Annales de la faculté des sciences de Toulouse

Louis Roy

Complément au mémoire sur les actions magnétiques, électriques, électrodynamiques et électromagnétiques dans les corps rigides ou déformables

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 4e série, tome 4 (1940), p. 117-148

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1940_4_4__117_0>

COMPLÉMENT AU MÉMOIRE

SUR LES ACTIONS

MAGNÉTIQUES, ÉLECTRIQUES, ÉLECTRODYNAMIQUES ET ÉLECTROMAGNÉTIQUES DANS LES CORPS RIGIDES OU DÉFORMABLES[1]

Par Louis ROY.

---

1. Introduction. — L'expression de l'énergie interne d'un milieu continu polarisé fait intervenir une fonction de l'intensité de polarisation en chaque point du corps et des autres paramètres qui achèvent de définir l'état physique en ce point. Si le milieu est isotrope, ces autres paramètres se réduisent à la densité et à la température; ce sont les seuls que nous ayons considérés dans notre précédent mémoire. En fait, ces paramètres ne suffisent que pour les milieux qui, isotropes dans leur état primitif quand ils ne sont soumis à aucune force, conservent leur isotropie après avoir été plus ou moins déformés sous l'action des forces électriques, magnétiques, ... qui leur sont ensuite appliquées. Tel est le cas des fluides. S'il s'agit de solides élastiques, ces mêmes paramètres ne suffisent que si les déformations sont assez petites pour que l'isotropie du milieu soit en chaque point sensiblement conservée. Bien que ce soit vraisemblablement le cas des déformations dues aux actions électriques et magnétiques usuelles, qui sont effectivement très petites, nous allons cependant examiner les modifications que subit notre précédent exposé, lorsqu'on substitue à nos anciennes fonctions $\mathfrak{F}(\mathfrak{J}, \rho, T)$ et $F(J, \rho, T)$ celles qui conviennent à un corps primitivement isotrope, devenu très légèrement anisotrope du fait des petites déformations qu'il subit. Ces modifications ne concernent donc que le corps déformable 1 que nous avons considéré, mais ne portent pas sur les actions électrodynamiques, qui sont indépendantes de nos fonctions $\mathfrak{F}$ et F.

Nous verrons ainsi que la forme des actions élémentaires se trouve seule plus ou moins modifiée, mais que leur résultante et leur moment résultant demeurent inchangés. Enfin, l'introduction des petites déformations dans les fonctions $\mathfrak{F}$ et F nous conduit tout naturellement aux équations qui permettraient de les déterminer,

---

[1] Annales de la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse, 4e série, t. II, 1939, p. 1.

c'est-à-dire au problème général de la magnétostriction et de l'électrostriction, dont la solution devient, en effet, presque immédiate. Bien qu'il puisse paraître inutile de revenir sur ce problème après les beaux travaux de M. Alfred Liénard[1], nous avons pensé qu'il n'était pas sans intérêt de le reprendre d'après la méthode même dont Duhem s'était autrefois servi. Les solutions de quelques cas particuliers font apparaître deux certaines fonctions g et h de $\mathfrak{J}$ en Magnétisme, g et h de J en Électricité, dont la connaissance expérimentale nous paraît encore à peu près inexistante et qu'on pourrait peut-être déterminer à partir des formules ainsi obtenues[2].

Comme nous conservons dans ce complément toutes nos notations antérieures, nous nous dispensons de les rappeler ici, d'autant plus que sa lecture exige qu'on ait sous les yeux notre précédent mémoire.

2. Calcul de $\delta \int \mathcal{F} d\varpi$. — L'expression générale de la fonction $\mathcal{F}$, relative à un solide élastique très peu déformé, est

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}; \delta_1, \delta_2, \delta_3, g_1, g_2, g_3; \mathrm{T}),$$

cette fonction s'annulant en même temps que l'intensité d'aimantation $\mathfrak{J}$, de composantes $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ et où l'on a posé :

$$(1) \qquad \delta_1 = \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x}, \ \ldots, \qquad g_1 = \frac{\partial \mathrm{W}}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z}, \ \ldots,$$

(U, V, W) étant le déplacement du point (x, y, z) à partir de l'état primitif non déformé[3]. Comme les dilatations et glissements δ_i, g_i sont très petits, le développement de la fonction $\mathcal{F}$ en série entière par rapport à ces six déformations peut

---

[1] A. Liénard, *Équilibre et déformation de systèmes de conducteurs traversés par des courants et de corps magnétiques sans hystérésis*, Annales de Physique : 9e série, t. XX, 1923, p. 249; 10e série, t. III, 1925, p. 145.

[2] Cette partie de notre travail a été résumée en deux notes aux Comptes rendus de l'Académie des Sciences : *Sur les déformations d'origine électrique et magnétique; Sur quelques déformations d'origine magnétique et électrique*, qui paraîtront dès la reprise de cette publication.

[3] Dans les formules (1), U, V, W sont donc considérés comme des fonctions des variables d'Euler x, y, z, t, qu'on peut en effet substituer sans changement aux variables de Lagrange a, b, c, t, du fait que la déformation est infiniment petite. Si dans les composantes $\mathfrak{U}(a, b, c, t)$, ... du déplacement définies par :

$$(\mathrm{A}) \qquad x = a + \mathfrak{U}(a, b, c, t), \ \ldots,$$

on remplace, en effet, a, b, c par leurs valeurs tirées de (A), il vient :

$$\mathfrak{U}(a, b, c, t) = \mathrm{U}(x, y, z, t), \ \ldots,$$

d'où

$$\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial a} = \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x}\left(1 + \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial a}\right) + \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y}\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial a} + \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial z}\frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial a}, \ \ldots;$$

être réduit à sa partie linéaire, soit :

$$\mathcal{F} = \mathcal{G} + |\mathfrak{D}_1 \partial_1 + \mathcal{G}_1 g_1|, \tag{2}$$

$\mathcal{G}, \mathfrak{D}_i, \mathcal{G}_i$ étant des fonctions données de $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$; T. Pour un corps isotrope dans son état primitif non déformé, l'expression (2) devient :

$$\mathcal{F} = (f + g\Theta)\mathfrak{J}^2 + h|\mathcal{A}^2 \partial_1 + \mathcal{B}\mathcal{C} g_1|, \tag{3}$$

$\Theta = |\partial_1|$ désignant la dilatation cubique et f, g, h des fonctions de $\mathfrak{J}$, T(1). La dernière égalité de la page 21 de notre précédent mémoire devient donc ici :

$$\delta_T \int_{\varpi_1} \mathcal{F} d\varpi = \int_{\varpi_1} \left(\left| \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathcal{A}} \delta \mathcal{A} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \partial_1} \delta \partial_1 + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial g_1} \delta g_1 \right| d\varpi + \mathcal{F} \delta d\varpi \right)$$

et comme

$$\delta d\varpi = \left| \frac{\partial \delta x}{\partial x} \right| d\varpi; \qquad \delta \partial_1 = \frac{\partial \delta x}{\partial x}, \ \ldots; \qquad \delta g_1 = \frac{\partial \delta z}{\partial y} + \frac{\partial \delta y}{\partial z}, \ \ldots; \tag{4}$$

il vient :

$$\delta_T \int_{\varpi_1} \mathcal{F} d\varpi = \int_{\varpi_1} \left| \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathcal{A}} \delta \mathcal{A} + \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \partial_1} + \mathcal{F} \right) \delta \partial_1 + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial g_1} \delta g_1 \right| d\varpi.$$

Dans chacune des trois parenthèses, il suffira, d'après (2) ou (3), de remplacer $\mathcal{F}$ par son terme principal $\mathcal{G}$ ou $f\mathfrak{J}^2$, auquel cette fonction se réduirait dans l'hypothèse de la rigidité.

---

de sorte qu'en résolvant par rapport à $\dfrac{\partial U}{\partial(x, y, z)}$ et en négligeant les infiniment petits d'un ordre supérieur au premier, il vient :

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial a}, \ \ldots.$$

(1) P. Duhem, *Leçons sur l'Électricité et le Magnétisme*, t. II, p. 338. Nous désignons ici par g, h les fonctions h, k de Duhem, parce que k désigne dans notre précédent mémoire le coefficient de polarisation diélectrique.

L'intégrale de volume de la fonction $\mathcal{F}$ étant un travail, cette fonction est une pression, donc aussi $\mathcal{G}, \mathfrak{D}_i, \mathcal{G}_i, (f, g, h)\mathfrak{J}^2$. Comme d'autre part $\varepsilon'\mathfrak{J}$ est un champ magnétique, donc $\dfrac{(\varepsilon'\mathfrak{J})^2}{\varepsilon'} = \varepsilon'\mathfrak{J}^2$ une pression, $\dfrac{(f, g, h)}{\varepsilon'}$ sont des nombres abstraits, c'est-à-dire sans dimensions dans tout système d'unités. En particulier, f, g, h restent des nombres abstraits dans le système C. G. S. d'unités magnétiques, puisqu'on y fait $\varepsilon' = 1$.

Si nous posons alors :

$$
(5)\qquad \left\{
\begin{array}{lll}
\mathcal{N}_1' = \dfrac{\partial \mathfrak{F}}{\partial d_1} + \mathfrak{F}, & \mathcal{N}_2' = \dfrac{\partial \mathfrak{F}}{\partial d_2} + \mathfrak{F}, & \mathcal{N}_3' = \dfrac{\partial \mathfrak{F}}{\partial d_3} + \mathfrak{F}; \\
\mathcal{T}_1' = \dfrac{\partial \mathfrak{F}}{\partial g_1}, & \mathcal{T}_2' = \dfrac{\partial \mathfrak{F}}{\partial g_2}, & \mathcal{T}_3' = \dfrac{\partial \mathfrak{F}}{\partial g_3},
\end{array}
\right.
$$

c'est-à-dire d'après (3) et dans l'hypothèse d'isotropie

$$
(6)\qquad \left\{
\begin{array}{ll}
\mathcal{N}_1' = g\mathcal{J}^2 + h\mathcal{A}^2 + \mathfrak{F}, & \mathcal{T}_1' = h\mathcal{B}\mathcal{C}, \\
\mathcal{N}_2' = g\mathcal{J}^2 + h\mathcal{B}^2 + \mathfrak{F}, & \mathcal{T}_2' = h\mathcal{C}\mathcal{A}, \\
\mathcal{N}_3' = g\mathcal{J}^2 + h\mathcal{C}^2 + \mathfrak{F}; & \mathcal{T}_3' = h\mathcal{A}\mathcal{B},
\end{array}
\right.
$$

on a, par intégrations par parties et d'après (4),

$$
\int_{\varpi_1} \left| \left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial d_1} + \mathfrak{F} \right) \delta d_1 + \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial g_1} \delta g_1 \right| d\varpi =
$$

$$
-\int_{\varpi_1} \left| \left(\frac{\partial \mathcal{N}_1'}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{T}_3'}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{T}_2'}{\partial z} \right) \delta x \right| d\varpi - \int_{S_1} |(\alpha \mathcal{N}_1' + \beta \mathcal{T}_3' + \gamma \mathcal{T}_2') \delta x | dS,
$$

de sorte que notre précédente expression (48) devient[1] :

$$
(7)\ [48]\qquad \delta \int \mathfrak{F} d\varpi = \int \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial T} \delta T \, d\varpi + \int_{\varpi_3} \left| \frac{\mathcal{A}}{\varkappa} \delta \mathcal{A} \right| d\varpi
$$

$$
+ \int_{\varpi_1} \left| \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathcal{A}} \delta \mathcal{A} - \left(\frac{\partial \mathcal{N}_1'}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{T}_3'}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{T}_2'}{\partial z} \right) \delta x \right| d\varpi - \int_{S_1} |(\alpha \mathcal{N}_1' + \beta \mathcal{T}_3' + \gamma \mathcal{T}_2') \delta x | dS.
$$

Remarquons que celle-ci ne suppose le corps 1 primitivement isotrope que si les $\mathcal{N}_i'$, $\mathcal{T}_i'$ y ont été remplacés par leurs valeurs (6).

3. Variation de $\mathcal{U} + \int \mathfrak{F} d\varpi$. — La variation de l'énergie magnétique $\mathcal{W}$ ne

---

[1] Les formules précédées d'un numéro entre crochets correspondent à celles de mêmes numéros de notre précédent mémoire.

subissant aucune modification, notre précédente expression (58) devient d'après (7)

$$(8)\ [58] \qquad \delta\left(\mathfrak{W} + \int \mathfrak{F}\, d\varpi\right) = \int \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathrm{T}} \delta \mathrm{T}\, d\varpi$$

$$+ \int_{\varpi_1} \left| \left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathcal{A}} + \varepsilon' \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial x}\right) \delta \mathcal{A} - \left[\varepsilon' \left(\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial y} \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial z} \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial x}\right) \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\partial \mathfrak{N}'_1}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{T}'_3}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{T}'_2}{\partial z} \right] \delta x \right| d\varpi$$

$$+ \int_{S_1} \left[\varepsilon' \left(2\pi \mathcal{S}^2 - \left| \mathcal{A} \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial x} \right| \right) |\alpha\, \delta x| - |(\alpha \mathfrak{N}'_1 + \beta \mathfrak{T}'_3 + \gamma \mathfrak{T}'_2) \delta x| \right] dS$$

$$+ \int_{\varpi_3} \left| \left(\frac{\mathcal{A}}{\varkappa} + \varepsilon' \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial x} \right) \delta \mathcal{A} \right| d\varpi - |\mathfrak{L}_2 \xi_2 + \mathfrak{L}_2 \omega_2 + \mathfrak{L}_3 \xi_3 + \mathfrak{L}_3 \omega_3|.$$

4. Variation de $\mathrm{W} + \int \mathrm{F}\, d\varpi$. — Notre ancienne fonction $\mathrm{F}(\mathrm{J}, \rho, \mathrm{T})$ relative à la polarisation diélectrique doit de même être remplacée par une fonction

$$\mathrm{F}(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}; \partial_1, \partial_2, \partial_3, g_1, g_2, g_3; \mathrm{T}),$$

soit encore, d'après (2), de la forme

$$\mathrm{F} = \mathrm{G} + |\mathrm{D}_1 \partial_1 + \mathrm{G}_1 g_1|,$$

$\mathrm{G}, \mathrm{D}_i, \mathrm{G}_i$ étant des fonctions données de $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{T}$ et, d'après (3) pour un corps primitivement isotrope,

$$(9) \qquad \mathrm{F} = (\mathrm{f} + \mathrm{g}\Theta)\mathrm{J}^2 + \mathrm{h}\,|\mathrm{A}^2 \partial_1 + \mathrm{BC} g_1|,$$

f, g, h étant des fonctions de J, T. Si donc on pose

$$\mathrm{N}'_1 = \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \partial_1} + \mathrm{F}, \qquad \mathrm{N}'_2 = \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \partial_2} + \mathrm{F}, \qquad \mathrm{N}'_3 = \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \partial_3} + \mathrm{F};$$

$$\mathrm{T}'_1 = \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial g_1}, \qquad \mathrm{T}'_2 = \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial g_2}, \qquad \mathrm{T}'_3 = \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial g_3},$$

soit encore dans l'hypothèse d'isotropie

$$\mathrm{N}'_1 = \mathrm{g}\mathrm{J}^2 + \mathrm{h}\mathrm{A}^2 + \mathrm{F}, \qquad \mathrm{T}'_1 = \mathrm{h}\mathrm{BC},$$
$$\mathrm{N}'_2 = \mathrm{g}\mathrm{J}^2 + \mathrm{h}\mathrm{B}^2 + \mathrm{F}, \qquad \mathrm{T}'_2 = \mathrm{h}\mathrm{CA},$$
$$\mathrm{N}'_3 = \mathrm{g}\mathrm{J}^2 + \mathrm{h}\mathrm{C}^2 + \mathrm{F}; \qquad \mathrm{T}'_3 = \mathrm{h}\mathrm{AB},$$

notre ancienne expression (67) devient d'après (7)

$$
(10)\ [67] \qquad \delta \int \mathrm{F}\, d\varpi = \int \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \mathrm{T}} \delta \mathrm{T}\, d\varpi + \int_{\varpi_3} \left| \frac{\mathrm{A}}{k} \delta \mathrm{A} \right| d\varpi
$$

$$
+ \int_{\varpi_1} \left| \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \mathrm{A}} \delta \mathrm{A} - \left(\frac{\partial \mathrm{N}'_1}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{T}'_3}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{T}'_2}{\partial z} \right) \delta x \right| d\varpi - \int_{\mathrm{S}_1} |(\alpha \mathrm{N}'_1 + \beta \mathrm{T}'_3 + \gamma \mathrm{T}'_2) \delta x|\, d\mathrm{S}
$$

et par suite notre ancienne (74) s'écrit :

$$
[74] \qquad \delta \left(\mathrm{W} + \int \mathrm{F}\, d\varpi \right) = \int \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \mathrm{T}} \delta \mathrm{T}\, d\varpi + \varepsilon\, dt \int \left| f \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x} \right| d\varpi
$$

$$
+ \int_{\varpi_1} \left[\varepsilon \left| \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x} \delta x \right| (e + \mathrm{E}) + \left| \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \mathrm{A}} \delta \mathrm{A} - \left(\frac{\partial \mathrm{N}'_1}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{T}'_3}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{T}'_2}{\partial z} \right) \delta x \right| \right] d\varpi
$$

$$
+ \int_{\mathrm{S}_1} \left| \left\{ \varepsilon \left[\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x} + 2\pi(\sigma + \Sigma)\alpha \right] (\sigma + \Sigma) - \alpha \mathrm{N}'_1 - \beta \mathrm{T}'_3 - \gamma \mathrm{T}'_2 \right\} \delta x \right| d\mathrm{S}
$$

$$
+ dt \int_{\varpi_3} \left| \frac{\mathrm{A}}{k} \mathrm{u} \right| d\varpi - |\mathrm{P}_2 \xi_2 + \mathrm{L}_2 \omega_2 + \mathrm{P}_3 \xi_3 + \mathrm{L}_3 \omega_3|.
$$

5. Travail élémentaire des forces intérieures. — Les expressions (71) des composantes du courant de polarisation donnent :

$$
\left| \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \mathrm{A}} \delta \mathrm{A} \right| = dt \left| \mathrm{u} \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \mathrm{A}} \right| + \left| \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \mathrm{A}} \left[- \mathrm{A} \left(\frac{\partial \delta y}{\partial y} + \frac{\partial \delta z}{\partial z} \right) + \mathrm{B} \frac{\partial \delta x}{\partial y} + \mathrm{C} \frac{\partial \delta x}{\partial z} \right] \right|,
$$

de sorte que notre ancienne égalité (80) s'écrit maintenant :

$$
(11)\ [80] \quad \delta \mathcal{T}_i = - \delta \mathrm{U}_0 - dt \int \left| u \left(\varphi_x - \mathrm{T} \frac{\partial \varphi_x}{\partial \mathrm{T}} \right) \right| d\varpi - \int \frac{\partial (\mathcal{F} + \mathrm{F})}{\partial \mathrm{T}} \delta \mathrm{T}\, d\varpi
$$

$$
- \int \delta \left(\Theta - \mathrm{T} \frac{\partial \Theta}{\partial \mathrm{T}} \right) dq
$$

$$
- \int_{\varpi_1} \left| \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathcal{A}} + \varepsilon' \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} \right) \delta \mathcal{A} - \left[\varepsilon' \left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y} \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z} \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial x} \right) + \frac{\partial \mathcal{N}'_1}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{T}'_3}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{T}'_2}{\partial z} \right] \delta x \right| d\varpi
$$

$$
- \int_{\mathrm{S}_1} \left[\varepsilon' \left(2\pi \mathcal{P}^2 - \left| \mathcal{A} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} \right| \right) |\alpha \delta x| - |(\alpha \mathcal{N}'_1 + \beta \mathcal{T}'_3 + \gamma \mathcal{T}'_2) \delta x| \right] d\mathrm{S}
$$

$$-\int_{\varpi_3}\left|\left(\frac{\mathfrak{A}}{\varkappa}+\varepsilon'\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial x}\right)\delta\mathfrak{A}\right|d\varpi+|\mathfrak{L}_2\xi_2+\mathfrak{L}_2\omega_2+\mathfrak{L}_3\xi_3+\mathfrak{L}_3\omega_3|$$

$$-dt\int_{\varpi_1}\left|\left(\frac{\partial F}{\partial A}+\varepsilon\frac{\partial V}{\partial x}-\mathcal{E}_x\right)u\right|d\varpi-dt\int_{\varpi_3}\left|\left(\frac{A}{k}+\varepsilon\frac{\partial V}{\partial x}-\mathcal{E}_x\right)u\right|d\varpi-dt\int|f\mathcal{E}_x|\,d\varpi$$

$$-\int_{\varpi_1}\left\{\varepsilon\left|\frac{\partial V}{\partial x}\delta x\right|(e+E)+\left|\frac{\partial F}{\partial A}\left[-A\left(\frac{\partial\delta y}{\partial y}+\frac{\partial\delta z}{\partial z}\right)+B\frac{\partial\delta x}{\partial y}+C\frac{\partial\delta x}{\partial z}\right]\right|\right\}d\varpi$$

$$-\varepsilon\int_{S_1}\left|\left[\frac{\partial V}{\partial x}+2\pi(\sigma+\Sigma)\alpha\right]\delta x\right|(\sigma+\Sigma)\,dS$$

$$+\int_{\varpi_1}\left|\left(\frac{\partial N'_1}{\partial x}+\frac{\partial T'_3}{\partial y}+\frac{\partial T'_2}{\partial z}\right)\delta x\right|d\varpi+\int_{S_1}|(\alpha N'_1+\beta T'_3+\gamma T'_2)\delta x|\,dS$$

$$+|P_2\xi_2+L_2\omega_2+P_3\xi_3+L_3\omega_3|-\delta\Pi.$$

Il vient ainsi, à la place de (85),

$$(12)\,[85]\qquad \int_{\varpi_1}\left|\left(\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\mathfrak{A}}+\varepsilon'\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial x}+\sqrt{\varepsilon'}\,\mathfrak{L}\right)\delta\mathfrak{A}+\left(\frac{\partial F}{\partial A}+\varepsilon\frac{\partial V}{\partial x}-\mathcal{E}_x\right)\delta A\right|d\varpi$$

$$+\int_{\varpi_3}\left|\left(\frac{\mathfrak{A}}{\varkappa}+\varepsilon'\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial x}+\sqrt{\varepsilon'}\,\mathfrak{L}\right)\delta\mathfrak{A}+\left(\frac{A}{k}+\varepsilon\frac{\partial V}{\partial x}-\mathcal{E}_x\right)\delta A\right|d\varpi$$

$$+\delta\left(\Pi-\frac{\mathfrak{A}^2}{4}\int|Ef|\,d\varpi\right)=0.$$

En considérant tout d'abord une modification virtuelle laissant constant le courant total en chaque point, la dernière variation est nulle et l'on est conduit à annuler les coefficients des autres variations. On retombe ainsi sur les formules (86), qui ne sont plus relatives qu'au corps 3, tandis que ces mêmes lois de l'aimantation et de la polarisation diélectrique deviennent pour le corps 1

$$(13)\qquad \frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\mathfrak{A}}+\varepsilon'\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial x}+\sqrt{\varepsilon'}\,\mathfrak{L}=0,\ \ldots;\qquad \frac{\partial F}{\partial A}+\varepsilon\frac{\partial V}{\partial x}-\mathcal{E}_x=0,\ \ldots.$$

On est enfin conduit à annuler la dernière parenthèse de (12), de sorte que, en remplaçant dans (11) $\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\mathfrak{A}}$, $\frac{\partial F}{\partial A}$; $\frac{\mathfrak{A}}{\varkappa}$, $\frac{A}{k}$, ... par leurs valeurs tirées de (13) et de nos anciennes (86) et en introduisant tout de suite le champ magnétique $(\mathfrak{X},\mathfrak{Y},\mathfrak{Z})$ dû à l'aimantation du système entier, le champ électrostatique total (X, Y, Z) et le champ électrique total $(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z})$, résultante du champ électrostatique total et de la force électromotrice d'induction

$$\text{(14)} \qquad \mathbf{X} = \mathrm{X} + \mathcal{E}_x, \; \ldots,$$

l'expression définitive du travail élémentaire des forces intérieures devient :

$$\text{(15) [90]} \qquad \delta\mathcal{T}_i =$$

$$- \delta \mathrm{U}_0 - dt \int \left| u\left(\varphi_x - \mathrm{T}\frac{\partial \varphi_x}{\partial \mathrm{T}}\right) \right| d\varpi - \int \frac{\partial(\mathcal{F} + \mathrm{F})}{\partial \mathrm{T}} \delta \mathrm{T}\, d\varpi \;\ldots\ldots \qquad \mathrm{I}$$

$$- \int \delta\left(\Theta - \mathrm{T}\frac{\partial \Theta}{\partial \mathrm{T}}\right) dq \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \mathrm{II}$$

$$\left.\begin{aligned}
&+ \int_{\mathrm{S}_1} [-(2\pi\varepsilon'\mathcal{S}^2 + |\mathcal{A}\mathcal{X}|)|\alpha\,\delta x| + |(\alpha\mathcal{N}'_1 + \beta\mathcal{T}'_3 + \gamma\mathcal{T}'_2)\delta x|]\, d\mathrm{S} \\
&+ \int_{\varpi_1} \left| \left(-\mathcal{X}\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x} - \mathcal{Y}\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial x} - \mathcal{Z}\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{N}'_1}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{T}'_3}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{T}'_2}{\partial z}\right)\delta x \right| d\varpi \\
&\qquad + |\mathfrak{P}_2\xi_2 + \mathfrak{L}_2\omega_2 + \mathfrak{P}_3\xi_3 + \mathfrak{L}_3\omega_3|
\end{aligned}\right\} \mathrm{III}$$

$$\left.\begin{aligned}
&+ \int_{\mathrm{S}_1} |\{[\mathrm{X} - 2\pi\varepsilon(\sigma + \Sigma)\alpha](\sigma + \Sigma) + \alpha \mathrm{N}'_1 + \beta \mathrm{T}'_3 + \gamma \mathrm{T}'_2\}\,\delta x|\, d\mathrm{S} \\
&+ \int_{\varpi_1} \left| \left[\mathrm{X}(e + \mathrm{E}) + \frac{\partial \mathrm{N}'_1}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{T}'_3}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{T}'_2}{\partial z}\right]\delta x \right. \\
&\qquad \left. + \mathbf{X}\left[\mathrm{A}\left(\frac{\partial\,\delta y}{\partial y} + \frac{\partial\,\delta z}{\partial z}\right) - \mathrm{B}\frac{\partial\,\delta x}{\partial y} - \mathrm{C}\frac{\partial\,\delta x}{\partial z}\right] \right| d\varpi \\
&\qquad + |\mathbf{P}_2\xi_2 + \mathbf{L}_2\omega_2 + \mathbf{P}_3\xi_3 + \mathbf{L}_3\omega_3|
\end{aligned}\right\} \begin{matrix}\mathrm{IV} \\ \text{et} \\ \mathrm{V}\end{matrix}$$

$$+ \frac{\mathfrak{A}^2}{2} \int \left| f\left(\mathrm{F}\frac{\partial\,\delta x}{\partial x} + \mathrm{G}\frac{\partial\,\delta y}{\partial x} + \mathrm{H}\frac{\partial\,\delta z}{\partial x} + d\mathrm{F}\right) \right| d\varpi \;\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \mathrm{VI}$$

$$\left.\begin{aligned}
&+ \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\sqrt{\varepsilon'} \int \left| f\left(\Phi\frac{\partial\,\delta x}{\partial x} + \Psi\frac{\partial\,\delta y}{\partial x} + \Omega\frac{\partial\,\delta z}{\partial x} + \delta\Phi\right) \right| d\varpi \\
&\qquad + \sqrt{\varepsilon'} \int_{\varpi_3 + \varpi_1} |\mathfrak{P}\,\delta\mathcal{A}|\, d\varpi.
\end{aligned}\right\} \mathrm{VII}$$

Rappelons que, sur la surface S_1, les champs magnétique et électrotastique en un point M de cette surface représentent ce que nous avons appelé les *champs intérieurs*, c'est-à-dire les limites de ces champs en un point M' *intérieur* à S_1 quand M' tend vers M.

6. Forces magnétiques. — Le travail élémentaire des forces magnétiques est d'après (15) :

$$(16)\ [91]\quad \delta\mathcal{T}_3 = \int_{S_1} [-(2\pi\varepsilon'\mathcal{I}^2 + |\mathcal{A}\mathcal{X}|)|\alpha\delta x| + |(\alpha\mathcal{N}'_1 + \beta\mathcal{T}'_3 + \gamma\mathcal{T}'_2)\delta x|]\,dS$$
$$+ \int_{\varpi_1} \left|\left(-\mathcal{X}\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial x} - \mathcal{Y}\frac{\partial\mathcal{B}}{\partial x} - \mathcal{Z}\frac{\partial\mathcal{C}}{\partial x} + \frac{\partial\mathcal{N}'_1}{\partial x} + \frac{\partial\mathcal{T}'_3}{\partial y} + \frac{\partial\mathcal{T}'_2}{\partial z}\right)\delta x\right| d\varpi$$
$$+ |\mathcal{P}_2\xi_2 + \mathcal{L}_2\omega_2 + \mathcal{P}_3\xi_3 + \mathcal{L}_3\omega_3|.$$

Rien n'est évidemment changé en ce qui concerne les corps rigides 2 et 3. Les intégrales expriment qu'en chaque point de la surface S_1 s'exerce la pression de composantes

$$(17)\ [95]\quad \left\{\begin{array}{l} \alpha(-2\pi\varepsilon'\mathcal{I}^2 - |\mathcal{A}\mathcal{X}| + \mathcal{N}'_1) + \beta\mathcal{T}'_3 + \gamma\mathcal{T}'_2, \\ \alpha\mathcal{T}'_3 + \beta(-2\pi\varepsilon'\mathcal{I}^2 - |\mathcal{A}\mathcal{X}| + \mathcal{N}'_2) + \gamma\mathcal{T}'_1, \\ \alpha\mathcal{T}'_2 + \beta\mathcal{T}'_1 + \gamma(-2\pi\varepsilon'\mathcal{I}^2 - |\mathcal{A}\mathcal{X}| + \mathcal{N}'_3), \end{array}\right.$$

les cosinus directeurs étant relatifs à la demi-normale intérieure, et qu'en chaque point du volume ϖ_1 s'exerce la force par unité de volume de composantes

$$(18)\ [96]\quad -\mathcal{X}\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial x} - \mathcal{Y}\frac{\partial\mathcal{B}}{\partial x} - \mathcal{Z}\frac{\partial\mathcal{C}}{\partial x} + \frac{\partial\mathcal{N}'_1}{\partial x} + \frac{\partial\mathcal{T}'_3}{\partial y} + \frac{\partial\mathcal{T}'_2}{\partial z}, \ldots.$$

Dans le calcul de la résultante $(\mathcal{P}_1, \mathcal{Q}_1, \mathcal{R}_1)$ et du moment résultant $(\mathcal{L}_1, \mathcal{M}_1, \mathcal{N}_1)$ par rapport à l'origine des actions magnétiques élémentaires (17) et (18), les six fonctions $\mathcal{N}'_i$, $\mathcal{T}'_i$ disparaissent et il vient :

$$[97]\quad \mathcal{P}_1 = \int_{\varpi_1}\left(\mathcal{A}\frac{\partial\mathcal{X}}{\partial x} + \mathcal{B}\frac{\partial\mathcal{Y}}{\partial x} + \mathcal{C}\frac{\partial\mathcal{Z}}{\partial x}\right)d\varpi - 2\pi\varepsilon'\int_{S_1}\mathcal{I}^2\alpha\,dS, \ \ldots;$$

$$[98]\quad \mathcal{L}_1 = \int_{\varpi_1}\left[y\left(\mathcal{A}\frac{\partial\mathcal{X}}{\partial z} + \mathcal{B}\frac{\partial\mathcal{Y}}{\partial z} + \mathcal{C}\frac{\partial\mathcal{Z}}{\partial z}\right) - z\left(\mathcal{A}\frac{\partial\mathcal{X}}{\partial y} + \mathcal{B}\frac{\partial\mathcal{Y}}{\partial y} + \mathcal{C}\frac{\partial\mathcal{Z}}{\partial y}\right)\right]d\varpi$$
$$- 2\pi\varepsilon'\int_{S_1}\mathcal{I}^2(y\gamma - z\beta)\,dS, \ \ldots.$$

Ce sont nos anciennes formules (97) et (98), d'où les termes électromagnétiques ont disparu.

7. Système en repos simplement aimanté; pressions et déformations. — Les résultats précédents restent encore conformes à ceux qu'on déduirait du même système supposé en repos, en équilibre magnétique et seulement aimanté. Nous allons toutefois appliquer à un tel système la condition générale de l'équilibre

$$(19) \qquad \delta\mathcal{T}_e - \delta_T\left(\mathcal{F}_0 + \mathfrak{W} + \int \mathcal{F} d\varpi\right) = 0,$$

parce que nous allons ainsi retrouver de la façon la plus simple les équations des pressions et des déformations d'un solide élastique parfaitement doux aimanté.

Pour conserver au problème de l'équilibre toute sa généralité, le premier terme de (19) suppose qu'aux forces intérieures, dues ici au Magnétisme, s'ajoutent des forces extérieures quelconques. Soient donc (Ξ, H, Z) la force extérieure par unité de volume et (P_x, P_y, P_z) la pression extérieure en chaque point du volume ϖ_1 et de la surface S_1; $\Pi_2, \ldots, \Lambda_2, \ldots$ et $\Pi_3, \ldots, \Lambda_3, \ldots$ les éléments de la réduction par rapport à l'origine des forces extérieures appliquées aux solides rigides 2 et 3; le travail virtuel des forces extérieures est :

$$(20) \qquad \delta\mathcal{T}_e = \int_{\varpi_1} |\Xi\delta x| d\varpi + \int_{S_1} |P_x \delta x| dS + |\Pi_2\xi_2 + \Lambda_2\omega_2 + \Pi_3\xi_3 + \Lambda_3\omega_3|.$$

D'autre part, le potentiel thermodynamique interne $\mathcal{F}_0$ du système supposé désaimanté est, à une fonction près de la température qui n'intervient pas ici, de la forme

$$\mathcal{F}_0 = \int_{\varpi_1} \varphi(\partial_1, \partial_2, \partial_3, g_1, g_2, g_3; \theta) d\varpi,$$

φ étant une forme quadratique des sept variables indiquées, dont θ est la température supposée très petite comptée à partir de l'état naturel primitif. Si donc on pose

$$(21) \quad N_1 = \frac{\partial\varphi}{\partial\partial_1}, \quad N_2 = \frac{\partial\varphi}{\partial\partial_2}, \quad N_3 = \frac{\partial\varphi}{\partial\partial_3}; \qquad T_1 = \frac{\partial\varphi}{\partial g_1}, \quad T_2 = \frac{\partial\varphi}{\partial g_2}, \quad T_3 = \frac{\partial\varphi}{\partial g_3},$$

la variation isothermique de $\mathcal{F}_0$ est :

$$\delta_T \mathcal{F}_0 = \int_{\varpi_1} (|N_1\delta\partial_1 + T_1\delta g_1| d\varpi + \varphi\,\delta d\varpi).$$

Le dernier terme de la parenthèse étant ici entièrement négligeable, il vient d'après (4) et par intégrations par parties

$$(22) \quad \delta_T\mathcal{F}_0 = -\int_{\varpi_1} \left|\left(\frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial T_3}{\partial y} + \frac{\partial T_2}{\partial z}\right)\delta x\right| d\varpi - \int_{S_1} |(\alpha N_1 + \beta T_3 + \gamma T_2)\delta x| dS.$$

On a enfin d'après (8) :

$$(23)\qquad \delta_T\left(\mathfrak{W}+\int\mathfrak{F}\,d\varpi\right)=$$

$$\int_{\varpi_1}\left|\left(\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\mathfrak{A}}-\mathfrak{X}\right)\delta\mathfrak{A}+\left(\mathfrak{X}\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial x}+\mathfrak{Y}\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial x}+\mathfrak{Z}\frac{\partial\mathfrak{C}}{\partial x}-\frac{\partial\mathfrak{N}'_1}{\partial x}-\frac{\partial\mathfrak{T}'_3}{\partial y}-\frac{\partial\mathfrak{T}'_2}{\partial z}\right)\delta x\right|d\varpi$$

$$+\int_{S_1}[(2\pi\varepsilon'\mathfrak{I}^2+|\mathfrak{A}\mathfrak{X}|)|\alpha\delta x|-|(\alpha\mathfrak{N}'_1+\beta\mathfrak{T}'_3+\gamma\mathfrak{T}'_2)\delta x|]dS$$

$$+\int_{\varpi_3}\left|\left(\frac{\mathfrak{A}}{\chi}-\mathfrak{X}\right)\delta\mathfrak{A}\right|d\varpi-|\mathfrak{P}_2\xi_2+\mathfrak{L}_2\omega_2+\mathfrak{P}_3\xi_3+\mathfrak{L}_3\omega_3|.$$

L'égalité (19) devient ainsi, d'après (20), (22) et (23),

$$(24)\qquad \int_{\varpi_1}\left|\left(\mathfrak{X}-\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\mathfrak{A}}\right)\delta\mathfrak{A}\right.$$

$$\left.+\left[\Xi-\mathfrak{X}\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial x}-\mathfrak{Y}\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial x}-\mathfrak{Z}\frac{\partial\mathfrak{C}}{\partial x}+\frac{\partial(N_1+\mathfrak{N}'_1)}{\partial x}+\frac{\partial(T_3+\mathfrak{T}'_3)}{\partial y}+\frac{\partial(T_2+\mathfrak{T}'_2)}{\partial z}\right]\delta x\right|d\varpi$$

$$+\int_{S_1}|[P_x+\alpha(-2\pi\varepsilon'\mathfrak{I}^2-|\mathfrak{A}\mathfrak{X}|+N_1+\mathfrak{N}'_1)+\beta(T_3+\mathfrak{T}'_3)+\gamma(T_2+\mathfrak{T}'_2)]\delta x|dS$$

$$\int_{\varpi_3}\left|\left(\mathfrak{X}-\frac{\mathfrak{A}}{\chi}\right)\delta\mathfrak{A}\right|d\varpi+|(\Pi_2+\mathfrak{P}_2)\xi_2+(\Lambda_2+\mathfrak{L}_2)\omega_2$$

$$+(\Pi_3+\mathfrak{P}_3)\xi_3+(\Lambda_3+\mathfrak{L}_3)\omega_3|=0.$$

Cette égalité devant être vérifiée pour toute modification virtuelle, on en conclut qu'on doit avoir :

1. En chaque point du volume ϖ_1,

$$(25)\qquad \mathfrak{X}-\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\mathfrak{A}}=0,\ \ldots\ldots:$$

$$(26)\qquad \begin{cases} \Xi-\mathfrak{X}\dfrac{\partial\mathfrak{A}}{\partial x}-\mathfrak{Y}\dfrac{\partial\mathfrak{B}}{\partial x}-\mathfrak{Z}\dfrac{\partial\mathfrak{C}}{\partial x}+\dfrac{\partial(N_1+\mathfrak{N}'_1)}{\partial x}+\dfrac{\partial(T_3+\mathfrak{T}'_3)}{\partial y}+\dfrac{\partial(T_2+\mathfrak{T}'_2)}{\partial z}=0,\\ H-\mathfrak{X}\dfrac{\partial\mathfrak{A}}{\partial y}-\mathfrak{Y}\dfrac{\partial\mathfrak{B}}{\partial y}-\mathfrak{Z}\dfrac{\partial\mathfrak{C}}{\partial y}+\dfrac{\partial(T_3+\mathfrak{T}'_3)}{\partial x}+\dfrac{\partial(N_2+\mathfrak{N}'_2)}{\partial y}+\dfrac{\partial(T_1+\mathfrak{T}'_1)}{\partial z}=0,\\ Z-\mathfrak{X}\dfrac{\partial\mathfrak{A}}{\partial z}-\mathfrak{Y}\dfrac{\partial\mathfrak{B}}{\partial z}-\mathfrak{Z}\dfrac{\partial\mathfrak{C}}{\partial z}+\dfrac{\partial(T_2+\mathfrak{T}'_2)}{\partial x}+\dfrac{\partial(T_1+\mathfrak{T}'_1)}{\partial y}+\dfrac{\partial(N_3+\mathfrak{N}'_3)}{\partial z}=0; \end{cases}$$

2. En chaque point de la surface S_1,

$$(27)\quad \left\{\begin{array}{l} P_x+\alpha(-2\pi\varepsilon'\mathcal{I}^2-|\mathcal{A}\mathcal{X}|+N_1+\mathcal{N}'_1)+\beta(T_3+\mathcal{T}'_3)+\gamma(T_2+\mathcal{T}'_2)=0,\\ P_y+\alpha(T_3+\mathcal{T}'_3)+\beta(-2\pi\varepsilon'\mathcal{I}^2-|\mathcal{A}\mathcal{X}|+N_2+\mathcal{N}'_2)+\gamma(T_1+\mathcal{T}'_1)=0,\\ P_z+\alpha(T_2+\mathcal{T}'_2)+\beta(T_1+\mathcal{T}'_1)+\gamma(-2\pi\varepsilon'\mathcal{I}^2-|\mathcal{A}\mathcal{X}|+N_3+\mathcal{N}'_3)=0; \end{array}\right.$$

3. En chaque point du volume ϖ_3,

$$(28)\quad \mathcal{X}-\frac{\mathcal{A}}{\varkappa}=0,\ \dots;$$

4. Pour chacun des corps rigides 2 et 3,

$$(29)\quad \left\{\begin{array}{ll} \Pi_2+\mathfrak{X}_2=0,\ \dots, & \Lambda_2+\mathfrak{L}_2=0,\ \dots;\\ \Pi_3+\mathfrak{X}_3=0,\ \dots, & \Lambda_3+\mathfrak{L}_3=0,\ \dots. \end{array}\right.$$

Les égalités (25) et (28) sont un cas particulier des égalités (13) et de nos anciennes (86); les égalités (26) et (27) sont les équations indéfinies et aux limites de l'équilibre mécanique du corps élastique 1; les dernières (29) sont les conditions de l'équilibre mécanique des corps rigides 2 et 3. Remarquons que les équations (25), (26), (27) relatives au corps élastique 1 sont indépendantes de toute hypothèse sur sa contexture.

On voit que les équations (26) et (27) sont les équations classiques de l'équilibre élastique, dans lesquelles on a simplement ajouté aux actions extérieures étrangères au Magnétisme la force par unité de volume (18) et la pression (17). Si donc on veut déterminer les déformations élastiques dues aux seules actions magnétiques, il faut y annuler Ξ, H, ..., P_z. Il résulte d'autre part de la théorie générale des pressions que la pression en un point quelconque du volume ϖ_1 et relative à une direction (α, β, γ) est le vecteur (P_x, P_y, P_z) défini par les égalités (27).

Les équations (25) de l'équilibre magnétique dépendant, d'après (2), des déformations, la distribution magnétique du système ne peut, en toute rigueur, être déterminée indépendamment de ces déformations. Toutefois, en ce qui concerne les déformations infiniment petites auxquelles nous nous limitons, l'expérience conduit à admettre que la distribution magnétique n'est qu'infiniment peu modifiée par de telles déformations; c'est-à-dire, d'après (2), que les fonctions $\mathfrak{D}_i$, $\mathcal{G}_i$ ne sont pas d'un ordre de grandeur supérieur à $\mathcal{G}$, soit encore, d'après (3), que les fonctions g et h ne sont pas d'un ordre de grandeur supérieur à f. Si donc, dans (26) et (27), on substitue aux actions magnétiques effectives celles qui résultent de la distribution magnétique déterminée dans l'hypothèse de corps tous rigides, on ne fait qu'altérer infiniment peu ces actions; de sorte que l'erreur commise sur les déformations ainsi calculées ne porte que sur leurs termes du deuxième ordre, que nous avons précisément convenu de négliger. Il en résulte que le problème général de l'équilibre peut, à un degré d'approximation suffisant, se traiter en deux temps : détermination de la distribution magnétique sur le système supposé entièrement rigide, puis des déformations qu'engendre une telle distribution. Dans cette deuxième partie du problème, les actions magnétiques deviennent ainsi des données au même titre que les actions extérieures et l'on sait que le problème de l'équilibre élastique ainsi posé n'admet qu'une seule solution.

8. Cas de l'isotropie. — Si le corps 1 est isotrope, on sait que son potentiel thermodynamique interne par unité de volume est, à une fonction près de la température,

$$\varphi = \frac{\lambda}{2}\Theta^2 + \mu\left|\partial_1^2 + \frac{g_1^2}{2}\right| - \nu\Theta\theta,$$

λ, μ étant les deux coefficients de Lamé, ν le troisième coefficient qu'introduisent les variations thermiques ; d'où, d'après (21),

$$N_1 = \lambda\Theta + 2\mu\partial_1 - \nu\theta, \ \ldots; \qquad T_1 = \mu g_1, \ \ldots,$$

puis, d'après (1) et dans l'hypothèse de l'homogénéité,

$$\frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial T_3}{\partial y} + \frac{\partial T_2}{\partial z} = (\lambda + \mu)\frac{\partial \Theta}{\partial x} + \mu\Delta U - \nu\frac{\partial \theta}{\partial x}, \ \ldots.$$

Les équations (26) et (27) s'écrivent ainsi d'après (6)

$$\begin{aligned}(30)\qquad &\Xi - \mathcal{X}\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x} - \mathcal{Y}\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial x} - \mathcal{Z}\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial x} + (\lambda+\mu)\frac{\partial \Theta}{\partial x} + \mu\Delta U - \nu\frac{\partial \theta}{\partial x}\\ &+ \frac{\partial}{\partial x}(g\mathcal{J}^2 + h\mathcal{A}^2 + \mathcal{F}) + \frac{\partial}{\partial y}(h\mathcal{A}\mathcal{B}) + \frac{\partial}{\partial z}(h\mathcal{C}\mathcal{A}) = 0, \ \ldots;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(31)\qquad &P_x + \alpha(-2\pi\varepsilon'\mathcal{G}^2 - |\mathcal{A}\mathcal{X}| + \lambda\Theta + 2\mu\partial_1 - \nu\theta + g\mathcal{J}^2 + h\mathcal{A}^2 + \mathcal{F})\\ &+ \beta(\mu g_3 + h\mathcal{A}\mathcal{B}) + \gamma(\mu g_2 + h\mathcal{C}\mathcal{A}) = 0, \ \ldots.\end{aligned}$$

Les équations indéfinies (30) coïncident, avec en plus les termes en θ et aux différences de notations près, avec celles qu'a données Duhem (¹).

Ainsi que l'a fait Duhem, remplaçons dans (30) et (31) $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}$ par leurs valeurs (25) et faisons avec lui l'*approximation de Poisson*, qui consiste à traiter les

(¹) P. Duhem, *loc. cit.*, p. 442, équ. (22).

fonctions f, g, h comme des constantes, ce qui est d'ailleurs inadmissible en ferromagnétisme; les égalités (25) s'écrivent ainsi d'après (3) :

$$\mathcal{X} = 2(f+g\Theta)\mathcal{A} + 2h\left(\partial_1\mathcal{A} + \frac{g_3}{2}\mathcal{B} + \frac{g_2}{2}\mathcal{C}\right),$$

$$\mathcal{Y} = 2(f+g\Theta)\mathcal{B} + 2h\left(\frac{g_3}{2}\mathcal{A} + \partial_2\mathcal{B} + \frac{g_1}{2}\mathcal{C}\right),$$

$$\mathcal{Z} = 2(f+g\Theta)\mathcal{C} + 2h\left(\frac{g_2}{2}\mathcal{A} + \frac{g_1}{2}\mathcal{B} + \partial_3\mathcal{C}\right),$$

d'où :

$$\mathcal{X}\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial x} + \mathcal{Y}\frac{\partial\mathcal{B}}{\partial x} + \mathcal{Z}\frac{\partial\mathcal{C}}{\partial x} = (f+g\Theta)\frac{\partial\mathfrak{J}^2}{\partial x} + h\left|\partial_1\frac{\partial\mathcal{A}^2}{\partial x} + g_1\frac{\partial\mathcal{B}\mathcal{C}}{\partial x}\right|. \tag{32}$$

On a d'autre part d'après (3) :

$$\frac{\partial}{\partial x}(g\mathfrak{J}^2 + h\mathcal{A}^2 + \mathcal{F}) + \frac{\partial}{\partial y}(h\mathcal{A}\mathcal{B}) + \frac{\partial}{\partial z}(h\mathcal{C}\mathcal{A}) \tag{33}$$
$$= (f+g\Theta)\frac{\partial\mathfrak{J}^2}{\partial x} + g\left(\frac{\partial\mathfrak{J}^2}{\partial x} + \mathfrak{J}^2\frac{\partial\Theta}{\partial x}\right) + h\left(\left|\frac{\partial\mathcal{A}^2\partial_1}{\partial x} + \frac{\partial\mathcal{B}\mathcal{C}g_1}{\partial x}\right| + \frac{\partial\mathcal{A}^2}{\partial x} + \frac{\partial\mathcal{A}\mathcal{B}}{\partial y} + \frac{\partial\mathcal{C}\mathcal{A}}{\partial z}\right)$$

et comme, toujours dans l'approximation de Poisson, $\mathcal{F}$ est une forme quadratique en $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ on a, d'après (25) :

$$|\mathcal{A}\mathcal{X}| = \left|\mathcal{A}\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\mathcal{A}}\right| = 2\mathcal{F}. \tag{34}$$

Les équations indéfinies (30) et aux limites (31) s'écrivent donc encore, d'après (32), (33), (34) et dans l'hypothèse de l'approximation de Poisson

$$\Xi + (\lambda+\mu)\frac{\partial\Theta}{\partial x} + \mu\Delta U - \nu\frac{\partial\theta}{\partial x} + g\left(\frac{\partial\mathfrak{J}^2}{\partial x} + \mathfrak{J}^2\frac{\partial\Theta}{\partial x}\right) \tag{35}$$
$$+ h\left(\left|\mathcal{A}^2\frac{\partial\partial_1}{\partial x} + \mathcal{B}\mathcal{C}\frac{\partial g_1}{\partial x}\right| + \frac{\partial\mathcal{A}^2}{\partial x} + \frac{\partial\mathcal{A}\mathcal{B}}{\partial y} + \frac{\partial\mathcal{C}\mathcal{A}}{\partial z}\right) = 0, \quad \ldots;$$

$$P_x + \alpha(-2\pi\varepsilon'\mathcal{J}^2 + \lambda\Theta + 2\mu\partial_1 - \nu\theta + g\mathfrak{J}^2 + h\mathcal{A}^2 - \mathcal{F}) \tag{36}$$
$$+ \beta(\mu g_3 + h\mathcal{A}\mathcal{B}) + \gamma(\mu g_2 + h\mathcal{C}\mathcal{A}) = 0, \quad \ldots.$$

Les équations indéfinies (35) sont les équations (23) de Duhem (p. 443), dans lesquelles le facteur 2 de la quatrième ligne doit être effacé, tout comme celui qui figure devant les glissements des formules (7), p. 338.

De même, les conditions aux limites (36) sont celles (24) de Duhem (p. 444), dans lesquelles ψ, qui est notre fonction $\mathcal{F}$, doit être remplacé par $-\psi$. Les équations (35), (36) sont toutefois complétées par les termes d'origine thermique et par la pression de M. Liénard. Rappelons enfin que, dans ces équations, les termes magnétiques dépendant des déformations sont négligeables.

Nous allons appliquer les équations (30), (31) relatives à un corps primitivement isotrope et qui ne supposent pas l'approximation de Poisson, au calcul des déformations d'origine purement magnétique $[(\Xi, \mathrm{H}, \ldots, \mathrm{P}_2) = 0]$ dans quelques cas particuliers et avec l'approximation bien suffisante, qui consiste à traiter le problème en deux temps.

9. Applications : A. *Cylindre indéfini.* — Considérons un cylindre homogène indéfini, disposé parallèlement aux lignes de forces d'un champ magnétique uniforme donné $\mathcal{H}$. Les équations de l'équilibre magnétique (25) débarrassées des déformations, c'est-à-dire réduites aux équations (28), sont vérifiées en supposant l'aimantation induite constante et parallèle au champ. Comme cette aimantation ne donne lieu à aucun magnétisme libre, le champ résultant reste $\mathcal{H}$ dans tout l'espace et l'on a :

$$\mathcal{J} = \varkappa\mathcal{H}, \quad \mathcal{X} = \mathcal{H}, \quad \mathcal{A} = \mathcal{J}, \quad (\mathcal{Y}, \mathcal{Z}, \mathcal{B}, \mathcal{C}) = 0, \tag{37}$$

l'axe Ox étant pris parallèlement à $\mathcal{H}$, avec

$$\frac{\mathcal{J}}{\varkappa} = \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\mathcal{J}}. \tag{38}$$

Dès lors, les équations indéfinies (30) sont vérifiées en supposant la température et les déformations constantes et les conditions aux limites (31) se réduisent d'après (37), pour $\theta = 0$ et en remarquant qu'ici $\mathcal{G} = 0$, à

$$\left\{\begin{aligned} &\beta g_3 + \gamma g_2 = 0,\\ &\beta(-\mathcal{J}\mathcal{H} + \lambda\Theta + 2\mu\partial_2 + g\mathcal{J}^2 + \mathcal{F}) + \gamma\mu g_1 = 0,\\ &\beta\mu g_1 + \gamma(-\mathcal{J}\mathcal{H} + \lambda\Theta + 2\mu\partial_3 + g\mathcal{J}^2 + \mathcal{F}) = 0. \end{aligned}\right. \tag{39}$$

On en déduit $(g_1, g_2, g_3) = 0$ et $\partial_2 = \partial_3$; d'autre part $\partial_1 = 0$, car toutes les fonctions doivent être ici indépendantes de x. Les déformations se réduisent donc à une dilatation transversale ∂, valeur commune de ∂_2 et ∂_3, donnée par l'égalité

$$-\mathcal{J}\mathcal{H} + 2(\lambda + \mu)\partial + g\mathcal{J}^2 + \mathcal{F} = 0, \tag{40}$$

où il suffit, comme nous l'avons dit, de remplacer la fonction $\mathcal{F}$ par son terme principal $f\mathfrak{J}^2$, c'est-à-dire par l'expression qu'elle aurait dans l'hypothèse de la rigidité (¹).

Dans cette hypothèse, $\mathcal{F}$ se réduit donc à une fonction de $\mathfrak{J}$, T et l'on a d'après (38)

$$\mathcal{F} = \int_0^{\mathfrak{J}} \frac{\mathfrak{J}}{\varkappa} d\mathfrak{J},$$

sans ajouter au second membre une fonction de T, puisque $\mathcal{F}$ doit s'annuler avec $\mathfrak{J}$; soit encore d'après (37)

$$\mathcal{F} = \int_0^{\mathfrak{J}} \mathcal{H} d\mathfrak{J}.$$

Remplaçons alors $\mathfrak{J}$ par sa valeur en fonction de $\mathcal{H}$ et de l'induction

$$\mathcal{B} = \mathcal{H} + 4\pi\varepsilon'\mathfrak{J}; \tag{41}$$

Comme $\mathfrak{J}$ et $\mathcal{B}$ s'annulent avec $\mathcal{H}$ dans notre hypothèse d'un corps parfaitement doux, il vient :

$$4\pi\varepsilon'\mathcal{F} = \int \mathcal{H}(d\mathcal{B} - d\mathcal{H}) = \int_0^{\mathcal{B}} \mathcal{H} d\mathcal{B} - \frac{\mathcal{H}^2}{2} = \mathcal{B}\mathcal{H} - \int_0^{\mathcal{H}} \mathcal{B} d\mathcal{H} - \frac{\mathcal{H}^2}{2}, \tag{42}$$

de sorte que l'égalité (40) donne :

$$8\pi\varepsilon'(\lambda + \mu)\partial = \int_0^{\mathcal{H}} \mathcal{B} d\mathcal{H} - \frac{\mathcal{H}^2}{2} - g\,\frac{(\mathcal{B} - \mathcal{H})^2}{4\pi\varepsilon'}.$$

Dans le cas de certain fer de Suède non recuit, on aurait par exemple (²) :

$$\mathcal{B} = 25{,}2.10^3 \text{ gauss, pour } \mathcal{H} = 4.10^3 \text{ gauss}$$

et la courbe de variation de $\mathcal{B}$ en fonction de $\mathcal{H}$ donne :

$$\int_0^{4000} \mathcal{B} d\mathcal{H} = 0{,}917.10^8 \text{ gauss}^2,$$

(¹) D'après (3) et (37) et sans cette approximation, on devrait prendre

$$\mathcal{F} = (f + 2g\partial)\mathfrak{J}^2,$$

mais le terme $2g\mathfrak{J}^2\partial$ ainsi introduit est effectivement négligeable vis-à-vis de $2(\lambda+\mu)\partial$. En effet, par suite de la très grande valeur de $\lambda+\mu$, ce dernier terme acquiert une valeur finie, dès que ∂ devient sensible et il n'en est certainement pas de même du premier, sans quoi la plus petite déformation sensible exercée sur un solide isotrope modifierait son aimantation induite d'une manière finie, ce qui n'est pas.

(²) *Recueil de constantes physiques*, 1913, p. 658.

de sorte qu'en prenant $\lambda = \mu = 8.10^{11}$ baryes, il vient :

$$\delta = \left(2,18 - 0,891\,\frac{g}{\varepsilon'}\right) 10^{-6}. \tag{43}$$

La dilatation transversale du cylindre serait donc de l'ordre de 10^{-6}, soit le centième de celle qui correspond à la charge de sécurité du même métal, si toutefois le second terme de la parenthèse n'est pas d'un ordre de grandeur supérieur à l'unité, ce que nous ignorons faute de données expérimentales sur la fonction g. Nous avons remarqué que $g\mathfrak{J}^2$ est certainement négligeable vis-à-vis de $\lambda + \mu$; or, dans le cas particulier envisagé et d'après (41), $\varepsilon'\mathfrak{J} = 1,68.10^3$ gauss, d'où :

$$\frac{g\mathfrak{J}^2}{\lambda + \mu} = 1,76\,\frac{g}{\varepsilon'}\,10^{-6}. \tag{44}$$

Le nombre $\frac{g}{\varepsilon'}$ pourrait ainsi être nettement supérieur à l'unité en valeur absolue, sans que le rapport (44) cessât d'être très petit, ainsi que nous l'apprend l'expérience.

Calculons enfin le nombre $\frac{f}{\varepsilon'}$, en remplaçant dans (42) $\mathcal{F}$ par son terme principal $f\mathfrak{J}^2$. En tenant compte de (41) et en posant

$$\int_0^{\mathcal{B}} \mathcal{H}\,d\mathcal{B} = \alpha\mathcal{B}\mathcal{H},$$

le nombre α étant à calculer d'après la courbe expérimentale d'aimantation dans chaque cas particulier, il vient :

$$\frac{f}{\varepsilon'}\,\frac{(\mathcal{B} - \mathcal{H})^2}{4\pi} = \mathcal{H}\left(\alpha\mathcal{B} - \frac{\mathcal{H}}{2}\right),$$

de sorte qu'en introduisant la perméabilité $m = \frac{\mathcal{B}}{\mathcal{H}}$, il vient :

$$\frac{f}{\varepsilon'} = 4\pi\,\frac{\alpha m - \frac{1}{2}}{(m - 1)^2}. \tag{45}$$

Pour le même fer et les mêmes valeurs de $\mathcal{B}$ et de $\mathcal{H}$ que précédemment, la courbe d'aimantation donne $\alpha = 0,0901$ et comme $m = 6,3$, on a :

$$\frac{f}{\varepsilon'} = 0,030, \text{ pour } \mathcal{H} = 4.10^3 \text{ gauss}.$$

L'approximation de Poisson, consistant à traiter f, g, h comme des constantes et par suite m et $\varkappa$, revient à prendre $\alpha = \frac{1}{2}$; d'où d'après (45)

$$\frac{f}{\varepsilon'} = \frac{2\pi}{m-1} = \frac{1}{2\varepsilon'\varkappa} \quad \text{(approx. de Poisson)}, \tag{46}$$

ce qui donnerait ici $\frac{f}{\varepsilon'} = 1{,}18$, soit une valeur environ quarante fois trop forte. Par suite de la petitesse des déformations ∂_i, g_i, les fonctions g, h peuvent très bien être au moins de l'ordre de f, sans que pour cela $f\mathfrak{J}^2$ cesse d'être le terme principal de $\mathfrak{F}$. Duhem (*loc. cit.*, p. 441 et 445) a considéré le cas où g et h seraient négligeables vis-à-vis de f, dans le seul but apparent de simplifier ses formules.

B. *Portion de cylindre indéfini.* — Si l'on imagine deux coupures infiniment minces pratiquées suivant deux sections droites quelconques du cylindre indéfini précédemment étudié, ces coupures ne modifient pas l'aimantation induite, sauf que les faces de chaque coupure se couvrent de couches magnétiques uniformes de densités $\pm\mathfrak{J}$. La portion de cylindre comprise entre les coupures devient ainsi un aimant uniforme de longueur finie. Sur sa surface latérale, nous avons encore les conditions (39); sur ses bases où

$$\alpha = \pm 1, \quad (\beta, \gamma) = 0, \quad \mathfrak{I} = \mp \mathfrak{J},$$

les conditions aux limites (31) donnent :

$$-2\pi\varepsilon'\mathfrak{J}^2 - \mathfrak{J}\mathcal{H} + \lambda\Theta + 2\mu\partial_1 + (g+h)\mathfrak{J}^2 + \mathfrak{F} = 0,$$
$$(g_3, g_2) = 0.$$

En définitive, les trois glissements restent nuls et les deux dilatations ∂_1 et ∂, valeur commune de ∂_2 et ∂_3, sont données par les deux équations

$$\left\{\begin{aligned} \lambda\Theta + 2\mu\partial_1 &= 2\pi\varepsilon'\mathfrak{J}^2 + \mathfrak{J}\mathcal{H} - (g+h)\mathfrak{J}^2 - \mathfrak{F}, \\ \lambda\Theta + 2\mu\partial &= \mathfrak{J}\mathcal{H} - g\mathfrak{J}^2 - \mathfrak{F}, \end{aligned}\right. \tag{47}$$

avec $\Theta = \partial_1 + 2\partial$. D'où :

$$(3\lambda+2\mu)\partial_1 = \left(\frac{\lambda}{\mu}+1\right)2\pi\varepsilon'\mathfrak{J}^2 + \mathfrak{J}\mathcal{H} - \left[g + \left(\frac{\lambda}{\mu}+1\right)h\right]\mathfrak{J}^2 - \mathfrak{F},$$

$$(3\lambda+2\mu)\partial = -\frac{\lambda}{\mu}\pi\varepsilon'\mathfrak{J}^2 + \mathfrak{J}\mathcal{H} - \left(g - \frac{\lambda}{2\mu}h\right)\mathfrak{J}^2 - \mathfrak{F},$$

$$(3\lambda+2\mu)\Theta = 2\pi\varepsilon'\mathfrak{J}^2 + 3\mathfrak{J}\mathcal{H} - (3g+h)\mathfrak{J}^2 - 3\mathfrak{F},$$

soit encore, en remplaçant $\mathfrak{J}$ et $\mathfrak{F}$ par leurs valeurs (41) et (42) et en posant :

$$\Lambda = \int_0^{\mathcal{H}} \mathcal{B}\, d\mathcal{H} - \frac{\mathcal{H}^2}{2},$$

$$(48)\quad \begin{cases} 4\pi\varepsilon'(3\lambda+2\mu)\delta_1 = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}+1\right)(\mathcal{B}-\mathcal{H})^2 + A - \left[g+\left(\dfrac{\lambda}{\mu}+1\right)h\right]\dfrac{(\mathcal{B}-\mathcal{H})^2}{4\pi\varepsilon'}, \\ 4\pi\varepsilon'(3\lambda+2\mu)\delta = -\dfrac{\lambda}{4\mu}(\mathcal{B}-\mathcal{H})^2 + A - \left(g-\dfrac{\lambda}{2\mu}h\right)\dfrac{(\mathcal{B}-\mathcal{H})^2}{4\pi\varepsilon'}, \\ 4\pi\varepsilon'(3\lambda+2\mu)\Theta = \dfrac{1}{2}(\mathcal{B}-\mathcal{H})^2 + 3A - (3g+h)\dfrac{(\mathcal{B}-\mathcal{H})^2}{4\pi\varepsilon'}. \end{cases}$$

Avec les mêmes données numériques que précédemment, on trouve ainsi :

$$\delta_1 = \left(1,06 - 0,071\,\frac{g+2h}{\varepsilon'}\right)10^{-5}, \qquad \delta = -\left(0,572 + 0,355\,\frac{2g-h}{\varepsilon'}\right)10^{-6}.$$

Abstraction faite du terme en g, h, on voit d'après (43) que la contraction transversale est environ le quart de la dilatation transversale du cylindre indéfini soumis au même champ et que la dilatation longitudinale est environ cinq fois cette dernière.

Pour un champ de quelques gauss seulement, l'induction est à peu près réduite de moitié et les dilatations deviennent environ quatre fois plus petites. Pour le même échantillon de fer, on a par exemple :

$$\mathcal{B} = 10,5.10^3 \text{ gauss, pour } \mathcal{H} = 2,5 \text{ gauss,}$$

d'où d'après (48)

$$\delta_1 = \left(2,18 - 0,174\,\frac{g+2h}{\varepsilon'}\right)10^{-6}, \qquad \delta = -\left(0,545 + 0,087\,\frac{2g-h}{\varepsilon'}\right)10^{-6}.$$

Pour ces mêmes valeurs de $\mathcal{B}$ et de $\mathcal{H}$, on trouve $\alpha = 0,458$ et, comme ici $m = 4200$, il vient d'après (45)

$$\frac{f}{\varepsilon'} = 1,38.10^{-3}, \text{ pour } \mathcal{H} = 2,5 \text{ gauss.}$$

Ce nombre est donc environ vingt-trois fois plus petit que pour le champ de 4.10^3 gauss; l'approximation de Poisson donnerait ici, d'après (46), $\dfrac{f}{\varepsilon'} = 1,49.10^{-3}$.

Remarquons encore que si l'on fait l'approximation de Poisson dans le calcul de A, ce qui revient à remplacer l'intégrale qui y figure par $\dfrac{\mathcal{B}\mathcal{H}}{2}$, la première (48) coïncide avec l'expression antérieurement donnée par M. Liénard[1].

---

[1] A. Liénard, *loc. cit.*, premier mémoire, expression de δ'_1 du haut de la page 311.

C. *Lame à faces parallèles indéfinie.* — Considérons une lame à faces parallèles indéfinie disposée normalement aux lignes de forces du champ magnétique uniforme donné $\mathcal{H}$. L'axe Ox étant pris parallèlement à $\mathcal{H}$, on a encore $\mathcal{A} = \mathcal{I}$, $(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = 0$ et comme $\mathcal{S} = \mp \mathcal{I}$ sur chaque face, le champ résultant dans la lame est :

$$\mathcal{X} = \mathcal{H} - 4\pi\varepsilon'\mathcal{I}, \qquad (\mathcal{Y}, \mathcal{Z}) = 0,$$

de sorte que l'induction coïncide avec $\mathcal{H}$.

Les équations indéfinies (30) étant identiquement vérifiées en supposant la température et les déformations constantes, les conditions aux limites (31) se réduisent, pour $\theta = 0$, à

$$(49) \qquad \left\{ \begin{aligned} -2\pi\varepsilon'\mathcal{I}^2 - \mathcal{I}\mathcal{X} + \lambda\Theta + 2\mu\partial_1 + (g+h)\mathcal{I}^2 + \mathcal{F} &= 0, \\ (g_3, g_2) &= 0. \end{aligned} \right.$$

Comme toutes nos fonctions doivent être ici indépendantes de y, z, on a en outre $(\partial_2, \partial_3, g_1) = 0$, de sorte que la déformation se réduit à une dilatation longitudinale ∂_1 donnée par l'égalité

$$-2\pi\varepsilon'\mathcal{I}^2 - \mathcal{I}\mathcal{X} + (\lambda + 2\mu)\partial_1 + (g+h)\mathcal{I}^2 + \mathcal{F} = 0,$$

où il reste à exprimer $\mathcal{I}$ en fonction de $\mathcal{H}$ et de $\mathcal{X}$, qui jouent ici les rôles de $\mathcal{B}$ et de $\mathcal{H}$ des deux problèmes précédents.

Comme on a maintenant

$$(50) \qquad \mathcal{I} = \varkappa\mathcal{X}, \qquad \mathcal{H} = \mathcal{X} + 4\pi\varepsilon'\mathcal{I},$$

il vient d'après (38) et (42)

$$(51) \qquad 4\pi\varepsilon'\mathcal{F} = \mathcal{H}\mathcal{X} - \int_0^{\mathcal{X}} \mathcal{H}\,d\mathcal{X} - \frac{\mathcal{X}^2}{2},$$

d'où :

$$(52) \qquad 4\pi\varepsilon'(\lambda + 2\mu)\partial_1 = \mathcal{H}\left(\frac{\mathcal{H}}{2} - \mathcal{X}\right) + \int_0^{\mathcal{X}} \mathcal{H}\,d\mathcal{X} - (g+h)\frac{(\mathcal{H} - \mathcal{X})^2}{4\pi\varepsilon'}.$$

Pour la même valeur $\mathcal{H} = 4.10^3$ gauss que précédemment et le même fer, on a $\mathcal{X} = 0{,}9$ gauss ; les termes en $\mathcal{X}$ sont donc négligeables, y compris l'intégrale, d'où :

$$(53) \qquad \partial_1 = \left(2{,}66 - 0{,}433\,\frac{g+h}{\varepsilon'}\right)10^{-7}.$$

D'après (43), on voit que cette dilatation, abstraction faite du terme en $g+h$, est environ le dixième de la dilatation transversale du cylindre indéfini de même substance, placé dans le même champ.

D. *Portion de lame à faces parallèles indéfinie.* — Si l'on imagine une coupure infiniment mince pratiquée, suivant une courbe fermée arbitraire, normalement à la lame indéfinie précédemment étudiée, cette coupure ne modifie pas l'aimantation induite et isole un cylindre droit ayant pour hauteur l'épaisseur de la lame et pour base la surface intérieure à la courbe. Sur les bases de ce cylindre, nous avons encore les équations (49); sur sa surface latérale où $(\mathcal{G}, \alpha) = 0$, les conditions aux limites (31) donnent les égalités (39), où $\mathcal{H}$ est remplacé par $\mathcal{X}$, soit :

$$\begin{gathered}
\beta g_3 + \gamma g_2 = 0,\\
\beta(-\mathcal{J}\mathcal{X} + \lambda\Theta + 2\mu\partial_2 + g\mathcal{J}^2 + \mathcal{F}) + \gamma\mu g_1 = 0,\\
\beta\mu g_1 + \gamma(-\mathcal{J}\mathcal{X} + \lambda\Theta + 2\mu\partial_3 + g\mathcal{J}^2 + \mathcal{F}) = 0,
\end{gathered}$$

d'où $(g_1, g_2, g_3) = 0$, $\partial_2 = \partial_3$. On a donc, pour déterminer ∂_1 et ∂, valeur commune de ∂_2 et de ∂_3, les équations

$$\text{(54)}\qquad \left\{\begin{aligned}
\lambda\Theta + 2\mu\partial_1 &= 2\pi\varepsilon'\mathcal{J}^2 + \mathcal{J}\mathcal{X} - (g+h)\mathcal{J}^2 - \mathcal{F},\\
\lambda\Theta + 2\mu\partial &= \mathcal{J}\mathcal{X} - g\mathcal{J}^2 - \mathcal{F},
\end{aligned}\right.$$

avec $\Theta = \partial_1 + 2\partial$. Comme ce sont les équations (47), où $\mathcal{H}$ est remplacé par $\mathcal{X}$, nous retrouvons donc la solution (48), dans laquelle, d'après (41), (42), (50) et (51), il faut en outre remplacer $\mathcal{B}$ par $\mathcal{H}$; d'où :

$$\begin{aligned}
4\pi\varepsilon'(3\lambda+2\mu)\partial_1 &= \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{\mu}+1\right)(\mathcal{H}-\mathcal{X})^2 + \mathrm{B} - \left[g + \left(\frac{\lambda}{\mu}+1\right)h\right]\frac{(\mathcal{H}-\mathcal{X})^2}{4\pi\varepsilon'},\\
4\pi\varepsilon'(3\lambda+2\mu)\partial &= -\frac{\lambda}{4\mu}(\mathcal{H}-\mathcal{X})^2 + \mathrm{B} - \left(g - \frac{\lambda}{2\mu}h\right)\frac{(\mathcal{H}-\mathcal{X})^2}{4\pi\varepsilon'},\\
4\pi\varepsilon'(3\lambda+2\mu)\Theta &= \frac{1}{2}(\mathcal{H}-\mathcal{X})^2 + 3\mathrm{B} - (3g+h)\frac{(\mathcal{H}-\mathcal{X})^2}{4\pi\varepsilon'},
\end{aligned}$$

avec

$$\mathrm{B} = \int_0^{\mathcal{X}} \mathcal{H}\,d\mathcal{X} - \frac{\mathcal{X}^2}{2}.$$

Pour la même valeur $\mathcal{H} = 4.10^3$ gauss que précédemment et le même fer, donc encore $\mathcal{X} = 0{,}9$ gauss, il vient ainsi :

$$\partial_1 = \left(3{,}18 - 0{,}253\,\frac{g+2h}{\varepsilon'}\right)10^{-7}, \qquad \partial = -\left(0{,}795 + 0{,}126\,\frac{2g-h}{\varepsilon'}\right)10^{-7}.$$

On voit que ∂_1 reste du même ordre de grandeur que pour la lame entière et que, pour le même champ magnétisant extérieur $\mathcal{H} = 4.10^3$ gauss, la dilatation ∂_1 relative à la portion de lame indéfinie est environ le centième de ce qu'elle est pour la portion de cylindre indéfini.

10. Fluide aimanté. — Nous allons retrouver très simplement encore, d'après l'égalité (19), les équations de l'équilibre du fluide aimanté, telles qu'elles ont été données autrefois par Duhem [1]. Supposons donc que le corps 1 soit maintenant un fluide parfaitement doux.

Comme la déformation du fluide conserve son isotropie, $\mathcal{F}$ redevient, comme dans notre précédent mémoire, une fonction de $\mathfrak{J}$, ρ, T et l'on a, d'après l'égalité du haut de la page 22 de ce mémoire,

$$\delta_T \int_{\varpi_1} \mathcal{F} d\varpi = \int_{\varpi_1} \left[\left| \frac{\mathcal{A}}{\chi} \delta \mathcal{A} \right| + \left(\mathcal{F} - \rho \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \rho} \right) \left| \frac{\partial \delta x}{\partial x} \right| \right] d\varpi .$$

Le potentiel thermodynamique interne $\mathcal{F}_0$ du fluide désaimanté étant de la forme

$$\mathcal{F}_0 = \int_{\varpi_1} \varphi(\rho, T) d\varpi ,$$

on a d'autre part :

$$\delta_T \mathcal{F}_0 = \int_{\varpi_1} \left(\varphi - \rho \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \right) \left| \frac{\partial \delta x}{\partial x} \right| d\varpi ,$$

de sorte qu'en introduisant la fonction P définie par

$$P + \varphi + \mathcal{F} - \rho \frac{\partial(\varphi + \mathcal{F})}{\partial \rho} = 0 , \tag{55}$$

il vient après intégrations par parties

$$\delta_T \left(\mathcal{F}_0 + \int_{\varpi_1} \mathcal{F} d\varpi \right) = \int_{\varpi_1} \left| \frac{\mathcal{A}}{\chi} \delta \mathcal{A} + \frac{\partial P}{\partial x} \delta x \right| d\varpi + \int_{S_1} P |\alpha \delta x| dS .$$

---

[1] P. Duhem, *Sur la pression dans les milieux diélectriques et magnétiques*, American Journal of Mathematics, t. XVII, 1895, p. 154-167. Ce mémoire avait pour but de reprendre, avec une entière rigueur, le sujet déjà traité dans les *Leçons sur l'Électricité et le Magnétisme*, t. II, p. 405, afin d'y retrouver la tension $2\pi\varepsilon' \mathcal{J}^2$ que venait de signaler pour la première fois M. Alfred Liénard.

Cela posé, les expressions des deux autres termes de l'égalité (19) n'ayant pas changé, celle-ci devient, en désignant maintenant par $(\Xi, \mathrm{H}, \mathrm{Z})$ la force extérieure par unité de masse appliquée au fluide,

$$\int_{\varpi_1}\left|\left(\mathcal{X}-\frac{\mathcal{A}}{\varkappa}\right)\delta\mathcal{A}+\left(\rho\Xi-\frac{\partial P}{\partial x}-\mathcal{X}\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial x}-\mathcal{Y}\frac{\partial\mathcal{B}}{\partial x}-\mathcal{Z}\frac{\partial\mathcal{C}}{\partial x}\right)\delta x\right|d\varpi$$
$$+\int_{S_1}\left|[P_x-\alpha(P+2\pi\varepsilon'\mathcal{G}^2+|\mathcal{A}\mathcal{X}|)]\delta x\right|dS+\ldots=0,$$

les points représentant les termes relatifs aux corps 2 et 3 qui figurent déjà dans l'égalité (24) et qu'il est inutile de récrire. On en conclut qu'on doit avoir :

1. En chaque point du volume ϖ_1,

$$\mathcal{X}-\frac{\mathcal{A}}{\varkappa}=0,\ldots\ldots;$$

$$\rho\Xi-\frac{\partial P}{\partial x}-\mathcal{X}\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial x}-\mathcal{Y}\frac{\partial\mathcal{B}}{\partial x}-\mathcal{Z}\frac{\partial\mathcal{C}}{\partial x}=0,\ldots\ldots;$$

2. En chaque point de la surface S_1,

$$P_x-\alpha(P+2\pi\varepsilon'\mathcal{G}^2+|\mathcal{A}\mathcal{X}|)=0,\ldots\ldots$$

L'égalité (55) et les trois groupes précédents coïncident respectivement avec l'égalité (13) p. 167 et les groupes (12) p. 167, (16) et (17) p. 160 du mémoire de Duhem.

11. Forces électriques. — Contrairement à la distinction que nous avions faite dans notre précédent mémoire, nous préférons considérer simultanément l'ensemble des termes IV et V de (15), c'est-à-dire l'expression que nous devons désigner par $\delta\mathcal{T}_4+\delta\mathcal{T}_5$ d'après nos notations antérieures. Par des intégrations par parties, on obtient tout d'abord :

$$\int_{\varpi_1}\left|\mathbf{X}\left[A\left(\frac{\partial\delta y}{\partial y}+\frac{\partial\delta z}{\partial z}\right)-B\frac{\partial\delta x}{\partial y}-C\frac{\partial\delta x}{\partial z}\right]\right|d\varpi$$
$$=\int_{\varpi_1}\left|\left(\frac{\partial A\mathbf{X}}{\partial x}+\frac{\partial B\mathbf{X}}{\partial y}+\frac{\partial C\mathbf{X}}{\partial z}-\frac{\partial|A\mathbf{X}|}{\partial x}\right)\delta x\right|d\varpi$$
$$+\int_{S_1}\left|(\mathbf{X}|A\alpha|-\alpha|A\mathbf{X}|)\delta x\right|dS,$$

de sorte qu'il vient d'après (15)

$$(56) \qquad \delta\mathcal{C}_4 + \delta\mathcal{C}_5 = \int_{S_1} \Big| \{ [X - 2\pi\varepsilon(\sigma+\Sigma)\alpha](\sigma+\Sigma) + \alpha N'_1 + \beta T'_3 + \gamma T'_2 - \mathbf{X}\Sigma - \alpha|A\mathbf{X}| \} \delta x \Big| dS$$

$$+ \int_{\varpi_1} \Big| \Big[X(e+E) + \frac{\partial N'_1}{\partial x} + \frac{\partial T'_3}{\partial y} + \frac{\partial T'_2}{\partial z} + \frac{\partial A\mathbf{X}}{\partial x} + \frac{\partial B\mathbf{X}}{\partial y} + \frac{\partial C\mathbf{X}}{\partial z} - \frac{\partial |A\mathbf{X}|}{\partial x} \Big] \delta x \Big| d\varpi$$

$$+ |P_2\xi_2 + L_2\omega_2 + P_3\xi_3 + L_3\omega_3|.$$

Cette égalité exprime qu'en chaque point de la surface S_1 s'exerce, d'après (14), la pression de composantes

$$(57) \quad \begin{cases} X\sigma + \alpha[-2\pi\varepsilon(\sigma+\Sigma)^2 + A\mathcal{E}_x - |A\mathbf{X}| + N'_1] + \beta(B\mathcal{E}_x + T'_3) + \gamma(C\mathcal{E}_x + T'_2), \\ Y\sigma + \alpha(A\mathcal{E}_y + T'_3) + \beta[-2\pi\varepsilon(\sigma+\Sigma)^2 + B\mathcal{E}_y - |A\mathbf{X}| + N'_2] + \gamma(C\mathcal{E}_y + T'_1), \\ Z\sigma + \alpha(A\mathcal{E}_z + T'_2) + \beta(B\mathcal{E}_z + T'_1) + \gamma[-2\pi\varepsilon(\sigma+\Sigma)^2 + C\mathcal{E}_z - |A\mathbf{X}| + N'_3] \end{cases}$$

et qu'en chaque point du volume ϖ_1 s'exerce la force par unité de volume de composantes

$$(58) \quad X(e+E) + \frac{\partial N'_1}{\partial x} + \frac{\partial T'_3}{\partial y} + \frac{\partial T'_2}{\partial z} + \frac{\partial A\mathbf{X}}{\partial x} + \frac{\partial B\mathbf{X}}{\partial y} + \frac{\partial C\mathbf{X}}{\partial z} - \frac{\partial |A\mathbf{X}|}{\partial x}, \ \ldots.$$

Calculons la résultante (P_1, Q_1, R_1) de ces actions élémentaires et leur moment résultant (L_1, M_1, N_1) par rapport à l'origine; en remarquant que les six fonctions N'_i, T'_i disparaissent, il vient :

$$P_1 = \int_{\varpi_1} \Big[X(e+E) + \frac{\partial A\mathbf{X}}{\partial x} + \frac{\partial B\mathbf{X}}{\partial y} + \frac{\partial C\mathbf{X}}{\partial z} - \frac{\partial |A\mathbf{X}|}{\partial x} \Big] d\varpi$$

$$+ \int_{S_1} \{ X\sigma + \alpha[-2\pi\varepsilon(\sigma+\Sigma)^2 + A\mathcal{E}_x - |A\mathbf{X}|] + (\beta B + \gamma C)\mathcal{E}_x \} dS, \ldots,$$

d'où l'on tire par intégrations par parties, d'après (14) et en tenant compte de ce que

$$(59) \qquad \frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y}, \qquad \frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial z}, \qquad \frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x},$$

(60) [107]
$$\left\{\begin{aligned}
P_1 &= \int_{S_1} [X\sigma - 2\pi\varepsilon(\sigma+\Sigma)^2\alpha]\,dS \\
&+ \int_{\varpi_1}\left(Xe + A\frac{\partial X}{\partial x} + B\frac{\partial Y}{\partial x} + C\frac{\partial Z}{\partial x}\right)d\varpi, \dots; \\
L_1 &= \int_{S_1} \{ y[Z\sigma - 2\pi\varepsilon(\sigma+\Sigma)^2\gamma] - z[Y\sigma - 2\pi\varepsilon(\sigma+\Sigma)^2\beta]\}\,dS \\
&+ \int_{\varpi_1}\left[y\left(Ze + A\frac{\partial X}{\partial z} + B\frac{\partial Y}{\partial z} + C\frac{\partial Z}{\partial z}\right)\right. \\
&\left. - z\left(Ye + A\frac{\partial X}{\partial y} + B\frac{\partial Y}{\partial y} + C\frac{\partial Z}{\partial y}\right) - B\mathcal{E}_z + C\mathcal{E}_y\right]d\varpi, \dots.
\end{aligned}\right.$$

Ces expressions coïncident avec nos anciennes formules (107) débarrassées de leurs termes en $\mathcal{E}_x$, $\mathcal{E}_y$, $\mathcal{E}_z$, sauf en ce qui concerne le couple par unité de volume. La nouvelle expression de ce couple $-B\mathcal{E}_z + C\mathcal{E}_y, \dots$ coïncide d'ailleurs avec l'ancienne $BZ - CY, \dots$ quand on revient à l'hypothèse de la conservation de l'isotropie après déformation, c'est-à-dire à notre ancienne fonction $F(J, \rho, T)$ à laquelle nous avons substitué la forme (9). Dans ce cas, en effet, le deuxième groupe (13) s'écrit :

$$\frac{A}{k} = X + \mathcal{E}_x, \dots,$$

d'où l'égalité des deux couples résulte immédiatement.

12. Système en repos simplement électrisé. — Notre ancienne égalité (108) s'écrit tout d'abord, d'après notre ancienne (67) et celle (10) qui la remplace,

[108]
$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{T}_i = &- \delta_T\mathcal{F}_0 - \int \delta_T\Theta\,dq - \sum_{i=1}^{i=3}\int_i (\varepsilon V + \Theta - D_i)\,\delta dq \\
&- \varepsilon\int_{\varpi} V\delta(E\,d\varpi) - \varepsilon\int_S V\delta(\Sigma\,dS) \\
&- \int_{\varpi_1}\left[\varepsilon\left|\frac{\partial V}{\partial x}\delta x\right|(e+E) + \left|\frac{\partial F}{\partial A}\delta A - \left(\frac{\partial N_1'}{\partial x} + \frac{\partial T_3'}{\partial y} + \frac{\partial T_2'}{\partial z}\right)\delta x\right|\right]d\varpi \\
&- \varepsilon\int_{S_1}\left|\left[\frac{\partial V}{\partial x} + 2\pi(\sigma+\Sigma)\alpha\right]\delta x\right|(\sigma+\Sigma)\,dS \\
&+ \int_{S_1}|(\alpha N_1' + \beta T_3' + \gamma T_2')\delta x|\,dS - \int_{\varpi_3}\left|\frac{A}{k}\delta A\right|d\varpi \\
&+ |P_2\xi_2 + L_2\omega_2 + P_3\xi_3 + L_3\omega_3|.
\end{aligned}$$

De même, notre ancienne égalité (111) devient :

$$[111] \qquad \delta \mathcal{C}_i = -\delta_T \mathcal{F}_0 - \int \delta_T \Theta \, dq - \sum_{i=1}^{i=3} \int (\varepsilon V + \Theta - D_i) \delta \, dq$$

$$+ \int_{\varpi_1} \left| -\left(\frac{\partial F}{\partial A} + \varepsilon \frac{\partial V}{\partial x}\right) + \left[Xe + \varepsilon \left(\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial C}{\partial x}\right)\right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\partial N'_1}{\partial x} + \frac{\partial T'_3}{\partial y} + \frac{\partial T'_2}{\partial z} \right] \delta x \right| d\varpi$$

$$+ \int_{S_1} \left| \left\{ -\varepsilon \frac{\partial V}{\partial x} \sigma - \alpha \left[2\pi\varepsilon(\sigma + \Sigma)^2 - \varepsilon \left| A \frac{\partial V}{\partial x} \right| \right] + \alpha N'_1 + \beta T'_3 + \gamma T'_2 \right\} \delta x \right| dS$$

$$+ | P_2 \xi_2 + L_2 \omega_2 + P_3 \xi_3 + l_3 \omega_3 | - \int_{\varpi_3} \left| \left(\frac{A}{k} + \varepsilon \frac{\partial V}{\partial x} \right) \delta A \right| d\varpi,$$

de sorte que, les conditions de l'équilibre électrique étant supposées satisfaites, il reste pour le travail virtuel des forces électriques

$$[114] \qquad \delta \mathcal{C}''_4 = \int_{S_1} \left| \{ X\sigma - \alpha [2\pi\varepsilon(\sigma + \Sigma)^2 + | AX |] \right.$$

$$\left. + \alpha N'_1 + \beta T'_3 + \gamma T'_2 \} \delta x \right| dS$$

$$+ \int_{\varpi_1} \left| \left(Xe - X \frac{\partial A}{\partial x} - Y \frac{\partial B}{\partial x} - Z \frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial N'_1}{\partial x} + \frac{\partial T'_3}{\partial y} + \frac{\partial T'_2}{\partial z} \right) \delta x \right| d\varpi$$

$$+ | P_2 \xi_2 + L_2 \omega_2 + P_3 \xi_3 + l_3 \omega_3 | .$$

On voit que cette expression, dans laquelle on fait $(e, \sigma) = 0$, est la transposition exacte de celle (16) relative au Magnétisme; elle exprime qu'en chaque point de la surface S_1 s'exerce la pression de composantes

$$(61) \qquad X\sigma + \alpha[-2\pi\varepsilon(\sigma + \Sigma)^2 - | AX | + N'_1] + \beta T'_3 + \gamma T'_2, \ \ldots$$

et qu'en chaque point du volume ϖ_1 s'exerce la force par unité de volume de composantes

$$(62) \qquad Xe - X \frac{\partial A}{\partial x} - Y \frac{\partial B}{\partial x} - Z \frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial N'_1}{\partial x} + \frac{\partial T'_3}{\partial y} + \frac{\partial T'_2}{\partial z}, \ \ldots .$$

On voit, d'après (14), que les composantes (61) sont précisément ce que deviennent les précédentes (57), quand on y annule la force électromotrice d'induction ($\mathcal{E}_x$, $\mathcal{E}_y$, $\mathcal{E}_z$); dans les mêmes conditions et d'après (59), on reconnaît que les composantes (58) et (62) coïncident. On en conclut que la résultante et le moment résultant des forces élémentaires dues aux actions (61) et (62) restent donnés par les formules (60) débarrassées des termes en $\mathcal{E}_x$, $\mathcal{E}_y$, $\mathcal{E}_z$. Enfin les équations générales du problème de l'électrostriction restent données par (26) et (27), ou (30) et (31), après transposition des termes et en ajoutant aux premiers membres les composantes de la force par unité de volume et de la pression supplémentaires résultant de la distribution (e, σ) ; en nous limitant au cas de l'isotropie, il vient ainsi comme équations indéfinies

$$(63) \qquad \Xi + Xe - X\frac{\partial A}{\partial x} - Y\frac{\partial B}{\partial x} - Z\frac{\partial C}{\partial x} + (\lambda+\mu)\frac{\partial \Theta}{\partial x} + \mu\Delta U - \nu\frac{\partial \theta}{\partial x}$$
$$+\frac{\partial}{\partial x}(gJ^2 + hA^2 + F) + \frac{\partial}{\partial y}(hAB) + \frac{\partial}{\partial z}(hCA) = 0, \ \ldots .$$

et comme conditions aux limites

$$(64) \qquad P_x + X\sigma + \alpha[-2\pi\varepsilon(\sigma+\Sigma)^2 - |AX| + \lambda\Theta + 2\mu\partial_1 - \nu\theta + gJ^2 + hA^2 + F]$$
$$+\beta(\mu g_3 + hAB) + \gamma(\mu g_2 + hCA) = 0, \ \ldots .$$

13. Application au condensateur plan; A. *Condensateur indéfini.* — Ce problème est analogue à celui du n° **9** C ; tout d'abord $e = 0$, mais il y a lieu de distinguer deux cas, suivant que les armatures n'adhèrent pas ou adhèrent à la lame diélectrique. Dans le premier en effet, la charge du condensateur n'étant pas portée par le diélectrique, on doit faire $\sigma = 0$ dans les équations (64).

Armatures non adhérentes. — Nous avons comme au n° **9** C et d'après (64)

$$(65) \qquad \begin{cases} -2\pi\varepsilon J^2 - JX + \lambda\Theta + 2\mu\partial_1 + (g+h)J^2 + F = 0, \\ (\partial_2, \partial_3; g_1, g_2, g_3) = 0, \quad J = kX, \quad F = \displaystyle\int_0^J X\,dJ = \frac{kX^2}{2}, \end{cases}$$

l'approximation de Poisson étant en effet légitime, puisque la variation du coefficient de polarisation k en fonction du champ est négligeable pour la plupart des diélectriques. On a en outre :

$$(66) \qquad X = 4\pi\varepsilon(\sigma - J) = \varepsilon\frac{V_A - V_B}{l},$$

les couches $\pm\sigma$ étant portées par les armatures A et B, dont la distance l est en même temps l'épaisseur de la lame et entre lesquelles est établie une différence de potentiel $V_A - V_B$. Il vient ainsi, en introduisant le pouvoir inducteur spécifique $K = 1 + 4\pi\varepsilon k$,

$$(67) \qquad 8\pi\varepsilon(\lambda+2\mu)\partial_1 = (K-1)^2X^2\left(\frac{K}{K-1} - \frac{g+h}{2\pi\varepsilon}\right).$$

Pour le verre ordinaire, on peut admettre(¹) $\lambda = \mu = 2{,}5.10^{11}$ baryes, $K = 6$, de sorte que pour un champ de $1{,}2.10^5$ volts par millimètre, manifestement compatible avec la rigidité diélectrique pour des électrodes planes, soit $X = 4.10^2$ C. G. S. électrostatiques, on aurait :

$$\partial_1 = \left(2{,}54 - 0{,}338\,\frac{g+h}{\varepsilon}\right)10^{-5}.$$

On voit que cette dilatation est cent fois plus grande que celle (53) du n° **9 C**. Cela tient à ce que le champ dans la lame diélectrique est ici numériquement égal à l'induction dans la lame de fer précédemment considérée.

L'approximation de Poisson étant valable pour les diélectriques, il vient d'après (46)

$$\frac{f}{\varepsilon} = \frac{2\pi}{K-1},$$

soit $1{,}26$ dans le cas actuel et nous savons que g et h peuvent très bien être de l'ordre de f.

Armatures adhérentes. — La charge du condensateur étant maintenant portée par les deux faces de la lame diélectrique, la première (65) se trouve seule modifiée et devient d'après (64)

$$(68)\qquad X\sigma - 2\pi\varepsilon(\sigma - J)^2 - JX + \lambda\Theta + 2\mu\partial_1 + (g+h)J^2 + F = 0,$$

d'où, en tenant compte des autres (65) et de (66),

$$8\pi\varepsilon(\lambda + 2\mu)\partial_1 = -X^2\left[K + (K-1)^2\frac{g+h}{2\pi\varepsilon}\right].$$

Abstraction faite des termes inconnus en $g+h$, on voit que ∂_1 est en valeur absolue $K-1$ fois plus petit que dans le cas précédent et qu'il y a ici contraction. Ce changement de signe de ∂_1 est la conséquence évidente de l'adhérence. Quand il y a non adhérence, les faces de la lame diélectrique, portant les couches $\mp J$, sont en effet plus fortement attirées par les armatures portant les couches $\pm\sigma$ qu'elles ne le sont entre elles. Quand au contraire il y a adhérence, l'attraction des deux couches $\pm(\sigma - J)$ portées par les faces de la lame engendre nécessairement une contraction.

B. *Portion de condensateur indéfini.* — Ce problème correspond à celui du n° **9 D**.

(¹) *Recueil de constantes physiques*, p. 173 et 560.

Armatures non adhérentes. — Les dilatations ∂_1 et ∂ sont données par les analogues de (54), soit :

$$(69)\qquad \begin{cases} \lambda\Theta + 2\mu\partial_1 = 2\pi\varepsilon J^2 + JX - (g+h)J^2 - F, \\ \lambda\Theta + 2\mu\partial = \qquad\qquad JX - gJ^2 \qquad - F, \end{cases}$$

avec $\Theta = \partial_1 + 2\partial$, d'où l'on tire en tenant compte des dernières (65)

$$8\pi\varepsilon(3\lambda + 2\mu)\partial_1 = (K-1)^2X^2\left[\frac{\lambda}{\mu} + \frac{K}{K-1} - \frac{g + \left(\frac{\lambda}{\mu} + 1\right)h}{2\pi\varepsilon}\right],$$

$$8\pi\varepsilon(3\lambda + 2\mu)\partial = (K-1)^2X^2\left(-\frac{\lambda}{2\mu} + \frac{1}{K-1} - \frac{g - \frac{\lambda}{2\mu}h}{2\pi\varepsilon}\right),$$

$$8\pi\varepsilon(3\lambda + 2\mu)\Theta = (K-1)^2X^2\left(\frac{K+2}{K-1} - \frac{3g+h}{2\pi\varepsilon}\right),$$

On voit d'après (67) que l'ordre de grandeur des dilatations reste le même que pour un condensateur indéfini. Avec les mêmes données numériques que ci-dessus, il vient ainsi :

$$\partial_1 = \left(2{,}79 - 0{,}202\,\frac{g+2h}{\varepsilon}\right)10^{-5}, \qquad \partial = -\left(3{,}80 + 1{,}01\,\frac{2g-h}{\varepsilon}\right)10^{-6}.$$

Armatures adhérentes. — La première (69) est remplacée par (68), la seconde restant inchangée, puisque $\sigma = 0$ sur la surface latérale du cylindre ; on trouve ainsi :

$$8\pi\varepsilon(3\lambda + 2\mu)\partial_1 = -X^2\left[\frac{\lambda}{\mu}(2K-1) + K + (K-1)^2\frac{g + \left(\frac{\lambda}{\mu} + 1\right)h}{2\pi\varepsilon}\right],$$

$$8\pi\varepsilon(3\lambda + 2\mu)\partial = X^2\left[\frac{\lambda}{2\mu}(2K-1) + K - 1 - (K-1)^2\frac{g - \frac{\lambda}{2\mu}h}{2\pi\varepsilon}\right],$$

$$8\pi\varepsilon(3\lambda + 2\mu)\Theta = X^2\left[K - 2 - (K-1)^2\frac{3g+h}{2\pi\varepsilon}\right].$$

Comme dans le cas du condensateur indéfini et abstraction faite des termes en g, h, qui restent les mêmes qu'il y ait ou non adhérence, on voit que les dilatations restent plus faibles que précédemment. Du point de vue expérimental, la non adhérence paraît donc plus favorable.

14. Forces électromagnétiques. — Le travail élémentaire des forces électromagnétiques est d'après (15)

[122] $$\delta\mathcal{T}_7 = \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\sqrt{\varepsilon'}\int\left| f\left(\Phi\frac{\partial\delta x}{\partial x} + \Psi\frac{\partial\delta y}{\partial x} + \Omega\frac{\partial\delta z}{\partial x} + \delta\Phi\right)\right| d\varpi$$
$$+\sqrt{\varepsilon'}\int_{\varpi_3+\varpi_4} |\mathfrak{L}\delta\mathcal{A}|\, d\varpi.$$

On voit que c'est notre ancienne expression (122), où les termes en $d(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C})$ ont disparu. On a donc encore :

(70) [125] $$\delta\mathcal{T}_7 = \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\sqrt{\varepsilon'}\int\left| f\left(\Phi\frac{\partial\delta x}{\partial x} + \Psi\frac{\partial\delta y}{\partial x} + \Omega\frac{\partial\delta z}{\partial x} + d\Phi\right)\right| d\varpi$$
$$+\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\sqrt{\varepsilon'}\,\mathrm{A} + \sqrt{\varepsilon'}\int_{\varpi_3+\varpi_4} |\mathfrak{L}\delta\mathcal{A}|\, d\varpi,$$

avec, d'après nos anciennes (128), (130), (131) et (132),

$$\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\mathrm{A} = -\int_{\varpi_3+\varpi_4} |\mathfrak{L}\delta\mathcal{A}|\, d\varpi + \int_{\varpi_1} |\mathfrak{L}d\mathcal{A}|\, d\varpi + \int_{S_1} |\mathcal{A}\mathfrak{L}|\,|\alpha\delta x|\, dS$$
$$-\int_{\varpi_2}\left|(\mathcal{B}\mathfrak{R} - \mathcal{C}\mathfrak{Q})\omega_2 + \left(\mathcal{A}\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial x} + \mathcal{B}\frac{\partial\mathfrak{Q}}{\partial x} + \mathcal{C}\frac{\partial\mathfrak{R}}{\partial x}\right)\delta x\right| d\varpi$$
$$-\int_{\varpi_3}\left|\left(\mathcal{A}\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial x} + \mathcal{B}\frac{\partial\mathfrak{Q}}{\partial x} + \mathcal{C}\frac{\partial\mathfrak{R}}{\partial x}\right)\delta x\right| d\varpi.$$

L'expression (70) devient ainsi :

[133] $$\delta\mathcal{T}_7 = -\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\sqrt{\varepsilon'}\int_{S_1} |f\alpha|\,|\Phi\delta x|\, dS$$
$$+\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\sqrt{\varepsilon'}\int_{\varpi_1}\left|\left[g\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x} - \frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) - h\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z} - \frac{\partial\Omega}{\partial x}\right) - \Phi\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|\right]\delta x\right| d\varpi$$
$$+|\mathfrak{L}'_2\xi_2 + \mathfrak{L}'_2\omega_2 + \mathfrak{L}'_3\xi_3 + \mathfrak{L}'_3\omega_3|$$
$$+\sqrt{\varepsilon'}\int_{\varpi_1} |\mathfrak{L}d\mathcal{A}|\, d\varpi + \sqrt{\varepsilon'}\int_{S_1} |\mathcal{A}\mathfrak{L}|\,|\alpha\delta x|\, dS$$
$$-\sqrt{\varepsilon'}\int_{\varpi_2}\left|(\mathcal{B}\mathfrak{R} - \mathcal{C}\mathfrak{Q})\omega_2 + \left(\mathcal{A}\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial x} + \mathcal{B}\frac{\partial\mathfrak{Q}}{\partial x} + \mathcal{C}\frac{\partial\mathfrak{R}}{\partial x}\right)\delta x\right| d\varpi$$
$$-\sqrt{\varepsilon'}\int_{\varpi_3}\left|\left(\mathcal{A}\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial x} + \mathcal{B}\frac{\partial\mathfrak{Q}}{\partial x} + \mathcal{C}\frac{\partial\mathfrak{R}}{\partial x}\right)\delta x\right| d\varpi$$

et finalement :

$$[135] \quad \delta\mathfrak{T}_1 = -\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\sqrt{\varepsilon'}\int_{S_1} |f\alpha|\,|\Phi\,\delta x|\,dS + \sqrt{\varepsilon'}\int_{S_1} |\mathcal{A}\mathfrak{L}|\,|\alpha\,\delta x|\,dS$$
$$+\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\sqrt{\varepsilon'}\int_{\varpi_1}\left|\left[g\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}-\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)-h\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}-\frac{\partial\Omega}{\partial x}\right)-\Phi\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|\right]\delta x\right|d\varpi$$
$$+\sqrt{\varepsilon'}\int_{\varpi_1}\left|\left(\mathfrak{L}\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial x}+\mathfrak{Q}\frac{\partial\mathcal{B}}{\partial x}+\mathfrak{R}\frac{\partial\mathcal{C}}{\partial x}\right)\delta x\right|d\varpi$$
$$+|(\mathfrak{L}_2'+\mathfrak{L}_2'')\xi_2+(\mathfrak{L}_2'+\mathfrak{L}_2'')\omega_2+(\mathfrak{L}_3'+\mathfrak{L}_3'')\xi_3+(\mathfrak{L}_3'+\mathfrak{L}_3'')\omega_3|.$$

On voit que cette nouvelle expression ne diffère de l'ancienne (135) que par sa troisième ligne. Rien n'est donc changé aux actions de l'aimantation sur les courants ; les actions des courants sur l'aimantation ne sont modifiées qu'en ce qui concerne la force par unité de volume appliquée en chaque point du volume ϖ_1 et qui devient :

$$(71)\ [140] \qquad \sqrt{\varepsilon'}\left(\mathfrak{L}\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial x}+\mathfrak{Q}\frac{\partial\mathcal{B}}{\partial x}+\mathfrak{R}\frac{\partial\mathcal{C}}{\partial x}\right), \ldots\ldots$$

Il est facile de reconnaître que la résultante et le moment résultant par rapport à l'origine des actions des courants sur l'aimantation du corps 1 restent donnés par nos anciennes expressions (141).

15. Actions totales de l'aimantation et des courants sur l'aimantation. — En ajoutant les actions élémentaires (17) et (18), exercées sur le corps 1 par l'aimantation sur l'aimantation, à celles que les courants exercent sur l'aimantation du même corps et qui sont données par notre ancienne (139) et (71), on fait apparaître le champ magnétique total

$$\mathfrak{X} = \mathcal{X} - \sqrt{\varepsilon'}\,\mathfrak{L}, \ldots\ldots$$

et l'on voit qu'en chaque point de S_1 s'exerce la pression de composantes

$$\alpha(-2\pi\varepsilon'\mathcal{S}^2 - |\mathcal{A}\mathfrak{X}| + \mathfrak{N}_1') + \beta\mathfrak{T}_3' + \gamma\mathfrak{T}_2', \ldots\ldots$$

et, en chaque point de ϖ_1, la force par unité de volume de composantes

$$-\mathfrak{X}\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial x} - \mathfrak{Y}\frac{\partial\mathcal{B}}{\partial x} - \mathfrak{Z}\frac{\partial\mathcal{C}}{\partial x} + \frac{\partial\mathfrak{N}_1'}{\partial x} + \frac{\partial\mathfrak{T}_3'}{\partial y} + \frac{\partial\mathfrak{T}_2'}{\partial z}, \ldots\ldots$$

On reconnaît d'autre part que la résultante et le moment résultant de ces actions totales restent donnés par nos anciennes (144). Quant à nos anciennes (145), relatives aux corps rigides 2 et 3, elles ne subissent évidemment aucune modification.

TABLE DU MÉMOIRE