange ou le Principe de la moindre action. En particulier si les coordonnées x^i et les débits q^r sont liés par des équations différentielles, il ne suffit pas que les δx^i soient nuls aux époques t_0, t_1 pour que les δq^r soient également nuls, et réciproquement.

En hydrodynamique, ce sont les coordonnées x^i des points matériels qu'il faut prendre comme variables pour appliquer le principe de la moindre action, et ce sont ces coordonnées qui nous serviront pour exprimer l'énergie cinétique. Pour les courants, c'est le choix inverse qu'il faut faire : on n'aboutit aux équations voulues qu'en prenant comme variables les quantités d'électricité ayant traversé, depuis une certaine époque, les éléments de surface matériels. Mais une difficulté surgit du fait que les aires des éléments matériels sont constamment variables par suite de la déformation.

La quantité d'électricité qui traverse un élément dS dans l'unité de temps est donnée par le produit scalaire $(i.dS)$ du vecteur densité de courant par dS, dS étant lui-même considéré comme un vecteur dirigé normalement au plan de dS et du côté de dS choisi comme positif. La quantité d'électricité ayant traversé dS pendant un certain temps est $\int (i.dS)dt$, quantité qui n'a aucune relation avec l'intégrale $\int i dt$ en raison des variations de dS au cours du temps. Soit dS_0 la position prise par dS à l'époque particulière choisie comme époque initiale. A cette époque, le point matériel qui est parvenu en x^1, x^2, x^3 à l'instant t, était au point a^1, a^2, a^3. Introduisons un vecteur i_0 attaché au point a^1, a^2, a^3 et tel que l'on ait

$$(i_0.dS_0) = (i.dS). \tag{15}$$

Il existe un vecteur i_0 satisfaisant à l'égalité (15) et un seul, qui soit indépendant de l'orientation donnée à l'élément dS au point x^1, x^2, x^3. Remarquer que, bien que le vecteur i_0 soit attaché au point a^1, a^2, a^3, *sa valeur correspond comme celle de i au temps t*.

---

(1) *Loc. cit.*, § 153, p. 137.

H. Chipart a donné une formule simple permettant le calcul de i_0 en fonction de i(1). Si l'on désigne par Δ le Jacobien

$$\Delta = \frac{\partial(x^1, x^2, x^3)}{\partial(a^1, a^2, a^3)}, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{1}{\Delta} = \frac{\partial(a^1, a^2, a^3)}{\partial(x^1, x^2, x^3)},$$

on a

$$\Delta i^\mu = i_0^\nu \frac{\partial x^\mu}{\partial a^\nu} \qquad \text{ou} \qquad \Delta^{-1} i_0^\mu = i^\nu \frac{\partial a^\mu}{\partial x^\nu}. \qquad (16) \; (16')$$

H. Chipart a donné le nom de transformation du « type polarisation d'ordre un » à la transformation définie par les relations (16) et (16′). La dénomination de « type polarisation » est donnée par opposition à une autre transformation dite du « type aimantation » que nous rencontrerons au paragraphe 9. L' " ordre " de la transformation indique à quel exposant le jacobien Δ figure dans la formule de transformation(2).

Définissons alors un vecteur $q_0(a^1, a^2, a^3, t)$ par l'équation

$$q_0 = \int^t i_0 dt. \qquad (17)$$

Ce sont les quantités q_0 *ainsi définies que nous devons prendre comme variables pour appliquer la théorie de Maxwell au cas de conducteurs à trois dimensions.* Il est d'ailleurs évident que, dans le cas de conducteurs linéaires mobiles et déformables, les quantités q_0 se réduisent à un facteur constant près aux quantités q employées par Maxwell.

7. — Prenons les variations des deux membres de (16) dans un mouvement varié tel que celui défini au § 5. La variation de Δ est égale à $\Delta \operatorname{div} \delta s$(3).

---

(1) H. Chipart. *Sur les milieux déformables polarisés et aimantés...*, Journal de l'École Polytechnique, 2e série, n° 33, §§ 20 et suivants.

(2) Au point de vue de la forme, le résultat est à rapprocher de celui obtenu par H. Chipart en ce qui concerne le potentiel Θ d'un corps ayant subi une déformation de grandeur finie : Θ ne dépend des vecteurs P et J que par l'intermédiaire des vecteurs correspondants P_0 et J_0. Il dépend en outre de la déformation. Voir *loc. cit.*, §§ 38 à 40.

(3) En effet, la variation du déterminant Δ est égale à la somme des produits de la variation de chacun de ses termes par le mineur correspondant. Cela donne

$$\begin{aligned}\delta\Delta &= \frac{\partial \delta x^1}{\partial a^1}\frac{\partial(x^2, x^3)}{\partial(a^2, a^3)} + \frac{\partial \delta x^1}{\partial a^2}\frac{\partial(x^2, x^3)}{\partial(a^3, a^1)} + \frac{\partial \delta x^1}{\partial a^3}\frac{\partial(x^2, x^3)}{\partial(a^1, a^2)} + (\text{termes en } \delta x^2, \delta x^3)\\ &= \Delta\left\{\frac{\partial \delta x^1}{\partial a^1}\frac{\partial a^1}{\partial x^1} + \frac{\partial \delta x^1}{\partial a^2}\frac{\partial a^2}{\partial x^1} + \frac{\partial \delta x^1}{\partial a^3}\frac{\partial a^3}{\partial x^1}\right\} + \text{etc}\ldots = \Delta\frac{\partial \delta x^1}{\partial x^1} + \text{etc}\ldots\\ &= \Delta\frac{\partial \delta x^\nu}{\partial x^\nu} = \Delta \operatorname{div} \delta s. \qquad \text{C. Q. F. D.}\end{aligned}$$

La variation du premier membre de (16) peut donc s'écrire

$$\Delta\left\{\delta i^\mu + i^\mu \frac{\partial \delta x^\nu}{\partial x^\nu}\right\}.$$

Passons au second membre : la variation du premier facteur i_0^ν peut se noter $\frac{d\delta q_0^\nu}{dt}$ d'après (17). Quant au second facteur $\frac{\partial x^\mu}{\partial a^\nu}$ sa variation a pour expression $\frac{\partial \delta x^\mu}{\partial a^\nu}$, ce qui peut s'écrire identiquement $\frac{\partial \delta x^\mu}{\partial x^\sigma}\frac{\partial x^\sigma}{\partial a^\nu}$ dont le produit par i_0^ν vaut $\frac{\partial \delta x^\mu}{\partial x^\sigma} i_0^\nu \frac{\partial x^\sigma}{\partial a^\nu}$. Cette quantité, d'après (16), est égale à $\Delta i^\sigma \frac{\partial \delta x^\mu}{\partial x^\sigma}$ ou, encore, à $\Delta i^\nu \frac{\partial \delta x^\mu}{\partial x^\nu}$ en changeant le nom de l'indice muet.

Réunissant tous les résultats partiels obtenus, nous en déduisons

$$\delta i^\mu = \frac{d\delta q_0^\nu}{dt}\frac{1}{\Delta}\frac{\partial x^\mu}{\partial a^\nu} + i^\nu \frac{\partial \delta x^\mu}{\partial x^\nu} - i^\mu \frac{\partial \delta x^\nu}{\partial x^\nu}. \tag{18}$$

La variation δi ainsi déterminée se rapporte à un point matériel dont la position au temps t est passée de x^μ dans le mouvement normal à $x^\mu + \delta x^\mu$ dans le mouvement varié. Pour avoir la variation $\delta_1 i$ rapportée au point fixe, il n'y a qu'à appliquer la relation (13) entre les symboles δ et δ_1. On obtient

$$\delta_1 i^\mu = \frac{d\delta q_0^\nu}{dt}\frac{1}{\Delta}\frac{\partial x^\mu}{\partial a^\nu} + i^\nu \frac{\partial \delta x^\mu}{\partial x^\nu} - i^\mu \frac{\partial \delta x^\nu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial i^\mu}{\partial x^\nu}\delta x^\nu. \tag{19}$$

Les termes de δi et $\delta_1 i$ peuvent se diviser en deux groupes.

Le premier groupe comprend seulement le premier terme en δq_0, qui est le même dans δi et dans $\delta_1 i$. Ce terme interviendra dans l'établissement de la loi d'Ohm (§ 14).

Le second groupe comprend les autres termes dépendant des déplacements δx^μ des points du système; ce second groupe interviendra dans l'évaluation de la force exercée sur le courant par le champ magnétique (§ 15). Ce second groupe peut s'écrire

$$i^\nu \frac{\partial \delta s}{\partial x^\nu} - i \operatorname{div} \delta s \qquad \text{pour } \delta i \tag{20}$$

et

$$-\operatorname{div} i\delta s - \operatorname{rot}[i.\delta s] \qquad \text{pour } \delta_1 i. \tag{21}$$

L'expression (20) est exactement de même forme que celle qui donne δP [§ 4, éq. (11)]. La raison de cette identité de forme est la suivante : lorsque l'on annule $\frac{d\delta q_0^\nu}{dt}$ de telle sorte que l'expression de δi se réduise au second groupe, la variation δi est telle que le flux de courant à travers dS à l'instant t est le même dans le mouvement normal et dans le mouvement varié. Et l'expression (11) de δP a été obtenue en s'imposant une condition qui, géométriquement parlant, exprime pour δP exactement la même propriété que possède δi.

Le fait que la variation (20) imposée à i par la déformation correspond à un flux de courant à travers tout élément dS qui soit le même, à l'instant t, dans le mouvement normal et dans le mouvement varié, entraîne cette conséquence que les charges Q des divers éléments de volume sont également les mêmes dans les deux mouvements. Or nous avons rappelé au début de ce mémoire la formule $d\mathcal{C} = -d_{T,I}\Theta$ qui donne le travail des forces électromagnétiques dans un déplacement. A cette formule correspond en électrostatique la formule[1] $d\mathcal{C} = -d_{T,Q}\Theta$. Dans un cas comme dans l'autre, l'indice T indique que la variation de Θ doit être calculée comme si la température était la même dans le mouvement normal et le mouvement varié et nous aurons soin de respecter cette règle en effectuant les calculs aux paragraphes 13 à 15. Quant aux indices I et Q, ils indiquent que les variations de Θ doivent être évaluées à flux de courant constants pour les forces électromagnétiques et à charges électriques Q constantes pour les forces électrostatiques. Grâce à la manière dont a été choisie la variable q, et aux propriétés qui en découlent pour la variation δi résultant de la seule déformation, on voit que les conditions de constance des charges et des flux de courant seront satisfaites d'elles-mêmes et que nous n'aurons pas à nous en préoccuper.

---

[1] *Loc. cit.*, 1923, § 31, p. 322.

CHAPITRE III

Application du Principe de la moindre action.

8. — Le Principe des travaux virtuels permet de représenter par une seule équation globale la loi du mouvement d'un système matériel soumis ou non à des liaisons. Cette équation globale bien connue est de la forme

$$-m\frac{d^2x_i}{dt^2}\delta x^i + X_i\delta x^i + \lambda_r\frac{\partial\varphi^r}{\partial x^i}\delta x^i = 0. \qquad (25)$$

$\varphi^r(x^1, x^2, \ldots) = 0$ représente l'une quelconque des équations de liaison. La convention de sommation du calcul tensoriel est applicable à la fois aux indices r et aux indices i.

Lorsque toutes les forces dérivent d'un potentiel, il se trouve qu'il y a identité entre l'équation (25) et l'équation obtenue en annulant la variation de l'intégrale de l'"action" entre deux époques arbitraires t_0, t_1. S'il y a, en plus des forces dérivant d'un potentiel, d'autres forces n'en admettant pas, par exemple des résistances passives, il faut pour ces forces conserver des termes de la forme $X_i\delta x^i$.

Maxwell a montré le premier que l'on pouvait faire rentrer les lois des courants linéaires fermés avec action instantanée à distance dans un cadre de même forme. C'est ce résultat de Maxwell qu'il s'agit d'étendre aux électrodynamiques modernes. Pour cela nous introduirons dans l'expression de l'action un terme supplémentaire qui ne sera autre que la fonction ψ définie par les relations (5) et (5'), c'est-à-dire l'une des quantités

$$\psi = \frac{B^2 - E^2}{2} - \mathcal{F}(J, P) \qquad \text{[H. Lorentz]} \qquad (26)$$

ou

$$\psi = (B.H) - \frac{H^2 + E^2}{2} - F(J, P) \qquad \text{[Hertz]}, \qquad (26')$$

mais sans supposer connues les expressions des fonctions $\mathcal{F}$ et F. Nous nous proposons en effet de montrer que le fait de rendre l'action minima suffit à déterminer $\mathcal{F}$ et F et permet en même temps de retrouver la loi d'Ohm et l'expression des forces pondéromotrices d'origine électromécanique.

9. — Pour tenir compte de la résistance passive due à l'effet Joule, il faudra encore ajouter un autre terme que nous allons déterminer. L'effet Joule entraîne pendant le temps dt un apport négatif d'énergie de valeur $-\mathrm{RI}^2 dt$ pour un conducteur linéaire, apport que l'on peut noter $-\mathrm{RI}dq$, dq étant la quantité d'électricité qui a traversé la section du conducteur pendant le temps dt. La quantité correspondant à $-\mathrm{R}i^2 dt$ pour un conducteur massif est $-ri^2 d\tau dt$ ou $-r_{\mu\nu} i^\mu i^\nu d\tau dt$ suivant qu'il s'agit d'un milieu isotrope ou non. En appelant D la grandeur vectorielle ri ou D_μ la quantité $r_{\mu\nu} i^\nu$, l'expression devient $-\mathrm{D}_\mu i^\mu d\tau dt$.

Introduisons maintenant comme plus haut le transformé i_0 de i dans le type polarisation d'ordre un et introduisons de plus le vecteur $\mathfrak{D}_0$ transformé de D suivant les formules(1)

$$\mathfrak{D}_{0\mu} = \mathrm{D}_\nu \frac{\partial x^\nu}{\partial a^\mu}, \qquad \mathrm{D}_\nu = \mathfrak{D}_{0\mu} \frac{\partial a^\mu}{\partial x^\nu}. \tag{27}$$

H. Chipart a donné à cette transformation le nom de transformation du « type aimantation d'ordre zéro ». On pourra écrire la suite d'égalités(2)

$$-r_{\mu\nu} i^\mu i^\nu d\tau dt = -\mathfrak{D}_{0\mu} i_0^\mu d\tau_0 dt = -\mathfrak{D}_{0\mu} \frac{dq_0^\mu}{dt} d\tau_0 dt = -\mathfrak{D}_{0\mu} dq_0^\mu d\tau_0,$$

ou encore $-(\mathfrak{D}_0 . dq_0) d\tau_0$. Ainsi nous tiendrons compte des résistances ohmiques en ajoutant à la variation de l'action un terme

$$-\int_{t_0}^{t_1} dt \int_{\text{conduct.}} (\mathfrak{D}_0 . \delta q_0) d\tau_0 .$$

10. — Finalement, la variation première de l'action que nous devons annuler est définie par

$$\delta \mathfrak{I} = \int_{t_0}^{t_1} dt \left\{ \delta \frac{1}{2} \Sigma m \mathrm{V}^2 - \delta \mathrm{U} + \delta \int_{\text{espace}} \psi d\tau - \int_{\text{cond.}} (\mathfrak{D}_0 . \delta q_0) d\tau_0 \right\}. \tag{28}$$

$\frac{1}{2} \Sigma m \mathrm{V}^2$ représente l'énergie cinétique et $\mathrm{U}(x^i)$ est le potentiel des forces mécaniques, c'est-à-dire des forces autres que celles d'origine électrodynamique.

Nous ne nous occuperons dans le texte que de la théorie de H. Lorentz. Les explications et les calculs sont tout à fait analogues pour la Théorie de Hertz. Aussi nous bornerons-nous à donner le tableau des relations et expressions remplaçant,

---

(1) Cf. les formules (16) et (16′) définissant la transformation du type polarisation d'ordre un.

(2) En effet : $d\tau = \Delta d\tau_0$ et $\mathrm{D}_\nu i^\nu = \mathfrak{D}_{0\mu} \frac{\partial a^\mu}{\partial x^\nu} i^\nu = \mathfrak{D}_{0\mu} i_0^\mu \Delta^{-1}$.

pour cette seconde théorie, les relations et expressions obtenues pour la théorie de H. Lorentz. Pour celle-ci les équations fondamentales du champ électromagnétique sont les suivantes :

$$\operatorname{div}\{E+P\}=\rho, \qquad \operatorname{rot} H=\frac{\partial E}{\partial t}+\frac{\partial P}{\partial t}-\operatorname{rot}[V.P]+\rho V+i, \qquad (29),\ (30)$$

$$\operatorname{div} B=0, \qquad \operatorname{rot} E=-\frac{\partial B}{\partial t}, \qquad (31),\ (32)$$

$$E_m=E+[V.B]. \qquad (33)$$

E_m est la force électromotrice dans la matière animée de la vitesse V.

Voici, en plus, l'expression de la force pondéromotrice développée par le champ sur l'unité de volume :

$$R=\left[i+\operatorname{rot} J+\rho V+\frac{\partial P}{\partial t}-\operatorname{rot}[V.P].B\right]+\{\rho-\operatorname{div} P\}E. \qquad (34)$$

A la suite de H. Poincaré, nous ne considérerons comme données que les relations (29) et (30). Ces deux relations entraînent immédiatement, par élimination de E entre elles, l'équation exprimant le principe de la conservation de l'électricité. Nous sommes ainsi assurés que ce principe est satisfait par le fait même que nous prenons ces deux relations comme point de départ. Inutile d'expliciter l'équation qui représente ce principe.

En écrivant que l'action est minimâ, nous établirons la nécessité des relations (31), (32) et (33) ci-dessus que nous n'avons pas admises à priori et, en même temps nous retrouverons les résultats suivants annoncés au § 8, savoir : l'expression (5) de la fonction $\mathcal{F}$, la loi d'Ohm et la valeur (34) de la force R.

Il n'est pas besoin de reproduire le calcul classique des variations $\delta\frac{1}{2}mV^2$ et δU figurant dans l'intégrale (28). Il nous faut au contraire détailler le calcul de la variation du terme $\psi d\tau$ dont l'équation (26) donne l'expression pour la théorie de H. Lorentz.

11. — Nous remarquerons tout d'abord que l'intégrale de ψ étendue à tout l'espace n'a de sens que si B^2 et E^2, ainsi que $\mathcal{F}$, sont infiniment petits d'ordre supérieur à trois à l'infini et par suite B et E infiniment petits d'ordre supérieur à 3/2. Nous supposerons qu'il en est effectivement ainsi, ce qui suffira à rendre licites toutes les opérations que nous aurons à effectuer, en particulier les intégrations par parties de termes de la forme $a\frac{\partial b}{\partial x^\mu}$.

En dehors des intégrations par parties dans l'espace, nous aurons aussi à effectuer des intégrations par parties par rapport au temps entre deux époques t_0 et t_1.

En principe, on devrait effectuer ces intégrations en suivant la matière dans son mouvement, mais je vais montrer qu'il revient au même d'effectuer ces intégrations en un point fixe.

Soit en effet à calculer l'intégrale

$$L = \int_{t_0}^{t_1} dt \int_{\text{espace}} \alpha \frac{\partial \delta F}{\partial t} d\tau = \int\int \alpha \frac{\partial \delta F}{\partial t} d\tau\, dt.$$

On suppose que les variations δF sont nulles aux deux limites t_0 et t_1, de sorte que les termes tout intégrés disparaîtront. La dérivée $\frac{\partial}{\partial t}$ prise en un point fixe est liée à la dérivée $\frac{d}{dt}$ évaluée en suivant la matière dans son mouvement par la relation $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + V^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu}$ déjà utilisée. On a d'autre part entre le volume et la masse élémentaire la relation $d\tau = \sigma dm$ [σ = volume spécifique].

On pourra alors écrire successivement

$$\int\int \alpha \frac{\partial \delta F}{\partial t} d\tau\, dt = \int\int \alpha \left\{ \frac{d\delta F}{dt} - V^\nu \frac{\partial \delta F}{\partial x^\nu} \right\} d\tau\, dt = \int\int \alpha\sigma \frac{d\delta F}{dt} dm\, dt - \int\int \alpha V^\nu \frac{\partial \delta F}{\partial x^\nu} d\tau\, dt$$

$$= -\int\int \frac{d(\sigma\alpha)}{dt} \delta F\, dm\, dt - \int\int \alpha V^\nu \frac{\partial \delta F}{\partial x^\nu} d\tau\, dt.$$

$\frac{d\sigma}{dt}$ est égal à $\sigma \operatorname{div} V$ et $\frac{d\sigma}{dt} dm$ l'est à $\operatorname{div} V d\tau$. Remplaçant en outre $\frac{d\alpha}{dt}$ en fonction de $\frac{\partial \alpha}{\partial t}$, l'expression devient

$$-\int\int \frac{\partial \alpha}{\partial t} \delta F d\tau\, dt - \int\int \left\{ V^\nu \frac{\partial \alpha}{\partial x^\nu} \delta F + \alpha \operatorname{div} V \delta F + \alpha V^\nu \frac{\partial \delta F}{\partial x^\nu} \right\} d\tau\, dt$$

$$= -\int\int \frac{\partial \alpha}{\partial t} \delta F\, d\tau\, dt - \int\int \frac{\partial}{\partial x^\nu} (\alpha V^\nu \delta F)\, d\tau\, dt.$$

La dernière intégrale étant identiquement nulle, la proposition énoncée est établie.

12. — Après cette digression préliminaire, revenons au problème posé. Nous avons à traiter un problème de minimum lié car les variables H, E, P, x^μ, ρ et i sont liées entre elles par les équations (29) et (30) de H. Lorentz et elles sont reliées aux quantités J, B et q_0 par les équations (6) et (16). Pour réduire le nombre des conditions et simplifier l'écriture nous supposerons, autant que de besoin, B et i^μ remplacées par leurs expressions $H + J$ et $\frac{1}{\Delta} \frac{\partial x^\mu}{\partial a^\nu} \frac{dq_0^\nu}{dt}$ et nous profiterons de ce que (29) donne ρ en fonction de E et P pour substituer sa valeur dans l'équation (30) qui devient

$$K(H, E, P, q_e, x^\mu) \equiv -\operatorname{rot} H + \frac{\partial(E+P)}{\partial t} + V \operatorname{div}(E+P) - \operatorname{rot}[V.P] + i = 0. \quad (35)$$

Nous n'aurons plus ainsi qu'une équation de condition.

La méthode classique pour obtenir le minimum d'une intégrale quand les fonctions inconnues sont soumises à une liaison $K = 0$ conduit ici à considérer l'intégrale

$$\int_{t_0}^{t_1} dt \int_{\text{espace}} \{ \psi + (\mathcal{A}.K) \} \, d\tau, \quad (36)$$

dont l'expression contient l'inconnue auxiliaire $\mathcal{A}$, et à prendre sa variation comme si toutes les fonctions avaient leurs variations indépendantes. [Remarquer qu'ici le facteur $\mathcal{A}$ est une grandeur vectorielle pour que son produit par K, fonction vectorielle, puisse être de nature scalaire comme la fonction ψ]. Compte tenu des forces ne dérivant pas d'un potentiel (§ 9) nous aurons à considérer l'équation

$$0 = \delta \int_{t_0}^{t_1} dt \left\{ \frac{1}{2} \Sigma m V^2 - U(x^i) \right\} + \int_{t_0}^{t_1} dt \int_{\text{espace}} \{ \delta(\psi \, d\tau) + (-\mathfrak{D}_e . \delta q_e) \, d\tau_e + (\mathcal{A}.\delta_1 K) \, d\tau \}. \quad (37)$$

Il faut mettre $\delta(\psi \, d\tau)$ et non $\delta\psi \times d\tau$ parce que nous aurons à suivre dans leurs variations des éléments matériels à volume variable. Pour K, le symbole δ_1, suivant une notation déjà employée, représente une variation en un point fixe de l'espace.

Les raisonnements classiques bien connus conduisant à la méthode que nous venons de rappeler supposent que les équations de liaison sont des équations ordinaires tandis qu'ici l'équation $K = 0$ est une équation différentielle. Si donc nous nous contentions d'appliquer la méthode sans plus, la solution obtenue ne pourrait être considérée que comme une solution *formelle*. Une telle solution présenterait un certain intérêt, mais il est facile d'aller plus loin. Tout d'abord on se rend compte immédiatement que la méthode classique conduit dans tous les cas à des équations assurant la réalisation d'un minimum. Reste à savoir si ces conditions sont en même temps les seules assurant l'existence d'un minimum. Ce n'est pas ici le lieu d'entreprendre une discussion générale de la question, discussion qui entraînerait sans doute de longs développements. Il nous suffira, après avoir utilisé la méthode classique, de montrer que, dans le cas particulier qui nous intéresse, les conditions obtenues sont bien nécessaires et non pas seulement suffisantes. Nous indiquerons au paragraphe 19 comment on peut faire la démonstration et donnerons un résumé des calculs à effectuer.

13. — Commençons par le calcul de $\delta(\psi d\tau)$. La variation du terme $-\mathcal{F}(\mathrm{J}, \mathrm{P})d\tau = -\sigma\mathcal{F}dm$ doit être effectuée en suivant la masse dm dans son déplacement car la fonction $\mathcal{F}$ change de forme en passant d'un point à un autre d'une substance hétérogène. Il n'y a d'ailleurs pas à tenir compte (pour la raison indiquée au § 7, *in fine*) d'une variation possible de température accompagnant le déplacement. On aura donc (car $\delta\sigma = \operatorname{div}\delta s$) :

$$\delta\{\mathcal{F}d\tau\} = dm\,\delta_{\mathrm{T}}(\sigma\mathcal{F}) = dm\left\{\mathcal{F}\delta\sigma + \sum_\alpha \sigma\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\alpha}\delta\alpha + \sigma\left(\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\mathrm{J}}\cdot\delta\mathrm{J}\right) + \sigma\left(\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\mathrm{P}}\cdot\delta\mathrm{P}\right)\right\}$$

$$= \left\{\mathcal{F}\operatorname{div}\delta s + \Sigma\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\alpha}\delta\alpha\right\}d\tau + \left(\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\mathrm{J}}\cdot\delta\mathrm{J}\right)d\tau + \left(\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\mathrm{P}}\cdot\delta\mathrm{P}\right)d\tau. \tag{38}$$

Les α sont les paramètres dont dépend la déformation.

Pour le terme $\dfrac{\mathrm{B}^2-\mathrm{E}^2}{2}d\tau$ on pourrait également suivre la matière dans son mouvement (mouvement qui serait d'ailleurs fictif si $d\tau$ appartient à l'éther pur), mais il est plus simple de calculer la variation au point fixe. On aura

$$\delta_1\frac{\mathrm{B}^2-\mathrm{E}^2}{2} = (\mathrm{B}.\delta_1\mathrm{B}) - (\mathrm{E}.\delta_1\mathrm{E}) = (\mathrm{B}.\delta_1\mathrm{H} + \delta_1\mathrm{J}) - (\mathrm{E}.\delta_1\mathrm{E}),$$

$\delta_1\mathrm{J}$ diffère de $\delta\mathrm{J}$ d'une quantité égale, d'après (13), à $-\dfrac{\partial\mathrm{J}}{\partial x^\mu}\delta x^\mu$ de sorte que l'expression ci-dessus devient

$$(\mathrm{B}.\delta_1\mathrm{H}) - (\mathrm{E}.\delta_1\mathrm{E}) + (\mathrm{B}.\delta\mathrm{J}) - \mathrm{B}_\nu\frac{\partial\mathrm{J}^\nu}{\partial x^\mu}\delta x^\mu.$$

Au total, et si nous remplaçons dans l'expression de $\delta\mathcal{F}$ la variation $\delta\mathrm{P}$ par la quantité égale $\delta_1\mathrm{P} + \dfrac{\partial\mathrm{P}}{\partial x^\mu}\delta x^\mu$, nous obtenons

$$\delta(\psi d\tau) = (\mathrm{B}.\delta_1\mathrm{H})d\tau + \left(\mathrm{B} - \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\mathrm{J}}\cdot\delta\mathrm{J}\right)d\tau - (\mathrm{E}.\delta_1\mathrm{E})d\tau - \left(\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\mathrm{P}}\cdot\delta_1\mathrm{P}\right)d\tau$$

$$- \left\{\mathcal{F}\operatorname{div}\delta s + \Sigma\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\alpha}\delta\alpha + \mathrm{B}_\nu\frac{\partial\mathrm{J}^\nu}{\partial x^\mu}\delta x^\mu + \left(\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\mathrm{P}}\cdot\frac{\partial\mathrm{P}}{\partial x^\mu}\delta x^\mu\right)\right\}d\tau. \tag{39}$$

Cette expression obtenue nous pouvons, sans écrire l'expression détaillée de $\delta_1\mathrm{K}$ qui se lit immédiatement en se reportant à l'expression (35) de K, voir quelles sont les conditions d'un minimum pour l'intégrale (36) en annulant les facteurs des diverses variations $\delta_1\mathrm{H}$, $\delta_1\mathrm{E}$, ...

Coefficient de $\delta_1\mathrm{H}$. — $\delta_1\mathrm{H}$ figure dans $\delta(\psi d\tau)$ sous la forme $(\mathrm{B}.\delta_1\mathrm{H})d\tau$ et dans $(\mathcal{A}.\delta_1\mathrm{K})d\tau$ sous la forme $-(\mathcal{A}.\operatorname{rot}\delta_1\mathrm{H})d\tau$. Dans ce second terme, $\delta_1\mathrm{H}$ figure sous un signe de dérivation et une intégration par parties dans l'espace est nécessaire pour ramener à la forme $-(\operatorname{rot}\mathcal{A}.\delta_1 H)d\tau$ où $\delta_1 H$ est dégagé de tout signe de dérivation. L'annulation du coefficient de $\delta_1 H$ donne ensuite

$$B - \operatorname{rot}\mathcal{A} = 0, \tag{40}$$

d'où en prenant la divergence des deux membres

$$\operatorname{div} B = 0.$$

C'est l'équation (31) de H. Lorentz.

Coefficient de δJ. — δJ ne figure que dans $\delta(\psi\,d\tau)$, avec le cœfficient $B - \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial J}$. Il en résulte

$$\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial J} = B. \tag{41}$$

Coefficients de $\delta_1 E$ *et* $\delta_1 P$. — Les variations $\delta_1 E$ et $\delta_1 P$ figurent dans $\delta(\psi\,d\tau)$ et dans $(\mathcal{A}.K)$. Des intégrations par parties sont encore nécessaires, soit dans l'espace, soit dans le temps, pour dégager $\delta_1 E$ et $\delta_1 P$ de tout signe de dérivation. Après ces opérations, on trouve comme valeurs des cœffiicients

Pour $\delta_1 E$: $\quad -E - \frac{\partial\mathcal{A}}{\partial t} - \operatorname{grad}(\mathcal{A}.V)$

et pour $\delta_1 P$: $\quad -\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial P} - \frac{\partial\mathcal{A}}{\partial t} - \operatorname{grad}(\mathcal{A}.V) - [\operatorname{rot}\mathcal{A}.V]$.

En annulant ces coefficients nous obtenons les relations

$$E = -\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial t} - \operatorname{grad}(\mathcal{A}.V) \tag{42}$$

et

$$\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial P} = -\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial t} - \operatorname{grad}(\mathcal{A}.V) - [\operatorname{rot}\mathcal{A}.V] \tag{43}$$

ou, d'après (40) et (42)

$$\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial P} = E + [V.B]. \tag{44}$$

Prenant enfin les rotationnels des deux membres de (42) en tenant compte de (40) nous trouvons

$$\operatorname{rot} E = -\frac{\partial(\operatorname{rot}\mathcal{A})}{\partial t} = -\frac{\partial B}{\partial t}.$$

Cette dernière relation n'est autre que l'équation (32) de Lorentz.

Quant à la relation (44), elle montre que la polarisation diélectique dépend, non pas de la force électromotrice E, mais de la quantité E_m, égale à $E + [V.B]$ (éq. 33 de Lorentz). Enfin l'ensemble de (41), (33) et (44) redonne notre équation (5), savoir

$$\dot{\mathcal{F}} = \int (B.dJ) + (E_m.dP).$$

Ainsi l'application du Principe de la moindre action suffit à justifier les relations (31), (32) et (33) de Lorentz à partir des deux premières relations fondamentales (29) et (30) posées par ce physicien, ainsi qu'à redonner l'expression du potentiel $\mathcal{F}$ obtenu en 1923. Grâce à cela nous serons en droit d'utiliser dans la suite de cette étude les considérations et les résultats concernant les pressions exposés au chapitre I du présent travail.

14. — Cherchons quel est le vecteur transformé de E_m dans le type aimantation d'ordre zéro (cf. § 9). Je dis que c'est $-\frac{d\mathcal{A}_0}{dt}$, $\mathcal{A}_0$ étant lui-même le tranformé de $\mathcal{A}$ dans ce même type aimantation d'ordre zéro. Il faut établir les relations

$$-\frac{d\mathcal{A}_{0\nu}}{dt} = E_{m\mu}\frac{\partial x^\mu}{\partial a^\nu} \qquad \text{ou} \qquad E_{m\mu} = -\frac{d\mathcal{A}_{0\nu}}{dt}\frac{\partial a^\nu}{\partial x^\mu}. \tag{45}$$

Comme ces relations s'entraînent réciproquement, il suffit d'établir la seconde. Or on a par définition $\mathcal{A}_{0\nu} = \mathcal{A}_\sigma \frac{\partial x^\sigma}{\partial a^\nu}$, d'où

$$-\frac{d\mathcal{A}_{0\nu}}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(\mathcal{A}_\sigma \frac{\partial x^\sigma}{\partial a^\nu}\right) = -\frac{d\mathcal{A}_\sigma}{dt}\frac{\partial x^\sigma}{\partial a^\nu} - \mathcal{A}_\sigma \frac{\partial V^\sigma}{\partial a^\nu}.$$

Multipliant par $\frac{\partial a^\nu}{\partial x^\mu}$ avec convention de sommation, il vient

$$-\frac{d\mathcal{A}_{0\nu}}{dt}\frac{\partial a^\nu}{\partial x^\mu} = -\frac{d\mathcal{A}_\sigma}{dt}\frac{\partial x^\sigma}{\partial a^\nu}\frac{\partial a^\nu}{\partial x^\mu} - \mathcal{A}_\sigma \frac{\partial V^\sigma}{\partial a^\nu}\frac{\partial a^\nu}{\partial x^\mu} = -\frac{d\mathcal{A}_\sigma}{dt}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x^\mu} - \mathcal{A}_\sigma \frac{\partial V^\sigma}{\partial x^\mu}. \tag{46}$$

La dérivée $\frac{\partial x^\sigma}{\partial x^\mu}$ n'est différente de zéro que pour $\sigma = \mu$, car les x^i sont indépendants entre eux. Et pour $\sigma = \mu$, la dérivée $\frac{\partial x^\sigma}{\partial x^\mu}$ vaut 1. La dernière forme obtenue vaut donc $-\frac{d\mathcal{A}_\mu}{dt} - \mathcal{A}_\sigma \frac{\partial V^\sigma}{\partial x^\mu}$, c'est-à-dire $-\frac{\partial \mathcal{A}_\mu}{\partial t} - V^\nu \frac{\partial \mathcal{A}_\mu}{\partial x^\nu} - \mathcal{A}_\sigma \frac{\partial V^\sigma}{\partial x^\mu}$, ce qui peut s'écrire

$$\left\{ -\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} - \operatorname{grad}(V.\mathcal{A}) - [\operatorname{rot}\mathcal{A}.V] \right\}_\mu.$$

Or ceci n'est autre chose que $\{E + [V.B]\}_\mu$ ou $E_{m\mu}$ en vertu de (40) et (42).

Coefficient de δq_{0}. — La variation δq_{0} ne figure pas dans le terme $\delta(\psi d\tau)$ de l'équation (37), mais seulement dans le terme $(-\mathfrak{D}_{0}.\delta q_{0})d\tau$, ainsi que dans le produit $(\mathfrak{A}.\delta_{1}K)d\tau$ par un terme $\mathfrak{A}_{\mu}\frac{d\delta q_{0}^{\nu}}{dt}\frac{\partial x^{\mu}}{\partial a^{\nu}}\frac{d\tau}{\Delta}$, lequel peut s'écrire identiquement

$$\mathfrak{A}_{0\nu}\frac{d\delta q_{0}^{\nu}}{dt}d\tau_{0}.$$

$\mathfrak{A}_{0}$ est comme plus haut le transformé du vecteur $\mathfrak{A}$ dans le type aimantation d'ordre zéro. Transformons ce terme en l'intégrant par parties entre les époques t_{0} et t_{1}. Grâce à ce que, contrairement à $d\tau$, le volume $d\tau_{0}$ reste invariable pour un élément matériel donné nous obtenons

$$-\int_{t_0}^{t_1}dt\int\frac{d\mathfrak{A}_{0\nu}}{dt}\delta q_{0}^{\nu}d\tau.$$

Nous devons égaler à zéro la somme des coefficients de δq_{0}. Cela donne

$$-\frac{d\mathfrak{A}_{0\nu}}{dt}-\mathfrak{D}_{0\nu}=0.$$

Les deux termes écrits sont respectivement les transformés dans le même type (type aimantation d'ordre zéro) des vecteurs E_{m} et D. La relation obtenue est ainsi équivalente à $E_{m}-D=0$ ou encore, vu la définition de D, équivalente à

$$E_{m\mu}-r_{\mu\nu}i^{\nu}=0 \qquad \text{ou} \qquad E_{m}-ri=0$$

suivant que le conducteur est anisotrope ou isotrope.

Nous retrouvons la loi d'Ohm.

15. — *Coefficients des* δx^{μ}. Les termes $\delta\frac{1}{2}mV^{2}$ et $-\delta U$ de l'équation (37) représentent les travaux virtuels des forces d'inertie et des forces purement mécaniques. De même les termes provenant de ψ contenant des δx^{μ} [après les intégrations par parties nécessaires pour faire sortir les δx^{μ} de tout signe de dérivation] doivent représenter les travaux virtuels des forces électromagnétiques ainsi que des pressions, lesquelles sont influencées par le champ électromagnétique.

L'ensemble de ces termes doit ainsi être égal à

$$-\frac{\partial p^{\nu}{}_{\mu}}{\partial x^{\nu}}\delta x^{\mu}d\tau+(R.\delta s)d\tau. \tag{47}$$

Le premier terme représente le travail virtuel de la résultante des pressions agissant sur un élément $d\tau$, tandis que le second terme représente le travail de la force $Rd\tau$ provenant des actions électrodynamiques [équat. (34)].

Pour faire la démonstration, transformons tout d'abord l'expression de $\delta(\psi\, d\tau)$ de manière à y introduire les pressions. D'après la relation (8) du § 4 et les explications qui la suivent, le produit $p^{\mu\nu}\delta_{\mu\nu}$ a comme valeur

$$p^{\mu\nu}\delta_{\mu\nu} = -\frac{d_{\mathrm{T}}(\sigma\mathcal{F})}{\sigma} = -\left\{\mathcal{F}\operatorname{div}\delta s + \Sigma\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\alpha}d\alpha\right\} + \mathrm{B}^{\nu}\mathrm{J}_{\mu}\frac{\partial\delta x^{\mu}}{\partial x^{\nu}} - \mathrm{E}_{m\mu}\left\{\mathrm{P}^{\nu}\frac{\partial\delta x^{\mu}}{\partial x^{\nu}} - \mathrm{P}^{\mu}\frac{\partial\delta x^{\nu}}{\partial x^{\nu}}\right\}. \quad (48)$$

Permutons les indices muets μ et ν dans le dernier terme, puis tirons de cette relation la valeur de $-\left\{\mathcal{F}\operatorname{div}\delta s + \Sigma\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\alpha}\delta\alpha\right\}$ pour la substituer dans l'expression (39) de $\delta(\psi\, d\tau)$. Nous obtenons

$$\delta(\psi\, d\tau) = (\text{termes en } \delta_1\mathrm{H}, \delta\mathrm{J}, \text{etc.}) + p^{\mu\nu}\delta_{\mu\nu}\, d\tau - \mathrm{B}^{\nu}\mathrm{J}_{\mu}\frac{\partial\delta x^{\mu}}{\partial x^{\nu}}d\tau + \mathrm{E}_{m\mu}\mathrm{P}^{\nu}\frac{\partial\delta x^{\mu}}{\partial x^{\nu}}d\tau$$

$$- \mathrm{E}_{m\nu}\mathrm{P}^{\nu}\frac{\partial\delta x^{\mu}}{\partial x^{\mu}}d\tau - \mathrm{B}_{\nu}\frac{\partial\mathrm{J}^{\nu}}{\partial x^{\mu}}\delta x^{\mu}\, d\tau - \mathrm{E}_{m\nu}\frac{\partial\mathrm{P}^{\nu}}{\partial x^{\mu}}\delta x^{\mu}\, d\tau. \quad (49)$$

L'ensemble des termes $-\mathrm{E}_{m\nu}\mathrm{P}^{\nu}\frac{\partial\delta x^{\mu}}{\partial x^{\mu}}d\tau$ et $-\mathrm{E}_{m\nu}\frac{\partial\mathrm{P}^{\nu}}{\partial x^{\mu}}\delta x^{\mu}\, d\tau$ vaut $-\mathrm{E}_{m\nu}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}(\mathrm{P}^{\nu}\delta x^{\mu})d\tau$ qu'une intégration par parties transforme en $+\mathrm{P}^{\nu}\frac{\partial\mathrm{E}_{m\nu}}{\partial x^{\mu}}\delta x^{\mu}\, d\tau$. Faisant de même des intégrations par parties pour le terme $p^{\mu\nu}\delta_{\mu\nu}$ (après l'avoir écrit sous la forme équivalente $p^{\nu}{}_{\mu}\frac{\partial\delta x^{\mu}}{\partial x^{\nu}}$, grâce à ce que $p^{\nu\mu} = p^{\mu\nu}$) et pour les autres termes contenant δx^{μ} sous un signe de dérivation, il vient

$$\delta(\psi\, d\tau) = (\ldots) + \left\{-\frac{\partial p^{\nu}{}_{\mu}}{\partial x^{\nu}}\delta x^{\mu} + \mathrm{B}^{\nu}\left\{\frac{\partial\mathrm{J}_{\mu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial\mathrm{J}_{\nu}}{\partial x^{\mu}}\right\}\delta x^{\mu}\right.$$

$$\left. + \mathrm{P}^{\nu}\left\{\frac{\partial\mathrm{E}_{m\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial\mathrm{E}_{m\mu}}{\partial x^{\nu}}\right\}\delta x^{\mu} - \mathrm{E}_{m\mu}\frac{\partial\mathrm{P}^{\nu}}{\partial x^{\nu}}\delta x^{\mu}\right\}d\tau$$

$$= \ldots + \left\{-\frac{\partial p^{\nu}{}_{\mu}}{\partial x^{\nu}}\delta x^{\mu} + ([\operatorname{rot}\mathrm{J}.\mathrm{B}].\delta s) + ([\mathrm{P}.\operatorname{rot}\{\mathrm{E}+[\mathrm{V}.\mathrm{B}]\}].\delta s)\right.$$

$$\left. - (\mathrm{E}+[\mathrm{V}.\mathrm{B}].\operatorname{div}\mathrm{P}\,\delta s)\right\}d\tau. \quad (49')$$

En vertu des formules (35) et (21) et en remplaçant en facteur de $\delta_1\mathrm{V}$ la divergence de $\mathrm{E}+\mathrm{P}$ par la quantité ρ qui lui est égale, la variation de $\mathbf{K}$ donne comme termes en δx^{μ}

$$(\mathcal{A}. - \operatorname{rot}[\delta_1\mathrm{V}.\mathrm{P}] + \rho\,\delta_1\mathrm{V} - \operatorname{div} i\,\delta s - \operatorname{rot}[i.\delta s])\,d\tau.$$

Le premier produit $-(\mathcal{A}.\operatorname{rot}[\ldots])\,d\tau$ se transforme au moyen d'une intégration par parties en

$$-(\operatorname{rot}\mathcal{A}.[\delta_1\mathrm{V}.\mathrm{P}])\,d\tau \qquad \text{ou} \qquad -([\mathrm{P}.\mathrm{B}].\delta_1\mathrm{V})\,d\tau.$$

Ainsi $\delta_1 V$ apparaît en facteur dans les deux premiers termes. Remplaçant $\delta_1 V$ par sa valeur (14), l'ensemble des termes en δx^μ fournis par $\delta_1 K$ devient

$$\left(\left\{-[P.B]+\rho\mathcal{A}\right\}\left\{\frac{\partial\delta s}{\partial t}+V^\nu\frac{\partial\delta s}{\partial x^\nu}-\frac{\partial V}{\partial x^\nu}\delta x^\nu\right\}\right)d\tau-(\mathcal{A}.\mathrm{div}\, i\delta s+\mathrm{rot}[i.\delta s])\,d\tau.$$

Occupons-nous d'abord des termes contenant $\mathcal{A}$.

Après intégration par parties (s'il est nécessaire pour dégager les δx^μ de tout signe de dérivation) et, accessoirement, après changement de dénomination de quelques indices muets, ces termes deviennent

$$-\left(\rho\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial t}.\delta s\right)d\tau-\rho V^\nu\frac{\partial\mathcal{A}_\mu}{\partial x^\nu}\delta x^\mu d\tau-\rho\mathcal{A}_\nu\frac{\partial V^\nu}{\partial x^\mu}\delta x^\mu d\tau$$
$$-(\mathcal{A}.\delta s)\left\{\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho V^\nu)}{\partial x^\nu}+\mathrm{div}\, i\right\}d\tau-(\mathrm{rot}\,\mathcal{A}.[i.\delta s])\,d\tau. \tag{50}$$

Le dernier terme est égal à $([i.B].\delta s)\,d\tau$.

Le terme précédent est nul en vertu du principe de la conservation de l'électricité.

Enfin l'ensemble des trois premiers termes, en ajoutant et retranchant un terme $\rho V^\nu\dfrac{\partial\mathcal{A}_\nu}{\partial x^\mu}\delta x^\mu d\tau$ peut s'écrire

$$-\rho\frac{\partial\mathcal{A}_\mu}{\partial t}\delta x^\mu d\tau-\rho\frac{\partial\mathcal{A}_\nu}{\partial x^\mu}V^\nu\delta x^\mu d\tau-\rho\mathcal{A}_\nu\frac{\partial V^\nu}{\partial x^\mu}\delta x^\mu d\tau+\rho V^\nu\left(\frac{\partial\mathcal{A}_\nu}{\partial x^\mu}-\frac{\partial\mathcal{A}_\mu}{\partial x^\nu}\right)\delta x^\mu d\tau$$
$$=\rho\left(-\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial t}-\mathrm{grad}\,(\mathcal{A}.V).\delta s\right)d\tau+([\rho V.\,\mathrm{rot}\,\mathcal{A}].\delta s)\,d\tau$$
$$=(\rho E.\delta s)\,d\tau+([\rho V.B].\delta s)\,d\tau. \tag{51}$$

Passons aux termes de $(\mathcal{A}.\delta_1 K)$ contenant $[P.B]$ en facteur.

Après intégration par parties, s'il y a lieu, ces termes donnent

$$\left(\left[\frac{\partial P}{\partial t}.B\right]+\left[P.\frac{\partial B}{\partial t}\right].\delta s\right)d\tau+\frac{\partial}{\partial x^\nu}\left\{V^\nu[P.B]_\mu\right\}\delta x^\mu d\tau+\left([P.B].\frac{\partial V}{\partial x^\mu}\delta x^\mu\right)d\tau. \tag{52}$$

D'ailleurs $\left(\left[P.\dfrac{\partial B}{\partial t}\right].\delta s\right)d\tau$ est encore égal à $([P.-\mathrm{rot}\,E].\delta s)\,d\tau$, terme qui, ajouté au terme $([P.\,\mathrm{rot}\{E+[V.B]\}].\delta s)\,d\tau$ provenant de $\delta(\psi\, d\tau)$, donne

$$([P.\,\mathrm{rot}\,[V.B]].\delta s)\,d\tau.$$

Une fois toutes ces transformations effectuées on constate qu'il y a en tout, tant dans $\delta(\psi d\tau)$ que dans $(\mathcal{A}.\delta_1 K)d\tau$, quatre termes contenant les quatre mêmes lettres B, P, V, δs. Je récris ces quatre termes

$$-([V.B].\operatorname{div}P\delta s)+([P.\operatorname{rot}[V.B]].\delta s)+\frac{\partial}{\partial x^\nu}\{V^\nu[P.B]_\mu\}\delta x^\mu+[P.B]_\nu\frac{\partial V^\nu}{\partial x^\mu}\delta x^\mu. \quad (53)$$

La somme de ces quatre termes se réduit simplement à

$$([-\operatorname{rot}[V.P].B].\delta s) \quad (54)$$

en vertu de l'identité suivante facile à vérifier en explicitant la valeur de chaque terme

$$-[\operatorname{rot}[V.P].B]-[V.P]\operatorname{div}B$$
$$\equiv -[\operatorname{rot}[V.B].P]-[V.B]\operatorname{div}P+\frac{\partial}{\partial x^\nu}\{V^\nu[P.B]\}+[P.B]_\nu\frac{\partial V^\nu}{\partial s}. \quad (55)$$

Il suffit de supprimer de l'identité le terme contenant le facteur div B qui est nul et de faire le produit scalaire de tous les termes par δs pour retomber sur l'égalité à établir.

Cette dernière transformation une fois effectuée il est facile de s'assurer que les divers termes obtenus reproduisent les divers termes de l'expression (47) du travail virtuel des forces existant dans la théorie de H. Lorentz.

Ainsi se trouvent complètement établies les diverses propositions annoncées aux paragraphes 8 et 10.

16. — Parmi les six variations virtuelles $\delta_1 H$, δJ, $\delta_1 E$, $\delta_1 P$, δq_0 et δs, figurant dans l'équation (37), les quatre dernières seules ont donné lieu au cours des calculs à une intégration par parties par rapport au temps : l'intégrale transformée ne conserve sa valeur que si $\delta_1 E$, $\delta_1 P$, δq_0 et δs sont nuls aux époques t_0 et t_1. Les variables correspondantes se comportent donc comme le font en mécanique pure les coordonnées généralisées des équations de Lagrange [1].

Par contre, rien n'oblige $\delta_1 H$, relié aux variations $\delta_1 E$, $\delta_1 P$, δq_0 et δs par une relation de la forme $\operatorname{rot}\delta_1 H = \text{fonct.}(\delta s, \delta q_0, \ldots)$, à s'annuler aux temps t_0 et t_1 car $\delta_1 H$ est indéterminé au gradient près d'une fonction arbitraire.

Il en est de même de δJ, de $\delta_1 B$ égal à $\delta_1 H+\delta_1 J$. C'est également le cas de δi qui, d'après (18) et (19), est fonction de δq_0 et des δx^μ mais l'est également de la

[1] La condition que les δq_0 soient nuls aux limites t_0 et t_1 entraîne la conséquence suivante. Soit une matière électrolysable : d'après les lois de Faraday les produits de la décomposition sont proportionnels aux quantités d'électricité qui passent. L'état chimique initial et l'état final seront les mêmes dans le mouvement varié et dans le mouvement normal puisque les δq_0 sont nuls aux époques t_0 et t_1.

dérivée $\dfrac{d\delta q_0}{dt}$ que rien n'oblige à supposer nulle aux époques t_0 et t_1. Quant à $\delta_1\rho$, égal d'après (29) à $\operatorname{div}(\delta_1 E + \delta_1 P)$, il s'annule aux temps t_0 et t_1 comme $\delta_1 E$ et $\delta_1 P$.

17. — Tableau des relations spéciales à la Théorie de Hertz.

Équations inchangées : (1) à (29).

En outre : (31), (36), (37), (38), (40), (43), (45) à (47), (50).

$$\operatorname{rot} H = i + \rho V + \frac{\partial(E+P)}{\partial t} - \operatorname{rot}[V.\, E + P]. \tag{30}$$

$$\operatorname{rot} E = -\frac{\partial B}{\partial t} + \operatorname{rot}[V.\, B]. \tag{32}$$

$$E_m = E. \tag{33}$$

$$R = \left[i + \rho V + \frac{\partial(E+P)}{\partial t} - \operatorname{rot}[V.\, E+P] . H\right] - H \operatorname{div} J + \{\rho - \operatorname{div} P\} E + [\operatorname{rot} E . E]. \tag{34}$$

Le premier terme peut encore s'écrire $[\operatorname{rot} H . H]$ ou $[\operatorname{rot} H . B] - [\operatorname{rot} H . J]$.

$$K(H, E, P, q_0, x^\mu) \equiv -\operatorname{rot} H + \frac{\partial(E+P)}{\partial t} + V \operatorname{div}(E+P) - \operatorname{rot}[V.\, E+P] + i = 0. \tag{35}$$

$$\left.\begin{aligned} \delta(\psi\, d\tau) = {} & (B.\delta_1 H)\, d\tau + \left(H - \frac{\partial F}{\partial J}.\delta J\right) d\tau - (E.\delta_1 E)\, d\tau - \left(\frac{\partial F}{\partial P}.\delta_1 P\right) d\tau \\ & - \left\{ F \operatorname{div} \delta s + \Sigma \frac{\partial F}{\partial \alpha}\delta\alpha + H_\nu \frac{\partial J^\nu}{\partial x^\mu}\delta x^\mu + \left(\frac{\partial F}{\partial P}.\frac{\partial P}{\partial x^\mu}\delta x^\mu\right)\right\} d\tau. \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

$$\frac{\partial F}{\partial J} = H. \tag{41}$$

$$E = -\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} - \operatorname{grad}(\mathcal{A}.V) - [\operatorname{rot} \mathcal{A}.V]. \tag{42}$$

$$\frac{\partial F}{\partial P} = E = E_m. \tag{44}$$

$$\left.\begin{aligned} p^{\mu\nu}\delta_{\mu\nu} = -\frac{d_T(\sigma F)}{\sigma} = {} & -\left\{ F \operatorname{div}\delta s + \Sigma \frac{\partial F}{\partial \alpha}\delta\alpha \right\} \\ & - (H_\mu J^\nu + E_\mu P^\nu)\frac{\partial \delta x^\mu}{\partial x^\nu} + (H_\nu J^\nu + E_\nu P^\nu)\frac{\partial \delta x^\mu}{\partial x^\mu}. \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

$$\left.\begin{aligned} \delta(\psi\, d\tau) = {} & (\text{termes en } \delta_1 E, \delta_1 P, \delta J, \delta_1 H) + p^{\mu\nu}\delta_{\mu\nu}\, d\tau + (H_\mu J^\nu + E_\mu P^\nu)\frac{\partial \delta x^\mu}{\partial x^\nu}\, d\tau \\ & - (H_\nu J^\nu + E_\nu P^\nu)\frac{\partial \delta x^\mu}{\partial x^\mu}\, d\tau - \left(H_\nu \frac{\partial J^\nu}{\partial x^\mu} + E_\nu \frac{\partial P^\nu}{\partial x^\mu}\right)\delta x^\mu\, d\tau. \end{aligned}\right\} \tag{49}$$

$$\left.\begin{aligned} \delta(\psi\, d\tau) = \ldots - \frac{\partial p^\nu{}_\mu}{\partial x^\nu}\delta x^\mu\, d\tau - (H \operatorname{div} J . \delta s)\, d\tau - ([\operatorname{rot} H . J] . \delta s)\, d\tau \\ - (E \operatorname{div} P . \delta s)\, d\tau + ([P . \operatorname{rot} E] . \delta s)\, d\tau. \end{aligned}\right\} \tag{49'}$$

L'expression $(\mathcal{A}.\delta_1 K)$ donne les mêmes termes en δx^μ que pour la théorie de H. Lorentz sauf les trois modifications suivantes :

1° P est remplacé par $E+P$.

2° On parvient à la même équation (50), mais la modification apportée à la relation (42) fait que l'expression (51) se change en

$$\rho(E-[V.B].\delta s)+([\rho V.B].\delta s).$$

En remplaçant ρ par $\operatorname{div}\{E+P\}$ dans le terme précédé du signe $-$, cela donne

$$(\rho E.\delta s)+([\rho V.B].\delta s)-\operatorname{div}\{E+P\}([V.B].\delta s). \tag{51}$$

3° Lorsque l'on opère la transformation du terme $\left(\left[P.\frac{\partial B}{\partial t}\right].\delta s\right)$ de (52), il faut tenir compte de ce que la valeur de $\frac{\partial B}{\partial t}$ donnée par (32) est modifiée, ce qui ajoute un terme

$$([E+P.\operatorname{rot}[V.B]].\delta s).$$

Changer P en $E+P$ dans les équations (53), (54), (55).

18. — Je ne me suis occupé, dans tout ce qui précède, que des théories de H. Lorentz et de Hertz. Il serait facile d'étendre, comme je l'avais fait pour le potentiel thermodynamique, aux cas plus généraux envisagés au chapitre III du Mémoire de 1941.

19. — Il nous reste à montrer rapidement que les six conditions du minimum de l'action établies aux paragraphes 13 à 15 sont nécessaires en même temps que suffisantes. J'emploierai dans ce but un mode de démonstration identique. Il suffira donc de l'indiquer, par exemple, pour la relation $\operatorname{div} B = 0$.

On satisfait à la condition $\delta_1 K = 0$ en prenant $\delta_1 H$ égal au gradient d'une fonction arbitraire infiniment petite $\lambda(x^1, x^2, x^3, t)$ et laissant nulles les variations des autres variables. Transportant dans $\delta(\psi\, d\tau)$ la valeur donnée à $\delta_1 H$, on obtient un terme $(B.\operatorname{grad}\lambda)\,d\tau$ qu'une intégration par parties dans l'espace transforme en $-\operatorname{div}(B.\lambda)\,d\tau$. Pour que l'intégrale $-\int_{t_0}^{t_1} dt \int_{\text{espace}} (\operatorname{div} B.\lambda)\,d\tau$ soit nulle quelle que soit la fonction λ, il faut que $\operatorname{div} B = 0$. Ainsi est établie la nécessité de la condition (31).

Pour les autres conditions, il suffira d'indiquer quelles sont les variations à prendre pour que la condition $\delta_1 K = 0$ soit identiquement satisfaite. Les indications sont réunies dans le tableau ci-joint qui est applicable à la théorie de Hertz aussi bien qu'à celle de H. Lorentz, quatre des valeurs à prendre pour $\delta_1 H$ différant seules suivant qu'il s'agit de l'une ou de l'autre théorie. Les calculs ne présentent quelque complication que pour la force pondéromotrice, mais les transformations à effectuer sont identiques ou analogues à celles détaillées au paragraphe 15. En s'y reportant, le lecteur n'aura aucune peine à vérifier la démonstration.

Relations	$\delta_1 H$		δJ	$\delta_1 E$	$\delta_1 P$	δq_0	δx^μ
$\operatorname{div} B = o$	grad λ		o	o	o	o	o
(41)	o		δJ	o	o	o	o
	H. Lorentz	Hertz					
(32)	$\frac{\partial G}{\partial t}$	$\frac{\partial G}{\partial t} - [V.\operatorname{rot} G]$	o	rot G	o	o	o
$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial P} = E_m$	$-[V.\delta_1 P]$	o	o	$-\delta_1 P$	$\delta_1 P$	o	o
Loi d'Ohm	$\delta \mathcal{H}_0 = -[V_0.\delta q_0]$	o	o	$\delta E_0 = -\delta q_0$	o	δq_0	o
Force pondéromotrice	$-[i + \rho V.\delta s]$ $-[\delta_1 V.P]$	$-[i.\delta s]$ $-[\delta_1 V.E + P]$	o	$-\rho\delta s$	o	o	δs

Le déterminant formé par les éléments du tableau se réduit à sa diagonale principale. Or celle-ci est différente de zéro, car pour chaque ligne, l'élément arbitraire est celui situé sur la diagonale principale. Les systèmes de variation considérés sont donc linéairement indépendants.

A la cinquième ligne (loi d'Ohm), $\delta\mathcal{H}_0$ est le transformé de $\delta\mathcal{H}$ dans le type aimantation d'ordre zéro; V_0, le transformé de V dans le type polarisation d'ordre zéro; E_0 est transformé de E dans le type polarisation d'ordre un. Introduisons enfin B_0 (type polarisation d'ordre un) et $\mathcal{E}_0$, transformé de E comme E_0, mais dans le type aimantation d'ordre zéro.

L'équation (35) devient, dans la théorie de H. Lorentz,

$$K_0 = -\operatorname{rot}_0 \mathcal{H}_0 + \frac{d(E_0 + P_0)}{dt} + \operatorname{rot}_0 [V_0.P_0] + \frac{dq_0}{dt} = o.$$

On aura en outre

$$\delta(\psi\, d\tau) - (\mathfrak{D}_0 . \delta q_0)\, d\tau_0 = (\mathrm{B} . \delta_1 \mathrm{H})\, d\tau - (\mathrm{E} . \delta_1 \mathrm{E})\, d\tau - (\mathfrak{D}_0 . \delta q_0)\, d\tau_0$$
$$= (\mathrm{B}_0 . - [\mathrm{V}_0 . \delta q_0])\, d\tau_0 + (\mathcal{E}_0 . \delta q_0)\, d\tau_0 - (\mathfrak{D}_0 . \delta q_0)\, d\tau_0 = (\mathcal{E}_0 + [\mathrm{V}_0 . \mathrm{B}_0] - \mathfrak{D}_0 . \delta q_0)\, d\tau_0 .$$

L'annulation du coefficient de δq_0 redonne l'équation

$$\mathrm{E} + [\mathrm{V} . \mathrm{B}] - \mathrm{D} = 0 \qquad \text{ou} \qquad \mathrm{E}_m - ri = 0 \qquad (\text{cf. § 14}).$$

Même mode de démonstration pour la théorie de Hertz.