

L. CASTAGNETTO

**Contribution à l'étude des tourbillons alternés de Bernard-Karman**

*Annales de la faculté des sciences de Toulouse 4<sup>e</sup> série*, tome 3 (1939), p. 71-153

[http://www.numdam.org/item?id=AFST\\_1939\\_4\\_3\\_\\_71\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AFST_1939_4_3__71_0)

© Université Paul Sabatier, 1939, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# CONTRIBUTION A L'ÉTUDE DES TOURBILLONS ALTERNÉS

## DE BENARD-KARMAN

Par L. CASTAGNETTO



### INTRODUCTION

L'objet de ce travail est d'étudier quelques particularités des tourbillons alternés.

Nous ne saurions commencer l'exposé sans adresser nos bien vifs remerciements à M. le Professeur C. Camichel, pour l'hospitalité qu'il a bien voulu nous accorder dans les Laboratoires d'Hydraulique de l'Institut Électrotechnique et de Mécanique appliquée de l'Université de Toulouse, placé sous sa haute direction, et les conseils éclairés qu'il nous a prodigués, ainsi qu'à M. M. Teissié-Solier pour l'attention avec laquelle il a accepté de nous guider dans l'ensemble des études que nous avons effectuées.

Nous tenons également à exprimer notre reconnaissance au personnel d'assistants et mécaniciens de l'Institut et, en particulier, à M. Marcel Sabathé, pour la collaboration dévouée qu'il nous a apportée.

Dans le premier chapitre, nous exposons d'une façon sommaire les différentes méthodes que nous avons utilisées dans nos expériences. Dans le second chapitre, nous développons les résultats obtenus dans l'étude de divers phénomènes qui accompagnent la production des tourbillons alternés dans un milieu fini. Dans le troisième chapitre, nous analysons certains caractères de ces tourbillons, les rattachant aux oscillations de relaxation et donnons une détermination de leur criterium. Nous étudions enfin certaines particularités des tourbillons d'obstacles de révolution.

## CHAPITRE PREMIER

### Généralités.

**Historique.** — L'histoire des sillages et, en particulier, des tourbillons alternés, comporte de nombreuses observations anciennes qui remontent même jusqu'à la Pré-Renaissance.

En 1883, O. Reynolds<sup>(1)</sup> les dessinait dans un cas spécial. Vers 1901, Marey<sup>(2)</sup>, les avait photographiés lors de ses premiers essais de spectres hydro et aérodynamiques. Peu après 1900, M. Brillouin<sup>(3)</sup> avait vu la distribution périodique des mouvements giratoires détachés d'un obstacle. Mais, ce n'est qu'en 1907 que Mallock<sup>(4)</sup> publie une description du phénomène et émet le premier l'hypothèse, confirmée d'ailleurs plus tard, que ces tourbillons sont susceptibles d'expliquer les sons éoliens, étudiés en particulier, par Kircher (1620), Young (1784) et 100 ans plus tard, par Strouhal qui établit une relation entre la fréquence du son, la vitesse du vent et le diamètre du fil.

En 1908, M. Henri Benard<sup>(5)</sup>, dans une note à l'Académie des Sciences, expose les résultats de ses recherches entreprises en 1906. Plus tard, en 1912, Karman et Rubach<sup>(6)</sup> publient un mémoire sur la résistance des liquides et de l'air, dans lequel ils donnent la condition théorique de stabilité de la rue des tourbillons alternés. Nous rappellerons brièvement leurs résultats.

Le rapport  $\frac{h}{e}$  (*fig. 1*) de la largeur  $h$  de la rue à l'équidistance  $e$  de deux tourbillons consécutifs d'une file est une constante indépendante du diamètre  $D$  de l'obstacle et de la vitesse relative  $V$  du fluide par rapport à l'obstacle. De plus  $e = bD$ ,  $b$  étant une constante supérieure à 1, et  $u = aV$ , où  $a$  est une autre constante et  $u$  désigne la vitesse du système tourbillonnaire. Il vient ainsi :

$$S = \frac{D}{VT} = \frac{D(V-u)}{eV} = \frac{1 - \frac{u}{V}}{\frac{e}{D}} = \frac{1-a}{b} = c'';$$

---

(1) O. Reynolds, *Phil. Trans. of the Roy. Soc.*

(2) Marey, Clichés de l'Institut Marey.

(3) Brillouin, *Leçons sur la viscosité*, t. 1, p. 224, 1907.

(4) Mallock, *Proc. of the Roy. Soc.*, t. 79, p. 262, 1907.

(5) *C. R. de l'Ac. des Sciences*, t. 147, p. 839.

(6) *Phys. Zeits.*, t. 13, p. 49, 1912.

il en résulte que  $S$ , dénommé par M. Henri Benard paramètre de Strouhal, est un nombre constant. Ils ont indiqué la formule :

$$X_m = \frac{\rho l^2}{2\pi e} + I\rho \frac{h}{e}(V-u),$$

donnant la valeur moyenne  $X_m$  de la résistance éprouvée par un solide se déplaçant à la vitesse  $V$  dans un fluide de densité  $\rho$  et où  $u$  désigne la vitesse relative des

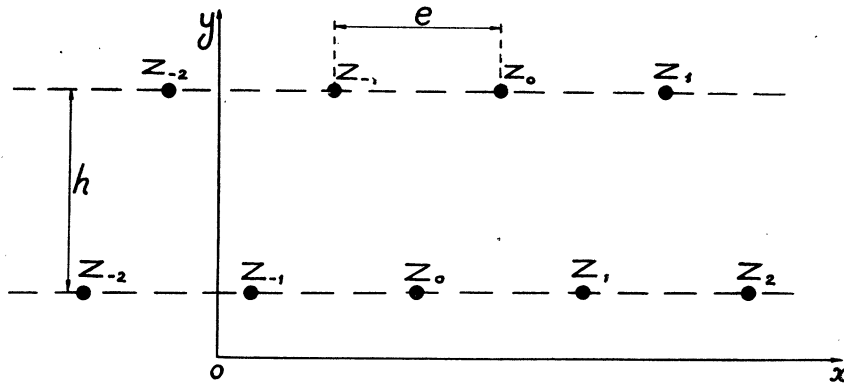


FIG. 1. — Disposition schématique des tourbillons alternés.

tourbillons par rapport au solide et  $l$  l'intensité de ces tourbillons. Ils ont montré en outre que la configuration n'est stable que si

$$\operatorname{ch} \pi \frac{h}{e} = \sqrt{3},$$

dans l'hypothèse d'un seul tourbillon perturbable. Ce cas ayant paru pratiquement sans signification physique à MM. Lamb et Henri Villat, ils ont repris le calcul de la stabilité dans les conditions les plus générales et ont trouvé alors la condition :

$$\operatorname{ch} \pi \frac{h}{e} = \sqrt{2}.$$

On peut néanmoins remarquer que la condition de stabilité de Karman correspond à l'annulation de  $\frac{\partial^4 u}{\partial h^4}$  avec changement de signe, c'est-à-dire à un extremum

de  $\frac{\partial^3 u}{\partial h^3}$  comme il résulte des équations :

$$\frac{2e}{1} u = \operatorname{th} \pi \frac{h}{e},$$

$$\frac{e^4}{\pi^3 1} \frac{\partial^3 u}{\partial h^3} = \frac{3 \operatorname{th}^3 \pi \frac{h}{e} - 1}{\operatorname{ch}^3 \pi \frac{h}{e}},$$

$$\frac{e^5}{\pi^4 1} \frac{\partial^4 u}{\partial h^4} = 4 \operatorname{th} \pi \frac{h}{e} \cdot \frac{2 - 3 \operatorname{th}^2 \pi \frac{h}{e}}{\operatorname{ch}^2 \pi \frac{h}{e}}.$$

Poursuivant l'étude du phénomène, M. H. Benard présente de nouvelles notes à l'Académie des Sciences en 1913<sup>(1)</sup>, 1926<sup>(2)</sup> et 1928<sup>(3)</sup>.

Entre temps, plusieurs auteurs, parmi lesquels, Riabouchinsky<sup>(4)</sup>, Kruger et Lauth<sup>(5)</sup>, Lord Rayleigh<sup>(6)</sup>, E.-L. Richardrou<sup>(7)</sup> et Relf<sup>(8)</sup> s'occupent aussi de cette question. Lord Rayleigh, en particulier, reprenant les travaux de Strouhal, sur les sons éoliens, introduit la valeur du coefficient cinématique de viscosité  $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ ; il arrive ainsi à l'expression :

$$S = \frac{D}{VT} = 0,195 \left( 1 - \frac{20,1 \nu}{VD} \right) = 0,195 \left( 1 - \frac{20,1}{\Re} \right),$$

$\Re = \frac{VD}{\nu}$  étant le paramètre au nombre de Reynolds.

De leur côté, MM. Charles Camichel, P. Dupin et M. Teissié-Solier ont effectué une étude expérimentale importante des tourbillons alternés, étude que nous envisagerons par la suite, plus en détail.

**Aspects successifs du sillage d'un obstacle.** — Il nous semble important d'indiquer, tout d'abord, les divers aspects du sillage d'un obstacle lorsqu'on fait varier

<sup>(1)</sup> *C. R. de l'Ac. des Sciences*, t. 156, p. 1003-1225.

<sup>(2)</sup> *C. R. de l'Ac. des Sciences*, t. 182, p. 1375-1523; t. 183, p. 20 et 184.

<sup>(3)</sup> *C. R. de l'Ac. des Sciences*, t. 187, p. 1028 et 1123.

<sup>(4)</sup> Riabouchinsky, *L'aérophile*, t. 19, p. 15.

<sup>(5)</sup> Kruger et Lauth, *Ann. der Phys.*, t. 44, p. 801.

<sup>(6)</sup> Lord Rayleigh, *Phil. Mag.*, t. 29, p. 433.

<sup>(7)</sup> Richardrou, *Proc. Phys. Soc. Of London*, t. 36, p. 153.

<sup>(8)</sup> Relf, *Phil. Mag.*, t. 42, p. 172; t. 49, p. 509.

le nombre de Reynolds ; une remarquable description de ces aspects a été donnée par M. C. Camichel<sup>(1)</sup>.

Cet auteur a précisé que pour de très faibles nombres de Reynolds, l'écoulement est symétrique à l'amont et à l'aval de l'obstacle et correspond à ce qu'on appelle le paradoxe de d'Alembert.

Ensuite, pour des nombres de Reynolds légèrement supérieurs, l'écoulement présente dans le sillage du cylindre, deux tourbillons symétriques et fixes possédant chacun deux points caractéristiques  $(\alpha, \beta)$  (Pl. I, fig. a). L'écoulement du liquide conserve une symétrie parfaite par rapport au plan médian passant par l'axe du cylindre et parallèle à la direction de l'écoulement. C'est ce premier aspect que l'on convient d'appeler régime de Poiseuille, à l'aval de l'obstacle.

Pour un nombre de Reynolds plus élevé, l'aspect se modifie. Le sillage, jusqu'alors rectiligne, prend une allure ondulatoire ; il oscille sous l'action des tourbillons alternés qui se détachent périodiquement de part et d'autre de l'obstacle. Si l'on observe le phénomène en surface libre, on voit une série d'entonnoirs disposés sur deux files, les entonnoirs de l'une d'elles étant décalés d'une demi-longueur d'onde par rapport à ceux de l'autre file<sup>(2)</sup>.

Comme le font remarquer MM. P. Dupin et M. Teissié-Solier<sup>(3)</sup>, pour des vitesses légèrement supérieures à celles marquant pour un obstacle donné, l'apparition des tourbillons alternés, les courbes à points singuliers  $(\alpha, \beta)$  peuvent encore être observées. Cependant, les tourbillons modifient la forme normale des filets fluides dessinant ces courbes. En utilisant la méthode chronophotographique, M. C. Camichel a montré qu'il était possible, lors de la coexistence des courbes à points singuliers et des tourbillons alternés, de retrouver la fréquence de ces derniers en étudiant pour un obstacle de diamètre assez élevé, le tracé sinueux des particules parcourant les courbes à points singuliers.

**Similitude hydrodynamique.** — La théorie de la similitude mécanique remonte à Newton bien que Mariotte, en 1679 ait déjà utilisé des considérations semblables. Si l'on multiplie les longueurs par  $\lambda$  les temps par  $\theta$  les masses par  $m$ , les forces par  $\varphi$ , l'équation générale de la mécanique donne pour la similitude :  $\varphi = \frac{\lambda m}{\theta^2}$  qui constitue la loi de Newton.

Si  $m = \lambda^3$  on a la loi de Mariotte-Huyghens, relative au coefficient par lequel il

<sup>(1)</sup> C. Camichel, *Application des lois de similitude à l'étude des phénomènes qui se produisent à l'aval d'un corps immergé dans un fluide visqueux en mouvement*, 1925.

<sup>(2)</sup> C. R. de l'Ac. des Sciences, t. 147, p. 839.

<sup>(3)</sup> P. Dupin et M. Teissié-Solier, *Les tourbillons alternés et les régimes d'écoulement d'un fil autour d'un obstacle* (Gauthier-Villars, 1928).

faut multiplier les vitesses, c'est-à-dire  $\sqrt{\lambda}$  pour les vitesses linéaires et  $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$  pour les vitesses angulaires.

En 1883, O. Reynolds<sup>(1)</sup> étend ces considérations aux fluides visqueux et précise le rôle particulièrement important du paramètre  $\mathcal{R} = \frac{VD}{\frac{\mu}{e}}$  appelé depuis nombre de

Reynolds. Lord Rayleigh montra par la suite, que si la loi de similitude dynamique s'applique, on doit avoir  $\frac{D}{VT} = f(\mathcal{R})$ , autrement dit, qu'à un nombre de Reynolds déterminé  $\mathcal{R}$  correspond, quelle que soit la viscosité, la densité et la température du liquide, ainsi que le diamètre de l'obstacle, une valeur unique du nombre sans dimensions  $S = \frac{D}{VT}$  appelé par M. Henri Benard nombre de Strouhal. Du reste, on peut faire une démonstration simple de cette relation, basée sur des considérations d'homogénéité<sup>(2)</sup>. En écrivant que la période  $T$  est une fonction de la vitesse  $V$  du fluide, du diamètre  $D$  de l'obstacle et du coefficient cinématique de viscosité et en développant cette fonction en série entière, il vient :

$$T = c_{mnp} D^m V^n \nu^p,$$

avec  $mnp$ , indices de sommation.

On sait que les dimensions des diverses quantités sont :

$$D = L, \quad V = LT^{-1}, \quad \nu = L^2 T^{-1};$$

d'où :

$$T = c'_{mnp} L^{m+n+2p} T^{-n-p},$$

et cette dernière relation exige :

$$\begin{aligned} m+n+2p &= 0 & \text{et} & & -n-p &= 1, \\ n &= -1-p, & & & m &= 1-p. \end{aligned}$$

Il vient :

$$T = \sum c_p D^{1-p} V^{-1-p} \nu^p = \frac{D}{V} f\left(\frac{1}{\mathcal{R}}\right) \quad \text{et} \quad S = F(\mathcal{R}).$$

La similitude des fluides a été par la suite l'objet de multiples travaux,

<sup>(1)</sup> O. Reynolds, *Phil. Trans. of the Royal Soc. of London*, t. 174, 1883.

<sup>(2)</sup> P. Dupin et M. Teissié-Solier, *Les tourbillons alternés* (Gauthier-Villars).

parmi lesquels il y a lieu de citer au premier chef, une étude théorique et expérimentale de M. L. Escande<sup>(1)</sup>.

**Théorie classique<sup>(2)</sup>. Démonstrations diverses.** — I. On sait que si l'on considère  $n$  tourbillons d'intensité  $I_k$  en  $n$  points isolés  $z_k$ , en dehors des centres tourbillonnaires, il y a un potentiel complexe

$$f = \varphi + i\psi = \sum_1^n \frac{I_k}{2i\pi} \log(z - z_k)$$

et, par suite, une vitesse complexe

$$\frac{df}{dz} = u - iv = \frac{1}{2i\pi} \sum \frac{I_k}{z - z_k}.$$

En appliquant ces formules à la configuration des tourbillons de Benard-Karman, on a successivement :

$$z_k = z_0 + ke, \quad z'_k = z'_0 + ke, \quad z'_0 = z_0 - l - ih \quad \text{avec} \quad 2l = e.$$

Alors le potentiel complexe prend la forme

$$f = \frac{I}{2i\pi} \log \prod_{k=-\infty}^{k=+\infty} \frac{z - z_k}{z - z'_k}.$$

Or on a

$$(z - z_k)(z - z_{-k}) = (z - z_0)^2 - k^2 e^2 = k^2 e^2 \left[ \frac{(z - z_0)^2}{k^2 e^2} - 1 \right];$$

il vient alors

$$f = \frac{I}{2i\pi} \log \frac{\frac{z - z_0}{e} \prod' \left[ 1 - \frac{(z - z_0)^2}{k^2 e^2} \right]}{\frac{z - z'_0}{e} \prod' \left[ 1 - \frac{(z - z'_0)^2}{k^2 e^2} \right]},$$

$$f = \frac{I}{2i\pi} \log \frac{\sin \frac{\pi}{e} (z - z_0)}{\sin \frac{\pi}{e} (z - z'_0)},$$

<sup>(1)</sup> L. Escande, Thèse de doctorat. *Étude théorique et expérimentale sur la similitude des fluides incompressibles pesants*, 1929.

<sup>(2)</sup> H. Villat, *Leçons sur la théorie des tourbillons*, Gauthier-Villars, Paris, 1930.



en vertu de la formule classique d'Euler

$$\sin x = x \prod' \left( 1 - \frac{x^2}{k^2 \pi^2} \right).$$

Pour avoir la vitesse de  $z_0$  par exemple il faudra d'abord retrancher de ce potentiel complexe l'apport de  $z_0$ ; on a ainsi pour le nouveau potentiel complexe

$$F = f - \frac{1}{2i\pi} \log(z - z_0) = \frac{1}{2i\pi} \log \frac{\sin \frac{\pi}{e}(z - z_0)}{(z - z_0) \sin \frac{\pi}{e}(z - z'_0)};$$

il vient alors pour la vitesse complexe au point  $z_0$

$$\begin{aligned} \frac{2i\pi}{1} \frac{dF}{dz} &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d}{dz} \log \frac{\sin \frac{\pi}{e}(z - z_0)}{(z - z_0) \sin \frac{\pi}{e}(z - z'_0)} \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} \left[ \frac{\pi}{e} \cot(z - z_0) \frac{\pi}{e} - \frac{\pi}{e} \cot \frac{\pi}{e}(z - z'_0) - \frac{1}{z - z_0} \right]. \end{aligned}$$

Or par application du théorème de Cauchy on trouve immédiatement le développement suivant de la cotangente en série des fractions rationnelles

$$\cot x = \frac{1}{x} + 2x \sum_1^{\infty} \frac{1}{x^2 - k^2 \pi^2},$$

qui montre que

$$\frac{\pi}{e} \cot \frac{\pi}{e}(z - z_0) - \frac{1}{z - z_0} = \text{fonction s'annulant pour } z = z_0.$$

Il vient ainsi :

$$\begin{aligned} \frac{2i\pi}{1} (u_0 - iv_0) &= -\frac{\pi}{e} \cot \frac{\pi}{e}(z_0 - z'_0) = -\frac{\pi}{e} \cot \frac{\pi}{e} \left( \frac{e}{2} + ih \right), \\ \frac{2i\pi}{1} (u_0 - iv_0) &= \frac{\pi}{e} \operatorname{tg} i \frac{\pi h}{e} = i \frac{\pi}{e} \operatorname{th} \pi \frac{h}{e}, \end{aligned}$$

et en définitive :

$$\begin{aligned} u_0 &= \frac{1}{2e} \operatorname{th} \pi \frac{h}{e}, \\ v_0 &= 0, \end{aligned}$$

formules qui montrent que la configuration est permanente.

II. Mais on peut obtenir ces formules par un calcul très simple. Signalons à ce sujet une démonstration qui nous a permis de retrouver les résultats précédents sans passer par l'intermédiaire du potentiel complexe. Posons pour la commodité du calcul  $e = 2l$  (fig. 2) on a :

$$u = \sum u_i = \frac{1}{\pi} \sum_0^{\infty} \frac{\cos \alpha_i}{d_i},$$

$$\cos \alpha_i = \frac{h}{d_i},$$

$$u = 2 \sum V_i \cos \alpha_i = \frac{lh}{\pi} \sum_0^{\infty} \frac{1}{d_i^2},$$

$$d_i^2 = h^2 + (2i+1)^2 l^2,$$

$$u = \frac{lh}{\pi} \sum_0^{\infty} \frac{h^2 + (2i+1)^2 l^2}{1},$$

$$u = \frac{lh}{\pi l^2} \sum_0^{\infty} \frac{1}{(2i+1)^2 + \frac{h^2}{l^2}}.$$

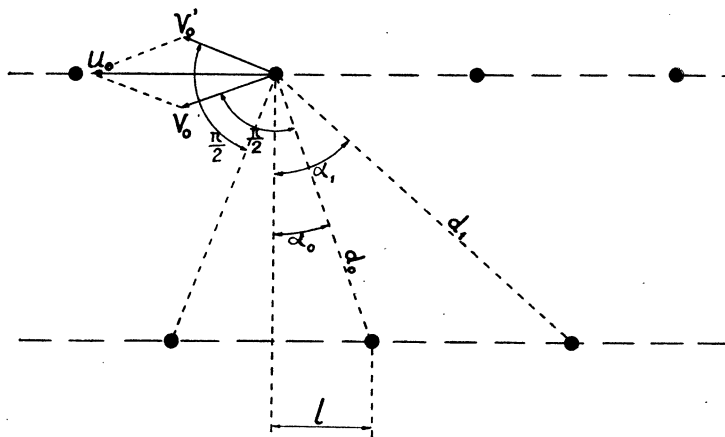


FIG. 2.

Or en remarquant que  $\frac{h}{l} < 1$  il vient pour  $i$  quelconque :

$$\frac{1}{(2i+1)^2 + \frac{h^2}{l^2}} = \frac{1}{(2i+1)^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{(2i+1)^2} \frac{h^2}{l^2}},$$

$$\frac{1}{(2i+1)^2 + \frac{h^2}{l^2}} = \frac{1}{(2i+1)^2} \left\{ 1 - \frac{1}{(2i+1)^2} \frac{h^2}{l^2} + \frac{1}{(2i+1)^4} \frac{h^4}{l^4} - \dots + (-1)^n \frac{1}{(2i+1)^{2n}} \frac{h^{2n}}{l^{2n}} + \dots \right\},$$

et il vient :

$$u = \frac{lh}{\pi l^2} \left\{ \sum_0^{\infty} \frac{1}{(2i+1)^2} - \frac{h^2}{l^2} \sum_0^{\infty} \frac{1}{(2i+1)^4} + \frac{h^4}{l^4} \sum_0^{\infty} \frac{1}{(2i+1)^6} - \dots + (-1)^n \frac{h^{2n}}{l^{2n}} \sum_0^{\infty} \frac{1}{(2i+1)^{2(n+1)}} \dots \right\},$$

ou encore avec la notation classique des sommes  $\sigma$  et  $\tau$  qui sont à l'origine des belles recherches de Riemann sur la fonction  $\zeta(s)$  ceci s'écrit

$$u = \frac{lh}{\pi l^2} \left[ \tau_2 - \frac{h^2}{l^2} \tau_4 + \frac{h^4}{l^4} \tau_6 - \dots \right];$$

en posant

$$x = i\pi \frac{h}{2l}, \quad i = \sqrt{-1},$$

et en vertu du développement classique

$$\operatorname{tg} x = \frac{8x}{\pi^2} \left[ \tau_2 + \frac{4x^2}{\pi^2} \tau_4 + \left( \frac{4x^2}{\pi^2} \right)^2 \tau_6 + \dots \right],$$

il vient

$$u = \frac{lh}{\pi l^2} \frac{\pi^2}{8x} \operatorname{tg} x = \frac{l}{4l} \operatorname{th} \pi \frac{h}{2l} = \frac{l}{2e} \operatorname{th} \pi \frac{h}{e},$$

en raison de la définition des lignes hyperboliques.

La convergence des séries employées étant immédiatement décelable aucune remarque n'est à faire, sauf toutefois pour celle qui représente la tangente.

En effet, le cercle de convergence de cette dernière série a pour rayon  $\frac{\pi}{2}$ , il faut donc que  $|x| < \frac{\pi}{2}$  (ceci tient d'ailleurs à la nature non entière de la tangente). Or,

la condition  $|x| < \frac{\pi}{2}$  s'écrit :

$$\frac{\pi}{2} \frac{h}{l} < \frac{\pi}{2},$$

et comme on a vu que  $\frac{h}{l} < 1$  elle est satisfaite.

Quant à la composante  $v$  on voit aisément qu'elle est nulle, les vitesses induites sur un tourbillon par deux tourbillons symétriques de sa file étant égales et opposées et les vitesses induites par les tourbillons de l'autre file admettant une résultante suivant la direction de l'écoulement.

III. Nous allons montrer qu'on peut encore établir la formule (1) d'une façon immédiate, en étudiant la vitesse complexe induite par une seule file de tourbillons.

Prenons un tourbillon de la file inférieure comme origine des axes et la file pour axe des  $x$ . Il vient :

$$u - iv = \frac{1}{2i\pi} \left[ \frac{1}{z} + \sum_1^{\infty} \left( \frac{1}{z - ke} + \frac{1}{z + ke} \right) \right],$$

et en posant  $z = \frac{lx}{\pi}$  il vient successivement

$$u - iv = \frac{1}{2i\pi} \left[ \frac{1}{z} + \sum_1^{\infty} \frac{2z}{z^2 - k^2 e^2} \right] = \frac{1}{2ie} \left[ \frac{1}{x} + \sum_1^{\infty} \frac{2x}{x^2 - k^2 \pi^2} \right],$$

ce qui s'écrit en vertu de la formule classique

$$\cot z = \frac{1}{z} + \sum_1^{\infty} \frac{2z}{z^2 - k^2 \pi^2},$$

$$u - iv = \frac{1}{2ie} \cot \pi \frac{z}{e};$$

et si l'on calcule la vitesse complexe au point  $z_0 = \frac{l}{2} + ih$  il vient comme précédemment :

$$u_0 - iv_0 = -\frac{1}{2ie} \cot \frac{\pi}{e} \left( \frac{e}{2} + hi \right) = \frac{1}{2ie} \operatorname{tg} i\pi \frac{h}{e} = \frac{1}{2e} \operatorname{th} \pi \frac{h}{e}.$$

Si l'on ajoute les deux potentiels complexes relatifs à chacune des deux files de tourbillons il vient immédiatement :

$$\frac{2i\pi}{1} f = \log \left[ \cot \pi \frac{z}{e} \coth \pi \frac{h}{e} + i \right],$$

$$\frac{2i\pi}{1} \frac{df}{dz} = \frac{2i\pi}{1} (u - iv) = -\frac{\pi}{e} \frac{\coth \pi \frac{h}{e}}{\sin^2 \pi \frac{z}{e}} \cdot \frac{1}{\cot \pi \frac{z}{e} \coth \pi \frac{h}{e} + i},$$

$$u - iv = i \frac{1}{e} \operatorname{ch} \pi \frac{h}{e} \frac{1}{\sin \frac{\pi}{e} (2z - ih) + i \operatorname{sh} \pi \frac{h}{e}};$$

et si l'on fait la translation d'axes indiquée dans la fig. 3 il vient

$$u - iv = i \frac{I}{e} \operatorname{ch} \pi \frac{h}{e} \frac{1}{\cos 2\pi \frac{z}{e} + i \operatorname{sh} \pi \frac{h}{e}},$$

$$u - iv = i \frac{I}{e} \frac{\sin \frac{2\pi\alpha}{e}}{\cos \frac{2\pi z}{e} - \cos \frac{2\pi\alpha}{e}}.$$

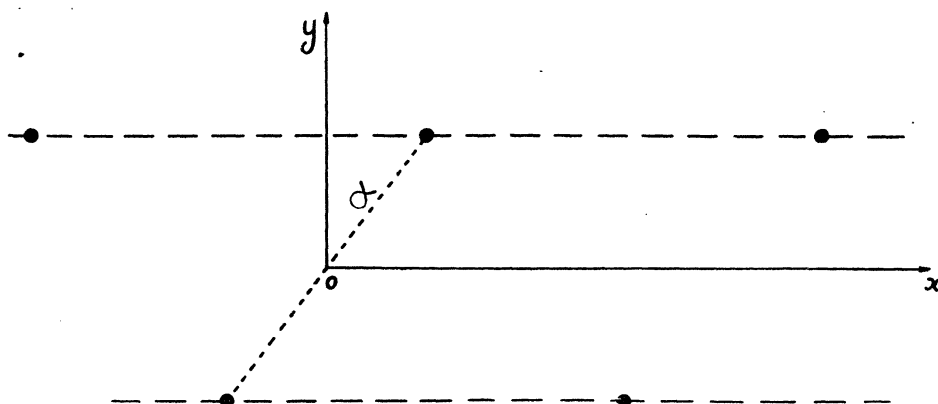


FIG. 3.

IV. Enfin, il est intéressant, en vue de certaines applications, de rappeler certaines autres formules concernant les tourbillons alternés. Nous donnerons de ces formules une démonstration nouvelle basée sur les propriétés de la fonction eulérienne de seconde espèce. Posons :

$$\alpha = \frac{l}{4} + i \frac{h}{2},$$

c'est-à-dire faisons le même changement d'axes que dans le cas antérieur (fig. 3) il vient pour le potentiel de la rue indéfinie

$$\frac{2i\pi}{I} f = \log \prod_{-\infty}^{+\infty} \frac{z - \alpha + ne}{z + \alpha + ne},$$

$$\frac{2i\pi}{I} f = \log \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(-\frac{z-\alpha}{e} + n\right) \dots \left(-\frac{z-\alpha}{e}\right) \left(\frac{z-\alpha}{e} + 1\right) \dots \left(\frac{z-\alpha}{e} + n\right) \frac{z-\alpha}{e} \cdot \frac{z+\alpha}{e}}{\left(-\frac{z+\alpha}{e} + n\right) \dots \left(-\frac{z+\alpha}{e}\right) \left(\frac{z+\alpha}{e} + 1\right) \dots \left(\frac{z+\alpha}{e} + n\right) \frac{z+\alpha}{e} \cdot \frac{z-\alpha}{e}},$$

et en vertu du prolongement analytique de la fonction  $\Gamma$

$$\Gamma(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m^x}{x(x+1)\dots(x+m)},$$

il vient :

$$\frac{2i\pi}{1} f = \log \frac{\Gamma\left(-\frac{z+\alpha}{e}\right) \Gamma\left(\frac{z+\alpha}{e}\right) \frac{z+\alpha}{e}}{\Gamma\left(-\frac{z-\alpha}{e}\right) \Gamma\left(\frac{z-\alpha}{e}\right) \frac{z-\alpha}{e}} = \log \frac{\Gamma\left(-\frac{z+\alpha}{e}\right) \Gamma\left(\frac{z+\alpha}{e} + 1\right)}{\Gamma\left(-\frac{z-\alpha}{e}\right) \Gamma\left(\frac{z-\alpha}{e} + 1\right)},$$

en vertu de l'équation fonctionnelle :

$$x\Gamma(x) = \Gamma(x+1);$$

et en appliquant la relation des compléments :

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x},$$

il vient comme précédemment et avec les restrictions connues :

$$\frac{2i\pi f}{1} = \log \frac{\sin \frac{\pi}{e}(z-\alpha)}{\sin \frac{\pi}{e}(z+\alpha)}.$$

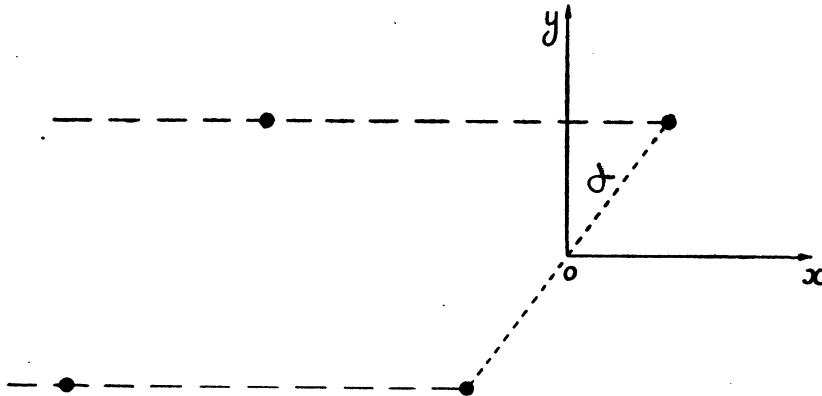


FIG. 4.

On pourrait aussi établir simplement ces formules ainsi que les suivantes en partant de :

$$\frac{1}{z\Gamma(z)} = e^{Cz} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}},$$

développement valable quel que soit  $z$  et où  $C$  est la constante d'Euler.

Si l'on se borne à considérer la demi-rue représentée dans la fig. 4 on a :

$$\frac{2i\pi}{1} f_i = \log \prod_0^{\infty} \frac{z - \alpha + ne}{z + \alpha + ne} = \log \prod_0^{\infty} \frac{\frac{z - \alpha}{e} + n}{\frac{z + \alpha}{e} + n} = \log \frac{\Gamma\left(\frac{z + \alpha}{e}\right)}{\Gamma\left(\frac{z - \alpha}{e}\right)},$$

$$\frac{2i\pi}{1} \frac{df_i}{dz} = \frac{\Gamma'\left(\frac{z + \alpha}{e}\right)}{\Gamma\left(\frac{z + \alpha}{e}\right)} - \frac{\Gamma'\left(\frac{z - \alpha}{e}\right)}{\Gamma\left(\frac{z - \alpha}{e}\right)} = \Phi\left(\frac{z + \alpha}{e}\right) - \Phi\left(\frac{z - \alpha}{e}\right),$$

en introduisant la fonction  $\Phi$  de la théorie de la fonction  $\Gamma$ . On obtient ainsi d'une façon très simple une formule qui a déjà été démontrée par M. M.-J.-L. Synge<sup>(1)</sup> et qui sert notamment au calcul de la résistance moyenne.

V. Signalons en passant que lorsqu'on considère un écoulement plan à potentiel des vitesses d'un liquide visqueux la fonction dissipative

$$2\mathfrak{D} = \mu \left[ 2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right],$$

s'écrit en appelant :

$$f = \varphi + i\psi$$

le potentiel complexe et en vertu des conditions de Cauchy :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x},$$

$$\mathfrak{D} = 2\mu \left| \frac{d^2 f}{dz^2} \right|^2. \quad (a)$$

En tenant compte des relations bien connues reliant les composantes de la pression visqueuse  $P_v$  aux composantes de la vitesse on a de plus

$$P_v^2 = 2\mu \mathfrak{D} \quad (b)$$

et en valeur absolue :

$$P_v = 2\mu \left| \frac{d^2 f}{dz^2} \right|;$$

sa grandeur est alors indépendante de la direction de la normale envisagée.

---

(1) M. J.-L. Synge, *Proc. Roy. Irish Acad.*, t. XXXVII A, 1927, p. 95.

Les équations (a) et (b) nous permettent alors, en raison de l'analyticité de la fonction  $f$ , d'énoncer le théorème suivant :

Ni la fonction dissipative ni la pression visqueuse ne peuvent dans ce cas avoir d'extremum.

Remarquons qu'en général  $\Delta \mathfrak{D} \neq 0$ . On a en effet :

$$\frac{\mathfrak{D}}{2\mu} = \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$$

et par un calcul facile :

$$\frac{\Delta \mathfrak{D}}{8\mu} = \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right)^2 = \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)^2.$$

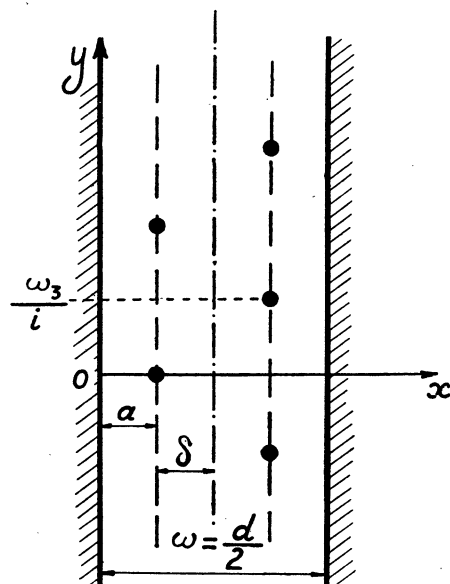


FIG. 5.

Rappelons enfin que dans le cas d'un liquide parfait limité par deux parois parallèles, on a en posant :

$$\frac{\omega_1}{2} - a = \delta$$

et avec les notations de Tannery-Molk<sup>(1)</sup> (fig. 5)

$$u = 0, \quad v = \zeta_1(2\delta) + \zeta_3(2\delta) - \frac{4\gamma_1\delta}{\omega_1}.$$

<sup>(1)</sup> Tannery-Molk, *Traité des fonctions elliptiques*.



Dans ces conditions, et ainsi que l'a montré M. H. Villat<sup>(\*)</sup>, si l'on fait croître indéfiniment  $\omega_1$  de façon que  $\delta$  reste fini on retrouve la formule relative au cas des tourbillons alternés dans un milieu indéfini.

**Études expérimentales récentes.** — Les études expérimentales les plus récentes sur les tourbillons alternés sont celles de MM. C. Camichel, P. Dupin et M. Teissié-Solier<sup>(2)</sup>. Les obstacles utilisés par ces auteurs étaient des cylindres de révolution immergés dans un champ uniforme de vecteurs vitesses. Ils sont parvenus aux conclusions suivantes relatives aux systèmes en charge :

a) La loi de similitude dynamique de Reynolds s'applique aux périodes de formation des tourbillons alternés<sup>(3)</sup>;

b) Il existe une valeur  $R_c$  du rapport  $\frac{VD}{\nu}$  ou critérium marquant l'apparition des tourbillons alternés ;

c) Il est possible par la vibration de tiges encastrées de déceler, dans la zone correspondant au régime de Poiseuille, des phénomènes périodiques dont la fréquence suit les mêmes lois que celle des tourbillons alternés. Par suite, il n'existe aucune discontinuité, à proprement parler, entre les deux régimes, si ce n'est en ce qui concerne l'aspect du phénomène en l'absence de toute intervention extérieure.

M. M. Teissié-Solier<sup>(4)</sup> a, en outre, étudié les tourbillons alternés en surface libre et examiné pour un écoulement en charge, le cas des obstacles de formes différentes. Il a dégagé l'importance de la notion d'obstacles semblables et montré que :

a) La loi de similitude de Reynolds s'applique aux périodes de formation des tourbillons alternés étudiés en surface libre ;

b) Les résultats obtenus dans l'étude de ces tourbillons en surface libre et dans la masse, en régime turbulent et non turbulent, étant en bon accord, le sillage d'un corps conserve, dans ces différents cas, les mêmes caractéristiques ;

c) Les périodes de formation des tourbillons alternés prenant naissance dans le sillage d'obstacles semblables pour lesquels le rapport de la longueur à la dimen-

(\*) H. Villat, *Annales de l'École Normale*, 1929.

(2) C. R. de l'Acad. des Sciences, t. 184, p. 1509.

C. R. de l'Acad. des Sciences, t. 185, p. 1556.

C. R. de l'Acad. des Sciences, t. 186, p. 203.

(3) MM. C. Camichel, L. Escande et Ricaud ont montré l'application de cette même loi aux courbes à poids singuliers ( $\alpha$ ,  $\beta$ ) en régime de Poiseuille, *C. R.*, t. 180, p. 1326.

(4) M. Teissié-Solier, Thèse de doctorat; Faculté des Sciences de Toulouse, n° 51, 1931.

sion transversale est très grand, suivent la loi de similitude à condition que les sections de ces obstacles soient semblables entre elles.

**Courbe de Strouhal**<sup>(1)</sup>. — Les expériences ci-dessus ont permis à leurs auteurs le tracé d'une courbe de Strouhal unique allant jusqu'à des nombres de Reynolds de l'ordre 2,10<sup>4</sup> (fig. 6). On voit qu'entre 1.500 et 20 000 le paramètre de Strouhal

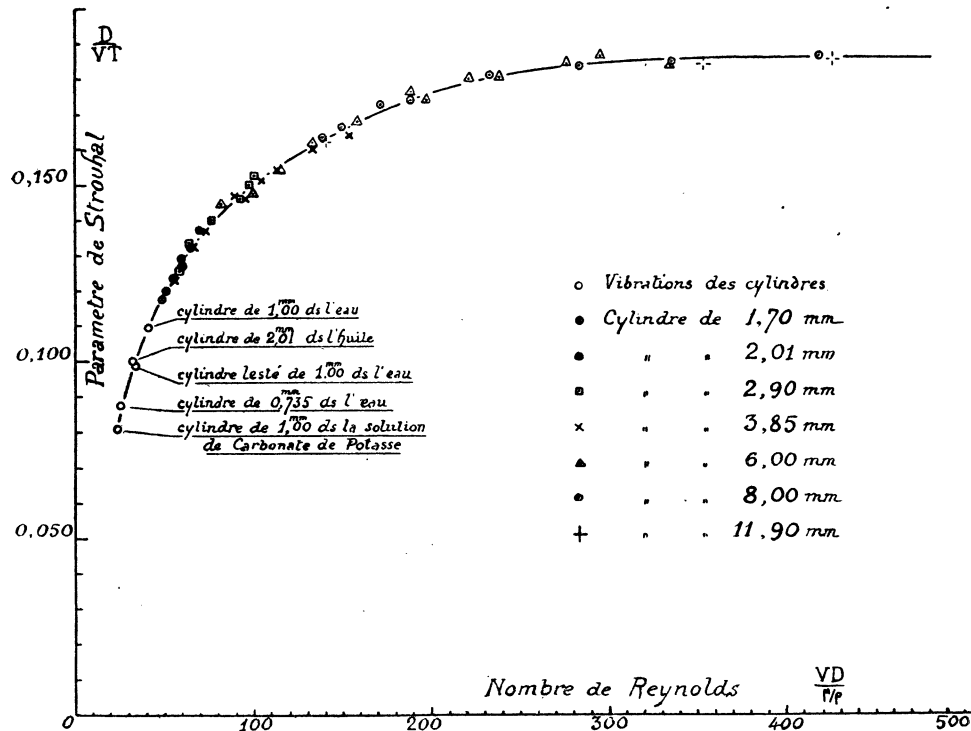


FIG. 6. — Variation de S en fonction de R. Courbe de Strouhal.

conserve une valeur sensiblement constante et égale à 0,200. Mais, dans la première partie de cette courbe, S est essentiellement variable. On en conclut que, pour cette partie, la théorie de Karman attribuant à S la valeur  $S = \frac{1-a}{b} = c^{\text{te}}$  se trouve en défaut. Pour des nombres de Reynolds variant entre 300 et 1.000, S varie seulement entre 0,185 et 0,193.

D'après les expériences de MM. Henri Benard, P. Dupin et M. Teissié-Solier, on peut dire que, pour :  $R < 300$ ,

1° b décroît très lentement avec R;

(1) C. R. de l'Ac. des Sc., t. 185, p. 1556, loc. cit.

2°  $a$  varie beaucoup avec  $R$  et c'est principalement à cette variation que l'on doit attribuer celle du paramètre de Strouhal.

Dans une première approximation, on peut donc admettre que la théorie de Karman est valable pour  $R > 300$ .

Enfin, MM. C. Camichel et M. Teissié-Solier<sup>(1)</sup> ont, dans de nouvelles expériences, étudié l'influence d'une perturbation sur le sillage en régime de Poiseuille d'un corps immergé. Ils ont montré que l'on assiste dans ces conditions à l'apparition dans le sillage d'un phénomène périodique présentant les mêmes caractères que les tourbillons alternés et que les périodes mesurées donnent des valeurs du paramètre de Strouhal permettant de prolonger le tracé de la courbe de Strouhal au-dessous du critérium. L'emploi d'un robinet tournant leur  $a$ , même, permis de réaliser l'entretien du phénomène ainsi mis en évidence.

La vibration des tiges immergées et l'entretien des tourbillons alternés au-dessous du critérium fournissent une confirmation de l'hypothèse classique de Reynolds.

1° Dans le cas d'une tige immergée dont la période d'oscillation a été judicieusement choisie, il est possible, ainsi que nous l'avons dit, de faire entrer en vibration cette tige pour des valeurs du nombre de Reynolds nettement inférieures au critérium des tourbillons alternés;

2° Toujours au-dessous du critérium, si l'on modifie les conditions de l'écoulement par un choc sur le prolongement de la tige, la perturbation fait apparaître dans le sillage des encoches avec une certaine période;

3° Enfin l'emploi du robinet tournant permet d'entretenir les tourbillons alternés au-dessous de leur critérium.

Tout d'abord la bonne concordance des résultats obtenus par ces trois méthodes permet de prolonger la courbe de Strouhal au-dessous du critérium d'une manière unique. Dans le cas de la tige immergée, la résonance de cette dernière introduit un facteur d'amplification qui permet l'existence des tourbillons dans des conditions bien déterminées, malgré l'amortissement dû à la viscosité.

Dans le cas d'une excitation par choc on trouve pour la même tige et le même nombre de Reynolds que dans le cas précédent, la même période pour la formation des encoches. Ici elles s'amortissent très rapidement. Enfin, dans le cas du robinet tournant elles peuvent subsister si la période de ce dernier est assez voisine de la période qu'auraient les tourbillons alternés pour le nombre de Reynolds considéré. L'amplitude de l'oscillation du sillage passe d'ailleurs par un maximum pour une certaine valeur de la période du robinet qui définit alors le point figuratif sur la

---

(1) *C. R. de l'Ac. des Sciences*, t. 200, p. 604.

courbe de Strouhal. On peut donc dire que  $R$  joue le rôle d'une résistance tantôt positive, tantôt négative.

A la suite de ces études, ils ont été amenés à considérer la variation de l'amplitude des oscillations du sillage en régime de Poiseuille et lors de l'établissement des tourbillons alternés<sup>(1)</sup>. Nous reviendrons, par la suite, sur cette dernière question.

---

<sup>(1)</sup> Deuxième supplément à la *Notice sur les travaux scientifiques de M. C. Camichel*, p. 12, 1935.

## CHAPITRE II

### Étude des battements.

Quand on observe, pour un nombre de Reynolds supérieur au critérium des tourbillons alternés, le sillage d'un cylindre immergé dans un champ de vecteurs vitesses uniforme réalisé dans un système en charge, on constate parfois l'existence d'un phénomène présentant le caractère d'un battement. Si l'on éclaire un plan normal à l'axe de l'obstacle et que l'on examine le sillage, on voit, en effet, dans certaines conditions que nous préciserons par la suite, que la formation des tourbillons alternés ne semble pas toujours régulière, que le sillage se brouille de temps à autre et présente des variations d'amplitude très nettes (Pl. III, fig. c).

Cette particularité du sillage a été signalée par MM. H. Bénard, C. Camichel<sup>(1)</sup>, P. Dupin et M. Teissié-Solier<sup>(2)</sup>. Ces derniers ont, en particulier, fourni, pour un obstacle à section circulaire de 3,9 mm. de diamètre, une courbe montrant la régularité que peut présenter parfois ce battement.

Ce phénomène ne pouvant en aucune façon s'expliquer si l'on admet une monopériodicité à l'aval du cylindre, nous avons été conduits à étudier successivement :

- a) L'action mutuelle de deux rues de tourbillons alternés ;
- b) La répartition des périodes de formation de ces tourbillons à l'aval d'un cylindre immergé dont l'axe était disposé normalement à la direction de la vitesse du fluide<sup>(3)</sup>.

Avant d'entrer dans le détail du dispositif expérimental et des résultats obtenus, nous donnerons quelques indications sur les méthodes utilisées pour les mesures de la vitesse du fluide et de la fréquence des tourbillons.

**Mesure de la vitesse.** — La mesure précise de la vitesse du fluide est une chose primordiale. Or, jusqu'à l'apparition de la méthode chronophotographique de M. C. Camichel, on se heurtait à de grosses difficultés; on ne pouvait, en effet, déterminer la valeur de la vitesse en un point de l'écoulement qu'à partir de la vitesse moyenne déduite d'un jaugeage. En particulier, dans le cas d'un écoulement

---

<sup>(1)</sup> C. R. de l'Ac. des Sciences, t. 184, p. 1509, 1927.

<sup>(2)</sup> P. Dupin et M. Teissié-Solier, *Les tourbillons alternés* (Gauthier-Villars, 1928).

<sup>(3)</sup> C. R. de l'Ac. des Sciences, t. 205, p. 23.

obtenu à l'aval d'une tubulure en forme de veine moulée, un champ uniforme de vecteurs vitesses, s'établit dans la presque totalité de la section, sauf au voisinage des parois où existe une couche limite. De ce fait, la valeur de la vitesse moyenne trouvée est différente de la valeur de la vitesse du champ. Rappelons brièvement le principe de cette méthode.

**Méthode chronophotographique de M. C. Camichel.** — La méthode chronophotographique de M. C. Camichel consiste à photographier dans leur déplacement des particules métalliques, généralement en aluminium, en suspension dans le liquide; ces particules sont éclairées, soit en permanence, soit par intermittence. Un système comprenant un arc *A*, une fente *F*, et une lentille *L*, permet d'éclairer la section à étudier. Si le fluide est au repos, les particules métalliques apparaissent comme des points très lumineux se détachant sur un fond noir.

Si le fluide est en mouvement, il entraîne les particules qui tracent de la sorte des trajectoires lumineuses que l'on peut photographier. En complétant le dispositif

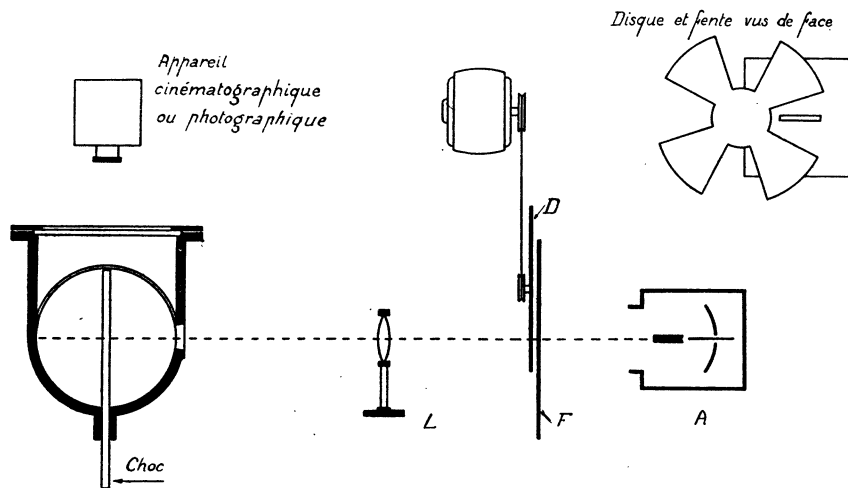


FIG. 7. — Schéma du dispositif expérimental de la méthode chronophotographique.

d'éclairage par un disque denté *D*, entraîné par un moteur à vitesse constante, disque qui permet d'obturer par intermittence la fente *F*, et, par suite, de n'éclairer la section que pendant des intervalles de temps connus, on peut déduire du tracé discontinu des trajectoires la valeur de la vitesse en un point quelconque de la section étudiée (*fig. 7*). Le produit de la distance *e* de deux points homologues *a* et *b*, par le rapport de réduction *r* du cliché, est égal au déplacement réel de la particule pendant le temps *t* que met une dent pour occuper dans l'espace la même position que

la précédente. Si  $N$  est le nombre de tours du disque par minute et  $d$ , le nombre de dents, on a :  $v = \frac{Nd}{60} re$  (fig. 8).

Les particules sélectionnées ont un diamètre de l'ordre de  $1/10$  de mm. Pour les sélectionner, on les laisse quelque temps dans le liquide au repos, on élimine ensuite celles qui montent à la surface ou tombent au fond du vase.

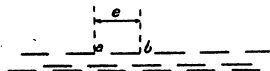


FIG. 8. — Emploi de la méthode chronophotographique.

La méthode chronophotographique est aujourd'hui un des moyens d'exploration le plus précieux de l'hydrodynamique expérimentale; on peut citer, en particulier, comme applications intéressantes les expériences de M. C. Camichel<sup>(1)</sup> sur l'écoulement d'un liquide en régime permanent dans les chambres d'eau, expériences qui ont montré l'existence d'un potentiel des vitesses de la forme  $\frac{k}{r}$ , celles de MM. L. Escande et M. Teissié-Solier<sup>(2)</sup> qui ont déterminé en appliquant le théorème de Stokes et la méthode chronophotographique le potentiel des vitesses dans des écoulements plans. Enfin, une expérience faite par M. P. Dupin<sup>(3)</sup> prouve que l'inertie de la particule n'introduit aucune perturbation et n'apporte aucune erreur appréciable.

**Mesure de la fréquence.** — La méthode la plus simple consiste à procéder par observation directe, c'est-à-dire à contrôler à l'aide d'un compte-secondes le temps correspondant à la naissance d'un nombre donné de tourbillons.

La méthode de franges de M. C. Camichel<sup>(4)</sup> rend, de son côté, de très grands services. Elle consiste à immobiliser par stroboscopie une série de franges lumineuses, qui apparaissent dans le sillage de l'obstacle par suite de l'orientation commune des groupes des particules d'aluminium sous l'influence des tourbillons alternés. Cette orientation découle de la propriété que possèdent ces particules de se disposer de telle sorte que leur plan soit normal au vecteur accélération au point considéré<sup>(5)</sup>.

La méthode du fil procède également par stroboscopie, on l'appelle encore méthode du drapeau. On fixe au pont milieu aval de la génératrice du cylindre un

<sup>(1)</sup> *C. R. de l'Ac. des Sciences*, t. 170, p. 881.

<sup>(2)</sup> *C. R. de l'Ac. des Sciences*, t. 189, p. 317.

<sup>(3)</sup> P. Dupin, Thèse de doctorat; Fac. des Sc. de Toulouse, 1930.

<sup>(4)</sup> *C. R. de l'Ac. des Sciences*, t. 184, p. 1509.

<sup>(5)</sup> Torahiko Terada et Kunio Hattori, *Soments experiments ou montion of fluids*.

fil blanc de longueur convenable qui, ondulant sous l'influence des tourbillons, permet par stroboscopie d'en déterminer leur fréquence.

La méthode du fil chaud permet aussi de déterminer la fréquence avec une grande exactitude. On place en un point du sillage de l'obstacle un fil fin en platine ou en fer parcouru par un courant électrique. Le refroidissement de ce fil étant fonction de la vitesse du liquide et cette dernière étant une fonction périodique du temps, il suffit de placer ce dernier sur l'un des bras d'un pont de Wheastone pour qu'un galvanomètre à miroir placé dans une diagonale permette d'enregistrer photographiquement l'intervalle de temps séparant la formation de deux tourbillons consécutifs. Cette méthode a, en particulier, été utilisée avec succès par M. Crausse<sup>(1)</sup> dans son étude des tourbillons secondaires.

Sous certaines réserves et, en particulier, pour des nombres de Reynolds assez faibles, on peut utiliser pour la mesure de la fréquence la méthode des tiges vibrantes qui a permis d'ailleurs de prolonger la courbe  $S = f(R)$  ou courbe de Strouhal au-dessous du critérium des tourbillons alternés.

Enfin, pour les études en surface libre, nous signalerons la méthode optique d'occultation de M. Henri Bénard ainsi que la modification apportée à cette méthode par M. Schwarz<sup>(2)</sup>.

Signalons aussi que si l'on enregistre sur un film la formation des tourbillons et le temps, on peut déterminer la fréquence de ceux-ci. C'est cette dernière méthode qui a été employée dans le chapitre III.

**Dispositif expérimental et mode opératoire.** — Nous avons utilisé l'ajutage de 30 cm. de diamètre du laboratoire d'hydraulique de l'Institut Électrotechnique de l'Université de Toulouse (PL. II, fig. a).

Cet ajutage est précédé d'une tubulure d'un des types donnés par M. Rateau qui le raccorde à une conduite de 1 m. 20 de diamètre débouchant d'un bassin de grande capacité. La présence de cette tuyère donne un parallélisme absolu des filets fluides ainsi qu'un champ de vecteurs vitesses uniforme dans la presque totalité de l'ajutage. Ce dernier est suivi d'une conduite de 30 cm. de diamètre et de 5 m. de longueur commandée à l'aval par une vanne permettant le réglage du débit. Une glace formant une partie de la surface latérale de l'ajutage permet d'effectuer l'éclairage d'une section quelconque de l'écoulement; tandis qu'une deuxième glace est destinée à l'observation. La figure 9 schématise le montage du système optique d'éclairage comprenant un arc A, une fente F, une lentille L, et un prisme P.

Pour la détermination de la période des battements nous avons utilisé l'enregistrement de ces derniers sur un cylindre enfumé. L'amplitude des battements étant

<sup>(1)</sup> M. Crausse, Thèse de doctorat, Toulouse, 1936.

<sup>(2)</sup> M. Schwarz, Publications scientifiques du Ministère de l'Air, fasc. 100, 1937.



assez variable et un certain nombre d'entre eux pouvant, parfois, passer inaperçus, cette méthode s'est révélée supérieure à l'observation directe.

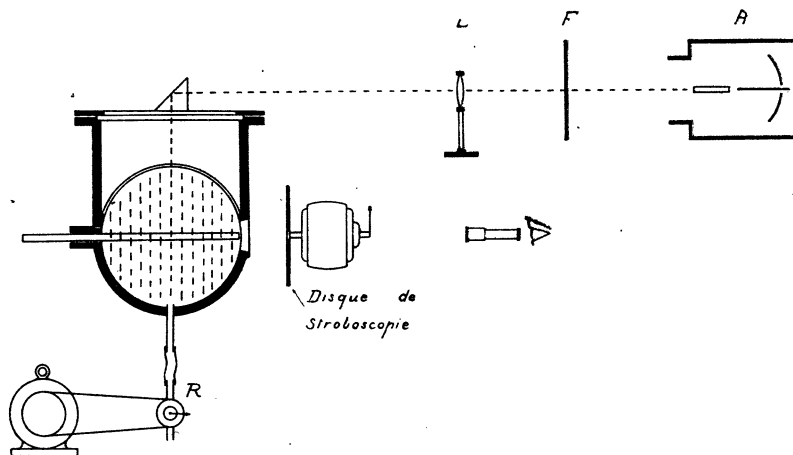


FIG. 9. — Schéma du dispositif expérimental utilisé dans l'étude des battements.

Nous avons adopté suivant les fréquences, pour la détermination de la période des tourbillons alternés, soit l'observation directe, soit la méthode du drapeau. Dans cette dernière, le fil était fixé à une fourchette indépendante de l'obstacle comme il est indiqué dans la fig. 10 et placé à moins de 1 mm. de la génératrice aval du cylindre.

La méthode chronophotographique nous a servi à la détermination de la vitesse du fluide dans la section étudiée.

**Cas de deux cylindres. Interférences.** — En vue d'analyser le phénomène des battements, nous avons tout d'abord utilisé deux cylindres de révolution de diamètres différents accolés par une de leurs bases et conservant une génératrice commune.

L'ensemble était immergé horizontalement dans l'ajutage déjà décrit de telle sorte que la section de raccordement fût dans le plan médian de ce dernier. Les deux extrémités de l'obstacle s'appuyaient aux parois. L'observation se faisait d'une façon directe en éclairant vivement la section étudiée et sans recours à aucun procédé destiné à augmenter la visibilité des tourbillons. De ce fait, les perturbations apportées au phénomène étaient réduites au minimum. Les cylindres accolés avaient respectivement pour diamètres : 4 mm. et 6 mm. et chacun d'eux une longueur de 150 mm.

Nous avons distingué trois cas d'après la position occupée par la génératrice commune : à l'aval, à l'amont ou dans la partie supérieure ou inférieure.

a) *Génératrice commune à l'amont.* — On constate pour une vitesse supérieure à celle correspondant au critérium pour le cylindre du plus petit diamètre, l'existence d'un battement dans le plan contenant la section de raccordement des deux cylindres. Ce battement est très net et sa période  $\Theta$  très régulière.

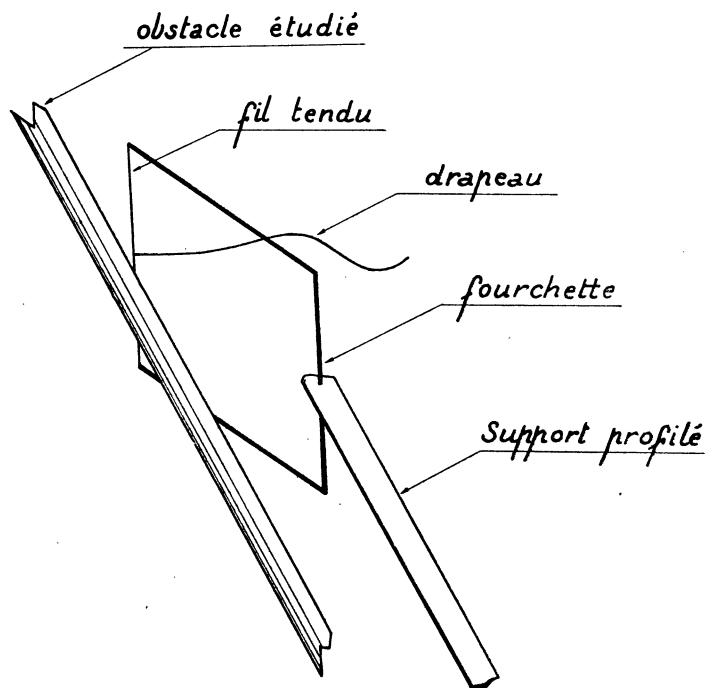


FIG. 10. — Méthode du drapeau.

$T_1$  représentant la période de formation des tourbillons alternés à l'aval du cylindre de 6 mm. de diamètre, et  $T_2$  la période de formation de ces tourbillons à l'aval du cylindre de 4 mm. de diamètre, toutes les deux mesurées à 10 mm. environ de la section d'accolement, nous pouvons résumer quelques résultats des expériences, par le tableau I :

TABLEAU I.  
Température 9°.

$T_1$ sec.	$T_2$ sec.	$\Theta$ sec.
2,25	1,59	5,32
2,08	1,44	4,68
1,60	1,10	3,53
1,48	1,02	3,30
1,22	0,82	2,46
1,20	0,79	2,40
0,80	0,54	1,64
0,768	0,51	1,52

La régularité de la période  $\Theta$  du battement nous a amené à essayer d'interpréter algébriquement les résultats du tableau I, par la formule classique :

$$(1) \quad \Theta = \frac{T_1 T_2}{T_1 - T_2}.$$

Le tableau II montre que les écarts entre les périodes mesurées  $\Theta_m$  et les périodes calculées  $\Theta_c$  par application de la formule (1) sont très faibles et ne dépassent guère 2 %. Ceci nous permet donc de préciser que le battement observé provient de l'interférence des tourbillons alternés de périodes  $T_1$  et  $T_2$  qui prennent naissance de part et d'autre de la section de raccordement des deux cylindres.

*b) Génératrice commune à l'aval.* -- Nous avons constaté que vis-à-vis du cas précédent, pour une même vitesse d'attaque :

- 1° La période  $T_2$  est sensiblement la même;
- 2° La période  $T_1$  est légèrement plus faible;
- 3° La formule I est vérifiée.

Le tableau III résume quelques résultats concernant le cas où la génératrice commune est orientée vers l'aval.

*c)* Comme il était à prévoir, d'après la symétrie du système les résultats sont les mêmes que la génératrice commune soit dans la partie inférieure ou supérieure. La valeur de  $T_2$  reste pour une même vitesse d'attaque, sensiblement constante; quand à  $T_1$ , elle est comprise entre les valeurs qu'elle prend dans les cas *a* et *b*.

**Remarques.** — Les résultats résumés dans le tableau I montrent que le rapport  $\frac{T_1}{T_2}$  croît avec la vitesse d'attaque et passe de 1,415 à 1,495, dans les limites de nos expériences.

TABLEAU II.

$\Theta_m$ sec.	$\Theta_e$ sec.	$\varepsilon$ en %.
5,32	5,42	1,8
4,80	4,90	2,0
4,68	4,69	0,2
3,53	3,52	0,3
3,30	3,30	0,0
2,46	2,48	1,0
2,40	2,36	— 2,5
1,64	1,66	1,2
1,52	1,535	1,0

TABLEAU III.

$T_1$ sec.	$T_2$ sec.	$\Theta_m$ sec.	$\Theta_e$ sec.
2,10	1,60	6,50	6,70
1,50	1,10	4,50	4,12
1,15	0,79	2,80	2,54

De son côté, le tableau III relatif à la position aval de la génératrice commune met en évidence une croissance analogue de ce rapport.

Cette variation s'explique aisément par des considérations de similitude. Soit, en effet,  $V$ , la vitesse du fluide  $\nu$ , son coefficient cinématique de viscosité  $\mathcal{R}_1$ ,  $\mathcal{R}_2$ ,  $S_1$  et  $S_2$  les paramètres de Reynolds et de Strouhal relatifs aux deux obstacles, de diamètres  $D_1$  et  $D_2$ , on a :

$$\mathcal{R}_1 = \frac{VD_1}{\nu}, \quad S_1 = \frac{D_1}{VT_1},$$

$$\mathcal{R}_2 = \frac{VD_2}{\nu}, \quad S_2 = \frac{D_2}{VT_2},$$

$$(2) \quad \frac{T_1}{T_2} = \frac{D_1}{D_2} \frac{S_2}{S_1}.$$

Or comme dans notre cas,  $D_1 > D_2$  il vient  $\mathcal{R}_1 > \mathcal{R}_2$  et par conséquent l'égalité (2) montre qu'en général

$$\frac{T_1}{T_2} \leq \frac{D_1}{D_2} = 1,5,$$

l'égalité n'ayant lieu que pour des nombres de Reynolds très grands.

Le sens de la dernière inégalité explique bien les résultats obtenus. On voit de plus que pour des très grands nombres de Reynolds la formule (1) qui fait intervenir  $T_1$  et  $T_2$  se simplifie; en effet, on a alors  $S_2 = S_1$  et il vient :

$$\Theta = \frac{1,5 T_2^2}{T_2(1,5 - 1)} = 3T_2 = 2T_1,$$

formule qui ne fait intervenir qu'une seule des deux périodes.

**Obstacle cylindrique de diamètre constant.** — Nous avons disposé horizontalement dans l'ajutage de 30 cm. déjà décrit un obstacle cylindrique de 6 mm. de diamètre et de 300 mm. de longueur. Nous avons mesuré pour des valeurs différentes de la vitesse, et en allant du plan médian vers la paroi, les périodes de formation des tourbillons alternés dans une série de plans perpendiculaires à l'axe de l'obstacle (*fig. 9*).

Les mesures ont été faites à des températures voisines de 10° et rapportées par similitude à la température moyenne de 11°3. Pour un cylindre donné, si  $T_1$ ,  $V_1$ ,  $\nu_1$  sont respectivement la période, la vitesse et le coefficient cinématique de viscosité du fluide, à une température  $\theta_1$ ,  $T_2$ ,  $V_2$ ,  $\nu_2$  les quantités correspondantes pour une température  $\theta_2$  on a :

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\nu_2}{\nu_1}, \quad \frac{V_1}{V_2} = \frac{\nu_1}{\nu_2},$$

en vertu des lois de similitude. Ce sont ces relations qui nous ont permis de rapporter les résultats des mesures à une température unique.

Utilisant les résultats ainsi obtenus, nous avons été amenés à distinguer plusieurs zones dans le sillage de l'obstacle :

1° Tout d'abord au voisinage du critérium, pour une période à l'axe de 4 sec. environ, on constate en partant du plan médian la formation de tourbillons alternés sur une longueur de 60 mm. environ de part et d'autre de ce plan; tandis que dans la portion de 90 mm. qui s'étend jusqu'à la paroi aucun tourbillon n'existe. Le phénomène est d'ailleurs entièrement symétrique par rapport au plan médian. La période des tourbillons alternés qui prennent naissance dans ces conditions, est pra-

tiquement constante et parfaitement définie quel que soit le plan d'observation, et aucun battement n'est visible dans le sillage de l'obstacle. Le tableau IV résume les résultats d'une expérience correspondant à ce cas.

TABLEAU IV.

Vitesse 1,15 cm. : sec. — Température 11°3.

Distance au plan médian en mm.	Période des tourbillons en sec.	Battements.
axe	4,20	Aucun battement. n'est visible.
20	4,30	
30	4,20	
40	4,26	
50	4,26	
60	4,25	
70 à 150	Il n'y a pas formation de tourbillons alternés.	

2° Pour des nombres de Reynolds supérieurs au critérium et correspondant à des périodes au centre comprises entre 3,5 sec. et 2 sec. environ, le phénomène se modifie. On constate alors pour une même vitesse l'existence dans le sillage de l'obstacle de deux périodes distinctes :

a) L'une qui peut être observée dans la partie centrale de l'obstacle, de part et d'autre du plan médian sur une longueur qui, suivant la vitesse, varie de 60 à 70 mm. et dont nous désignerons par  $T$  la valeur;

b) L'autre  $T' > T$  qui apparaît au contraire dans les portions de l'obstacle placé à proximité des parois.

D'autre part, dans la partie intermédiaire, séparant les deux zones  $T$  et  $T'$ , on observe l'existence de battements très réguliers de période  $\Theta$  et il n'est pas possible dans cette dernière zone de mesurer une valeur bien définie de la période des tourbillons alternés. On constate en effet que la période de formation de ces tourbillons  $y$  est constamment variable et oscille en permanence entre les valeurs  $T$  et  $T'$  qu'elle a dans les deux zones limitrophes.

Les battements ayant toutefois une période assez régulière, nous avons essayé de les interpréter comme dans le cas de deux cylindres accolés bout à bout. La formule (1) s'accorde encore ici d'une manière satisfaisante à ce phénomène ainsi que le montre d'ailleurs le tableau VII. On peut donc préciser que les battements observés

sont dus à l'interférence des tourbillons de période  $T$  et  $T'$  prenant naissance de part et d'autre de la zone de période instable.

TABLEAU V.

Vitesse 1,32 cm. : sec. — Température 11°3.

Distance à l'axe en mm.	Période en sec.	Battements.
0	3,4	Pas de battements.
30	3,4	
50	3,4	
70		27,3
80	4,0	Pas de battements.
90	4,0	
95 à 150	Pas de tourbillons.	

TABLEAU VI.

Vitesse 1,93 cm. : sec. — Température 11°3.

Distance à l'axe en mm.	Période en sec.	Battements.
0	2,04	Pas de battements.
20	2,04	
40	2,04	
60	2,04	
70		13,6
80	2,42	Pas de battements.
100	2,42	
112 à 150	Pas de tourbillons.	

TABLEAU VII.

Température 11°3.

$T$ sec.	$T'$ sec.	$\Theta$ mesuré.	$\Theta$ calculé.	Vitesse cm. : sec.	$\varepsilon$ %.
3,5	4,00	27,3	28	1,32	2,5
2,06	2,42	13,6	13,8	1,93	1,4

Les tableaux V et VI résument les résultats correspondant à l'étude de deux vitesses différentes. Il est à remarquer dans ce cas que les deux périodes  $T$  et  $T'$  sont stables et nettement définies.

Enfin, aucun tourbillon n'est visible dans la partie de l'obstacle qui s'appuie aux parois sur une longueur qui, comptée à partir de cette dernière, varie suivant la vitesse de 30 à 50 mm. environ. Cette dernière zone se présentera d'ailleurs dans tous les autres cas étudiés, ses dimensions diminuant quand la vitesse augmente.

3° Pour des périodes de formation des tourbillons alternés de valeur inférieure aux précédentes et oscillant dans le plan médian entre 2 sec. et 0,9 sec. environ, les deux périodes  $T$  et  $T'$  existent toujours et il en est de même de la zone de période instable. Cependant, les battements cessent d'être localisés exclusivement dans cette dernière zone et apparaissent progressivement dans tous les plans de la zone de la période  $T$  gagnant peu à peu le plan médian au fur et à mesure que la vitesse de l'écoulement augmente.

TABLEAU VIII.  
Vitesse 2,30 cm. : sec. — Température 11°3.

Distance à l'axe en mm.	Période en sec.
0	1,66
20	1,67
40	1,67
60	Battements.
80	
100	1,98
120	1,98

TABLEAU IX.  
Vitesse 2,45 cm. : sec. — Température 11°3.

Distance à l'axe en mm.	Période en sec.
0	1,54
20	1,55
40	1,55
60	Battements.
80	
100	1,85
120	1,85



TABLEAU X.

Vitesse 2,85 cm. : sec. — Température 11°3.

Distance à l'axe en mm.	Période en sec.
0	1,28
20	1,28
40	1,29
60	Battements.
80	
100	1,61
120	1,61

TABLEAU XI.

Vitesse 3,27 cm. : sec. — Température 11°3.

Distance à l'axe en mm.	Période en sec.
0	1,09
20	1,09
40	Battements peu accusés.
60	
80	Battements.
100	
120	1,34
	1,35

TABLEAU XII.

Vitesse 2,08 cm. : sec. — Température 11°3.

Distance à l'axe en mm.	Période en sec.	$\Theta$ sec.
0	1,85	Pas de battements.
20	1,85	
30	1,85	
50	1,86	
60	1,86	
70		12,1
80	2,19	12,1
100	2,18	11,2
110	2,21	Pas de battements.

TABLEAU XIII.

Vitesse 3,40 cm. : sec. — Température 11°3.

Distance à l'axe en mm.	Période en sec.	$\Theta$ sec.
0	1,02	Pas de battements.
20	1,05	5,25
40	1,03	5,25
60	1,03	5,20
70		5,30
80		5,28
90	1,28	Pas de battements.
100	1,28	
115	1,28	

Les tableaux VIII, IX, X, XI, XII et XIII sont relatifs à six répartitions différentes; ils montrent la progression des battements vers le plan médian, les deux derniers permettant, en particulier, de préciser la valeur de la période des battements observés.

La propagation des battements vers le plan médian confère à la période de la zone centrale un léger caractère d'instabilité qu'elle n'avait pas pour des vitesses plus faibles.

TABLEAU XIV.

Température 11°3.

T sec.	T' sec.	$\Theta$ mesuré.	$\Theta$ calculé.	Vitesse cm. : sec.	$\varepsilon$ %.
1,85	2,19	12,00	11,90	2,08	0,8
1,03	1,28	5,25	5,30	3,40	0,9

Enfin, le tableau XIV, rend compte de la très bonne approximation obtenue dans le calcul de la période des battements, par l'application de la formule (1), ce qui permet encore de préciser que ces battements sont bien dus à l'interférence des tourbillons alternés de période T et T'.

Nous reviendrons, par la suite, sur la production et la propagation des battements et sur le rôle joué par une circulation qui s'établit des parois vers le centre immédiatement à l'aval de l'obstacle.

4° Pour des périodes dans le plan médian inférieures à 0,9 sec., on constate le long de l'obstacle une augmentation progressive de la période des tourbillons alternés depuis le plan médian jusqu'à la zone de formation de ces tourbillons. Par ailleurs, la période des battements perd sa régularité et présente successivement, pour une même vitesse, des valeurs différentes dans un même plan. Le tableau XV est relatif à une de ces répartitions et permet de remarquer que la variation de la période moyenne est d'autant plus forte qu'on s'éloigne davantage du plan médian.

L'ensemble des répartitions est représenté dans la fig. 11.

TABLEAU XV.  
Température 11°3.

Distance à l'axe en mm.	Période en sec.	
0	0,352	Les battements apparaissent dans tous les plans, mais leur période est variable.
20	0,356	
40	0,360	
60	0,365	
80	0,373	
100	0,392	
120	0,426	
130 à 150	Pas de tourbillons.	

**Mouvement de circulation.** — L'origine d'une répartition des périodes de formation des tourbillons alternés ne pouvant se trouver qu'en raison des dimensions finies de l'obstacle et du courant, nous avons donc été amenés à étudier les perturbations provenant de ce fait.

Nous avons commencé l'étude des phénomènes qui accompagnent et peuvent perturber la formation de tourbillons alternés avant la naissance de ces tourbillons, c'est-à-dire pour des vitesses inférieures à celle qui correspond au critérium. A cet effet, nous avons employé un précipité impalpable de nitrate d'argent.

Par l'intermédiaire d'un petit orifice situé à l'extrémité de l'obstacle, on laisse échapper un jet de nitrate qui alimente le sillage.

On observe dans ces conditions la trace laissée par ce jet. Les figures (Pl. I, fig. *b* et *c*) représentent le phénomène obtenu pour deux vitesses différentes. On voit que la trace du jet comporte une courbe cylindrique ayant une allure hélicoïdale, dont le pas décroît à mesure qu'on s'approche du plan médian. Selon que l'orifice est situé à l'extrémité de l'obstacle et tourné vers le haut ou vers le bas, les traces laissées par le nitrate sont respectivement *detrorsum* ou *sinistrosum* (pas à droite

ou pas à gauche). Pour expliquer les tracés obtenus, on est conduit à faire intervenir une vitesse parallèle à l'axe de l'obstacle (vitesse d'alimentation) qui décroît au fur et à mesure que l'on s'éloigne de la paroi. En composant cette vitesse avec celle qui résulte de l'existence des courbes à points singuliers ( $\alpha, \beta$ ) on retrouve une trajectoire semblable à celle qui vient d'être décrite.

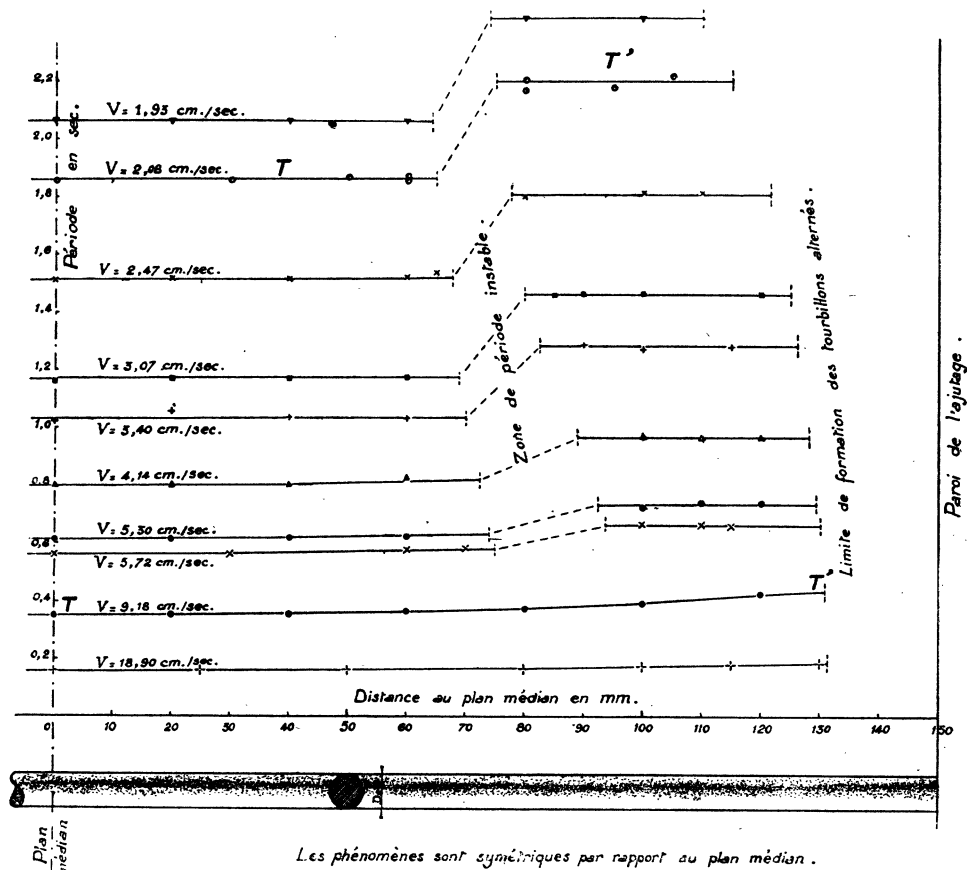


FIG. 11. — Répartition de la période des tourbillons alternés le long d'un cylindre droit de 6 mm. de diamètre.

Au-dessus du critérium mais pour une valeur très voisine de celle de ce dernier, par suite de l'existence des tourbillons alternés, l'observation des trajectoires devient moins facile, mais on voit néanmoins qu'elles conservent une allure analogue. On constate qu'elles viennent après la première boucle toucher l'obstacle dans la zone correspondant aux battements (PL. III, fig. a; PL. II, fig. b). Le mouvement de circulation longeant l'obstacle immédiatement à l'aval devient pulsé et la période observée a justement pour valeur  $T'$ . On voit ainsi qu'à cause de ce mouve-

ment de circulation la période  $T'$  se trouve propagée dans la zone de période instable où apparaissent les battements, ce qui permet d'expliquer leur production.

De plus, cette circulation, localisée tout d'abord aux extrémités de l'obstacle, atteint progressivement le plan médian au fur et à mesure que l'on augmente la vitesse du fluide. Il en résulte donc que la période  $T'$  se trouve peu à peu propagée vers le plan médian tandis que les battements apparaissent successivement dans les divers plans de la zone de période  $T$  au fur et à mesure que ce mouvement de circulation les atteint.

Les observations précédentes fournissent l'explication du mécanisme de la production des battements et de leur progression vers le plan médian.

Quant à l'irrégularité de la période des battements signalée dans le quatrième cas, période dans le plan médian inférieure à 0,9 sec., il semble qu'on puisse l'expliquer comme il suit :

Les battements susceptibles d'être observés dans un plan quelconque peuvent provenir aussi bien de l'interférence des tourbillons prenant naissance dans ce plan avec la période  $T'$  que de leur interférence avec les tourbillons alternés se formant dans les plans voisins.

L'influence de la circulation et de la répartition des périodes sur la recherche de la similitude de Reynolds n'est certainement pas négligeable et permet peut-être d'expliquer pourquoi lors de leur étude MM. P. Dupin et M. Teissié-Solier ont dû utiliser des obstacles pour lesquels le rapport  $\frac{D}{L}$  de la longueur au diamètre était au moins égale à 25.

*Rapport  $\frac{T'}{T}$ .* — Si l'on étudie la valeur du rapport  $\frac{T'}{T}$  de la période de formation des tourbillons alternés prenant naissance au voisinage de la paroi à la période des tourbillons observés dans le plan médian, on constate que ce rapport est pratiquement constant et très voisin de 1,2. C'est ce que montrent d'ailleurs les résultats résumés dans le tableau XVI. On peut alors calculer l'ordre de grandeur de la période des battements par la formule approchée :

$$\Theta = \frac{TT'}{T' - T} \approx 6T \approx 5T'.$$

*Cas de deux cylindres accolés suivant une génératrice.* — Dans le but d'étudier l'effet d'une dyssymétrie, nous avons utilisé parmi d'autres, un obstacle formé par deux cylindres à sections circulaires, de diamètres égaux à 4 et 2 mm. respectivement et de 300 mm. de longueur accolés le long d'une génératrice. Le maître-couple étant comme dans ces cas antérieurs égal à 6 mm.

TABLEAU XVI.

T sec.	T' sec.	$\frac{T'}{T}$
3,40	4,00	1,18
2,04	2,42	1,19
1,85	2,20	1,19
1,51	1,82	1,20
1,17	1,46	1,24
1,03	1,28	1,24
0,83	1,02	1,22
0,62	0,74	1,20
0,56	0,66	1,18
0,35	0,43	1,21
0,16	0,19	1,18

Le tableau XVII montre la répartition des périodes des tourbillons alternés le long de l'obstacle correspondant à une des vitesses considérées. On voit que l'allure de la répartition des périodes est analogue à celle trouvée précédemment. Il en est de même pour le rapport  $\frac{T'}{T}$  qui pour la vitesse correspondant au tableau XVII est égale à 1,2.

TABLEAU XVII.

Température 10°4.

Distance à l'axe en mm.	Période en sec.
0	0,802
20	0,800
40	0,802
60	0,825
80	Battements.
90	Battements très marqués.
100	0,970
110	0,965
120	0,965

**Influence du diamètre.** — Dans le but de mettre en évidence l'effet de la variation du diamètre des obstacles cylindriques considérés sur la répartition des périodes, nous avons étudié le sillage de cylindres à sections circulaires de 4,8 et 10 mm. de diamètre.

**Obstacle de 4 mm.** — Tout d'abord pour l'obstacle de 4 mm., nous avons trouvé une répartition analogue à celle déjà décrite dans le cas d'un diamètre de 6 mm. On distingue, en général, deux périodes correspondant aux zones des parois et à la partie centrale. Ces deux périodes ont un rapport voisin de 1,22. Le tableau XVIII donne quelques valeurs du rapport  $\frac{T'}{T}$ . Le phénomène des battements est facilement observable. Le tableau XIX résume les résultats obtenus; ces derniers montrent que la formule (1) donne bien la période  $\Theta$  des battements à partir des deux périodes extrêmes T et T'.

TABLEAU XVIII.

Température 15°8.

T sec.	T' sec.	$\frac{T'}{T}$
0,450	0,558	1,24
0,483	0,600	1,24
0,560	0,702	1,25
0,580	0,720	1,24
0,620		1,24
0,625	0,770	1,23
0,630		1,23
0,664	0,812	1,22
0,680		1,21
0,686	0,848	1,23
0,712	0,868	1,22
0,756	0,928	1,23
0,808	0,968	1,20
0,900		1,21
0,934	1,135	1,21
1,084	1,288	1,19
1,184	1,408	1,19
1,310	1,524	1,18
1,610		1,18
1,750	2,080	1,19

TABLEAU XIX.  
Température 17°4.

T sec.	T' sec.	$\frac{T'}{T}$
1,508	1,750	1,16
1,530	1,740	1,14
1,620	1,910	1,18
1,900	2,200	1,16
2,000	2,378	1,19
2,000	2,420	1,21
2,260	2,660	1,21
2,328	2,886	1,23
2,656	3,240	1,22
2,700	3,260	1,21
2,720	3,270	1,20
2,930	3,560	1,21
3,140	3,780	1,20
3,190	3,820	1,20
3,218	3,840	1,19
3,280	3,935	1,20
3,300	3,985	1,20
3,555	4,270	1,20
3,555	4,240	1,18
3,670	4,380	1,19
3,910	4,650	1,18
4,090	4,740	1,16
4,600	5,320	1,15
4,700	5,452	1,16
5,070	5,960	1,16
5,100	5,900	1,16

**Obstacle de 8 mm.** — L'étude de la répartition des périodes le long de l'obstacle de 8 mm. de diamètre nous a fourni les résultats résumés dans le tableau XX concernant la valeur du rapport  $\frac{T'}{T}$ . On peut dans ce cas déceler des variations plus importantes qu'auparavant dans la valeur de ce rapport.

L'allure de la répartition reste néanmoins inchangée et la période des battements se calcule toujours par la formule (1), ainsi que le montrent les résultats du tableau XXI.



TABLEAU XX.  
Température 13°8.

T sec.	T' sec.	$\Theta$ mesuré.	$\Theta$ calculé.	$\varepsilon$ %.
0,836	0,684	3,60	3,34	— 7,2
1,216	1,020	6,44	6,34	— 1,5
1,560	1,346	9,75	9,81	+ 0,6

TABLEAU XXI.  
Température 14°6.

T sec.	T' sec.	$\Theta$ mesuré.	$\Theta$ calculé.	$\varepsilon$ %.
4,68	3,88	24,5	22,7	— 7,3
5,32	4,60	33,8	33,9	0,0
5,92	5,07	37,4	37,6	0,0

**Obstacle de 10 mm.** — Enfin, l'étude du sillage pour des cylindres à section circulaire de 10 mm. de diamètre présente quelques particularités remarquables.

Tout d'abord, pour des vitesses très faibles donnant pour une température de 14°4 des périodes à la paroi variant entre 5 et 10 sec., les caractéristiques du sillage sont semblables à celles obtenues précédemment. On distingue deux zones de période T et T', et les battements qui se produisent sont calculables à l'aide de la formule (1). On remarque que dans cet intervalle le rapport  $\frac{T'}{T}$  reste sensiblement égal à 1,16.

Pour des périodes à la paroi inférieures à 5 sec. à 14°4 on peut constater la monopériodicité des tourbillons alternés tout le long de l'obstacle, et si l'on mesure la vitesse du fluide à l'amont du cylindre, on vérifie que la période ainsi observée est en désaccord manifeste avec la période déduite de la courbe de Strouhal. Cependant, on ne décèle dans ces conditions des battements dans aucun plan.

Si la vitesse étant maintenue constante, on poursuit l'observation, le phénomène change généralement d'aspect, ou bien le phénomène cesse d'être monopériodique, une période plus courte apparaissant dans le plan médian du cylindre, ou bien on constate l'existence de battements dans la zone centrale.

Dans ces conditions, on vérifie que si l'on utilise la valeur de la période observée au centre, quand elle existe et est différente de celle mesurée à proximité de la paroi, ou bien encore la période définie par les battements et la période à la paroi; le point figuratif obtenu se place bien sur la courbe de Strouhal (*fig. 6*).

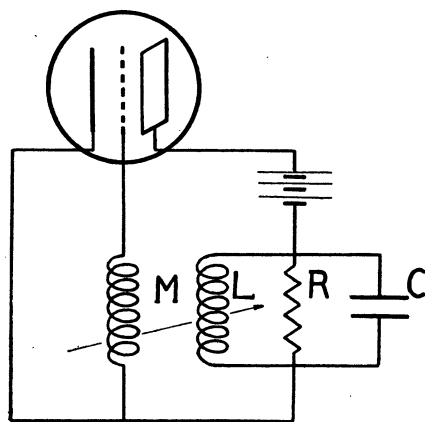


FIG. 12.

Le tableau XXII résume quelques résultats concernant les battements.

TABLEAU XXII.  
Température 14°4.

T sec.	T' sec.	$\Theta$ mesuré.	$\Theta$ calculé.	$\varepsilon$ sur $\Theta$	T calculé.
3,764	3,212	23,00	22,00	— 4	
4,224	3,640	25,90	26,30	+ 1,5	3,66
4,788		32,40			4,20
5,460	4,720	36,22	34,80	— 4	
6,292	5,488	44,20	43,00	— 2,5	
7,180	6,284	50,70	50,50	0,0	
10,088	9,008	87,50	84,50	— 2,8	

L'existence pour ainsi dire masquée de cette période au centre explique certaines divergences qui ont pu apparaître parfois dans le tracé de la courbe de Strouhal ainsi que les battements observés dans le sillage d'un obstacle court, point que nous examinerons par la suite.

**Emploi du robinet tournant.** — Signalons tout d'abord que le robinet tournant a permis à MM. Camichel, Eydoux et Gariel<sup>(1)</sup> dans leurs études sur les coups de bélier de préciser plusieurs points complexes de cette théorie, notamment les phénomènes de résonance du fondamental et des harmoniques.

D'autre part, le robinet tournant avait déjà permis à MM. C. Camichel et M. Teissié-Solier de prolonger la courbe de Strouhal au-dessous du critérium et de mettre en évidence la variation de l'amplitude du sillage. Ils ont montré en particulier que lors de l'accord de la période du robinet avec celle des tourbillons, l'amplitude des oscillations passe par un maximum.

En vue d'analyser les phénomènes observés sur l'obstacle de 10 mm. de diamètre, nous avons utilisé un robinet tournant commandant un tuyau d'aspiration dont l'extrémité aboutissait à 120 mm. de l'obstacle. Ce robinet était entraîné par un moteur dont la vitesse pouvait varier dans de larges limites.

Au début, on réglait la fréquence du robinet à une valeur nettement inférieure à celle des tourbillons à la paroi, puis, en faisant croître cette fréquence graduellement, on cherchait à réaliser l'accrochage avec celle des tourbillons. Nous avons observé :

1° Quand l'absence de battements dans le plan médian,

a) cet accrochage se produisait pour une valeur de la période du robinet plus petite que la valeur de la période au centre correspondant à la boucle de Strouhal;

b) cet accrochage se maintenait jusqu'à des périodes du robinet voisines de la période des tourbillons à la paroi.

2° Que pour des périodes plus faibles donnant des battements dans le plan médian, on pouvait accrocher les tourbillons alternés sur des périodes voisines de celles correspondant à la courbe de Strouhal et supprimer alors les battements.

Une étude semblable comportant la recherche de l'accrochage des tourbillons et la suppression des battements effectuée sur les obstacles de 6 mm. et 8 mm. de diamètre nous a donné des résultats analogues à ceux relatifs à l'obstacle de 10 mm.

Nous avons, en particulier, pu produire au moyen du robinet tournant des battements dans la zone centrale pour l'obstacle de 6 mm. de diamètre et pour des périodes à la paroi de l'ordre de 3 sec. (c'est-à-dire pour une répartition ne comportant pas de battements dans la zone centrale). La période de ces battements est encore définie par la formule (1) et ils se produisent nettement quand l'écart entre la période du robinet et celle des tourbillons dépasse légèrement en plus ou en moins les limites de l'accrochage.

Signalons enfin que nous avons aussi accroché des tourbillons sur des périodes voisines du double et en général d'un multiple de leur période propre.

---

<sup>(1)</sup> MM. Camichel, Eydoux et Gariel, *Étude théorique et expérimentale des coups de bélier*, Privat, Toulouse.

Les tableaux XXIII, XXIV, XXV résument quelques résultats obtenus dans les expériences avec le robinet tournant.

TABLEAU XXIII.

Période du robinet en sec.	T sec.	
Sans robinet.	2,58	Pas de battements.
3,30		Battements.
2,98		
2,86		
2,75	2,75	
2,72	2,72	
2,64	2,64	Pas de battements.
2,60	2,60	
2,58	2,58	
2,54	2,54	
2,50	2,50	
2,38	2,38	Battements.
2,34	2,34	
2,26	2,26	
2,20		
1,90	2,58	

TABLEAU XXIV.

Obstacle de 10 mm. de diamètre. — Température 12°4.

Période du robinet en sec.	T sec.	
Sans robinet.	4,55	
4,14	4,14	Pas de battements.
3,86	3,86	
3,90	3,90	
3,62	3,62	
3,52	3,52	
3,48	3,48	Battements.
3,20		

Au début de l'expérience T était égal à T'.

TABLEAU XXV.

Obstacle de 10 mm. de diamètre. — Température 12°2.

Période du robinet en sec.	T sec.	
Sans robinet.	5,00	
4,44	4,44	Pas de battements.
4,33	4,33	
4,19	4,19	
4,08	4,08	
4,00	4,00	
3,88	3,88	
3,75	4,22	Irrégulier.
3,68	4,33	
3,54	4,91	

Au début de l'expérience T était égal à T'.

**Obstacle court.** — Quand on étudie le sillage d'un cylindre circulaire de 6 mm. de diamètre et de 120 mm. de longueur placé horizontalement suivant un diamètre de l'ajutage déjà décrit et symétriquement par rapport à son axe, ainsi qu'il est indiqué sur la figure 9, on constate la monopériodicité des tourbillons alternés le long de l'obstacle. On observe, malgré cette monopériodicité, l'existence de battements dans presque tous les plans du sillage.

Le tableau XXVI donne une des répartitions obtenues. Nous avons, au moyen du robinet tournant, accroché les tourbillons de la zone centrale sur des périodes inférieures de 20 % environ à la période observée dans les conditions indiquées ci-dessus et nous avons alors remarqué la disparition des battements.

TABLEAU XXVI.

Obstacle de 6 mm. de diamètre et de 120 mm. de longueur.

Distance à l'axe en mm.	Période en sec.
axe	1,976
30	1,984
40	1,977
45	1,980

Période moyenne des battements observés : 13,2 sec.

Le tableau XXVII résume quelques résultats obtenus. On constate, en comparant ces résultats avec ceux observés en l'absence du robinet tournant, que la période produisant les battements est comprise entre les limites d'accrochage définies par le tableau XXVII.

TABLEAU XXVII.

Obstacle de 6 mm. de diamètre et de 120 mm. de longueur.

Distance à l'axe en mm.	Période en sec.
axe	1,57
20	1,60
30	1,60
35	1,60
48	1,61

Cette constatation nous permet de préciser l'analogie qui existe entre l'obstacle court et l'obstacle de 10 mm. de diamètre étudié ci-dessus. On peut dire, en particulier, que ce dernier se comporte comme un obstacle court. Il semble donc que l'on peut, dans les conditions de nos expériences et pour des faibles valeurs du rapport  $\frac{L}{D}$ , assimiler un obstacle long à un obstacle court. Ces conclusions sont en parfait accord avec les conditions trouvées par MM. P. Dupin et M. Teissié-Solier<sup>(1)</sup>

<sup>(1)</sup> P. Dupin et M. Teissié-Solier, *Les tourbillons alternés*, Gauthier-Villars, 1928.

pour que la période reste sensiblement constante quand  $L$  varie. On peut même dire qu'elles les étendent et les complètent.

**Note sur la valeur du rapport  $\frac{T'}{T}$ .** — Bien que le rapport  $\frac{T'}{T}$  puisse être considéré comme pratiquement constant pour chaque obstacle dans la presque totalité de l'intervalle des vitesses envisagées, il présente cependant des variations analogues mais très faibles pour les trois sillages étudiés (4, 6 et 8 mm.).

L'examen des résultats numériques fournis plus haut (tableaux XVI, XVIII, XIX) montre en effet que : ce rapport croît tout d'abord légèrement, passe par le maximum d'ailleurs très peu marqué, puis, décroît.

Il semble que le maximum constaté soit une fonction décroissante du diamètre de l'obstacle.

**Note sur les battements.** — Remarquons que la formule (1) comporte une erreur relative  $\eta = \frac{\Delta\Theta}{\Theta}$  élevée vis-à-vis des erreurs relatives  $\frac{\Delta T}{T}$  et  $\frac{\Delta T'}{T'}$  ; on a en effet :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Theta} &= \frac{1}{T} - \frac{1}{T'}, \\ \frac{\Delta\Theta}{\Theta} &= \frac{1}{T' - T} \left( T \frac{\Delta T'}{T'} - T' \frac{\Delta T}{T} \right), \\ \eta &= \frac{T \left| \frac{\Delta T'}{T'} \right| + T' \left| \frac{\Delta T}{T} \right|}{T' - T}.\end{aligned}$$

Si l'on prend  $\frac{\Delta T}{T} = \frac{\Delta T'}{T'}$  il vient en admettant pour  $\frac{T'}{T}$  la valeur 1,2

$$\eta = \frac{T + T'}{T' - T} \frac{\Delta T}{T} = \frac{1 + \frac{T'}{T}}{\frac{T'}{T} - 1} \frac{\Delta T}{T} = 11 \frac{\Delta T}{T} ;$$

ainsi pour des mesures de 100 sec. et en admettant une erreur relative  $\frac{\Delta T}{T}$  de 0,4 % ce qui correspond à 1/5<sup>e</sup> de seconde au début et à la fin de la mesure du temps, on serait déjà conduit à des valeurs de  $\eta$  de l'ordre de 4,5 %.

**Note sur la vibration des tiges immergées.** — Dans ses recherches sur la vibration des tiges immergées dans un champ uniforme de vecteurs vitesses, M. P. Du-

pin<sup>(1)</sup> a précisé les phénomènes qui accompagnent cette vibration et a indiqué, en particulier, les résultats suivants :

Pour l'ensemble des obstacles étudiés, le phénomène d'oscillation dans un plan perpendiculaire à la direction de l'écoulement débute lorsque la période des tourbillons est égale à 1,38 fois la période propre du cylindre immergé.

Il est possible de distinguer cinq zones de vitesses caractéristiques pendant la durée de la vibration.

Dans une de ces zones (zone III) il y a accrochage, et vers le milieu de cette zone se place le maximum d'amplitude de la vibration.

M. P. Dupin a indiqué, en outre, que le maximum d'amplitude de la vibration de la tige correspond à une vitesse  $V$  du champ pour laquelle la période du système cylindre tourbillons devient égale à la période du cylindre oscillant librement dans l'eau au repos sous l'effet d'un choc.

Reprenant les résultats fournis par cet auteur et utilisant par ailleurs ceux obtenus dans l'étude développée ci-dessus, il est possible de préciser les conditions qui déterminent le maximum d'amplitude et le décrochage des oscillations de la tige. En effet, en admettant que le type de répartition étudié se conserve pour les vitesses provoquant la vibration, il y a lieu de distinguer deux zones de vitesses caractéristiques.

Au début de la vibration, c'est seulement la période du centre qui excite la tige, la période à la paroi et les autres périodes existant dans le sillage ayant une valeur très différente de celle de la tige pour intervenir.

A la fin du phénomène et en admettant que la dernière période susceptible de provoquer la vibration soit la période à la paroi  $T'$  on devrait avoir :

$$\tau = 1,38 T',$$

$\tau$  étant la période du cylindre immergé. C'est ce que l'on remarque dans le tableau XXVIII dans lequel nous avons utilisé quelques résultats exposés dans le travail déjà cité de M. P. Dupin.

TABLEAU XXVIII.

Diamètre du cylindre en mm.	$\tau$ sec.	T sec.	$T'$ sec.	$1,38 T'$
6	0,0320	0,0190	0,0230	0,0310
5	0,0402	0,0244	0,0293	0,0404

(1) M. P. Dupin, Thèse de doctorat, Gauthier-Villars, Paris, 1930.



On peut préciser en utilisant les résultats que nous avons développé ci-dessus que la période du cylindre correspondant au maximum d'amplitude est très voisine de la période  $T'$  qu'auraient, pour la même vitesse, les tourbillons alternés au voisinage de la paroi si l'on empêchait la tige de vibrer.

On peut encore par ces considérations expliquer la possibilité de mesurer, à l'aide du stroboscope, la période du cylindre dans la zone II et prédéterminer les limites de cette zone en remarquant que cette impossibilité dans la mesure de  $\tau$  correspondrait au début de l'action de  $T'$  sur le cylindre, c'est-à-dire à la relation

$$T' = 1,38 \tau \quad \text{ou} \quad T = \frac{T'}{1,2} = 1,15 \tau,$$

ce qui est sensiblement vérifié (tableau XI, XII de la thèse de M. P. Dupin).

Cet auteur a aussi fait remarquer la dissymétrie de la courbe donnant l'amplitude des oscillations de la tige en fonction de la vitesse du fluide et a étudié un autre mode de vibration suivant la direction de l'écoulement.

Il semble donc que la complexité des phénomènes mis en évidence par cet auteur, résulte, tout au moins en partie, de la variation pour une même vitesse du fluide de la période de formation des tourbillons alternés le long de l'obstacle.

### CHAPITRE III

#### Sur les tourbillons alternés et les oscillations de relaxation.

Ainsi que l'a signalé M. A. Foch<sup>(1)</sup>, les tourbillons alternés appartiennent à la catégorie des phénomènes de relaxation.

De leur côté, MM. C. Camichel et M. Teissié-Solier<sup>(2)</sup> ont montré :

a) Que la loi de variation de l'amplitude  $y$  des oscillations du sillage d'un obstacle en régime de Poiseuille à la suite d'une perturbation est caractérisée par une valeur bien déterminée du facteur d'amortissement. Ils ont pu, en particulier, vérifier la loi suivante :

$$(1) \quad y = Ea(t) \sin(\omega t + \varphi) \quad \text{avec} \quad Ea(t) = Ae^{-st}.$$

b) Que lors de l'établissement des tourbillons alternés, la loi de l'accroissement de l'amplitude des oscillations du sillage en un point est de la forme :

$$(2) \quad y = Ee(t) \sin(\omega t + \varphi) \quad \text{avec} \quad Ee(t) = \sqrt{\frac{a}{1 + be^{-st}}},$$

résultats conformes aux travaux de M. Van der Pol<sup>(3)</sup> sur les oscillations sinusoïdales et de relaxation.

Nous verrons que l'équation (1) n'est qu'une forme particulière de l'équation (2) et qu'une seule loi peut s'appliquer, soit à la croissance, soit à l'amortissement des oscillations.

Ces auteurs ont également indiqué qu'il serait possible à partir de ces résultats d'envisager une détermination du critérium des tourbillons alternés.

Les expériences développées par la suite ont eu pour but d'entreprendre une application de la méthode proposée.

**Oscillations de relaxation.** — Nous ne ferons pas ici l'historique de ce type d'oscillations, pas plus que l'exposé détaillé de leur théorie à laquelle sont attachés,

---

<sup>(1)</sup> A. Foch, *Acoustique*, p. 185, Armand Colin.

<sup>(2)</sup> Deuxième supplément à la *Notice sur les travaux scientifiques de M. C. Camichel*, p. 12, 1935.

<sup>(3)</sup> Van der Pol, *Veher Relaxationschwingungen*, *Zeitsch Hochfrequenattechnik*, p. 178, 1925 et p. 114, 1927.

parmi d'autres, les noms de Van der Pol et J. Van der Mark<sup>(1)</sup>, A. Lienard<sup>(2)</sup>, Élie et Henri Cartan<sup>(3)</sup>, A. Andronow<sup>(4)</sup>, A. Witt<sup>(5)</sup>, Ph. Le Corbeiller<sup>(6)</sup>, Kryloff et Bogoliuboff<sup>(7)</sup>.

Néanmoins, quoique la théorie mathématique des oscillations de relaxation vienne seulement d'être amorcée, plusieurs des phénomènes dont nous aurons à parler par la suite, y étant intimement liés, nous serons obligés de rappeler brièvement quelques résultats capitaux dus pour la plupart à M. Van der Pol.

Nous dirons tout d'abord un mot de l'équation différentielle qui est à la base des phénomènes de relaxation.

Elle apparaît dans l'étude théorique des oscillations d'une triode, quand, pour tenir compte des courbures opposées de la caractéristique de part et d'autre de son point d'inflexion, on assimile cette dernière à une cubique en écrivant avec les notations usuelles :

$$e_j = (v + ku) - v_p(v + ku)^3;$$

dans ces conditions, si l'on monte la triode comme il est indiqué dans la figure 12, on trouve aisément que la tension alternative  $v$  aux bornes du circuit oscillant plaque satisfait à l'équation différentielle :

$$C \frac{d^2 v}{dt^2} + \left( \alpha - \frac{1}{R} \right) \left( -1 + \frac{3v'}{\alpha - \frac{1}{R}} v^2 \right) \frac{dv}{dt} + \frac{v}{L} = 0$$

(1) Van der Pol, *Oscillations sinusoïdales et de relaxation* (*L'onde électrique*, p. 245 à 293, 1930).

Van der Pol, *On relaxation oscillations* (*Phil. Mag.*, vol. II, p. 978, 1926).

Van der Pol, *Oscillations de relaxation* (*B. S. F. E.*, p. 818, t. X).

Van der Pol et Vander Mark, *Quelques expériences sur les triodes et les oscillations de relaxation* (*L'onde électrique*, p. 461, 1927).

(2) A. Lienard, *Études des oscillations entretenues* (*R. G. T.*, p. 901 et 946, 1928).

A. Lienard, *Comptes rendus du Troisième Congrès de Mécanique appliquée*, Stockholm, 3, 173, 1930.

(3) Élie et Henri Cartan, *Notes sur la génération des oscillations entretenues* (*Ann. des P. T. T.*, p. 1196, 1925).

(4) A. Andronow, *Les cycles limites de Poincaré et la théorie des oscillations au taux entretenu* (*C. R.*, t. 189, p. 559, 1929).

(5) A. Witt, *Sur la théorie mathématique des auto-oscillations* (*C. R.*, t. 190, p. 256, 1930).

(6) Ph. Le Corbeiller, *Les systèmes auto-entretenus et les oscillations de relaxation* (Hermann, 1931).

*Le mécanisme et la production des oscillations* (*Ann. des P. T. T.*, t. 21, p. 697, 1932).

*Sur l'entretien en oscillations du réseau passif le plus général* (*C. R. T.*, 194, p. 1564, 1932).

(7) Kryloff et Bogoliuboff, *C. R.*, t. 194, p. 957-1064-1119.

*Problèmes fondamentaux de la mécanique non linéaire* (*R. G. S.*, t. 44, p. 9, 1933).

On peut consulter pour les détails bibliographiques la thèse de M. Morched-Zadeh sur *Les phénomènes de relaxation et les divers types d'oscillations d'une lampe à néon*. Thèse, Privat, Toulouse.

avec :

$$\alpha = \frac{L + kM}{L\rho}, \quad v' = -\left(\frac{L + kM}{L}\right)^2 v;$$

il suffit alors de faire le changement des variables

$$x = \frac{t}{\sqrt{LC}}, \quad y = \sqrt{\frac{3v'}{\alpha - \frac{1}{R}}} v,$$

pour retrouver l'équation de Van der Pol

$$(3) \quad y'' + \varepsilon(-1 + y^2)y' + y = 0$$

avec

$$\varepsilon = -\left(\frac{L + kM}{L\rho} + \frac{1}{R}\right)\sqrt{\frac{L}{C}};$$

ainsi qu'on le sait les oscillations commencent lorsque  $M$  est négatif et assez grand en valeur absolue pour que  $\varepsilon$  soit positif. Pour  $\varepsilon$  positif mais très petit, les oscillations s'établissent lentement et ont une forme à peu près sinusoïdale. Van der Pol donne pour l'équation approchée de la courbe enveloppant les oscillations

$$(4) \quad y = \sqrt{\frac{a}{1 + be^{-\varepsilon t}}}.$$

Pour  $\varepsilon = 1$ , on trouve une allure un peu différente et l'amplitude finale est atteinte au bout d'un nombre d'oscillations plus petit que dans le cas précédent.

Pour  $\varepsilon$  très supérieur à l'unité, la forme diffère très fortement de la sinusoïde et sa forme périodique limite est pratiquement atteinte au bout d'une période.

Pour  $\varepsilon = 0$ , les oscillations sont sinusoïdales. D'où cette proposition de Van der Pol : « lorsque  $\varepsilon$  croît d'une valeur très voisine de zéro à une valeur très grande, le régime permanent correspondant à l'équation (3), passe d'une manière continue, d'une oscillation sinusoïdale à une oscillation de relaxation ». Les courbes de la figure 13 ont été obtenues par Van der Pol en appliquant à l'équation (3), la méthode d'intégration graphique par isoclines. On pourrait aussi utiliser la méthode graphique de M. Liénard qui est d'ailleurs applicable aux équations du type :

$$x'' + \omega f(x)x' + \omega^2 x = 0,$$

ou  $f(x)$  est une fonction paire et intégrable.

En posant :

$$F(x) = \int_0^x f(x) dx$$

et en effectuant le changement des variables :

$$v = \frac{dx}{dt},$$

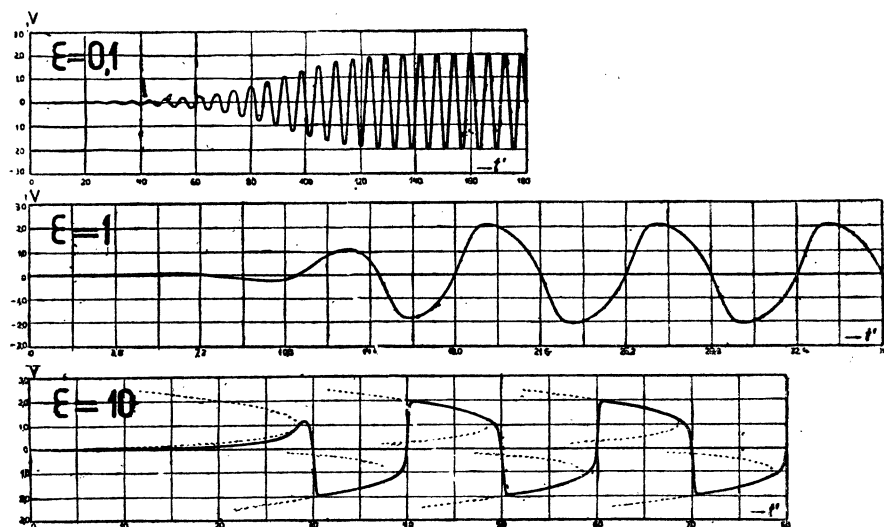


FIG. 13. — Établissement d'une oscillation de relaxation (Van der Pol).

il vient :

$$v \frac{dv}{dx} + \omega f(x) v + \omega^2 x = 0$$

ou encore en posant :

$$y = \frac{v}{\omega} + F(x),$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{F(x) - y},$$

équation qui bien qu'intégrable par des méthodes élémentaires dans certains cas, rend cependant toujours l'intégration aisée. Elle montre, en effet, que la normale à toute courbe intégrale, en un point  $(x, y)$  rencontre l'axe des  $y$  en un point d'ordonnée  $y = f(x)$ .

Indiquons enfin, deux propriétés particulières des oscillations de relaxation :

a) La période s'accorde aisément avec celle d'un agent extérieur alternatif de période voisine ou d'un de ses sous-harmoniques (phénomène de démultiplication);

b) La période est donnée par le produit ou le quotient des deux grandeurs physiques caractérisant le système tandis que dans les oscillations sinusoïdales elle est donnée par la racine carrée du produit ou du quotient des deux grandeurs physiques qui caractérisent le système.

**Établissements.** — Avant d'exposer les résultats expérimentaux obtenus dans cette troisième partie, nous allons étudier les allures théoriques susceptibles de convenir aux courbes  $E_e$  trouvées expérimentalement.

Tout d'abord, si l'on admet l'équation (4) et si l'on désigne par  $A$  l'amplitude finale pour  $t = \infty$ , on a :  $A = \sqrt{a}$  et l'équation (4) s'écrit :

$$(5) \quad y = \frac{A}{\sqrt{1 + be^{-\varepsilon t}}} \quad \varepsilon > 0.$$

Il nous reste à définir  $b$ . Or, au temps zéro, on a pour l'amplitude,

$$A_0 = \frac{A}{\sqrt{1 + b}};$$

d'où la définition de  $b$  par l'égalité suivante :

$$\frac{A}{A_0} = \sqrt{1 + b},$$

qui montre que l'on doit avoir dans tous les cas  $b > 0$ , résultat que l'on peut d'ailleurs vérifier sur l'équation (1), car la valeur de  $y$  deviendrait imaginaire si  $b < -1$ , de plus l'amplitude finale serait inférieure à l'amplitude initiale si  $0 > b > -1$ , ce qui est contraire à l'hypothèse.

Il vient à partir de l'équation (5) :

$$y' = \frac{Ab\varepsilon}{2} (1 + be^{-\varepsilon t})^{-\frac{3}{2}} e^{-\varepsilon t},$$

$$y'' = \frac{3}{4} Ab^2 \varepsilon^2 (1 + be^{-\varepsilon t})^{-\frac{5}{2}} e^{-2\varepsilon t} - \frac{1}{2} Ab \varepsilon^2 (1 + be^{-\varepsilon t})^{-\frac{3}{2}} e^{-\varepsilon t},$$

$$y''' = \frac{15}{8} Ab^3 \varepsilon^3 (1 + be^{-\varepsilon t})^{-\frac{7}{2}} e^{-3\varepsilon t} + \frac{1}{2} Ab \varepsilon^3 (1 + be^{-\varepsilon t})^{-\frac{3}{2}} e^{-\varepsilon t} - \frac{9}{4} Ab^2 \varepsilon^3 (1 + be^{-\varepsilon t})^{-\frac{5}{2}} e^{-2\varepsilon t};$$

on voit que  $y'$  est toujours positif, ce qui correspond bien à la croissance de l'amplitude et que  $y''$  s'annule pour :

$$t = \frac{1}{\varepsilon} \log \frac{b}{2},$$

valeur de  $t$  pour laquelle on a :

$$(y''')_i = -\frac{A \varepsilon^3}{9\sqrt{3}} < 0.$$

En résumé, si  $b > 2$ , c'est-à-dire si :

$$\frac{A}{A_0} > \sqrt{3},$$

la courbe aura une inflexion et la pente de la tangente au point d'inflexion sera maximum.

On voit de plus que pour une valeur donnée de  $b > 2$  l'inflexion aura lieu à un instant d'autant plus éloigné de l'instant initial que  $\varepsilon$  sera plus petit.

On a d'ailleurs au point d'inflexion :

$$(6) \quad \begin{aligned} y_i &= \frac{A}{\sqrt{3}}, & y'_i &= \frac{A \varepsilon}{3\sqrt{3}}, \\ \left(\frac{y y'''}{y'^2}\right)_i &= -\varepsilon, & \left(\frac{y'''}{y'}\right)_i &= \frac{\varepsilon^2}{3}, \\ \frac{y'_i}{y_i} &= \frac{\varepsilon}{3}, \end{aligned}$$

et la première de ces égalités montre que la condition d'existence de l'inflexion est bien :

$$y_i = \frac{A}{\sqrt{3}} > \frac{A}{\sqrt{1+b}} = A_0,$$

c'est-à-dire :

$$b > 2.$$

**Amortissements.** — Nous envisagerons également ici par analogie avec le cas antérieur, la fonction :

$$(7) \quad y = \frac{A}{\sqrt{1 + be^{\varepsilon t}}} \quad \varepsilon > 0$$

avec  $b > 0$  pour que  $y$  soit réel.

L'amplitude au temps zéro est comme dans les cas antérieurs donnée par :

$$A_0 = \frac{A}{\sqrt{1 + b}}.$$

il vient aisément :

$$\begin{aligned} y' &= -\frac{Ab\varepsilon}{2}(1 + be^{\varepsilon t})^{-\frac{3}{2}}e^{\varepsilon t}, \\ y'' &= \frac{3}{4}Ab^2\varepsilon^2(1 + be^{\varepsilon t})^{-\frac{5}{2}}e^{2\varepsilon t} - \frac{1}{2}Ab\varepsilon^3(1 + be^{\varepsilon t})^{-\frac{3}{2}}e^{\varepsilon t}, \\ y''' &= -\frac{15}{8}Ab^3\varepsilon^3(1 + be^{\varepsilon t})^{-\frac{7}{2}}e^{3\varepsilon t} - \frac{1}{2}Ab\varepsilon^3(1 + be^{\varepsilon t})^{-\frac{3}{2}}e^{\varepsilon t} + \frac{9}{4}Ab^2\varepsilon^3(1 + be^{\varepsilon t})^{-\frac{5}{2}}e^{2\varepsilon t}; \end{aligned}$$

on voit que  $y'$  est toujours négatif et que  $y''$  s'annule pour :

$$t = \frac{1}{\varepsilon} \log \frac{2}{b},$$

valeur de  $t$  pour laquelle on a :

$$(y''')_i = \frac{A\varepsilon^3}{9\sqrt{3}} > 0;$$

donc si  $b$  est inférieur à 2, tout en restant positif, la courbe aura une inflexion et la pente de la tangente au point d'inflexion sera minimum. On voit aussi que cette inflexion sera d'autant plus rapprochée de l'instant initial que  $\varepsilon$  sera plus grand et  $b$  plus voisin de 2.

Les autres remarques restent applicables en tenant compte toutefois du signe de  $\varepsilon$ .

**Détermination pratique de  $\varepsilon$  dans la formule (5).** — On pourrait songer à utiliser la relation ci-dessous :

$$\left(\frac{y'}{y}\right)_i = \frac{\varepsilon}{3}$$



pour la détermination exacte de  $\varepsilon$ ; mais lors de l'étude d'une enveloppe obtenue expérimentalement, l'emploi de cette relation est délicat en raison de la difficulté que l'on éprouve à situer  $y_i$  et à fortiori à mesurer  $y'_i$ .

On pourrait aussi développer la formule (5) pour  $t$  très grand, ce qui donne

$$y \approx A \left( 1 - \frac{b}{2} e^{-\varepsilon t} \right),$$

et pour  $t$  très petit, ce qui conduit à :

$$y = \frac{A}{\sqrt{1+b(1+e^{-\varepsilon t}-1)}} = \frac{A}{\sqrt{1+b+b(e^{-\varepsilon t}-1)}} = \frac{A}{\sqrt{1+b}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\frac{b}{1+b}(e^{-\varepsilon t}-1)}},$$

$$y \approx A_0 \left[ 1 - \frac{1}{2} \frac{b}{1+b} (e^{-\varepsilon t} - 1) \right] = \frac{A_0}{2b+2} (2+3b - be^{-\varepsilon t}).$$

En traçant alors les droites

$$y = A, \quad y = A_0 \frac{3b+2}{2b+2},$$

par rapport auxquelles l'équation ainsi transformée est de la forme  $y = ke^{\varepsilon t}$ , on peut déterminer  $\varepsilon$  en utilisant la valeur du rapport des ordonnées correspondant à des intervalles de temps égaux.

Pratiquement ces méthodes sont inapplicables car elles impliquent la connaissance exacte de  $A_0$  et  $b$ , mais on peut profiter du fait que  $b$  est très grand par rapport à l'unité pour les simplifier notablement et faire une première détermination approchée de  $\varepsilon$ .

Envisageons donc le début avec  $b$  très grand, on a :

$$y = \frac{A}{\sqrt{1+be^{-\varepsilon t}}} = \frac{A}{\sqrt{1+b}} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{b}{1+b}(e^{-\varepsilon t}-1)}},$$

$$y \approx A_0 e^{\frac{\varepsilon}{2}t} = A_0 e^{\varepsilon' t}, \quad \varepsilon' = \frac{1}{2} \varepsilon,$$

ce qui permet la détermination directe de  $\varepsilon$ , l'axe de l'enveloppe étant obtenu graphiquement.

On a par ailleurs :

$$\begin{aligned} \frac{\frac{a}{y_1^2} - 1}{\frac{a}{y_2^2} - 1} &= e^{\varepsilon(t_2 - t_1)} = \frac{\frac{a}{y_2^2} - 1}{\frac{a}{y_3^2} - 1} = e^{\varepsilon T}, \quad T = t_2 - t_1 = t_3 - t_2 = \dots, \\ a &= \frac{e^{\varepsilon T} - 1}{y_1^2 e^{\varepsilon T} - y_2^2} y_1^2 y_2^2 = \frac{e^{\varepsilon T} - 1}{y_2^2 e^{\varepsilon T} - y_3^2} y_2^2 y_3^2 = \dots = \frac{e^{\varepsilon T} - 1}{y_n^2 e^{\varepsilon T} - y_{n+1}^2} y_n^2 y_{n+1}^2 = \dots, \\ e^{\varepsilon T} &= \frac{y_{n+1}^2}{y_n^2} \cdot \frac{y_n^2 - y_{n+1}^2}{y_n^2 - y_{n+1}^2}, \\ \varepsilon &= \frac{1}{T} \log \frac{y_{n+1}^2}{y_n^2} \cdot \frac{y_n^2 - y_{n+1}^2}{y_n^2 - y_{n+1}^2}, \\ a &= y_n^2 \frac{y_{n+1}^2 y_n^2 - 2y_{n+1}^2 y_{n+1}^2 + y_{n+1}^2 y_n^2}{y_n^2 - y_{n+1}^2 y_{n+1}^2} = \frac{y_n^2}{y_n^2 + y_{n+1} y_{n+1}} \cdot \frac{y_n^2 (y_{n+1}^2 + y_{n+1}^2) - 2y_{n+1}^2 y_{n+1}^2}{y_n^2 - y_{n+1} y_{n+1}}, \end{aligned}$$

formules qui donnent  $a$  et  $\varepsilon$ .

**Détermination pratique de  $\varepsilon$  dans la formule (7).** — Les mêmes remarques restent applicables sauf à tenir compte du signe de  $\varepsilon$ .

Considérons donc l'amortissement au bout d'un laps de temps assez grand pour que l'inflexion de la courbe  $E_a(t)$  ait déjà eu lieu et que  $\varepsilon$  soit pratiquement négligeable vis-à-vis de  $be^{\varepsilon t}$ .

Dans ces conditions nous avons :

$$y = \frac{A}{\sqrt{1 + be^{\varepsilon t}}} \cong Ab^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\varepsilon t} = Be^{-\varepsilon' t},$$

et cette partie finale de la courbe  $E_a(t)$  permet par son assimilation à l'exponentielle de calculer  $\varepsilon$  d'une manière analogue à celle déjà décrite dans le cas de l'établissement :

$$\frac{y_2}{y_1} = e^{-\varepsilon'(t_2 - t_1)}.$$

Pour la détermination définitive, les formules deviennent :

$$\begin{aligned} \frac{\frac{a}{y_1^2} - 1}{\frac{a}{y_2^2} - 1} &= \frac{\frac{a}{y_2^2} - 1}{\frac{a}{y_3^2} - 1} = \dots = \frac{\frac{a}{y_n^2} - 1}{\frac{a}{y_{n+1}^2} - 1} = e^{-\varepsilon' T}, \\ T &= t_2 - t_1 = t_3 - t_2 = \dots = t_{n+1} - t_n, \\ \frac{a}{e^{\varepsilon' T} - 1} &= \frac{y_1^2 y_2^2}{y_2^2 e^{\varepsilon' T} - y_1^2} = \frac{y_2^2 y_3^2}{y_3^2 e^{\varepsilon' T} - y_2^2} = \dots = \frac{y_n^2 y_{n+1}^2}{y_{n+1}^2 e^{\varepsilon' T} - y_n^2} = \dots, \\ \varepsilon &= \frac{1}{T} \log \frac{y_{n+1}^2}{y_n^2} \cdot \frac{y_n^2 - y_{n+1}^2}{y_{n+1}^2 - y_n^2}, \\ a &= \frac{y_n^2}{y_n^2 + y_{n+1} y_{n+1}} \cdot \frac{y_n^2 (y_{n+1}^2 + y_{n+1}^2) - 2y_{n+1}^2 y_{n+1}^2}{y_n^2 - y_{n+1} y_{n+1}}. \end{aligned}$$

•  $a$  devant être positif, on est conduit à étudier le signe de la seconde fraction :

1° Si  $y_n^2 - y_{n-1}y_{n+1} > 0$ , il faut avoir alors :

$$y_n^2(y_{n-1}^2 + y_{n+1}^2) - 2y_{n-1}^2y_{n+1}^2 > 0,$$

inégalité qui devient en posant  $y_n^2 = (1 + x^2)y_{n-1}y_{n+1}$  :

$$\begin{aligned} y_{n-1}y_{n+1}[y_{n-1}^2(1 + x^2) - 2y_{n-1}y_{n+1} + y_{n+1}^2(1 + x^2)] &> 0, \\ (y_{n-1} - y_{n+1})^2 + x^2(y_{n-1}^2 + y_{n+1}^2) &> 0, \end{aligned}$$

et cette condition est toujours vérifiée quel que soit  $x^2$ .

Donc si  $y_n^2 - y_{n-1}y_{n+1} > 0$ , la détermination de  $a$  est possible et on a donc une condition suffisante.

2° Si  $y_n^2 - y_{n-1}y_{n+1} < 0$ , il faut avoir :

$$y_n^2(y_{n-1}^2 + y_{n+1}^2) - 2y_{n-1}^2y_{n+1}^2 < 0$$

ou en posant :

$$y_n^2 = (1 - x^2)y_{n-1}y_{n+1} \quad \text{avec} \quad x^2 < 1.$$

il vient après simplification :

$$(y_{n-1} - y_{n+1})^2 - x^2(y_{n-1}^2 + y_{n+1}^2) < 0.$$

Or, comme

$$\frac{2y_{n-1}y_{n+1}}{y_{n-1}^2 + y_{n+1}^2} < 1,$$

la condition cherchée est dans ce cas :

$$y_n^2 < y_{n-1}y_{n+1} \frac{2y_{n-1}y_{n+1}}{y_{n-1}^2 + y_{n+1}^2}.$$

On a donc en définitive pour que la détermination de  $a$  soit possible :

$$1 < \frac{y_n^2}{y_{n-1}y_{n+1}} \quad \text{ou} \quad \frac{y_n^2}{y_{n-1}y_{n+1}} < \frac{2y_{n-1}y_{n+1}}{y_{n-1}^2 + y_{n+1}^2}.$$

Les constantes  $\varepsilon$  et  $a$  sont indépendants de l'origine des temps. Pour calculer  $b$

il nous faut préciser cette origine. Si elle est telle qu'au temps  $t_1$ ,  $y$  ait pour valeur  $y_1$ , on aura :

$$b = e^{-\epsilon t_1} \left( \frac{a}{y_1^2} - 1 \right).$$

et si l'on prend comme origine relative l'instant où l'amplitude est  $y_1$ , on a :

$$b = \frac{a}{y_1^2} - 1.$$

Remarquons enfin que la formule (7) se réduit sensiblement à

$$y = B e^{-\epsilon t}$$

et ceci avec d'autant plus d'exactitude qu'on est d'autant plus loin de l'instant initial.

**Remarques.** — 1. Après avoir déterminé  $\epsilon$  par une des méthodes indiquées ci-dessus, nous avons procédé à une vérification globale. A cet effet, nous avons comparé l'aire mesurée au planimètre et comprise entre l'axe des  $t$ , la courbe  $E(t)$  et deux ordonnées  $t_1$  et  $t_2$  avec la même aire calculée à l'aide des coefficients  $a$ ,  $b$ ,  $\epsilon$ , à partir de la formule :

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\frac{a}{1 + b e^{\pm \epsilon t}}} dt;$$

en posant  $1 + b e^{\pm \epsilon t} = z^2$ , il vient :

$$S = \frac{\sqrt{a}}{\pm \epsilon} \int_{\sqrt{1 + b e^{\pm \epsilon t_1}}}^{\sqrt{1 + b e^{\pm \epsilon t_2}}} \frac{2 dz}{z^2 - 1} = \frac{\sqrt{a}}{\pm \epsilon} \log \frac{(\sqrt{1 + b e^{\pm \epsilon t_2}} - 1)(\sqrt{1 + b e^{\pm \epsilon t_1}} + 1)}{(\sqrt{1 + b e^{\pm \epsilon t_2}} + 1)(\sqrt{1 + b e^{\pm \epsilon t_1}} - 1)}$$

ou encore en remarquant que  $\sqrt{1 + b e^{\pm \epsilon t}} = \frac{\sqrt{a}}{y}$ , on a :

$$S = \frac{\sqrt{a}}{\pm \epsilon} \log \frac{(\sqrt{a} - y_2)(\sqrt{a} + y_1)}{(\sqrt{a} + y_2)(\sqrt{a} - y_1)}.$$

Ainsi, par exemple, dans le cas des établissements on aurait en désignant par  $A$  l'amplitude atteinte par le phénomène au bout d'un temps infiniment grand :

$$A = \sqrt{a},$$

d'où :

$$S = \frac{A}{\varepsilon} \log \frac{(A + y_2)(A - y_1)}{(A - y_2)(A + y_1)}.$$

Dans cette dernière formule,  $b$  n'intervient pas explicitement (il n'intervient que par l'intermédiaire de  $y_1$  et  $y_2$ ). L'amplitude  $A$  pouvant être soit mesurée directement, soit calculée à l'aide de trois ordonnées, on a ainsi un autre moyen de déterminer  $\varepsilon$  :

$$\varepsilon = \frac{A}{S} \log \frac{(A + y_2)(A - y_1)}{(A - y_2)(A + y_1)}.$$

$\varepsilon$  est bien l'inverse d'un temps, car  $A$  est une longueur et  $S$  le produit d'une longueur par un temps.

II. On peut justifier l'emploi de la formule (7) dans le cas des amortissements, comme il suit : considérons l'équation réduite de Van der Pol avec un  $\varepsilon$  négatif, et très petit par rapport à l'unité :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \varepsilon(1 - y^2) \frac{dy}{dx} + y = 0.$$

Prenons comme solution une sinusoïde d'amplitude lentement variable :

$$y = Y(x) \cos x,$$

$$y^3 = Y^3(x) \cos^3 x = Y^3(x) \left[ \frac{3}{4} \cos x + \frac{1}{4} \cos 3x \right],$$

$$y' = -Y \sin x + \frac{dY}{dx} \cos x,$$

$$y'' = -2 \frac{dY}{dx} \sin x - Y \cos x,$$

$$y^3 y' \cong -Y^3 \sin x \cos^2 x \cong \frac{1}{3} Y^3 \frac{d}{dx} \cos^3 x \cong -\frac{1}{4} Y^3 \sin x.$$

Négligeant les harmoniques d'ordre élevé, ainsi que  $\frac{dY}{dx}$  devant  $Y$  et  $\varepsilon \frac{dY^3}{dx}$  en raison de la petitesse de  $\varepsilon$  on a :

$$\frac{dY^2}{dx} = \varepsilon \left( Y^2 - \frac{1}{4} Y^4 \right), \quad \frac{d \frac{1}{Y^2}}{\frac{1}{Y^2} - \frac{1}{4}} = \varepsilon x,$$

$$Y = \frac{2}{\sqrt{1 + e^{\varepsilon(x-x_0)}}} = \frac{2}{\sqrt{1 + b e^{\varepsilon x}}} \quad \text{avec} \quad b = e^{-\varepsilon x_0},$$

expression qui aux notations près, coïncide avec la formule (7).

## III. La solution approchée de Van der Pol conduit aux fonctions

$$\sqrt{\frac{a}{1+be^{st}}} \quad \text{et} \quad \sqrt{\frac{a}{1+be^{-st}}}$$

qui pour  $t$  très grand ou très petit par rapport à l'unité sont respectivement très voisines de :

$$Be^{-\frac{\varepsilon}{2}t} \quad \text{et} \quad Be^{\frac{\varepsilon}{2}t}.$$

Ce résultat peut aisément se déduire de l'équation différentielle des oscillations de relaxation.

Envisageons, par exemple, un amortissement au bout d'un temps très grand,  $y$  étant très petit, l'équation différentielle :

$$y'' + \varepsilon(1 - y^2)y' + y = 0$$

se réduit très sensiblement à :

$$y'' + \varepsilon y' + y = 0,$$

et l'équation caractéristique donne,  $\varepsilon$  étant très petit :

$$v = -\frac{\varepsilon}{2} \pm i \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{4}} = -\frac{\varepsilon}{2} \pm i\omega;$$

d'où :

$$y = Ae^{-\frac{\varepsilon}{2}t} \sin(\omega t + \varphi) \cong Ae^{-\frac{\varepsilon}{2}t} \sin(x + \varphi),$$

résultat conforme à celui trouvé précédemment (formule 1).

IV. Notons enfin que pour les  $\varepsilon$  dont la valeur n'est pas très petite par rapport à l'unité, les approximations théoriques faites lors de l'établissement des formules (5) et (7) cessent d'être valables. C'est pour cette raison que nous n'avons étudié la variation de  $\varepsilon$  en fonction de la vitesse qu'au voisinage immédiat du critérium des tourbillons alternés.

**Dispositif expérimental et mode opératoire.** — Nous avons utilisé un obstacle cylindrique de 6 mm. de diamètre et 300 mm. de longueur placé verticalement dans l'ajutage de 30 cm. déjà décrit, et dans lequel est réalisé un champ uniforme de vecteurs vitesses. L'obstacle était creux et portait en son milieu et à l'aval un petit ori-

fice qui permettait d'alimenter le sillage d'une façon continue à l'aide d'un précipité impalpable de nitrate d'argent d'une densité très voisine de celle de l'eau. Le sillage était ainsi nettement visible. L'alimentation en nitrate d'argent avait un débit extrêmement faible et ne perturbait en rien les phénomènes étudiés. Au moyen d'un arc, d'une fente et d'une lentille, on éclairait le plan horizontal passant par le milieu de l'obstacle.

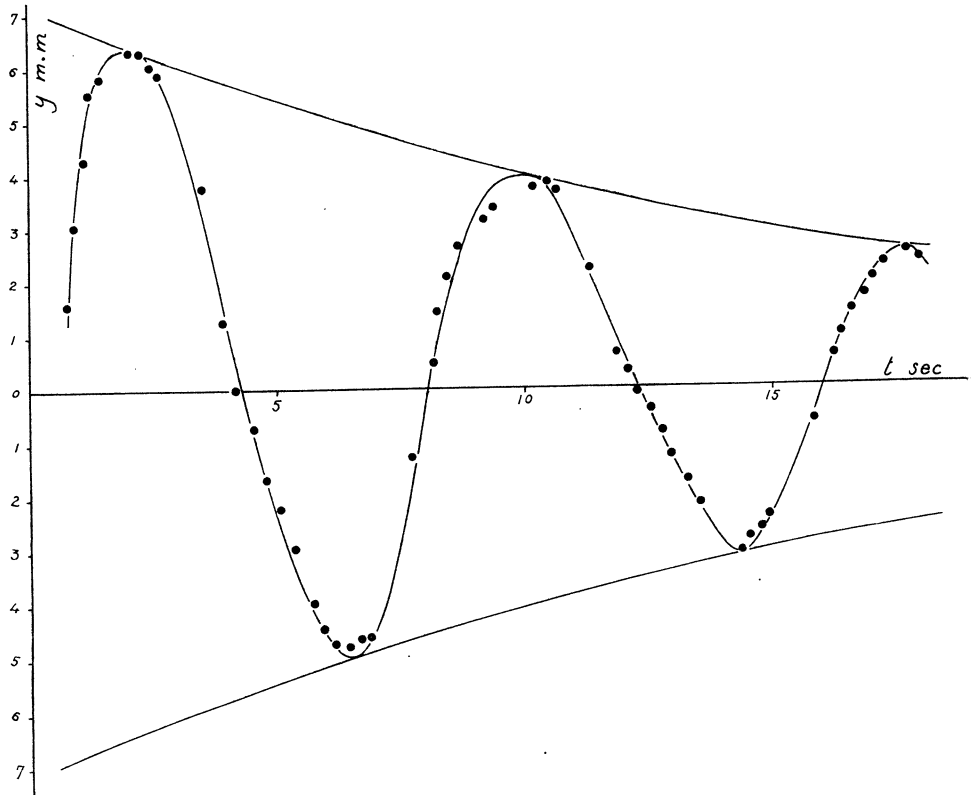


FIG. 14. — Variation en un point de l'amplitude du sillage pendant un amortissement  $D = 6$  mm.

Après avoir perturbé le sillage ou modifié les conditions de l'écoulement par l'un des procédés que nous allons décrire, on enregistrait simultanément au cinéma la période transitoire ainsi que le mouvement d'une horloge. Cette dernière était constituée par une aiguille entraînée par un petit moteur à vitesse constante, et l'image de cette horloge était ramenée au moyen d'un prisme à réflexion totale dans le champ optique de l'appareil cinématographique.

L'écoulement était commandé à l'aval par deux robinets. Nous avons étudié successivement des établissements et des amortissements en opérant comme suit :

Lors de l'étude d'un établissement, la vitesse était réglée de telle sorte que le

nombre de Reynolds caractérisant l'écoulement fût inférieur au critérium des tourbillons alternés, puis, on passait brusquement à un nombre de Reynolds supérieur à ce critérium.

Ce dernier nombre de Reynolds était atteint dans les premières expériences par une manœuvre brusque du robinet à boisseau. Afin d'obtenir une durée d'établissement de la vitesse qui fût rigoureusement négligeable devant la durée de l'établissement des tourbillons alternés, nous avons utilisé de préférence un diaphragme à orifices multiples disposé sur l'un des robinets aval de la conduite. Les bouchons obturant ces orifices pouvaient être enlevés par une manœuvre brusque analogue à

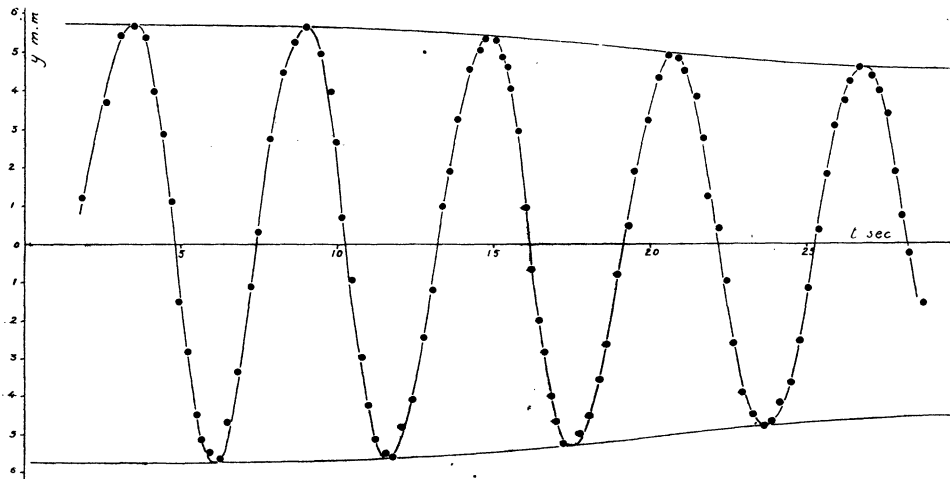


FIG. 15. — Variation en un point de l'amplitude du sillage pendant un amortissement  $D = 6$  mm.

celle utilisée par M. J. Baubiac<sup>(1)</sup> dans son étude du régime transitoire. Nous avons pu vérifier dans ces conditions que la durée d'établissement de la vitesse dans l'ajutage n'avait qu'une valeur très faible et par conséquent négligeable devant la durée d'établissement des tourbillons alternés (en moyenne 0,2 sec. devant 30 sec.).

Dans les diverses expériences effectuées, nous sommes toujours partis du même nombre de Reynolds inférieur au critérium, tandis que nous faisons varier progressivement le nombre de Reynolds final.

Lors de l'étude d'un amortissement, nous avons, soit modifié brusquement les conditions de l'écoulement [au moyen d'un robinet à boisseau disposé à l'aval, soit utilisé la perturbation apportée au sillage par un choc direct sur l'obstacle.

Dans les expériences effectuées à l'aide du robinet à boisseau partant toujours d'un même nombre de Reynolds supérieur au critérium on atteignait, une fois la manœuvre faite, des nombres de Reynolds inférieurs au critérium.

<sup>(1)</sup> J. Baubiac, Thèse présentée à l'Université de Toulouse, 1936.



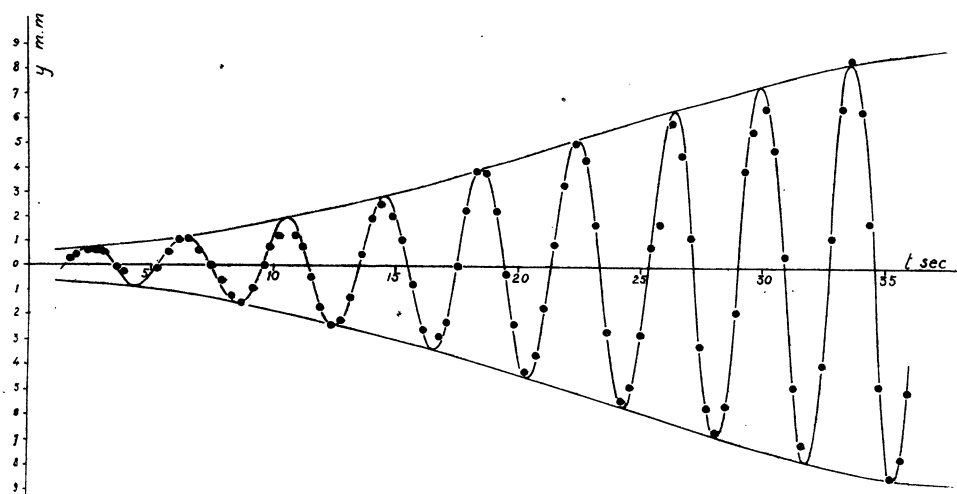


FIG. 16. — Variation en un point de l'amplitude du sillage pendant un établissement  $D = 6$  mm.

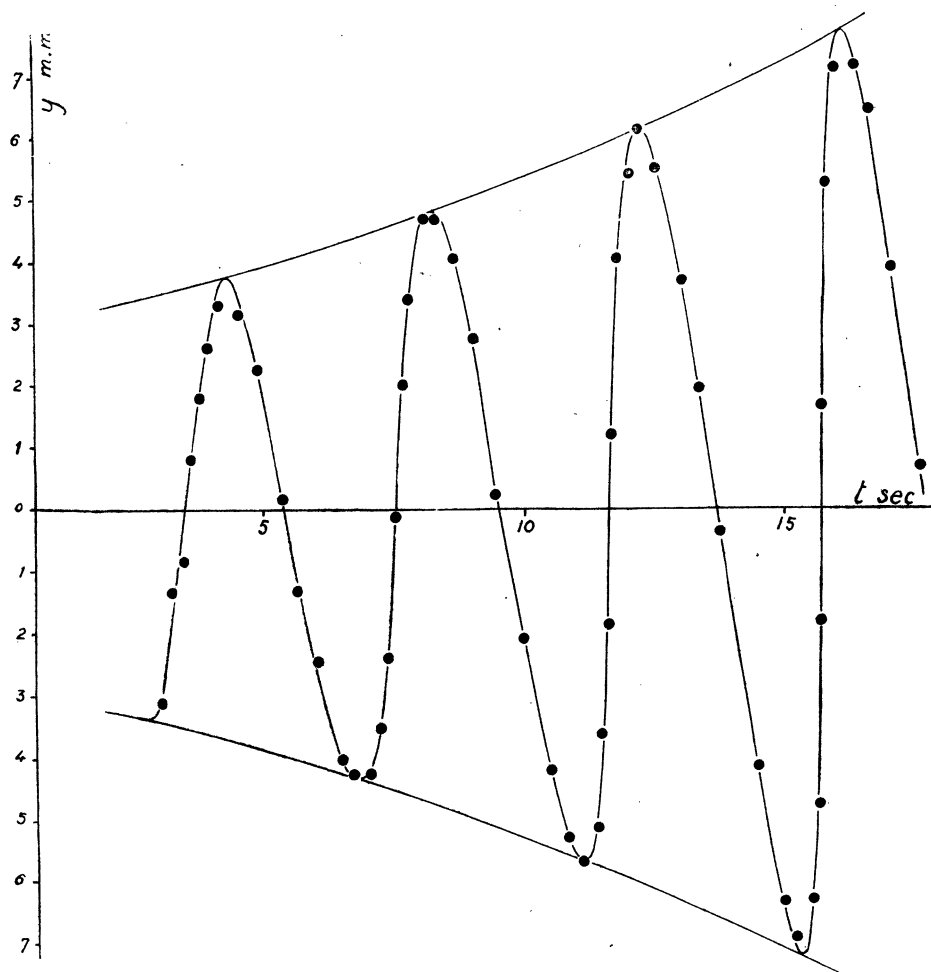


FIG. 17. — Variation en un point de l'amplitude du sillage pendant un établissement  $D = 6$  mm.

Pour provoquer le choc, on laissait tomber sur la partie du cylindre extérieure à la conduite la masse d'un pendule que l'on avait soin d'abandonner sans vitesse initiale du même point.

Dans chaque mesure, on travaillait à charge constante et, après chaque prise de vue, on chronophotographiait la vitesse. La température du fluide était par ailleurs notée durant chaque expérience.

**Détermination graphique des courbes  $E_a(t)$  et  $E_c(t)$ .** — Pour l'étude des films, nous avons utilisé l'agrandissement par projection, l'amplitude du sillage étant relevée pour tous les films à une même distance de la génératrice aval du cylindre.

Les figures données ci-joint (*fig. 14, 15, 16, 17*) représentent quelques résultats obtenus lors de cette étude. Elles ont été construites à partir des valeurs données dans les tableaux XXIX-XXX-XXXI-XXXII, l'axe de symétrie étant ensuite déterminé graphiquement.

TABLEAU XXIX.

Amortissement.

Temps sec.	Ampl. mm.	Temps sec.	Ampl. mm.	Temps sec.	Ampl. mm.
0,80	1,62	6,08	— 4,75	12,76	— 0,80
0,95	3,08	6,38	— 4,79	12,95	— 1,25
1,17	4,40	6,60	— 4,68	13,25	— 1,71
1,25	5,53	6,80	— 4,65	13,50	— 2,16
1,50	5,83	7,70	— 1,25	14,30	— 3,05
2,08	6,30	8,17	0,50	14,47	— 2,82
2,30	6,28	8,27	1,45	14,70	— 2,65
2,52	6,08	8,47	2,10	14,88	— 2,40
2,70	5,90	8,72	2,65	15,86	— 0,63
3,55	3,80	9,22	3,15	16,25	0,58
3,95	1,27	9,42	3,40	16,42	1,00
4,20	0,00	10,20	3,77	16,65	1,40
4,50	— 0,70	10,50	3,87	16,91	1,70
4,76	— 1,68	11,37	2,20	17,08	2,00
5,03	— 2,20	11,90	0,65	17,30	2,27
5,30	— 2,92	12,10	0,30	17,76	2,48
5,62	— 3,95	12,25	— 0,10	18,03	2,30
5,85	— 4,45	12,52	— 0,40		

TABLEAU XXX.

Amortissement.

Temps sec.	Ampl. mm.	Temps sec.	Ampl. mm.	Temps sec.	Ampl. mm.
1,80	1,24	11,75	— 5,50	20,40	4,35
2,61	3,70	12,07	— 4,73	20,62	4,90
3,12	5,40	12,40	— 4,02	21,00	4,80
3,54	5,70	12,75	— 2,42	21,15	4,50
3,90	5,32	13,05	— 1,18	21,50	3,82
4,12	3,95	13,36	1,00	21,75	2,80
4,45	2,82	13,60	1,90	21,82	1,25
4,74	1,12	13,82	3,25	22,20	0,42
4,97	— 1,50	14,20	4,55	22,48	— 0,95
5,23	— 2,80	14,55	5,03	22,65	— 2,58
5,51	— 4,40	14,72	5,32	22,97	— 3,82
5,70	— 5,08	15,02	5,28	23,30	— 4,39
5,95	— 5,35	15,32	4,85	23,62	— 4,70
6,30	— 5,55	15,50	4,60	23,87	— 4,60
6,50	— 4,65	15,60	4,05	24,10	— 4,10
6,83	— 3,30	15,85	3,00	24,50	— 3,58
7,25	— 1,10	16,05	0,99	24,75	— 2,50
7,47	0,32	16,22	— 0,68	25,02	— 1,20
7,82	2,26	16,46	— 2,00	25,40	0,39
8,25	4,45	16,62	— 2,80	25,62	1,82
8,60	5,25	16,87	— 3,95	25,93	3,10
9,00	5,67	17,00	— 4,62	26,25	3,75
9,45	4,95	17,21	— 5,17	26,45	4,23
9,75	3,95	17,77	— 4,90	26,75	4,60
9,95	2,70	18,08	— 4,45	27,10	4,42
10,17	0,73	18,39	— 3,50	27,35	4,00
10,50	— 0,95	18,60	— 2,65	27,62	3,38
10,77	— 2,97	19,00	— 1,78	27,87	1,88
11,00	— 4,18	19,32	+ 0,50	28,05	0,75
11,22	— 5,03	19,50	1,90	28,25	— 0,22
11,55	— 5,42	19,90	3,23	28,75	— 1,55

**Établissements.** — On peut distinguer dans tous les cas étudiés trois parties distinctes :

1° Au début, une zone exponentielle définissant un incrément logarithmique;

TABLEAU XXXI.

Etablissement.

Temps sec.	Ampl. mm.	Temps sec.	Ampl. mm.	Temps sec.	Ampl. mm.
1,70	0,27	14,05	2,00	25,77	1,80
1,85	0,45	14,37	2,62	26,26	5,95
2,40	0,60	14,83	2,60	26,66	4,62
2,75	0,60	15,25	1,15	27,07	1,26
3,05	0,55	15,72	— 0,75	27,39	— 3,25
3,60	— 0,10	16,17	— 2,62	27,60	— 5,72
3,92	— 0,35	16,77	— 2,89	27,97	— 6,70
5,25	— 0,14	17,10	— 2,30	28,40	— 5,65
5,72	0,54	17,55	0,00	28,90	— 1,84
6,20	1,11	17,83	2,32	29,25	4,55
6,55	1,12	18,28	3,95	29,55	5,62
6,98	0,61	18,72	3,83	30,05	6,55
7,44	0,00	19,20	2,36	30,40	4,80
7,86	— 0,62	19,52	— 0,30	30,95	0,45
8,28	— 1,25	19,80	— 2,41	31,25	— 4,87
8,67	— 1,57	20,22	— 4,35	31,55	— 7,25
9,22	— 0,97	20,72	— 3,68	32,40	— 4,00
9,62	0,00	21,00	— 1,71	32,77	1,28
9,77	0,82	21,48	0,94	33,15	6,55
10,22	1,25	21,85	3,40	33,50	8,50
10,89	1,26	22,27	5,08	33,95	6,45
11,22	0,80	22,70	4,42	34,35	1,90
11,60	— 0,46	23,12	1,77	34,72	— 4,80
11,91	— 1,72	23,60	2,70	35,10	— 8,57
12,34	— 2,47	24,20	— 5,50	35,55	— 7,75
12,75	— 2,27	24,50	— 4,90	35,88	— 5,05
13,17	— 1,30	25,00	— 2,77		
13,65	0,50	25,40	0,82		

2° Une zone inflexionnelle;

3° A la fin, une zone où la croissance de l'amplitude devient très faible.

La loi définie par l'équation (4) représente bien l'allure générale des courbes  $E_e(t)$  en y prenant toutefois  $b > 2$ . Nous allons voir que la détermination des constantes dans la formule (4) conduit à des valeurs de  $b$  très grandes par rapport à l'unité, ce qui justifie l'assimilation de la première zone à une exponentielle.

TABLEAU XXXII.

Etablissement.

Temps sec.	Ampl. mm.	Temps sec.	Ampl. mm.	Temps sec.	Ampl. mm.
3,05	— 3,18	7,77	3,46	13,04	3,75
3,25	— 1,35	8,08	4,75	13,37	1,97
3,50	— 0,83	8,28	4,75	13,75	— 0,39
3,60	— 0,82	8,60	4,10	14 47	— 4,20
3,75	1,81	9,00	2,80	14,94	— 6,48
3,91	2,67	9,45	0,25	15,12	— 7,07
4,08	3,36	9,97	— 2,12	15,48	— 6,38
4,50	3,20	10,50	— 4,25	15,60	— 4,85
4,90	2,20	10,80	— 5,38	15,65	— 1,81
5,65	— 1,32	11,07	— 5,77	15,70	1,67
6,02	— 2,48	11,39	— 5,22	15,77	5,29
6,47	— 4,08	11,46	— 3,63	16,00	7,16
6,65	— 4,31	11,60	— 1,90	16,38	7,20
7,00	— 4,31	11,67	1,22	16,62	6,48
7,17	— 3,53	11,80	4,09	17,02	4,92
7,32	— 2,40	12,04	5,45	17,53	0,69
7,50	— 0,12	12,21	6,16		
7,64	2,03	12,52	5,52		

**Amortissements.** — Pour les amortissements, on constate pour des valeurs du nombre de Reynolds très voisines de celle définissant le critérium des tourbillons alternés, qu'il existe encore une partie inflexionnelle et que, comme dans le cas des établissements, on peut distinguer sur les courbes  $E_a(t)$  trois parties :

1° Au début, une zone où le mouvement du sillage reste à peu près entretenu, l'amplitude étant toutefois légèrement décroissante ;

2° Une partie inflexionnelle ;

3° A la fin, une partie définissant un décrement logarithmique.

Pour des nombres de Reynolds plus éloignés du critérium, les deux premières parties de l'enveloppe disparaissent et, pratiquement, il ne reste que la partie exponentielle.

On voit ainsi que la loi exprimée par l'équation

$$y = \sqrt{\frac{a}{1 + be^{-st}}}$$

convient à l'allure de la variation de l'amplitude du sillage en fonction du temps, qu'il s'agisse d'un amortissement ( $\varepsilon < 0$ ) ou d'un établissement ( $\varepsilon > 0$ ), ce qui montre bien l'analogie complète entre les formules (1) et (2).

On voit aussi que la loi purement exponentielle (1) peut rendre compte de l'amortissement d'une façon satisfaisante dès que  $\varepsilon$  n'a pas une valeur trop faible.

**Détermination des constantes.** — Pour la détermination des constantes  $a$  et  $b$ , nous avons employé les remarques faites à propos des formules (5) et (7).

On faisait une première détermination sur les parties exponentielles des courbes  $E_a(t)$  et  $E_e(t)$  en considérant les rapports :

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} = e^{\varepsilon' T}$$

de deux ordonnées séparées par un laps de temps  $T$ , ce dernier étant pris dans chaque cas égal à la pseudo-période des tourbillons alternés.

$\varepsilon'$  était positif ou négatif selon qu'il s'agissait d'un établissement ou d'un amortissement. On avait donc ainsi dans tous les cas :

$$\varepsilon' = \frac{1}{T} \log \frac{y_{n+1}}{y_n}.$$

Puis on passait à l'application des formules donnant directement  $\varepsilon$  et  $a$  au moyen de trois ordonnées  $y_1, y_2, y_3$  séparées par des intervalles de temps égaux.

Dans le but de diminuer l'erreur relative, susceptible d'être introduite par ces formules, on avait soin de vérifier les ordonnées consécutives  $y_1, y_2, \dots$  de proche en proche en remarquant que :

$$e^{\varepsilon T} = \frac{y_2^2}{y_1^2} \cdot \frac{y_1^2 - y_2^2}{y_2^2 - y_3^2} = \frac{y_4^2}{y_2^2} \cdot \frac{y_2^2 - y_3^2}{y_3^2 - y_4^2} = \dots, \\ e^{n\varepsilon T} = \frac{y_1^2 - y_2^2}{y_1^2 y_2^2} \cdot \frac{y_{n+1}^2 y_{n+2}^2}{y_{n+1}^2 - y_{n+2}^2} = \frac{\frac{1}{y_2^2} - \frac{1}{y_1^2}}{\frac{1}{y_{n+2}^2} - \frac{1}{y_{n+1}^2}} = \dots$$

Fixant ensuite l'origine des temps, on déterminait  $b$  en procédant ainsi qu'il a été dit, page 59.

A titre d'exemple, nous donnons deux résultats relatifs au sillage d'un cylindre circulaire de 6 mm. 95 de diamètre et correspondant respectivement à un établissement et à un amortissement.

**Établissement.** — L'établissement considéré correspond aux valeurs données dans le tableau XXXIII, valeurs qui sont représentées dans la figure 18.

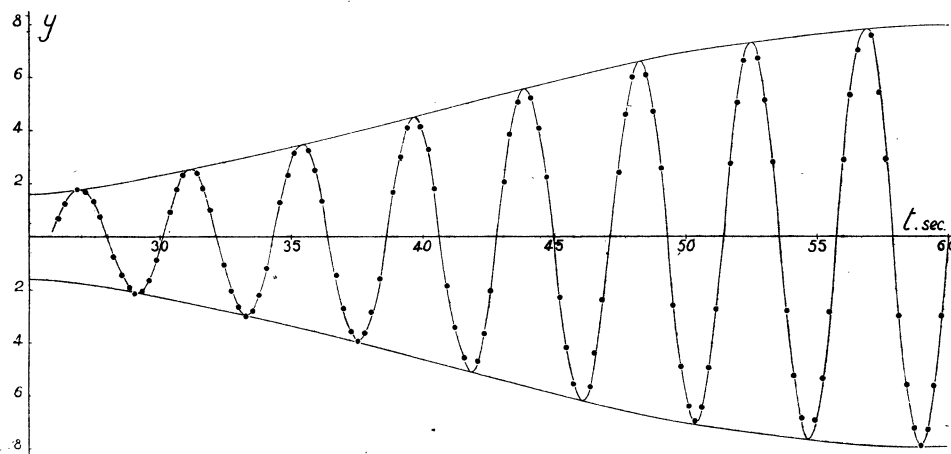


FIG. 18. — Variation en un point de l'amplitude du sillage pendant un établissement  $D = 6 \text{ mm. } 95$ .

Prenons :  $T = t_2 - t_1 = t_3 - t_2 = 10 \text{ sec.}$ ; on a sur la courbe  $E_e$  :

$$\gamma_1 = 1,82, \quad \gamma_2 = 3,75, \quad \gamma_3 = 6,22.$$

On a :

$$\gamma_2^2 - \gamma_1 \gamma_3 > 0, \\ \gamma_1^2 = 3,31, \quad \gamma_2^2 = 14,07, \quad \gamma_3^2 = 38,75,$$

d'où :

$$e^{iT} = \frac{38,75}{3,313} \cdot \frac{10,76}{24,68} = 5,06,$$

c'est-à-dire :

$$\varepsilon = \frac{1}{T} \log 5,06 = \frac{2,3}{10} \log 5,06 = 0,162 \text{ sec}^{-1}$$

et :

$$a = 14,07 \frac{591 - 257}{69,7}$$

avec :

$$\sqrt{a} = 8,2.$$

TABLEAU XXXIII.

Etablissement.

<i>t</i> sec.	<i>y</i>	<i>t</i> sec.	<i>y</i>	<i>t</i> sec.	<i>y</i>	<i>t</i> sec.	<i>y</i>
26,10	+ 0,70	34,55	+ 1,30	43,28	3,85	52,18	6,65
26,35	1,25	34,85	2,30	43,60	5,05	52,72	6,73
26,85	1,82	35,10	3,15	44,10	5,20	53,00	5,15
27,15	1,70	35,65	3,25	44,40	4,08	53,30	2,80
27,45	1,35	35,90	2,50	44,70	2,25	53,85	— 2,80
27,70	0,75	36,15	1,35	45,20	— 2,33	54,10	— 5,25
28,20	— 0,75	36,70	— 1,45	45,43	— 4,20	54,40	— 6,85
28,50	— 1,45	36,95	— 2,70	45,68	— 5,60	54,90	— 6,95
28,80	— 1,95	37,25	— 3,60	46,35	— 5,70	55,20	— 5,36
29,00	— 2,15	37,50	— 3,95	46,50	— 4,40	55,45	— 2,83
29,28	— 2,05	37,75	— 3,65	46,80	— 2,40	56,00	+ 2,90
29,55	— 1,65	38,00	— 2,85	47,45	+ 2,40	56,25	5,35
29,85	— 0,88	38,33	— 1,60	47,70	4,60	56,55	7,05
30,35	+ 0,92	38,85	+ 1,68	47,95	6,00	57,05	7,60
30,60	1,76	39,15	3,00	48,48	6,10	57,35	5,45
30,85	2,32	39,40	4,10	48,75	4,70	57,60	2,95
31,40	2,40	39,90	4,15	49,05	2,58	58,12	— 3,00
31,60	1,80	40,20	3,27	49,50	— 2,60	58,40	— 5,60
31,88	1,00	40,43	1,80	49,80	— 4,90	58,68	— 7,25
32,42	— 1,07	40,90	— 1,85	50,10	— 6,40	58,95	— 7,95
32,70	— 2,05	41,18	— 3,42	50,33	— 7,00	59,20	— 7,30
32,95	— 2,65	41,56	— 4,60	50,60	— 6,45	59,45	— 5,65
33,25	— 3,00	42,06	— 4,70	50,85	— 4,95	59,73	— 3,00
33,50	— 2,80	42,30	— 3,68	51,15	— 2,75		
33,75	— 2,20	42,55	— 2,05	51,68	+ 2,75		
34,05	— 1,20	43,10	+ 2,05	51,95	5,05		

Pour fixer l'origine exacte du phénomène étudié, nous nous sommes reportés à l'enregistrement et avons relevé pour  $y_1 = 1,82$  un temps  $t_1 = 26,85$  sec. Ce qui donne :

$$b = e^{0,162 \cdot 26,85} \left[ \left( \frac{8,2}{1,82} \right)^2 - 1 \right] = 19,25 e^{4,35},$$

$$b = 1510.$$

On voit en particulier que l'hypothèse faite lors de l'étude de la formule (5) quant



à la faible valeur du rapport  $\frac{1}{b}$  est tout à fait légitime, On a donc en définitive pour l'équation représentant dans le cas étudié la courbe  $E_r(t)$  :

$$y = \frac{8,2}{\sqrt{1 + 1510 e^{-0,162t}}}.$$

Calculons l'instant où se produit l'inflexion :

$$t_i = \frac{1}{\varepsilon} \log \frac{b}{2} = \frac{2,3}{0,162} \log 755 = 40,85 \text{ sec.}$$

On a en ce point, en vertu des relations :

$$y_i = \sqrt{\frac{a}{3}} \quad \text{et} \quad y'_i = y_i \frac{\varepsilon}{3},$$

$$y_i = 4,74,$$

$$y'_i = 0,26,$$

valeurs qui sont toutes en bonne concordance avec celles que l'on peut relever sur la courbe déduite de l'expérience (tableau XXXIII).

A titre de vérification globale, calculons  $\varepsilon$  en mesurant l'aire comprise entre la courbe expérimentale et les ordonnées

$$y_1 = 3 \quad \text{et} \quad y_2 = 6.$$

On a, en tenant compte de la constante du planimètre :

$$S = 55,2 \text{ cm. : sec. ;}$$

d'où :

$$\varepsilon = \frac{8,2}{55,2} \log \frac{142,52}{22,112} = 0,163 \text{ sec}^{-1},$$

résultat qui à moins d'un pour cent près coïncide avec celui obtenu ci-dessus.

**Amortissement.** — Le ralentissement étudié correspond aux valeurs données dans le tableau XXXIV, valeurs qui sont représentées dans la figure 19.

Prenons :

$$y_1 = 8,7, \quad y_2 = 6,5, \quad y_3 = 4,28,$$

$$y_1^2 = 75,7, \quad y_2^2 = 42,5, \quad y_3^2 = 18,35,$$

$$t_2 - t_1 = t_3 - t_2 = T = 7 \text{ sec.}$$

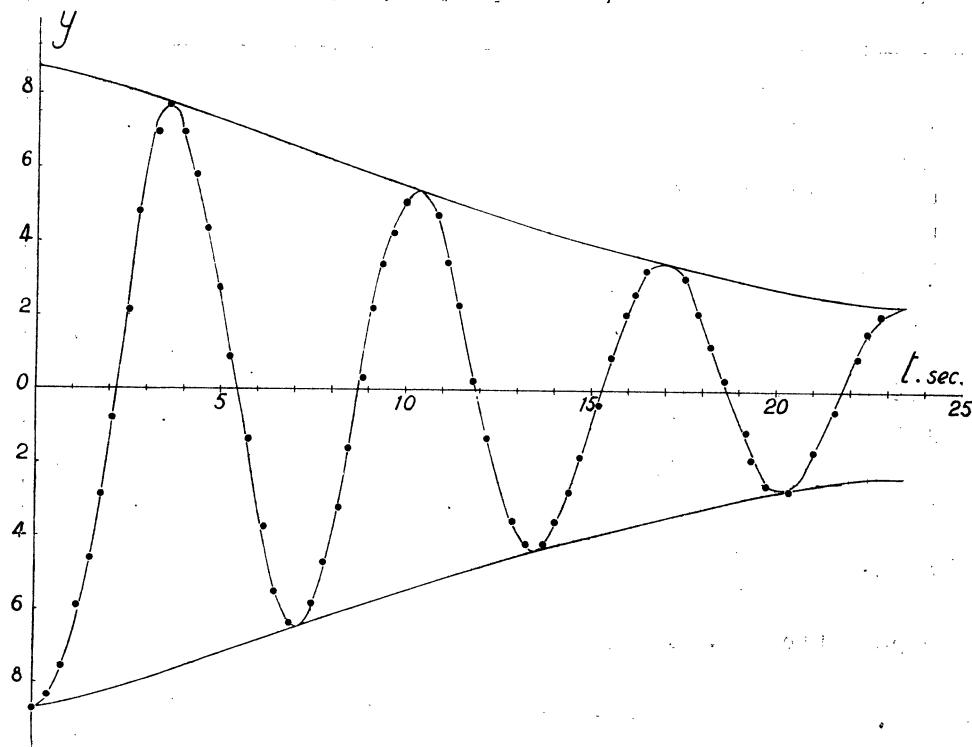


FIG. 19. — Variation en un point de l'amplitude du sillage pendant un amortissement  $D = 6 \text{ mm. } 95$ .

On a :

$$y_2^2 - y_1 y_3 > 0,$$

$$e^{\varepsilon T} = \frac{75,7}{18,35} \cdot \frac{24,15}{33,2} = 3;$$

d'où :

$$\varepsilon = \frac{2,3}{7} \cdot 0,477 = 0,157 \text{ sec}^{-1}$$

et

$$a = 42,5 \frac{(75,7 + 18,35)42,5 - 2 \cdot 75,7 \cdot 18,35}{18,1 \cdot 10^2 - 75,7 \cdot 18,35},$$

$$a = 125,2, \quad \sqrt{a} = 11,2.$$

TABLEAU XXXIV.

Amortissement.

$t$ sec.	$y$	$t$ sec.	$y$	$t$ sec.	$y$	$t$ sec.	$y$
0	-8,70	5,25	0,90	11,10	3,45	17,50	3,05
0,40	8,35	5,75	-1,35	11,40	2,30	17,85	2,10
0,75	7,55	6,20	3,75	11,80	0,25	18,20	1,20
1,15	6,40	6,50	5,50	12,20	-1,30	18,60	0,30
1,50	4,62	6,90	6,40	12,90	3,55	19,20	-1,10
1,77	2,87	7,50	5,80	13,25	4,15	19,35	1,85
2,07	0,80	7,80	4,70	13,75	4,15	19,75	2,55
2,50	+2,12	8,20	3,20	14,05	3,55	20,37	2,70
2,75	4,80	8,45	1,60	14,42	2,25	21,02	1,65
3,25	6,95	8,85	+0,37	14,70	1,80	21,60	0,55
3,55	7,70	9,10	2,20	15,20	0,40	22,20	+0,90
3,95	6,95	9,35	3,40	15,53	+0,90	22,45	1,60
4,30	5,80	9,65	4,25	15,90	2,05	22,80	2,05
4,65	4,35	9,95	5,07	16,15	2,60		
4,95	2,75	10,82	4,72	16,45	3,15		

En prenant l'origine des temps en  $y_i$  on a :

$$b = \frac{125,2}{75,7} - 1 = 0,655$$

et la courbe  $E_\epsilon(t)$  a pour équation :

$$y = \frac{11,2}{\sqrt{1 + 0,655 e^{0,157 t}}};$$

l'instant auquel se produit l'inflexion est :

$$t_i = \frac{1}{\epsilon} \log \frac{2}{b} = \frac{2,3}{0,157} 0,4878 = 7,1 \text{ sec.}$$

et à cet instant :

$$y_i = \sqrt{\frac{a}{3}} = 6,48,$$

$$y'_i = -y_i \frac{\epsilon}{3} = -0,34,$$

valeur en bonne concordance avec la courbe expérimentale (tableau (XXXIV)).

Remarquons enfin sur ce dernier exemple que la détermination approchée de  $\varepsilon$  par la formule (5) :

$$\frac{y_n}{y_{n+1}} = e^{\varepsilon' T} \quad \text{avec} \quad \varepsilon \cong 2\varepsilon',$$

conduit à une approximation très suffisante dès qu'on s'éloigne de l'instant initial.

On a en effet :

$$2\varepsilon' = \frac{1}{T} \log \left( \frac{y_n}{y_{n+1}} \right)^2.$$

Considérons les deux points de la courbe  $E_a$  correspondant aux instants  $t_1 = 52,32$  sec. et  $t_{11} = 58,86$  sec., c'est-à-dire à un intervalle de temps  $T = 6,54$  sec., intervalle égal à une pseudo-période.

Il vient :

$$\begin{aligned} 2\varepsilon' &= \frac{1}{6,54} \log \frac{1 + 0,655 e^{0,157 \cdot 58,86}}{1 + 0,655 e^{0,157 \cdot 52,32}} \\ &= \frac{1}{6,54} \log \frac{1 + 0,655 e^{9,241}}{1 + 0,655 e^{8,21394}} = \frac{0,439196}{6,54 \cdot 0,43429}, \\ 2\varepsilon' &= 0,1523 \text{ sec}^{-1}, \end{aligned}$$

d'où une erreur de trois pour cent environ

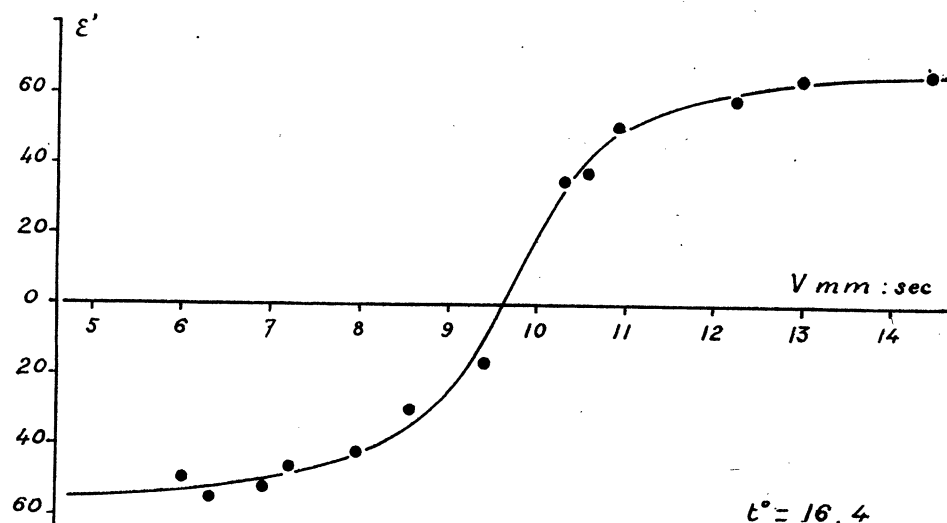


Fig. 20. — Variation de  $\varepsilon'$  en fonction de  $V$ .

**Variation de  $\varepsilon'$  en fonction de la vitesse. Critérium.** — Nous avons pu, en utilisant les résultats antérieurs, construire la courbe  $\varepsilon'(V)$ ,  $V$  étant la vitesse du fluide (fig. 20). On peut remarquer que cette courbe présente une inflexion sur l'axe de  $V$ .

D'autre part, ainsi que l'indique M. C. Camichel et comme il résulte des formules (5) et (7), la définition théorique du critérium des tourbillons alternés correspond à  $\varepsilon' = 0$ , ce qui, dans le domaine physique, se traduit par le fait qu'une oscillation prenant naissance dans le sillage de l'obstacle est susceptible de se maintenir indéfiniment sans croître ni décroître. On peut donc, en cherchant l'intersection de la courbe  $\varepsilon'(V)$  avec l'axe de  $V$ , déterminer la vitesse  $V_c$  correspondant au nombre de Reynolds définissant le critérium des tourbillons alternés.

Nous avons trouvé<sup>(1)</sup>, en particulier, en utilisant notre courbe :

$$V_c = 0,955 \text{ cm. : sec.}, \quad t = 16^\circ 4, \quad \nu = 0,0109^{(2)};$$

d'où :

$$R_c = \frac{0,6 \times 0,955}{0,0109} = 52,58,$$

valeur qui n'est pas très différente de celle obtenue par observation directe par MM. C. Camichel, P. Dupin et M. Teissié-Solier<sup>(3)</sup>.

Il semble cependant que la méthode ci-dessus présente plus d'exactitude, l'observation directe pouvant être entachée d'une erreur si une perturbation même extrêmement faible vient favoriser la naissance des tourbillons alternés.

**Remarque sur la tangente inflexionnelle de  $\varepsilon'(V)$ .** — Au critérium, on doit avoir d'après ce que l'on vient de voir  $\frac{y_i}{y_{i+p}} = 1$  pour  $p$  quelconque. En supposant que ce rapport  $\frac{y_i}{y_{i+p}}$  varie d'une façon continue dans les parties exponentielles des courbes  $E_a(t)$  et  $E_r(t)$  lorsqu'on s'éloigne du critérium, on doit avoir au voisinage de ce dernier :

$$\varepsilon' = \frac{1}{T_\alpha} \log(1 + \alpha),$$

$\alpha$  étant une variable infiniment petite et  $T$  désignant la période des tourbillons pour la valeur  $1 + \alpha$  de ce rapport. Étant donné la petitesse de  $\alpha$  on peut admettre au voisinage immédiat du critérium  $T_\alpha = 6$  car si  $R \neq 50$  et  $t = 20^\circ$  on trouve  $S \neq 0,12$  d'où l'on déduit  $T = 6$  sec.

On peut donc écrire en première approximation :

$$\varepsilon' = \frac{1}{6} \log(1 + \alpha);$$

<sup>(1)</sup> *C. R. de l'Ac. des Sciences*, t. 206, p. 1279.

<sup>(2)</sup> D'après la courbe  $\nu(t)$  donnée par Thorpe et Rodger.

<sup>(3)</sup> *C. R. de l'Ac. des Sciences*, t. 185, p. 1556.

Sens de l'écoulement.



PLANCHE I, fig. a. — Aspect du sillage d'une plaque plane immergée dans l'huile pour un faible nombre de Reynolds.

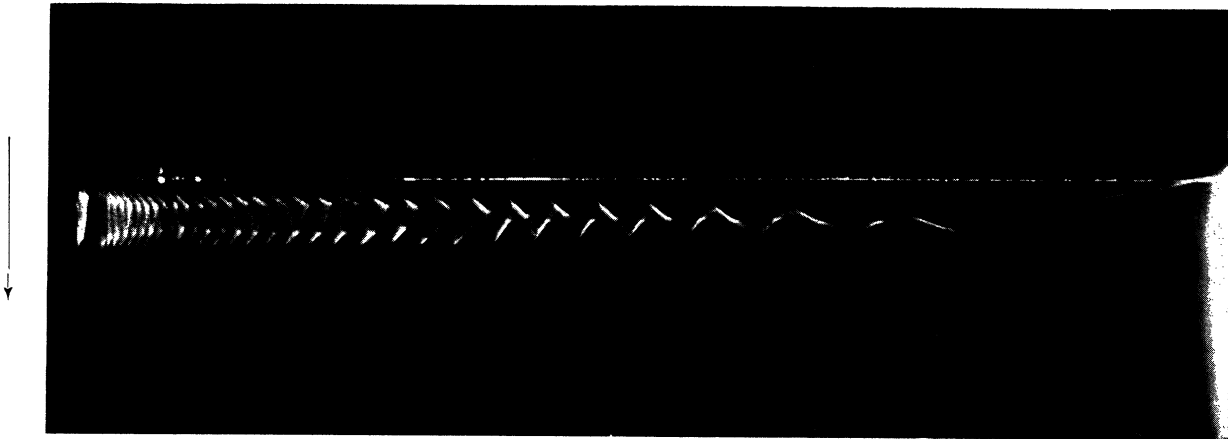


Fig. b. — Aspect du mouvement de circulation à l'aval d'un obstacle de 6 mm. de diam. au-dessous du critérium.

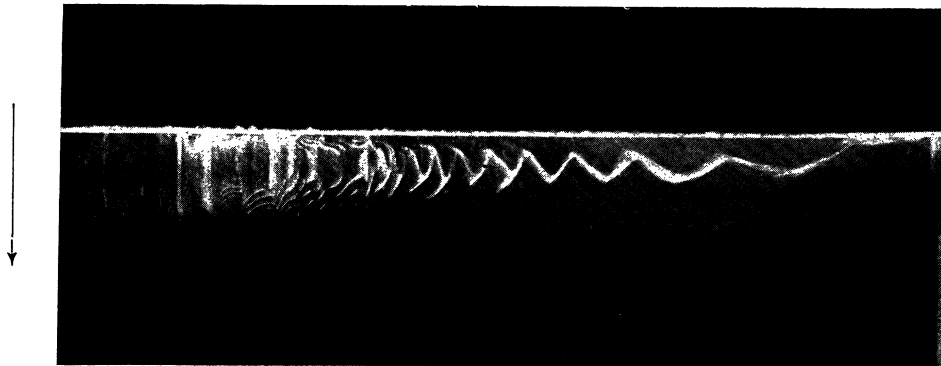


Fig. c. — Aspect du mouvement de circulation à l'aval d'un obstacle de 6 mm. de diam. peu au-dessus du critérium.



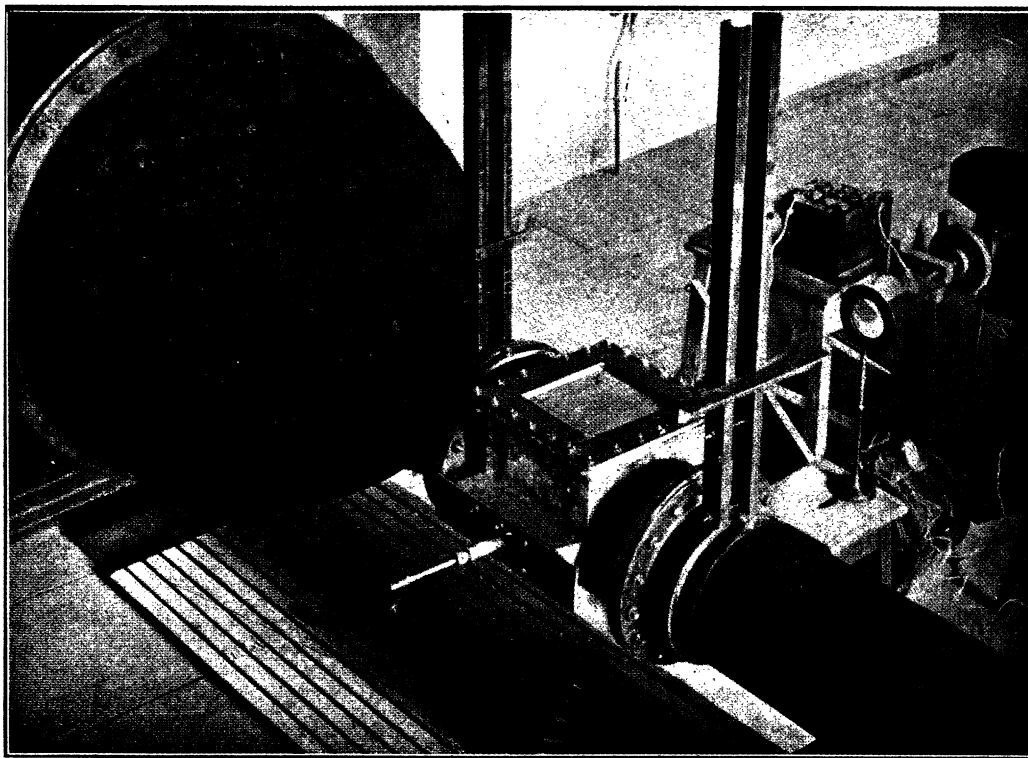


PLANCHE II, fig. *a*. — Vue de la tubulure et de l'ajutage de 30 cm.

Sens de l'écoulement.  
↓

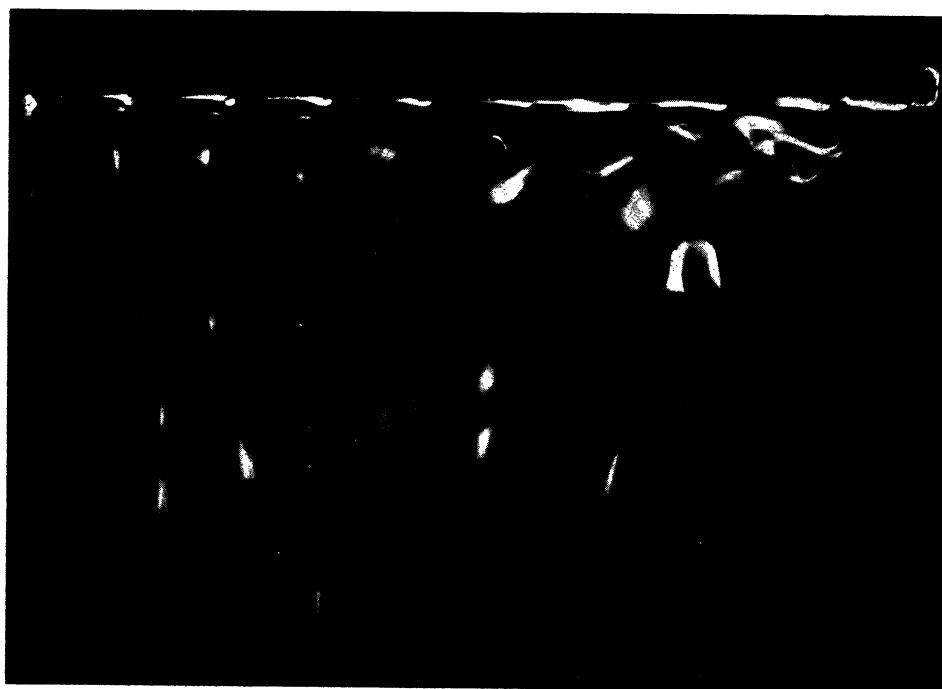


PLANCHE II, fig. *b*. — Aspect du sillage et du mouvement de circulation.





Sens de l'écoulement.  
↓



PLANCHE III, fig. *a*. — Aspect du sillage et du mouvement de circulation pour un cylindre de 6 mm. de diamètre.

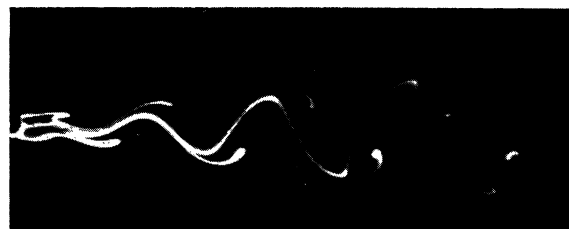


PLANCHE III, fig. *b*. — Aspects normaux du sillage en régime permanent.

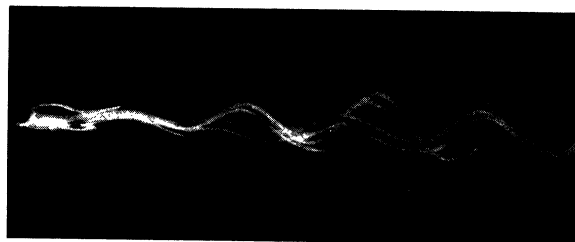
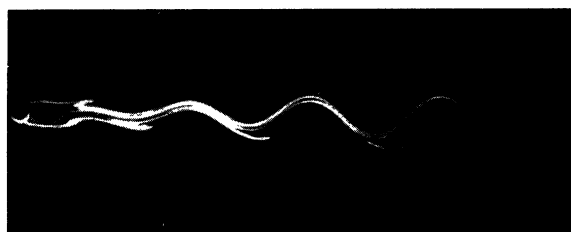
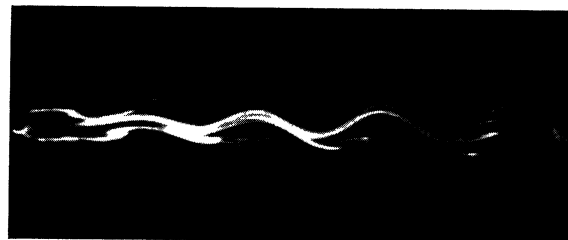


PLANCHE III, fig. *c*. — Aspects du sillage lors d'un battement.



d'où :

$$\left(\frac{d\varepsilon'}{d\alpha}\right)_{\alpha=0} = \operatorname{tg} \gamma = \frac{1}{6},$$

ce qui montre que la tangente à la courbe  $\varepsilon'(\alpha)$  a une pente égale à  $1/6^\circ$  au point  $\alpha = 0$ , c'est-à-dire au critérium.

Calculons maintenant cette pente sur la courbe expérimentale  $\varepsilon'(V)$  en prenant respectivement les points 1, 2 et 3.

Pour (2) par exemple on a :

$$\varepsilon' = -0,01641, \quad \alpha = -0,09. \quad (\text{fig. 21.})$$

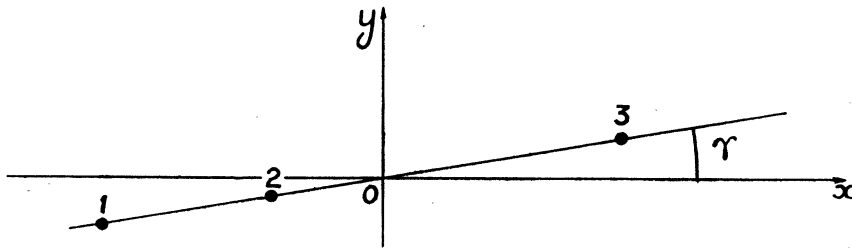


FIG. 21.

En effet, par suite des hypothèses ci-dessus, pour cette valeur de  $\varepsilon'$ , les tableaux XXXV et XXXVI donnent :

$$\frac{y_i}{y_{i+1}} = 1 + \alpha = 0,91,$$

d'où

$$\alpha = -0,09.$$

En procédant de même pour les deux autres points, on trouve :

$$\text{Point 1 : } \varepsilon' = -0,0293, \quad \alpha = -0,16;$$

$$\text{Point 3 : } \varepsilon' = 0,0354, \quad \alpha = 0,19;$$

les points 1 et 2 définissent une droite de pente  $\frac{\Delta\varepsilon'}{\Delta\alpha} = \frac{0,01279}{0,07} \approx \frac{1}{5,5}$ ; les points

2 et 3, une droite de pente  $\frac{\Delta\varepsilon'}{\Delta\alpha} = \frac{0,052}{0,28} \approx \frac{1}{5,8}$ .

On voit donc que les valeurs mesurées sont en très bonnes concordances avec les valeurs théoriques indiquées par les formules (5) et (7).

TABLEAU XXXV.

Etablissements.

$\frac{y_2}{y_1}$	T sec.	V mm. : sec.	$\varepsilon' \text{ sec}^{-1}$ .
1,19	4,90	10,29	0,0354
1,19	4,70	10,59	0,03774
1,27	4,62	10,92	0,0515
1,27	4,07	12,25	0,05822
1,30	4,05	12,98	0,0646
1,24	3,25	14,48	0,0660

TABLEAU XXXVI.

Amortissements.

$\frac{y_i}{y_{i+1}}$	T sec.	V mm. : sec.	$-\varepsilon' \text{ sec}^{-1}$ .
0,91	5,74	9,42	0,01641
0,84	5,97	8,58	0,0292
0,77	6,21	8,00	0,0421
0,74	6,51	7,26	0,04645
0,68	7,40	6,95	0,0521
0,645	7,95	6,35	0,0548
0,625	9,60	6,05	0,049

**Autres caractères des tourbillons alternés les rattachant aux phénomènes de relaxation.** — Parmi ces caractères, on peut successivement signaler :

a) L'accrochage ou synchronisation des tourbillons alternés avec une oscillation de période très voisine ou un de ses sous-harmoniques.

Cette particularité a déjà été signalée par M. P. Dupin, à la suite de son étude sur la vibration des tiges immergées, cet auteur a indiqué, en effet, l'accrochage du système tige-tourbillon.

Dans les expériences faites avec le robinet tournant, nous avons pu obtenir un accrochage des tourbillons, soit avec la période du robinet, soit avec une de ses sous-multiples.

b) L'étude de la forme des oscillations de l'amplitude du sillage en fonction du temps pour différents nombres de Reynolds, montre la déformation continue de ces

oscillations et le passage de la forme quasi-sinusoidale au voisinage du critérium, à une autre comportant une grande quantité d'harmoniques pour des nombres de Reynolds éloignés de ce dernier, forme semblable à celle que l'on obtient dans la solution de l'équation réduite de Van der Pol si  $\varepsilon$  est voisin de l'unité.

Ce résultat est bien en accord avec les remarques de cet auteur <sup>(1)</sup> relatives à la transformation d'une oscillation sinusoïdale en une oscillation de relaxation lors de la variation de  $\varepsilon$ .

c) Enfin, comme nous l'avons déjà dit <sup>(2)</sup>, pour des nombres de Reynolds variant entre 1.500 et 20.000, le paramètre de Strouhal conserve une valeur sensiblement constante et très voisine de 0,2 ce qui permet d'écrire dans cette zone :

$T = \frac{5D}{V}$ , relation qui définit la période des tourbillons alternés par le quotient des deux grandeurs caractérisant le système. Or, c'est bien là une des caractéristiques des oscillations de relaxation.

**Conditions de similitude.** — Considérons deux écoulements semblables (1) et (2) :  $\lambda, \alpha, \theta, m, K$  étant respectivement les facteurs par lesquels on a multiplié les dimensions linéaires, les pressions, les temps, les densités et les coefficients cinématiques de viscosité, du premier écoulement, les équations de Navier donnent pour les conditions de similitude et dans l'absence des forces extérieures :

$$\frac{\alpha}{m\lambda} = \lambda\theta^{-2} = K\lambda^{-1}\theta^{-1},$$

qui appliquées aux  $\varepsilon$  se transforment en :

$$\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = K\lambda^{-2}.$$

Si l'on opère avec le même liquide et à une même température,  $K = 1$  et cette dernière relation donne :

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 \lambda^2,$$

qui définit la condition de similitude dans le cas de nos expériences.

<sup>(1)</sup> Voir p. 51.

<sup>(2)</sup> Voir p. 17.

**Tourbillons d'obstacles de révolution.** — Les tourbillons se produisant à l'aval d'un obstacle de révolution ont été mis en évidence pour les disques et sphères par L. Schiller et H. Schmiedel<sup>(1)</sup> et pour les plaques inclinées par E. G. Eden<sup>(2)</sup>.

MM. C. Camichel, P. Dupin et M. Teissié-Solier<sup>(3)</sup>, ont de leur côté étudié ces phénomènes. Ils ont utilisé comme obstacles des cylindres droits de révolution supportant à leur extrémité aval une plaque circulaire mince de diamètre double. Ils ont tracé la courbe  $S(\mathcal{R})$  reliant le paramètre de Strouhal  $S$  au nombre de Reynolds  $\mathcal{R}$ , la dimension linéaire  $D$  choisie pour ce tracé étant le diamètre de la plaque circulaire. Durant leurs expériences, les obstacles étant immergés dans un champ uniforme de vecteurs vitesses.

Ces auteurs ont également déterminé le critérium de ces tourbillons qui est défini par un nombre de Reynolds voisin de 292. La courbe de Strouhal étant unique pour tous les obstacles semblables utilisés, ils ont pu conclure que la loi de similitude dynamique de Reynolds était applicable au phénomène étudié.

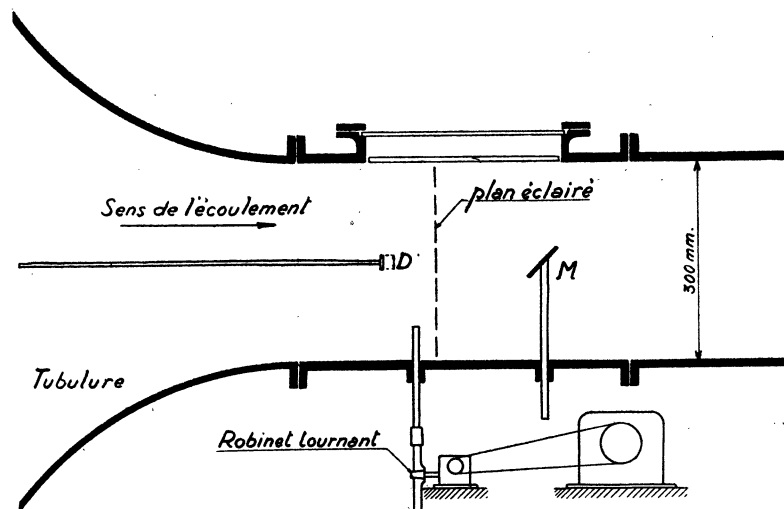


FIG. 22. — Schéma du dispositif expérimental utilisé lors de l'étude des tourbillons d'obstacles de révolution.

L'observation d'une section du sillage par un plan normal à la direction générale de l'écoulement permet de constater l'existence d'un axe de symétrie déjà visible, en régime de Poiseuille. L'orientation de cet axe varie en général pendant la durée de l'observation. De plus l'amplitude du sillage présente des variations analogues à celles mises en évidence dans le cas des tourbillons alternés.

<sup>(1)</sup> H. Schmiedel, *Phys. Zeitch.*, 29, 1928, p. 593 et L. Schiller und H. Schmiedel, *Zeitch für Mathem.*, 21, 1928, p. 497.

<sup>(2)</sup> L. Bairstow, *Applied. Aerodynamics.*, London, 1920, p. 377.

<sup>(3)</sup> C. R. de l'Ac. des Sc., t. 195, 1226.

Les phénomènes ci-dessus présentant des particularités caractéristiques des oscillations de relaxation, nous nous sommes proposés d'étudier leur accrochage avec une cause perturbatrice de période voisine et de rechercher si, comme dans le cas des tourbillons alternés, la courbe de Strouhal pouvait être prolongée au-dessous du critérium.

Nous avons également utilisé comme obstacles des cylindres droits de révolution supportant à leur extrémité aval une plaque circulaire mince. Les diamètres de ces dernières variaient entre 12 et 16,25 mm. Le dispositif expérimental était celui représenté dans la figure 22. L'obstacle était placé dans un champ uniforme de vecteurs vitesses réalisé dans l'ajutage de 30 cm. de diamètre, du laboratoire de l'Institut Electrotechnique, et son axe était confondu avec celui de l'ajutage.

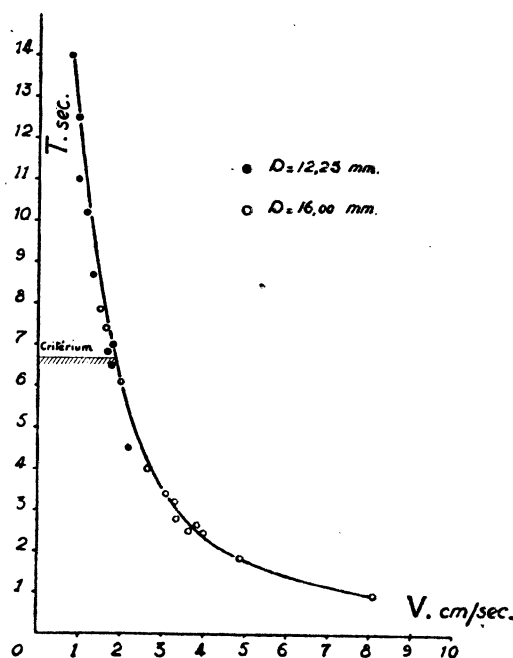


FIG. 23. — Variation de  $T$  en fonction de  $V$ . Valeurs réduites à  $D = 16$  mm. et  $l^\circ = 18^\circ$  (tourbillons d'obstacles de révolution).

On éclairait un plan normal à l'écoulement, et l'observation était faite à l'aide d'un précipité blanc impalpable, dans un miroir  $M$  placé à 40 cm. environ à l'aval du disque. Nous avons par ailleurs pu faire cette étude sans l'aide de ce précipité, et nous avons constaté entre les deux séries d'observations une concordance parfaite.

Pour produire les tourbillons au-dessous du critérium, nous provoquions une perturbation dans le sillage de la plaque en changeant pendant un temps très court les conditions de l'écoulement.

Pour les entretenir, nous nous sommes servis d'un robinet tournant dont nous



faisons varier la période jusqu'à obtenir la formation de ces tourbillons avec le maximum de netteté.

En effet, comme les tourbillons alternés, ceux-ci présentent la particularité de s'accrocher avec une cause perturbatrice de période voisine, mais la plage d'accrochage est ici encore plus étendue que dans le cas des tourbillons alternés.

Nous avons étudié dans ces conditions, pour les différents obstacles utilisés, la variation de la pseudo-période  $T$  des tourbillons en fonction de la vitesse  $V$  du fluide.

Nous avons ensuite rapporté tous ces résultats par similitude à la température de  $18^\circ$  et à un diamètre de 16 mm. en appliquant les formules de la page 28.

Les tableaux XXXVII et XXXVIII résument quelques résultats obtenus, et la (fig. 23) représente l'ensemble de ces résultats.

TABLEAU XXXVII.

 $D = 12,25 \text{ mm.}$ 

T sec.	V cm. : sec.	$l^\circ$ degrés.	T sec. à $18^\circ$ .	V cm. : sec. à $18^\circ$ .	T 16 mm. à $18^\circ$ sec.	V 16 mm. à $18^\circ$ cm. : sec.
1,98	3,51	14,55	2,15	3,23	3,67	2,48
2,20	3,25	14,55	2,39	2,99	4,08	2,30
2,40	3,04	13,75	2,65	2,74	4,53	2,20
2,50	2,98	14,60	2,71	2,74	4,63	2,10
3,50	2,50	14,60	3,80	2,30	6,50	1,77
3,60	2,45	13,80	4,00	2,20	6,84	1,69
3,65	2,62	13,80	4,10	2,36	7,00	1,81
4,70	1,88	14,60	5,11	1,72	8,70	1,32
5,50	1,67	14,40	6,02	1,53	10,20	1,17
5,80	1,40	13,80	6,45	1,28	11,00	0,98
6,09	1,37	13,90	6,75	1,24	12,50	0,95
7,40	1,105	13,80	8,20	0,995	14,00	0,764

TABLEAU XXXVIII.

 $D = 16 \text{ mm.}; l^\circ = 18^\circ.$ 

T sec.	V cm. : sec.	T sec.	V cm. : sec.	T sec.	V cm. : sec.
0,96	8,10	2,66	3,85	4,00	2,65
1,85	4,88	2,80	3,35	6,10	2,00
2,45	4,00	3,23	3,32	7,40	1,65
2,49	3,65	3,40	3,10	7,86	1,50

On constate que les points se placent bien sur une courbe unique. La loi de similitude de Reynolds reste donc applicable au-dessous du critérium. La courbe  $T(V)$  permet par ailleurs de prolonger la courbe de Strouhal dans une zone appartenant au régime de Poiseuille, ainsi qu'il avait été fait pour les tourbillons alternés.

## CONCLUSIONS

Nous résumerons, en terminant, l'ensemble des conclusions que nous pouvons, dans les conditions où nous avons opéré, déduire des études précédentes.

**Étude de la répartition et des battements.** — 1° Il existe une répartition des périodes de formation des tourbillons alternés le long d'un cylindre immergé dans un champ uniforme de vecteurs vitesses et réalisé dans une conduite à section circulaire.

2° On peut, en général, pour des nombres de Reynolds assez voisins du critérium, distinguer dans le sillage de l'obstacle deux zones de périodes nettement distinctes. Ces deux périodes interfèrent entre elles et produisent des battements dont la période satisfait à la formule générale  $\Theta = \frac{T T'}{T' - T}$ .

3° Pour des nombres de Reynolds plus élevés, les battements se propagent le long de l'obstacle et finissent par apparaître dans le plan médian.

4° La circulation qui s'établit immédiatement à l'aval de l'obstacle et parallèlement à l'axe de ce dernier joue un rôle essentiel dans la production et la progression de ces battements.

**Sur les tourbillons alternés et les oscillations de relaxation.** — 5° L'emploi du robinet tournant permet après un réglage convenable :

a) d'épurer la période qui prend naissance dans le plan médian ;

b) de supprimer les battements dans ce plan.

6° Pour des nombres de Reynolds supérieurs à 1.500 la période des tourbillons alternés est définie à un coefficient constant près (égal à 5) par le rapport du diamètre et de la vitesse, résultat qui caractérise bien les phénomènes de relaxation.

7° La loi générale  $y = \sqrt{\frac{a}{1 + be^{\pm t}}}$  est susceptible de représenter à la fois l'établissement et l'amortissement des tourbillons alternés au voisinage de leur critérium et permet une détermination de ce dernier.

8° Il est possible pour les tourbillons créés par des obstacles de révolution, de prolonger la courbe de Strouhal au-dessous du critérium de ces tourbillons.

---