ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

J. KUNTZMANN

**Contribution à l'étude des systèmes multiformes**

*Annales de la faculté des sciences de Toulouse 4e série*, tome 3 (1939), p. 155-194
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1939_4_3__155_0>

# CONTRIBUTION

À

# L'ÉTUDE DES SYSTÈMES MULTIFORMES

Par J. KUNTZMANN,

Agrégé préparateur à l'École Normale Supérieure.

## INTRODUCTION

On peut dire que jusqu'à une époque très récente, les opérations multiformes avaient soit semblé sans intérêt, soit inspiré une crainte bien injustifiée aux mathématiciens qui les avaient rencontrées dans leurs recherches. C'est ainsi que Grassmann écrit : « ... wie denn überhaupt alle in diesem Sinn mehrdeutigen Grössen aūs der Mathematik zu verbannen sind, weil sich aūs sie keine mathematische Formel mit Sicherheit anwenden lässt [1]. » (Ausdehnungslehre von 1862. *Œuvres*, tome I, partie 2, p. 224.)

Le premier exemple d'opération multiforme que nous ayons retrouvé est dû à Young (*Algébra oj many valued quantities Mathematische Annalen*, 104, 1931, p. 260). Mais le système introduit est tout à fait particulier.

La première définition générale est due à Marty et date de 1934. Dans les travaux de M. Marty [2] les opérations multiformes sont surtout un instrument. Son but n'est pas leur étude en soi. On peut en dire autant des travaux de M. Krasner [2].

Les applications qu'ils ont faites ne sont d'ailleurs pas les seules possibles. Pour citer un exemple, les classes suivant un idéal non bilatère peuvent être organisées en système multiforme. La considération de ce système mènerait peut-être à de nouveaux résultats sur les idéaux.

Dans une autre direction, des mathématiciens américains, en particulier M. Ore [2],

---

1. ..... comme aussi il faut bannir des mathématiques toutes les grandeurs à plusieurs déterminations, car on ne peut leur appliquer avec certitude aucune formule mathématique.

2. Voir la bibliographie à la fin.

ont considéré les opérations multiformes sans avoir en vue une application immédiate.

L'intérêt de ces recherches est double : d'une part elles étudient systématiquement les opérations multiformes qui apparaissent comme un auxiliaire indispensable dans certaines questions. D'autre part elles se rattachent à toute une série de travaux consacrés à des généralisations de la notion de groupe, qui se sont multipliés depuis une dizaine d'années. On y suppose l'opération uniforme, mais la considération d'une opération multiforme ne semble pas dénaturer la question ; elle est même tout à fait naturelle.

Une des tendances les plus nettes des mathématiques modernes est de distinguer dans chaque question les hypothèses indispensables de celles qui ne le sont pas. Cette manière de faire a conduit à dégager les notions de groupe, corps, anneau, etc.

On peut chercher à analyser à son tour une notion abstraite comme celle de groupe : Voir comment les diverses propriétés qu'on lui connaît résistent à une généralisation convenable? Comment elles reprennent peu à peu leur forme habituelle par l'adjonction de nouvelles restrictions? Telles sont les questions qui en dehors de toute application justifieraient déjà ces recherches. On ne fera évidemment pas ces généralisations au hasard. Or que pourrait-on trouver de plus naturel que des systèmes qui se sont présentés d'eux-mêmes.

Mais alors que dans les applications étudiées jusqu'ici, des notions assez restreintes comme celles d'hypergroupe des catégories ou d'hypergroupe des classes à gauche étaient suffisantes, ici il y a intérêt, comme l'ont fait constamment les Américains, à considérer des cas plus généraux, multigroupe ou système quelconque. On arrivera ainsi à analyser des notions comme celles d'unité ou d'inverse.

Je me suis proposé d'étudier les opérations multiformes en vue de généraliser et d'analyser la notion de groupe[1]. Lorsque cela n'exigeait pas d'hypothèse supplémentaire, j'ai considéré le cas le plus général et on pourrait trouver là le point de départ d'autres études analogues (par exemple pour la notion d'anneau).

Le premier chapitre est consacré à des définitions générales. Sauf en ce qui concerne les identités remarquables, il s'agit de notions bien connues que j'ai présentées sous leur forme classique. J'ai cru utile d'employer les termes de multigroupe (des auteurs américains) et d'hypergroupe (dû à M. Marty) avec des sens différents.

Le deuxième chapitre donne des exemples de systèmes susceptibles de conduire à des applications.

Les chapitres suivants se groupent autour de la notion centrale d'homomorphie. (J'emploie ce terme dans un sens vague ; il y a lieu de distinguer des degrés dans l'homomorphie.)

1. Remarquons en passant que la notion de groupe est la seule jusqu'ici qui ait été étudiée de cette manière.

Le troisième chapitre contient la description des diverses sortes de sous-systèmes et de divisions en classes. On montre comment on peut y associer des systèmes multiformes.

Le quatrième chapitre est consacré à l'étude des semi-homomorphies puis des homomorphies.

Le cinquième chapitre montre quelques applications de ces théories générales, en particulier aux notions élémentaires d'unité, d'inverse, etc.

Le sixième chapitre étudie les systèmes particuliers : hypergroupes, hypergroupes inversables.

Ces résultats ont été préparés par plusieurs Notes (1) aux *Comptes Rendus*.

Qu'il me soit permis d'exprimer ici ma très vive reconnaissance à M. Valiron qui m'a encouragé à terminer ce travail; à M. Julia qui a présenté plusieurs de mes résultats et accepté la présidence du jury; à M. Denjoy qui a bien voulu se joindre à eux et proposer le sujet de la seconde thèse, enfin à M. Marty qui m'a donné à plusieurs reprises de précieux conseils.

1. Voir la bibliographie à la fin.

## CHAPITRE I

# Définitions générales.

### 1. — Opération.

A un couple ordonné $(a, b)$ d'éléments pris dans un ensemble $\mathcal{E}$ faisons correspondre un sous-ensemble $\mathcal{E}_1$ de $\mathcal{E}$. (L'ensemble vide n'est pas écarté pour le moment.) On dit dans ce cas qu'on a défini une *opération* [1]. L'opération sera dite parfaite si $\mathcal{E}_1$ n'est jamais l'ensemble vide. L'opération sera dite uniforme si $\mathcal{E}_1$ comprend exactement un élément.

*Notations.* — Nous désignerons l'ensemble des résultats d'une opération appliquée au couple $(a, b)$ par des symboles tels que

$$ab \qquad a \circ b \qquad \text{etc.}$$

Dans tous les cas où aucune confusion ne sera à craindre nous emploierons la notation $ab$.

Si l'ensemble $\mathcal{E}_1$ ainsi défini n'est pas vide nous nommerons *détermination* de l'opération et nous désignerons respectivement par les symboles

$$\underset{\bullet}{ab} \qquad a \underset{\bullet}{\circ} b \qquad \text{etc.}$$

l'un quelconque des éléments de $\mathcal{E}$.

Dans certains cas nous aurons à considérer des déterminations d'opérations comme inconnues. Nous remplacerons alors le $\bullet$ par $x$. Exemple : $a_x b$.

*Table de l'opération.* — On peut représenter les résultats d'une opération par une table à double entrée analogue à la table de multiplication.

*Exemple.*

| | $a$ | $b$ |
|---|---|---|
| $a$ | $a$ | $b$ |
| $b$ | $b$ | $a, b$ |

*Système.* — Nous nommerons *système* un ensemble entre les éléments duquel on a défini une ou plusieurs opérations.

---

1. On pourrait encore généraliser en prenant $a$, $b$ et les $ab$ dans des ensembles différents.

Comme nous avons principalement en vue de généraliser la théorie des groupes, nous désignerons habituellement par le seul mot système un système à une seule opération bien déterminée toujours la même. Quand nous voudrons au contraire employer le terme de système dans son sens ordinaire, nous parlerons de système par rapport à telle ou telle opération.

*Uniformisateur.* — Dans un système uniforme une expression telle que $(ab)c$ est définie par elle-même. Ici au contraire $(ab)$ désignant non pas un élément mais un ensemble (qui peut être vide) il faut faire une nouvelle convention. Nous allons la présenter d'une manière qui sera susceptible de généralisations [1].

Soient des opérations multiformes définies dans un ensemble $\mathcal{E}$.

Soit E l'ensemble des sous-ensembles de $\mathcal{E}$. Soient $E_1$, $E_2$ des éléments de E.

Nous définirons dans E les opérations suivantes :

$E_1 E_2 =$ Réunion de tous les $e_1 e_2$, $E_1 o E_2$ ... Réunion de tous les $e_1 o e_2$, $e_1$ parcourant $E_1$, $e_2$ parcourant $E_2$.

Si $E_1$ ou $E_1$ etc. sont l'ensemble vide, $E_1 E_2$, $E_1 o E_2$ ... seront également l'ensemble vide.

Ces opérations sont uniformes et parfaites.

Soit un ensemble quelconque de $E_i$ et $\Sigma E_i$ leur réunion on a visiblement :

$$\begin{aligned} E'(\Sigma E_i) &= \Sigma E' E_i \\ (\Sigma E_i)E' &= \Sigma E_i E' \end{aligned} \tag{1}$$

de même pour les autres opérations. En particulier si $E_1 \cup E_2$ désigne la réunion de $E_1$ et $E_2$ on a

$$\begin{aligned} E_1(E_2 \cup E_3) &= E_1 E_2 \cup E_1 E_3 \\ (E_1 \cup E_2) E_3 &= E_1 E_3 \cup E_2 E_3 . \end{aligned}$$

On obtient ainsi l'*uniformisateur* du système donné. Inversement si dans l'ensemble E des sous-ensembles d'un ensemble $\mathcal{E}$ on a des opérations satisfaisant aux conditions (1) on est en présence de l'uniformisateur d'opérations bien déterminées que l'on obtient en considérant les $E_i$ formés d'un seul élément de $\mathcal{E}$. Griffiths a considéré des cas plus généraux où l'on ne suppose plus obligatoirement l'opération définie pour tous les éléments de E et qui par suite n'ont pas en général de rapports avec une opération multiforme. Nous n'aurons pas à nous en occuper.

1. Voir Kuntzmann 3). Ces questions ne seront pas abordées ici.

*Expression rationnelle.* — Une expression rationnelle est l'indication d'une suite d'opérations bien déterminées à effectuer sur certains éléments.

L'expression sera dite numérique si les éléments qui y figurent sont tous bien déterminés. L'expression sera dite littérale s'il y figure des éléments arbitraires que nous représenterons par des lettres. On suppose essentiellement que ces éléments arbitraires sont indépendants, ce que nous mettrons en évidence en les désignant par des lettres différentes.

Une expression numérique possède un sens bien déterminé dans l'uniformisateur. Par convention, nous nommerons valeur de cette expression dans le système multiforme l'ensemble valeur de cette expression dans l'uniformisateur quand on remplace chaque élément par l'ensemble formé de ce seul élément. Il est facile de voir que ceci ne conduit à aucune contradiction dans les cas où une définition directe est possible.

*Semi-identité. Identité.* — Soient $R(a, b, c\ldots)$, $R'(a, b, c\ldots)$ deux expressions rationnelles littérales formées des mêmes lettres (chaque lettre ne figurant bien entendu qu'une fois dans chaque expression).

Nous dirons qu'il y a entre ces deux expressions une *semi-identité régulière* si on a $R(a, b, c\ldots) \supset R'(a, b, c\ldots)$ quels que soient les éléments par lesquels on remplace $a, b, c\ldots$

Nous dirons qu'il y a une *identité régulière* si on a dans les mêmes conditions $R(a, b, c\ldots) = R'(a, b, c\ldots)$.

Une identité résulte visiblement de deux semi-identités de sens contraires.

THÉORÈME. — Toute semi-identité (identité) régulière vraie dans un système est encore vraie dans l'uniformisateur.

Montrons-le pour les semi-identités.

Soit $R(a, b, c\ldots) \supset R'(a, b, c\ldots)$.

Remplaçons $a, b, c\ldots$ par $E_1 E_2 E_3\ldots$ et les éléments fixes par les sous-ensembles formés de ces seuls éléments.

On a $R(E_1 E_2 E_3\ldots) = \Sigma R(e_1 e_2 e_3\ldots)$

$R'(E_1 E_2 E_3\ldots) = \Sigma R'(e_1 e_2 e_3\ldots)$.

Si l'un des $E_1 E_2 E_3$ est vide, $R$ et $R'$ sont vides.

Dans tous les cas, $R(E_1 E_2 E_3\ldots) \supset R'(E_1 E_2 E_3\ldots)$.

*Remarque.* — Le même raisonnement est encore valable dans le cas où les deux expressions ne sont pas formées des mêmes lettres à condition d'exclure l'ensemble vide. Par contre, il continue à être essentiel que chaque lettre ne figure qu'une fois dans chaque expression.

### 3. — Identités remarquables.

Soit une opération multiforme que nous noterons $ab$.

$a \llcorner b$ désignera l'ensemble des $x$ tels que $a = b.x$,
$b \lrcorner a$ désignera l'ensemble des $x$ tels que $x.b = a$.

Ces deux nouvelles opérations sont dites inverses de la première ($b \lrcorner a$ inverse à gauche).

Les inverses de $a \llcorner b$ sont $ba$ et $a \lrcorner b$.
Les inverses de $b \lrcorner a$ sont $ab$ et $b \llcorner a$.

Nous allons étudier les expressions rationnelles construites au moyen des $ab$, $a \llcorner b$ et $a \lrcorner b$.

A) Les semi-identités suivantes sont équivalentes :

$$(ab)c \supset (a)bc \qquad (b \lrcorner a) \llcorner c \supset b \lrcorner (a \llcorner c)$$
$$b \lrcorner (c \lrcorner a) \supset bc \lrcorner a \qquad a \llcorner bc \supset (a \llcorner b) \llcorner c.$$

Montrons par exemple que la première entraine la seconde.
$bc \lrcorner a$ représente l'ensemble des $x$ tels que $x(b.c) = a$ pour un $b.c$ convenable. Or pour ces $x$, $(x.b)c \supset a$, c'est-à-dire $x \subset b \lrcorner (c \lrcorner a)$.
On démontre de même que la seconde entraîne la première et ainsi de suite.
On peut également remplacer partout $\supset$ par $\subset$ ou par $=$.
Dans ce dernier cas on dit qu'il y a *associativité*.

B) Pour que l'on ait l'une quelconque des conditions

$$c \lrcorner ab \supset a(c \lrcorner b) \qquad ab \llcorner c \supset (a \llcorner c)b$$
$$c \lrcorner ab \supset (b \lrcorner c) \lrcorner a \qquad ab \llcorner c \supset a \llcorner (c \llcorner b)$$

il faut et il suffit que pour $a.b$, $b.c$ quelconques on ait

$$(a.b)_x\, c = a_x (b.c).$$

Démontrons-le pour la première identité. Soit $a(c \lrcorner b)$.

Posons $c \lrcorner b = y \quad a.y = x$.

Il faut que $x.c = a.b \quad y.c = b$ ou encore que $(a.y)_x\, c = a_x (y.c)$.

On peut encore exprimer cette condition de la manière suivante :

Il faut et il suffit que $a \llcorner c \frown b \lrcorner d$ non vide entraîne $ab \frown cd$ non vide.

Il n'est pas non plus sans intérêt de constater que cette condition avait déjà été donnée par Brandt (1) dans le cas uniforme imparfait.

Une opération qui satisfait à cette condition sera dite *normale*.

C) Pour que l'on ait les conditions précédentes changées de sens il faut et il suffit que

$a.b = c.d$ entraîne l'existence d'un $j$ tel que

$$a = c.j \qquad d = j.b.$$

Démontrons-le toujours pour la première semi-identité.

$c \lrcorner ab$ est l'ensemble des $x$ tels que

$$x.c = a.b.$$

Or il en résulte en vertu de la condition

$$x = a.j \qquad b = j.c \qquad j = c.b.$$

D'où $x = a.(c \lrcorner b)$.

Inversement la première identité exprime que

$$x.c = a.b \text{ entraîne } \quad x = a.j \quad c \lrcorner b = j \quad \text{ou} \quad b = j.c$$

ce qui est bien la condition.

Cette condition s'exprime encore de la manière suivante :

$ab \frown cd$ non vide entraîne $a \llcorner c \frown b \lrcorner d$ non vide. C'est tout simplement la réciproque de la condition donnée tout à l'heure.

Une opération satisfaisant à cette condition sera dite *résoluble*.

D) Dès qu'il y a une semi-identité entre

$$a(c \lrcorner b) \quad \text{et} \quad (b \lrcorner c) \lrcorner a \quad \text{ou entre} \quad (a \llcorner c)\, b \quad \text{et} \quad (a \llcorner c) \llcorner b$$

on a les deux identités :

$$a(c \lrcorner b) = (b \lrcorner c) \lrcorner a \qquad (a \llcorner c)\, b = (a \llcorner c) \llcorner b,$$

---

1. Uber eine Verallgemeinerung des Gruppenbegriffs. *Mathematische Annalen*, 96. 1926, p. 360.

et pour cela il faut et il suffit que l'existence de $a.j$ et de $j.b$ entraîne

$$a \llcorner (a.j) = (j.b) \lrcorner b.$$

La démonstration est aussi facile que dans les autres cas.

Nous appellerons parfois cette condition résolubilité de seconde espèce. Remarquons qu'une opération résoluble (comme plus haut) et normale est résoluble de deuxième espèce.

Sauf si nous le mentionnons explicitement, les propriétés énoncées pour la résolubilité ordinaire s'appliqueront également à la résolubilité de deuxième espèce.

Les identités ainsi obtenues sont en un certain sens les seules possibles : ce sont les seules qui ne supposent aucune commutativité.

Les conditions trouvées : normalité, résolubilité, associativité ont des rôles différents. L'associativité et la normalité portent sur l'opération directe. La réversibilité fait intervenir au contraire l'opération inverse.

Nous allons maintenant donner quelques règles de calcul qui seront utiles pour la suite.

On démontre facilement que pour une seule opération associative, toutes les expressions rationnelles que l'on peut former au moyen de cette seule opération avec $n$ éléments pris dans un ordre déterminé sont égales par exemple :

$$\big((ab)\,c\big)\,d = a\big((bc)\,d\big) \quad \text{etc...}$$

Pour le cas d'une opération qui est de plus normale on a la propriété suivante :

Considérons $n$ éléments pris dans un ordre déterminé, et une détermination pour chacun des $n - 1$ produits deux à deux d'éléments consécutifs. Répartissons ces produits arbitrairement en deux groupes. On peut trouver une détermination du produit des $n$ éléments qui se laisse écrire à la fois à partir de deux groupes de produits.

Par exemple $(a.b)_x\,(c.d) = a_x\,(b.c)_x\,d$.

La démonstration se fait par récurrence.

Soit un élément $b$ qui ne soit pas un élément extrême et tel que ses produits avec l'élément à droite et l'élément à gauche ne soient pas donnés dans la même expression.

On peut supposer le problème résolu pour les éléments $p$ à gauche de $b$ et pour les éléments $q$ à droite de $b$. On a alors $(p.b)_x\,q = p_x\,(b.q)$ ce qui démontre la propriété.

### 4. — Scalaires unités inverses.

Dans tout ceci nous considérons une seule opération que nous noterons $ab$. A la suite de Dresher Ore nous appellerons *scalaire à gauche* un élément $x$ tel que $xa$ soit formé d'un seul élément quel que soit $a$. On définit de même un *scalaire à droite*. *Un scalaire* est un élément qui est scalaire à la fois à droite et à gauche.

Il n'y a pas forcément de scalaire même à gauche.

Toujours à la suite de Dresher Ore nous nommerons *unité à gauche* un élément $e$ tel que $ea = a$ pour tout $a$.

On définit de même une *unité à droite*. *Une unité* est un élément qui est unité à la fois à droite et à gauche.

Une *unité scalaire* (à gauche) est un élément qui est à la fois unité (à gauche) et scalaire (à gauche).

Il n'existe pas toujours une unité (même d'un seul côté). Il peut exister plusieurs unités. Une théorie des unités et des scalaires a été présentée par Dresher Ore. Nous en extrairons seulement le théorème suivant qui ne suppose nullement l'associativité.

Si un système possède une unité scalaire à gauche $e$ et une unité à droite $e_d$ cette unité à droite coïncide avec l'uité scalaire en effet

$$ee_d = e_d \qquad ee_d \supset e \qquad \text{donc } e = e_d.$$

Par conséquent il n'y a pas d'autre unité à droite et pas d'autre unité scalaire à gauche.

En particulier s'il y a une unité scalaire il n'y a pas d'autre unité (à gauche ou à droite).

*Inverse à gauche.* — Soit une unité (à gauche pour fixer les idées) $e$; un élément $\tilde{a}$ sera dit inverse à gauche de $a$ si $\tilde{a}a \supset e$.

On définirait de même un *inverse à droite* relatif à la même unité $e$.

Un *inverse* est un élément qui est inverse à la fois à gauche et à droite.

Il n'y a pas forcément d'inverse (même d'un seul côté).

Nous étudierons plus tard d'une manièrs détaillée les propriétés des unités et des inverses et les généralisations qu'on peut en donner.

### 5. — Multigroupes. Hypergroupes.

Les systèmes que nous allons introduire seront soumis à deux sortes de conditions. Les unes porteront sur l'existence d'éléments particuliers : scalaires, unités, inverses.

Les autres consisteront en identités du type de celles que nous avons données au § 3.

*Multigroupe.* — Un système à une opération sera dit un multigroupe si l'opération ainsi que des deux inverses sont parfaites, c'est-à-dire si quels que soient $a$ et $b$ il existe au moins un élément $c$ tel que $ab \supset c$, un élément $d$ tel que $ad \supset b$ et un élément $f$ tel que $fa \supset b$.

Si de plus le système est semi-associatif, associatif, normal, résoluble, le multigroupe sera dit semi-associatif, associatif, normal, résoluble.

Un multigroupe ne contient pas toujours d'unité (même d'un seul côté). Mais dès qu'il contient une unité (à gauche par exemple), chaque élément possède au moins un inverse à droite et un inverse à gauche.

On peut également définir des *multigroupes à gauche* dans lesquels on suppose seulement que l'opération directe et son inverse à gauche sont parfaites.

*Multigroupe inversable.* — Dresher-Ore appellent multigroupe inversable [1] un multigroupe contenant une unité au moins d'un côté et tel que $a.b = c \rightarrow \bar{a}.c = b$ $a = c.\bar{b}$.

$\bar{a}$ et $\bar{b}$ étant des inverses de $a$ et $b$ (d'un coté quelconque pour le moment).

Comme cas particulier des multigroupes inversables on peut citer les multigroupes résolubles admettant une unité à droite et une unité à gauche.

En effet de $a.b = c.e$ on tire

$$a = c.\lambda \qquad e = \lambda.b.$$

*Hypergroupe. Hypergroupe inversable.* — Un hypergroupe est un multigroupe associatif qui possède une unité scalaire bilatère et un inverse unique de chaque côté. Nous reviendrons ultérieurement sur l'étude des conditions minima pour qu'un multigroupe soit un hypergroupe.

Pour les hypergroupes, les condition d'inversabilité, de normalité, de résolubilité coïncident comme nous le montrerons ultérieurement. Les hypergroupes ainsi définis seront dits *hypergroupes inversables*.

## 6. — Multigroupes et Groupes.

La notion de multigroupe a visiblement pour but d'étendre au cas multiforme les propriétés des groupes. On sait en effet qu'un système associatif qui possède une opération uniforme parfaite et telle que les deux opérations inverses soient parfaites est un groupe.

---

1. Dans le cas associatif. Nous étendons cette définition au cas général.

Autrement dit un multigroupe associatif à multiplication uniforme est un groupe.

On montre d'abord qu'il existe un élément $e$ tel que $ea = a$. Pour cet élément on a $e(ab) = ab$ c'est donc une unité scalaire à gauche. Il y a aussi une unité scalaire à droite donc une seule unité. Tout élément a un inverse bilatère. On vérifie bien tous les axiomes du groupe.

Remarquons encore que dans un multigroupe à multiplication uniforme la normalité se réduit à l'associativité.

M. Marty a démontré de même qu'un multigroupe associatif où la division à gauche est uniforme est un groupe [1].

---

1. Voir Marty (I).

## CHAPITRE II

### Exemples de systèmes multiformes.

I) Multigroupes quotients dans un groupe.

Soit un groupe G. Les classes suivant un sous-groupe invariant $g$ forment un groupe qui est dit groupe quotient de G par $g$ et qui se note $G/g$.

C'est en cherchant à étendre cette construction aux sous-groupes non invariants que l'on rencontre les premiers exemples de systèmes multiformes [1].

Considérons les *classes à gauche* $ag$, elles sont disjointes. On peut les organiser en multigroupe de la manière suivante :

Soit $A = ag$ $B = bg$.

Les éléments $ag\ bg$ remplissent un certain nombre de classes $C_i$ on pose

$$A.B = C_i.$$

Considérons plus généralement deux sous-groupes $g_1\ g_2$ et les ensembles de la forme $g_1\ ag_2$; ils sont deux à deux disjoints.

Nous les nommerons *classes mixtes* [2] suivant $g_1$ et $g_2$ et on peut définir de même le produit de deux tels ensembles $A = g_1\ ag_2$ $B = g_1\ bg_2$.

$A.B =$ ensemble des complexes $g_1\ ag_2\ g_1\ bg_2$.

Un cas particulier très important est celui où $g_1$ et $g_2$ sont le même sous-groupe.

On a alors affaire aux *catégories* suivant un sous-groupe. Le cas des classes à gauche est un autre cas particulier, celui où on prend $g_1$ réduit à l'élément unité.

On vérifie sans peine que le système des classes mixtes est un multigroupe associatif, résoluble, normal. Il possède une unité qui est la classe mixte de l'élément unité du groupe.

Il est possible de déterminer les inverses relatifs à cette unité. Ils sont tous bilatères. Le multigroupe des classes à gauche possède une unité qui est de plus scalaire à droite et qui est la seule unité.

Le système des catégories est un groupe inversable.

---

1. Cette définition est celle de Van der Waerden (*Moderne Algebra Springer*, Berlin 1930, t. I, p. 26). D'autres auteurs appellent ces mêmes classes classes à droite.
2. La définition est due à Wall.

II) Autres multigroupes attachés a un groupe.

*Hypergroupe des classes de conjugués.* — Soit un groupe G et un groupe d'opérateurs de ce groupe T. On appelle conjugué d'un élément $a$ de G son transformé par l'une quelconque des transformations de T.

Les conjugués d'un même élément forment une classe. Les classes ainsi définies sont disjointes puisque T est un groupe.

On peut organiser ces classes en hypergroupe de la manière suivante (Marty, 1).

Les produits d'un élément quelconque de la classe A par un élément quelconque de la classe B parcourent un certain nombre de classes qui constituent les diverses déterminations du produit A B.

En particulier on peut considérer le groupe des automorphismes internes; on obtient alors les classes de conjugués au sens ordinaire.

Dans tous les cas le système obtenu est un hypergroupe inversable.

Dans le cas des classes de conjugués au sens ordinaire, il est de plus commutatif.

III) Classes suivant un idéal gauche.

Les classes suivant un idéal bilatère forment un anneau. De même que nous avons étendu les propriétés des sous-groupes invariants aux sous-groupes non invariants. Nous allons étendre aux idéaux gauches les définitions relatives aux idéaux bilatères.

Soit $i$ un idéal gauche $i\lambda \subset i$ quel que soit $\lambda$.

La classe de l'élément $a$ est l'ensemble des $a + i$.

Les classes sont disjointes.

Nous définirons le produit des deux classes A B comme étant l'ensemble des classes contenant des produits d'un élément de A par un élément de B. Nous n'avons plus ici comme pour les classes suivant un groupe la propriété que les produits d'éléments de A B remplissent un certain nombre de classes.

L'opération ainsi définie possède les propriétés suivantes :

1° $(A\,B)\,C \supset A(B\,C)$ semi-associativité.

2° Normalité.

3° $(A + B)\,C = A\,C + B\,C$.

4° $A\,B + A\,C \supset A(B + C)$.

5° Il existe un élément O tel que $OA = O$.

$$O + A = A + O = A.$$

Le système ainsi défini est intéressant pour plusieurs raisons. D'abord il nous montre un système à deux opérations qui par rapport à l'une n'est nullement un multigroupe. Ensuite il nous montre un système non associatif.

IV) COMPOSITION DES FONCTIONS.

*Composition des polynômes à deux variables.* (Voir Marty, 2.) — Les éléments du système seront les polynômes irréductibles à deux variables $f(x, y)$ sur un corps $k$, les deux variables étant prises dans un certain ordre.

Soient deux polynômes $f(x, y)$ (première variable) $g(z, t)$ ($z$ première variable).

L'opération consistera à prendre le résultant de $f(x, y)$, $g(y, z)$. Nous obtiendrons aussi un ou plusieurs polynômes irréductibles $h(x, z)$ ($x$ première variable). Nous noterons l'opération $(f\,g)$.

Nous excluons complètement les constantes et les polynômes qui dépendraient seulement d'une variable. Il est clair que le résultant de $f(x, y)$, $g(y, z)$ ne contient aucun facteur dépendant d'une seule variable soit en effet $p(x)$ un tel facteur

$p(x) = 0$ exprimerait que les deux équations $f(x, y) = 0$. $g(y,z) = 0$ ont une racine commune quel que soit $z$. $g(y, z) = 0$ aurait un facteur indépendant de $z$.

Nous n'aurons pas non plus à faire intervenir les constantes. Il est clair de même que dans le cas expliqué plus haut que le résultant n'est pas identiquement nul. Il ne se réduit pas non plus à une constante différente de $0$ car pour $x$ donné il y a des valeurs de $z$ telles que les deux équations aient des racines communes.

Nous désignerons par $e$ le polynôme $x - y$ et par $\bar{f}(x, y)$, le polynôme $f(y, x)$.

$$f(x\,y)\,\bar{f}(y, z) = e \qquad e\,f = f, \qquad f\,e = f.$$

Il y a donc une unité scalaire et un inverse bilatère pour tout élément.

Il y a associativité car pour le résultant

$$\big((f\,g)\;h\big) = \big(f\;(g\,h)\big).$$

Enfin tout élément a un inverse unique.

En effet $f(x\,y)\;g(y, z) \supset e$ signifie que

$$\pi g(y_i, z) \text{ divisible par } x - z,$$
$$\pi g(y_i, x) = 0 \text{ ou } g(y, x) = f(y, x)\,\mathrm{H}(y, x),$$

$g$ étant irréductible, H est une constante, ce qui démontre la propriété.

De plus $\overline{ab} = \bar{b}\bar{a}$.

Ces propriétés caractérisent comme nous le verrons plus tard un hypergroupe inversable.

La compositon des fonctions analytiques (non uniformes naturellement) permettrait de définir un système analogue.

Un autre exemple que nous nous contenterons de citer est la composition des polynômes à deux variables $f(x, y)$ avec $f(0, 0) = 0$ quand on prend seulement ceux des facteurs $g$ du résultant pour lesquels $g(0, 0) = 0$.

## CHAPITRE III

### Étude des sous-systèmes. Divisions en classes.

1) Sous-système. Sous-multigroupe. Sous-système fermé.

Nous appellerons *sous-système* d'un système S pourvu d'une ou plusieurs opérations un ensemble d'éléments de S qui avec deux éléments $a$ et $b$ contient toutes les déterminations des opérations appliquées à $a$ et $b$.

Il est visible que la partie commune à un ensemble quelconque de sous-systèmes est encore un sous-système ou est vide.

Il en résulte que l'on peut définir une *réunion* d'un ensemble quelconque de sous-systèmes comme étant la partie commune à tous les sous-systèmes contenant les sous-systèmes donnés.

Il existe au moins un tel sous-système à savoir S lui-même et la partie commune n'est certainement pas vide.

Les sous-systèmes forment donc une structure [1].

*Sous-multigroupe.* — Un sous-multigroupe d'un multigroupe ou plus généralement d'un système quelconque est un sous-système (quand on considère l'unique opération produit) qui est un multigroupe.

Tout sous-multigroupe d'un groupe est un sous-groupe. Un groupe cyclique d'ordre infini possède déjà un sous-système qui n'est pas un sous-groupe.

La même propriété peut déjà avoir lieu pour un multigroupe infini comme le montre l'exemple :

| | $e$ | $a$ | $b$ |
|---|---|---|---|
| $e$ | $e$ | $a$ | $b$ |
| $a$ | $a$ | $a$ | $e, a, b$ |
| $b$ | $b$ | $e, a, b$ | $b$ |

$e, a$ formant un sous-système qui n'est pas un sous-multigroupe.

On peut également définir des sous-multigroupes à gauche (à droite) dans lesquels on suppose seulement l'opération inverse à gauche (à droite) parfaite.

1. Pour la définition, voir par exemple Ore : *Structures and group theory I Duke Journal*, 3, 1937, p. 149-174.

On peut enfin définir des sous-systèmes non plus suivant l'opération directe mais suivant l'une ou l'autre des opérations inverses.

Alors que la partie commune à deux sous-groupes est encore un sous-groupe, ici nous ne pouvons plus affirmer que la partie commune à deux sous-multigroupes est encore un sous-multigroupe. On pourrait avoir en effet $a$ et $b$ étant dans la partie commune à $S_1$ et $S_2$ :

$$ax \supset b \quad ay \supset b \quad x \subset S_1 \quad x \not\subset S_2 \quad y \subset S_2 \quad y \not\subset S_1.$$

*Sous-système fermé à gauche* (1). — Un sous-système sera dit fermé à gauche pour une opération s'il est un sous-système non seulement pour l'opération directe mais encore pour l'opération inverse à gauche.

Un sous-système fermé à droite et à gauche sera dit *fermé*. Un sous-système fermé (à gauche) d'un multigroupe est un sous-multigroupe (à gauche). Il contient de plus toutes les unités à gauche et tous les inverses à gauche relatifs aux unités qu'il contient.

D'après ce que nous avons démontré sur les sous-systèmes, les sous-systèmes fermés à gauche qui sont des sous-systèmes par rapport à l'opération directe et l'opération inverse à gauche forment une structure.

Si un système est associatif, normal, il est clair que ses sous-systèmes sont associatifs, normaux. Par contre les propriétés de résolubilité, inversabilité ne s'étendent qu'aux sous-systèmes fermés.

## II) Complexe unitaire. — Sous-système unitaire.

Nous nommerons *complexe unitaire à gauche* un ensemble d'éléments $\Gamma$ tel que $\Gamma a \supset a$, quel que soit $a$.

Toute unité à gauche est un complexe unitaire à gauche.

Tout ensemble qui contient un complexe unitaire à gauche en est un. Le système lui-même s'il est un multigroupe à gauche est un complexe unitaire à gauche.

Nous nommerons sous-système unitaire, sous-multigroupe unitaire, etc., un sous-système, un sous-multigroupe qui est en même temps complexe unitaire.

**Théorème.** — Un sous-système fermé à gauche a toujours une partie commune avec un complexe unitaire à gauche, et la partie commune est unitaire dans le sous-système.

En effet, si $a$ est dans le sous-système, les éléments $x$ tels que $xa \supset a$ y sont aussi et l'ensemble des $x$ relatifs aux divers $a$ constitue bien un complexe unitaire à gauche.

---

1. Par rapport à Dresher Ore, nous avons interverti les mots droite et gauche.

## III. Classes suivant un sous-système.

Nous supposons maintenant que le sytème est associatif.

Nous nommerons *classe à gauche* $C_a$ de $a$ suivant un sous-système $g$ l'ensemble des éléments $a$ et $ag$, $g$ parcourant le sous-système. Si le sous-système est unitaire $a$ est lui-même de la forme $ag$ et réciproquement.

Les classes à gauche ainsi définies possèdent la propriété suivante : Si $C_a \supset b$, $C_a \supset C_b$.

Nous considérons deux classes comme identiques si et seulement elles coïncident en tant qu'ensembles. L'élément $a$ sera dit *élément générateur* de la classe $C_a$. Une classe peut avoir plusieurs éléments générateurs, mais tout élément n'est générateur dans toute classe le contenant, que si les classes sont disjointes.

On peut en particulier définir dans un système les classes suivant ce système.

On peut énoncer ainsi la condition pour qu'un système soit un multigroupe, il faut que les classes à droite et à gauche suivant ce système soient réduites à une seule.

On définirait de même les classes mixtes suivant deux sous-systèmes.

Remarquons une petite différence avec la théorie des groupes. Sauf si le système possède une unité scalaire, les classes à gauche ne sont pas un cas particulier des classes mixtes.

*Sous-système reversible à gauche.* — Un cas particulier important qui a été introduit et étudié par Dresher Ore est celui où les classes sont des ensembles disjoints.

Un sous-système sera dit *reversible à gauche* [1] si les classes à gauche suivant ce sous-système sont disjointes.

Un sous-système reversible à droite et à gauche sera dit *reversible*.

Un sous-système reversible à gauche est fermé à gauche, car $ag_1 = g_2$ entraîne $a = g_2 g_3$.

Un sous-système reversible est fermé.

La partie commune à deux sous-systèmes reversibles n'est pas en général reversible (pour une raison analogue à celle qui a été donnée pour les sous-systèmes).

Généralisant un théorème de Dresher Ore, on peut montrer que la réunion de deux sous-systèmes reversibles à gauche (qui n'est pas autre chose que leur produit libre) est encore reversible à gauche.

En effet, soit $xa_1 b_3 a_3 b_4 \ldots = y$, $a \subset A$, $b \subset B$, on a, en vertu de la reversibilité par rapport à A et B, $x = y \ldots b'_4 a'_3 b'_2 a'_1$.

Les systèmes reversibles à gauche forment donc une structure.

---

1. Par rapport à Dresher Ore, nous avons interverti les mots droite et gauche.

Les classes mixtes suivant deux sous-systémes reversibles l'un à droite (indice 1), l'autre à gauche (indice 2), sont disjointes, car de $m_1.a.m_2 = m^1.b.m^2$ on tire $a = m_3.b.m_4$. Mais cette condition suffisante n'est nullement nécessaire.

Un sous-système reversible à gauche est un complexe unitaire à droite, car $a = bm$, $b = am'$ entraînent $a = am''$.

IV) Division en classes.

Nous dirons qu'une famille de sous-ensembles d'un ensemble E définit une division en classes si à tout élément $a$ de l'ensemble on sait faire correspondre un des sous-ensembles que nous désignerons par $C_a$ (1) (2). Les ensembles n'étant pas supposés disjoints, un même élément peut être dans plusieurs classes. L'élément $a$ sera dit élément générateur de la classe $C_a$. Une classe peut avoir plusieurs éléments générateurs.

Un exemple de classes est fourni par les classes suivant un sous-système; pour les distinguer, nous les nommerons classes *modulaires*.

Remarquons encore qu'une classe ne contient pas forcément son élément générateur.

*Division en classes particulières. — Classes régulières* : Nous nommerons division en classes régulières une division en classes satisfaisant à la condition suivante : $C_a \supset b$ entraîne $C_a \supset C_b$.

Les classes modulaires sont régulières car $ag \supset b$ entraîne $bg = agg = ag$. Les classes mixtes le sont aussi.

*Classes disjointes* (3). — Une division en classes sera dite division en classes disjointes si elle est régulière et si de plus $C_a \supset b$ entraîne $C_b \supset a$. On en déduit $C_a \supset a$ et $C_a \supset C_b$. Les classes sont alors des ensembles disjoints et réciproquement.

Les classes modulaires sont disjointes dans le cas réversible. Une division en classes disjointes équivaut à une correspondance univoque mais non biunivoque.

*Opérations sur les divisions en classes. — Divisions en classes consécutives :* Une division en classes C sera dite consécutive à une division C′ si pour tout élément on a $C \supset C'$.

---

1. L'ensemble vide n'étant pas exclu, on peut supposer qu'à tout élément correspond une classe : s'il ne lui en correspondait pas, nous lui donnons comme classe l'ensemble vide.

2. Pour certaines parties de ce qui va suivre, il suffirait de supposer l'existence d'une famille de sous-ensembles, sans qu'il soit nécessaire d'établir une correspondance avec les éléments du système. Nous signalerons au passage les cas où cette hypothèse est suffisante,

3. Pour une étude détaillée des divisions en classes disjointes voir Dubreuil et Dubreuil-Jacotin.

Pour des divisions en classes régulières et contenant leurs éléments générateurs, on a la propriété : Si $C' \supset C$, $C'$ peut s'obtenir de la manière suivante : on définit parmi les classes $C$ une division en classes régulières et contenant leurs éléments générateurs, soit $C''$ et on prend pour division $C'$ la division obtenue en prenant les éléments des classes qui composent $C''_{C_a}$. En effet on obtient bien ainsi une division en classes régulières. D'autre part si $C'_a \supset b$ $C'_a \supset C_b$ donc $C'_a$ est une réunion de classes $C$, peut donc se définir comme une division en classes parmi les $C$, division en classes qui contiennent leurs éléments générateurs et sont régulières car si $C'_{C_a} \supset C_b$ il contient $b$ donc $C'_b$ donc $C'_{C_b}$.

*Partie commune et réunion.* — On nommera partie commune, réunion de deux divisions en classes $C$ et $C'$ les divisions en classes que l'on obtient en faisant correspondre à chaque élément $a$ respectivement les ensembles $C_a \cap C'_a$ $C_a \cup C'_a$.

La partie commune conserve les propriétés d'être régulières, disjointes.

*Composition.* — Nous nommerons composée de deux divisions en classes $C$ et $C'$ la division $C''(a) = C\big(C'(a)\big) \cup C'(a) \cup C(a) = CC'(a)$.

On peut caractériser les divisions régulières par la propriété $C(C) = C$.

*Composition forte.* — La composée de deux divisions régulières n'est pas en général régulière. On peut définir une nouvelle opération qui jouisse de cette propriété. Nous nommerons composée forte de deux divisions en classes la division en classes réunion des divisions $C'$, $C(C')$, $C'\big(C(C')\big)$, $C\Big(C'\big(C(C')\big)\Big)$, etc.

(Chacune de ces divisions est d'ailleurs contenue dans les suivantes). L'ensemble ainsi obtenu contient aussi les $C$, $C'(C)$, etc.

La composition forte est une opération commutative. Signalons également en passant que la composition forte est une opération associative.

La composée forte de deux divisions en classes est toujours une division en classes régulières. Sans en donner une démonstration complète qui serait assez longue on peut dire que la composée forte doit contenir avec chaque élément sa classe $C$ et sa classe $C'$. La propriété est alors intuitive.

Nous noterons la composition forte $C \circ C'$.

En particulier $C \circ C$ est la plus petite division en classes régulières qui admette $C$ comme consécutive.

C'est ce que nous nommerons l'enveloppe régulière de la division en classes (1) (2).

---

1. On peut de même attacher à toute division en classes une plus petite division en classes disjointes à laquelle elle est consécutive. (Enveloppe disjointe.) On l'obtient en réunissant de proche toutes classes ayant des éléments communs.

2. Signalons sans le démontrer en détail qu'à toute division en classes, on peut attacher une plus grande division en classes régulière qui lui soit consécutive (tout au moins

Si $C$ est une division régulière $CoC = C$.

La composée forte de deux divisions en classes suivant deux sous-systèmes est la division en classes suivant leur réunion. Il suffit de l'écrire pour le voir.

La composée forte de deux divisions en classes disjointes est encore une division en classes disjointes. En effet on a $C_a \supset b$ $C_b \supset a$ $C'_a \supset b$ $C'_b \supset a$ $C(C'_a) \supset b$ entraîne $C'(C_b) \supset a$ et ainsi de suite.

*Condition de Dedekind.* — Soient trois divisions en classes $A, B, C$ $A \supset C$ $A$ est de plus supposé régulier et $C$ est supposé satisfaire à la condition $C_a \supset b$ entraîne $C_b \supset a$ (Par suite les classes $C$ sont disjointes si elles sont régulières).

On a les deux relations :

$$CB \cap A = C(A \cap B) \qquad\qquad A \cap BC = (A \cap B)C.$$

Démontrons par exemple la première :

Il suffit de considérer les éléments de $C(B) \cap A$ $B_a \supset b$ $C_b \supset c$ $A_a \supset c$ entraîne $C_c \supset b$ $A_c \supset b$ d'où $A_a \supset b$ $(A \cap B)_a \supset b$ $C(A \cap B)_a \supset c$ $C(A \cap B) \supset CB \cap A$.

Quant à la seconde partie $C(A \cap B) \subset CB \cap A$ elle est évidente car $A \supset C(A \cap B)$ et $CB \supset C(A \cap B)$.

Un contre exemple montre que l'on n'a pas de propriété analogue pour la composition forte.

*Associabilité.* — La composition ordinaire et la composition forte ayant chacune des propriétés importantes, il n'est pas sans intérêt d'étudier un cas où elles sont confondues.

Nous dirons que la division régulière $C$ est associable à $C'$ si $CC' \supset C'C$. Cela n'entraîne pas en général que $C'$ est associable à $C$.

**Théorème** : Si $C$, $C'$ et $CC'$ sont des divisions en classes disjointes et si $C$ est associable à $C'$, $C'$ est associable à $C$.

En effet $C'_a \supset b$ $C_b \supset c$ entraîne $C_c \supset b$ $C'_b \supset a$ ou $C'C_c \supset a$ d'où $C'C_a \supset c$ c'est-à-dire $C_a \supset d$ $C'_d \supset c$ ou $C'C \subset CC'$.

---

si le système est fini). Soit un élément $a$, on prendra tous les $b$ tels que $C_b \supset a$ et on définira la nouvelle classe de $a$ comme étant la partie commune à toutes les $C_b$ et à $C_a$. En recommençant un nombre fini de fois, on arrivera aux classes désirées. Comme on a enlevé chaque fois uniquement ces éléments qui ne pouvaient pas faire partie d'une classe régulière et consécutive à $C$, on a bien les plus grandes classes possibles.

**Théorème.** — Si $C$ est associable à $C'$ la composée forte de $C$ et $C'$ est précisément $CC'$.

En effet $C\big(C'(CC')\big) \subset C\big(C(C'C')\big) \subset CC'$, etc.

Signalons encore que l'on peut étendre à l'associabilité ainsi définie la plupart des propriétés établies par M. Dubreuil. Par exemple si $R$ est associable à $S$ et à $T$ il est associable à $S\circ T$ et si $S$ et $T$ sont associables à $R$ $S\circ T$ est aussi associable à $R$.

Une structure de divisions en classes régulières et associables deux à deux est une structure de Dedekind : cela résulte de la condition de Dedekind et du fait que la composée forte de deux divisions régulières est la plus petite division régulière qui les contienne toutes deux.

*Relations entre une classe et ses générateurs.* — Avec la définition que nous avons donnée, un élément ne fait pas partie obligatoirement de sa classe. On peut modifier une division de façon à obtenir des classes contenant leurs éléments générateurs. Si on pose $C'_a = C_a \cup a$, on obtient bien le résultat désiré, mais des éléments qui avaient même classe auparavant n'ont plus en général même classe après cette modification. On peut aussi adjoindre à une classe tous ses générateurs ; mais si on avait des classes régulières on n'aboutit pas en général à des classes régulières.

*Noyau.* — Nous nommerons noyau d'une classe l'ensemble des générateurs de cette classe. Les noyaux définissent une division en classes disjointes puisque chaque élément possède une seule classe. Il y a de plus une correspondance biunivoque entre les classes et leurs noyaux.

Une division en classes régulières contenant leurs éléments générateurs admet la division en noyaux comme consécutive, peut donc s'obtenir à partir des noyaux par le procédé de la page 29 qui se présente ici avec la particularité suivante : chaque classe de noyaux a un seul élément générateur.

On a encore la propriété suivante :

Pour une division en classes régulières, la partie commune à la division donnée et à la division définie par les noyaux est la plus grande division en classes disjointes consécutive à la division donnée.

En effet les classes obtenues sont disjointes puisqu'un élément est générateur d'une seule classe. D'autre part un élément $b$ de $D_a$ pour convenir doit posséder la propriété $C_b \supset a$ ou $C_b \supset C_a$ c'est-à-dire être un générateur.

Il en résulte que l'on peut attacher à toute division en classes une plus grande division en classes disjointes qui lui soit consécutive.

## V) Systèmes attachés a une division en classes.

Une division en classes permet de définir de diverses manières un système multiforme à partir d'un système déjà connu.

Soient deux classes $C_a$, $C_b$. Nous désignerons les noyaux correspondants par $N_a$, $N_b$. On prend un élément $a'$ dans $C_a$ (ou dans $N_a$) un élément $b'$ dans $C_b$ (ou dans $N_b$). Soit $a'b' = c$. On considère les classes $C_d \supset c$ (ou les $C_f$ tels que $N_f \supset c$) comme les déterminations du produit $C_a C_b$. On obtient ainsi huit définitions possibles. Nous nommerons d'une manière générale les correspondances ainsi définies des *Symorphies*.

Si les classes sont disjointes, toutes ces définitions coïncident. Nous dirons que la symorphie est *stricte*.

Une symorphie stricte est une correspondance univoque $a \to \bar{a}$ avec les conditions suivantes :

$ab = c$ entraîne $\overline{ab} = \bar{c}$ ;

$\overline{ab} = \bar{c}$ entraîne l'existence d'un $a' \to \bar{a}$, d'un $b' \to \bar{b}$, d'un $c' \to \bar{c}$ avec $a'b' = c'$.

C'est exactement ce que M. Marty nomme une semi-isomorphie (Marty 4).

Les symorphies ont été définies au moyen de l'opération directe. On voit sans difficulté que les opérations inverses dans le système des $C_i$ se définissent également par des symorphies à partir des opérations inverses dans le système donné.

En particulier une symorphie stricte est à la fois directe droite et gauche.

*Type d'une symorphie.* — En cas de besoin, nous distinguerons les diverses sortes de symorphies par trois lettres (chacune de ces lettres étant N ou C). La lettre C venant première indiquera que le facteur de gauche dans l'opération décrit la classe C. La lettre N à la même place indiquerait que le même facteur parcourt la classe N. La seconde lettre correspond de même au facteur de droite et la troisième au résultat.

L'ensemble de ces trois lettres constitue le type de la symorphie[1].

Pour aucune symorphie, on ne peut démontrer qu'elle respecte les identités.

Les symorphies sont surtout intéressantes dans un cas particulier auquel va être consacré le chapitre suivant. Cependant nous les rencontrerons à nouveau à diverses occasions, en particulier au chapitre V.

---

1. La symorphie (CCC) se laisse définir pour une famille quelconque de ses ensembles. La symorphie (NNN) ne fait pas intervenir les classes C : c'est la symorphie stricte la plus générale.

CHAPITRE IV

## Correspondances entre systèmes multiformes.

I) Isomorphie.

Deux systèmes définis sur deux ensembles $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ seront dits isomorphes si on peut établir entre leurs éléments une correspondance biunivoque $a \to a'$ telle que $ab \to a'b'$ (et de même pour les autres opérations).

L'isomorphie est évidemment réflexive transitive et symétrique.

II) Semi-homomorphie [1].

On pourrait généraliser ce qui précède en considérant comme en théorie des groupes des correspondances univoques $a \to a'$. La notion de division en classes définie au chapitre précédent va nous permettre de traiter un cas plus général.

Une symorphie directe d'un type quelconque sera une *semi-homomorphie directe* si elle satisfait suivant les cas à l'une ou l'autre des conditions suivantes :

*a*) Si elle est d'un type $(..C)$ et si $C_a\,C_b = C_c$ tout élément de $C_c$ est de la forme $a'b'$ ($a'$, $b'$ étant suivant le type dans $C_a$ ou $N_a$, $C_b$ ou $N_b$).

*b*) Si elle est d'un type $(..N)$ tout élément de $C_c$ est dans les mêmes conditions de la forme $a'b'$.

On définirait de même des semi-homomorphies à droite et à gauche relatives à chacune des opérations inverses [2].

Il est facile de voir que l'opération directe peut être une semi-homomorphie sans que les opérations inverses en soient également.

Si les classes sont disjointes, la semi-homomorphie est dite *stricte*. Une semi-homomorphie directe stricte est une correspondance univoque $a \to \bar{a}$ satisfaisant aux conditions suivantes :

$a\,.\,b = c$ entraîne $\bar{a}, \bar{b} = \bar{c}$ ;

$\bar{a}\,.\,\bar{b} = \bar{c}$ entraîne que pour tout $c' \to \bar{c}$ il existe un $a \to \bar{a}$ et un $b \to \bar{b}$ tels que $a, b = c'$ [3].

---

1. Voir Dresher-Ore. La semi-homomorphie est ce que les auteurs nomment strong-homomorphismus.

2. Si les classes contiennent leurs noyaux, le nombre des types de semi-homomorphies se réduit à quatre (XYC) et (XYN) étant confondus.

3. Ce que je nommais homomorphie II (Kuntzmann 2) est une semi-homomorphie droite et gauche.

*Semi-homomorphie et classes régulières, disjointes.* — Soit une semi-homomorphie de type (..N), les déterminations de $C_aC_b$ forment une réunion d'enveloppes régulières.

Pour les types (..C) les déterminations de $C_aC_b$ forment une réunion d'enveloppes disjointes.

En effet dans le premier cas, on doit avoir avec $C_u$ toutes les classes dont l'élément générateur est dans $C_u$, dans le deuxième cas toutes les classes qui ont avec $C_u$ un élément commun. C'est bien de cette manière que l'on obtient les enveloppes.

*Semi-homomorphie et identités.* — La semi-homomorphie directe de type (CCC) ou (NNN), conserve l'associativité; il en est de même de toutes les semi-homomorphies directes si les classes contieunent leurs noyaux.

Faisons la démonstration pour le second cas.

$$(C_aC_b)\,C_e = C_dC_e = C'_{d'c'}.$$

En effet tout élément de la classe considérée est de la forme $d'c'$ donc en particulier les éléments générateurs, de même $C_{d'c'} = C_{a'b'c'} = C_a(C_bC_c)$.

Dans les mêmes conditions la semi-homomorphie directe conserve la résolubilité.

Démontrons-le cette fois dans le premier cas.

$$C_aC_b = C_eC_d \quad \text{entraîne} \quad a'b' = c'd'$$
$$\text{d'où} \quad a' = c'j \quad d' = jb' \quad \text{et} \quad C_a = C_eC_jC_d = C_jC_b.$$

Pour la normalité, il faut supposer que la semi-homomorphie est de plus droite et gauche.

*Classes modulaires et semi-homomorphie.* — Nous ne passerons pas en revue tous les types possibles de symorphie.

Occupons-nous des classes à gauche.

Considérons le type (CCN). Il définit une semi-homomorphie directe dès que les classes contiennent leurs générateurs, c'est-à-dire dès que le système est unitaire à droite.

En effet de $agbg' = c$ on tire $agbg'' = c'$, $c'$ pouvant être non seulement un élément du noyau mais encore un élément quelconque de la classe. Le type (CNC) définit de même une semi-homomorphie droite.

On répéterait tout ce qui précède à propos des classes mixtes ou des catégories.

Un cas important est celui où les classes sont disjointes. Les diverses sortes de symorphie sont alors confondues. Par suite la semi-homomorphie est à la fois directe et droite.

*Système quotient à gauche suivant un sous-système.* — Nous nommerons ainsi le système défini par la semi-homomorphie du type (CCN) engendrée par les classes à gauche suivant un sous-système. Il est associatif, lorsque ce sous-système est unitaire à droite.

Nous emploierons la notation $\frac{G}{g}$.

Nous reviendrons au chapitre suivant sur l'étude des unités du système quotient.

Un sous-système G du système donné tel que $Gg \subset G$ donne par la semi-homomorphie un sous-système du système quotient (La condition est toujours remplie si $G \supset g$).

La proposition est évidente. Étudions la réciproque. Considérons tous les éléments $u$ dont les classes sont dans un sous-système S du système quotient. S provient par semi-homomorphie d'un sous-système du système donné et seulement si avec toute classe S contient ces sous-classes. Cette condition est certainement remplie si $S^2 = S$ car alors toute classe C figure dans au moins un produit et ses sous-clssses y figurent également. Elle est également remplie si les classes sont disjointes.

III) Homomorphie.

Une division en classes sera dite définir une *homomorphie directe* si on a entre les classes une opération satisfaisant à la condition : $C_a C_b = C_{ab}$.

L'opération ainsi définie est manifestement une symorphie du type (NNN).

On définirait de même une homomorphie *droite* et une homomorphie *gauche* au moyen de deux opérations inverses.

Une homomorphie directe est une semi-homomorphie droite et gauche (mais pas en général directe).

*Homomorphie et uniformité.* — L'homomorphie conserve visiblement la propriété pour une opération d'être uniforme, parfaite, réversible à droite et à gauche.

*Homomorphie et identités.* — L'homomorphie respecte les identités régulières au sens du chapitre I où ne figurent que des opérations par rapport auxquelles il y a homomorphie.

On démontre en effet par recurrence que $C\big(R(a, b\ldots)\big) = R(C_a, C_b.)$.

Un cas très important pour la suite est celui où les classes sont régulières et où l'homomorphie satisfait de plus à la condition $C_a \supset C_{a'}$ $C_b \supset C_{b'}$ entraîne $C_{ab} \supset C_{a'b'}$.

Une telle homomorphie sera dite *forte*. Remarquons que la condition donnée contient la condition d'homomorphie ordinaire.

*Homomorphies particulières.* — On peut donner facilement une condition suffisante pour que les classes modulaires définissent une homomorphie. Considérons les classes à gauche $ag$ et supposons $g$ unitaire à droite de manière que les classes à gauche contiennent leur noyau. Le sous-système $g$ sera dit semi-invariant à gauche si $ag \supset ga$ pour tout $a$ (1).

Les classes suivant un sous-système invariant à gauche définissent une homomorphie directe et droite forte car si $a'$, $b'$ sont deux nouveaux générateurs

$$a' = ag \qquad b' = bg \qquad a'b' = agbg \subset abg.$$

Remarquons que le système ainsi défini ne coïncide pas avec le système quotient. Pour le retrouver, il faudrait adjoindre à chaque produit comme nouvelles déterminations toutes les sous-classes des classes qui y figurent déjà.

IV) Théorème d'isomorphie.

Soit une homomorphie directe (pour fixer les idées) et d'un type T qui fait passer d'un système S à un système S′ et une seconde homomorphie directe du même type T qui fait passer de S′ à S″ (2). La correspondance entre S et S″ est aussi une symorphie directe du même type.

Démontrons-le pour le type (CCC). A une classe de S correspond une classe de S′ donc une classe de S″. Désignons par C les classes SS′ par C′ les classes S′S″ par C″ les classes SS″.

$C''_a C''_b = C''_c$ équivaut à $C'c_a C'c_b = C'c_c$ donc à $C_{a'} C_{b'} = C_{c'}$ avec $C'c_a \supset C_{a'}$, etc. donc à $a''b'' = c''$ si $C'_a \supset a''$, etc. or $a'' \subset C''_a$. Inversement on montre que $a''b'' = c''$ entraîne $C''_a C''_b = C''_c$.

Remarquons en passant qus si les classes SS′ et les classes S′S″ contiennent leurs éléments générateurs ou sont disjointes, il en est de même des classes SS″.

Théorème de transitivité. — Si les correspondances $S \to S'$ et $S' \to S''$ sont des symorphies strictes, des semi-homomorphies d'un même type, des homomorphies, des homomorphies fortes, il en est de même de $S \to S''$.

Démontre-le par exemple pour l'homomorphie : on a en gardant les notations précédentes $C_a C_b = C_{ab}$ $\quad \Gamma c_a \Gamma c_b = \Gamma c_a c_b = \Gamma c_{ab}$ ce qui est bien la définition d'une homomorphie.

On pourrait multiplier les théorèmes du même genre. Citons seulement le suivant relatif aux semi-homomorphies modulaires.

Si $S \to S'$ est une semi-homomorphie modulaire suivant un sous-système $g$ et $S' \to S''$ une semi-homomorphie suivant un sous-système provenant d'un sous-système G $\quad S \to S''$ est une semi-homomorphie suivant le sous-système $g$G. On a $Gg \subset G$.

---

1. Cette notion est due à M. Krasner (Krasner I).
2. On a vu au chapitre III que pour des classes régulières contenant leurs éléments générateurs cela équivalait à $S'' \supset S'$.

*Premier théorème d'isomorphie ou théorème de régressivité.* — Si $S \to S'$ et $S \to S''$ sont des symorphies directes du même type, des semi-homomorphies directes du même type, des homomorphies, des homomorphies fortes il en est de même de $S' \to S''$. (On suppose bien entendu que $S''$ a été défini comme une division en classes dans $S'$).

La proposition est à peu près évidente pour la symorphie. Remarquons que si les deux symorphies données sont strictes il en est de même de la troisième.

Faisons la démonstration dans le cas de la semi-homomorphie (CCC). Pour tout $c''$ on a $a''b'' = c''$ $a'' \subset \Gamma c_a$ $b'' \subset \Gamma c_b$ $a'' \subset C_{a'}$, etc. $C_{a'}C_{b'} = C_{c'}$ $C_{a'} \subset \Gamma c_a$, etc.

Ce qui démontre la propriété.

La démonstration est analogue dans les autres cas,

Contentons-nous également de signaler le théorème suivant : Si $S \to S'$ et $S \to S''$ sont des semi-homomorphies modulaires il en est de même de $S' \to S''$.

*Deuxième théorème d'isomorphie.* — Soit une division en classses régulières R et un ensemble J. On peut établir une correspondance biunivoque entre les classes R ayant leur élément générateur dans J et les classes $R \cap J$. En effet deux classes dont un élément générateur est dans J et qui ont même intersection avec J coïncident car $C_a \supset b$, $C_b \supset a$.

Supposons maintenant que les classes R définissent une homomorphie forte et que J soit un système.

Alors 1) R(J) est un sous-système.

2) Les $R \cap J$ définissent une homomorphie forte dans J.

On désigne par R(J) l'ensemble des éléments contenus dans les classes ayant leurs éléments générateurs dans J.

Soient deux éléments $a$ et $b$ de R(J), ils sont dans des classes $C_c$, $C_d$ $c$ et $d$ dans J $C_cC_d = C_{cd}$ $cd \subset J$ $C_{ab} \subset C_{cd} \subset R(J)$. Ce qui démontre la première partie.

Posons $R \cap J = S$ $S_aS_b = S_{ab}$ est bien une homomorphie forte, car les S correspondent d'une manière biunivoque aux R. Le système des S est donc isomorphe au système des R ayant un élément générateur dans J.

*Application au théorème de Jordan Holder Schreier*[1][2]. — Le théorème de Jordan Holder Schreier et ses généralisations ont fait l'objet de nombreuses études; nous nous contenterons de démontrer la propriété qui en constitue la base :

Soit un système S deux sous-systèmes invariants du même côté

$$S'S'' \quad \text{et} \quad S' \cap S'' = T \quad S' \cup S'' = R.$$

1. Voir par exemple van der Waerden Moderne Algebra (Springer Berlin, 1930), t. I, p. 135.

2. Voir Dresher-Ore.

Il faut montrer que R est ausssi un sous-système invariant du même côté. Cela a bien lieu car : $as's'' \subset s'as'' \subset s's''a$.

Il faut ensuite montrer que $\frac{R}{S'} = \frac{S''}{T}$. Or le deuxième théorème d'isomorphie s'applique pourvu que $S''$ en tant que classe soit stricte ce qui signifie que $S''$ est un sous-multigroupe. Le second théorème sous sa forme habituelle s'applique donc aux multigroupes.

V) Propriétés de structure des homomorphies fortes.

Soient deux homomorphies fortes $S'$ et $S''$ $S' \cup S'' = R$ $S' \cap S'' = T$.

1) R est aussi une homomorphie forte.

En effet les homomorphies fortes sont définies par la condition

$$C_a \supset u \quad C_b \supset v \quad C_{ab} \supset C_{uv}$$

On en déduit immédiatement $C'(C_{ab}) \supset C'(C_{uv})$, etc.

D'où $R_{ab} \supset R_{uv}$.

2) Le système des $S'$ définit une homomorphie forte dans le système des T. Le système des R définit une homomorphie forte dans le système des $S''$.

En effet il faut démontrer que $C'(T_a) \supset C'(T_u)$ $C'(T_b) \supset C'(T_v)$ entraîne $C'(T_{ab}) \supset C'(T_{uv})$ or $C'(T) = C'$, ce qui démontre la première partie.

La seconde partie résulte du théorème de régressivité, sans nouvelle démonstration.

Les deux correspondances $T \to C''$ $C' \to R$ qui sont des correspondances uniformes appliquent l'homomorphie $T \to C'$ sur l'homomorphie $C'' \to R$ pourvu que $C''$ soit associable à $C'$. On a effet alors $C''(C') \supset R$ on démontrerait toujours de la même manière que la correspondance respecte les homomorphies [1].

Il manque pour pouvoir énoncer un équivalent exact du théorème de Jordan Holder de pouvoir remplacer cette homomorphie par une isomorphie.

Pour terminer remarquons que les homomorphies définies par des sous-systèmes invariants d'un certain côté sont associables deux à deux, si bien que le théorème que nous venons de démontrer est une généralisation de celui qui avait été donné d'abord.

Cela résulte immédiatement du fait que $g_1 g_2 \supset g_2 g_1$ entraîne que la réunion de ces deux sous-systèmes est $g_1 g_2$.

On en déduit que les sons-systèmes invariants d'un côté formant une structure de Dedekind [2].

---

1. Comparer avec Dubreil et Dubreil-Jacotin.
2. Voir chapitre III, page 175.

CHAPITRE V

## Éléments et systèmes particuliers.

Dans ce chapitre nous allons montrer comment les théories qui précèdent permettent de présenter sous un jour nouveau les résultats relatifs aux unités, inverses et à leurs généralisations.

### I) Éléments et complexes idempotents.

Nous nommerons ainsi un élément, un complexe tels que $e^2 = e \quad G^2 = G$. Un complexe idempotent est donc un sous-système tel que tout élément soit détermination d'un produit. D'autre part les puissances d'une unité engendrent un complexe idempotent. Nous ne reviendrons pas sur les propriétés élémentaires des unités telles qu'on les trouve exposées par exemple dans Dresher-Ore. Les considérations qui suivent sont des applications des chapitres III et IV.

Considérons les classes définies de la manière suivante : $C_a$ ensemble des éléments $ag \quad g \subset G$. Si le complexe est idempotent, les classes sont régulières $(aG)G = aG$ (c'est une condition suffisante mais non nécessaire). Les classes définissent une semi-homomorphie directe du type (CCN) : en effet si

$$ag_1 bg_2 = c \qquad ag_3 bg_4 = cg$$

quel que soit $g$ pour $g_3 g_4$ convenable.

Considérons le système quotient à gauche : il possède un complexe unitaire à droite car $(aG)G = aG$ et ce complexe est presque scalaire en ce sens que $C_a C_G$ est formé seulement de $C_a$ et de ses sous-classes.

Le complexe est une unité si G est un multigroupe (ou si on a un élément idempotent).

On aurait des propriétés analogues pour le système des catégories. La seule différence est que le complexe est unité des deux côtés et non plus d'un seul.

Les résultats se simplifient si on suppose les classes disjointes. Ceci revient à dire que le multigroupe est réversible. Le système des classes à gauche a alors une unité scalaire à droite et le système des catégories une unité scalaire.

*Symorphie. Semi-homomorphie idempotente, unitaire.* — Soit un système possédant un élément idempotent, une unité. Nous nommerons symorphie, semi-homomorphie idempotente une symorphie, une semi-homomorphie dans lesquelles l'élément idempotent, l'unité constitue une classe à lui tout seul. Le nouveau système obtenu est alors également un système possédant un élément idempotent, une unité. On a le théorème :

Toute symorphie, semi-homomorphie donnant un système unitaire, peut se décomposer en une symorphie, semi-homomorphie des classes suivie d'une symorphie, semi-homomorphie idempotente.

La seule partie à démontrer est que la seconde correspondance ont une symorphie, semi-homomorphie. Or cela résulte du théorème de régressivité.

Nous n'avons pas parlé d'homomorphie unitaire.

Nous verrons au chapitre VI que dans un hypergroupe l'identité est la seule homomorphie unitaire.

*Unités et homomorphie.* — Proposons-nous d'étudier les homomorphies fortes qui donnent un système ayant un élément idempotent. Désignons cet élément par $e$ et la classe qu'il représente par $C_e$.

On a $C_eC_e = C_e$ de plus une sous-classe de $C_e$ multipliée par une autre sous-classe ne donne que des sous-classes donc $C_e$ est un sous-système.

Si on suppose de plus que $e$ est une unité scalaire, on a pour la même raison en désignant par E l'ensemble des éléments de $C_e$ $C_a \supset a\mathrm{E}$ $C_a \supset \mathrm{E}a$ $Ca \supset \mathrm{E}a\mathrm{E}$.

On peut donner la condition nécessaire et suffisante pour que ces différentes sortes de classes définissent des homomorphies. Dans le dernier cas par exemple c'est que $a\mathrm{E}b \subset \mathrm{E}ab\mathrm{E}$.

On peut également caractériser les homomorphies ainsi obtenues : Considérons par exemple l'homomorphie définie par un système invariant à droite. L'homomorphie est aussi une homomorphie à gauche : en effet $\mathrm{E}a\,\mathrm{E}b = \mathrm{E}ab$.

Inversement une homomorphie possédant une unité scalaire et qui soit à la fois directe et gauche est engendrée par les classes suivant un sous-système invariant à droite car de $C_e, C_a = C_a$ on tire $ua = b$ $b$ étant un élément quelconque de $C_a$ et $u$ un élément convenable de $C_e$.

On caractérise de même les homomorphies définies par les sous-systèmes invariants des deux côtés comme des homomorphies à la fois directes, droites et gauches.

## II) Étude de la notion d'inverse.

Soit un système associatif possédant un élément ou un complexe privilégié que nous désignerons par $e$, G sans avoir besoin de supposer pour le moment du moins que c'est une unité (même d'un seul côté).

Dans tout ce qui suit nous nommerons inverse à gauche pour cet élément ou ce complexe et nous désignerons par $\bar{u}$ un élément tel que $u\bar{u} \supset e$, $u\,\bar{u} \cap \mathrm{G}$.

Nous nommerons de même inverse à droite et nous désignerons par $\bar{\bar{u}}$ un élément tel que $\bar{\bar{u}}u \supset e \quad \bar{\bar{u}}\, u \cap \mathrm{G}$.

Nous allons maintenant supposer que tout élément possède au moins un inverse à droite et un inverse à gauche pour le complexe considéré. Cette condition n'est pas suffisante pour que le système soit un multigroupe comme le montre l'exemple :

| | $e$ | $a$ | $b$ |
|---|---|---|---|
| $e$ | $e$ | $b$ | $b$ |
| $a$ | $b$ | T | T |
| $b$ | $b$ | T | T |

$\mathrm{T} = eab \quad e$ est un complexe par rapport auquel tout élément a un inverse.

Par contre la condition devient suffisante si on suppose le complexe unitaire :

**Théorème** — La condition nécessaire et suffisante pour qu'un système associatif soit un multigroupe est qu'il contienne un complexe unitaire à droite C et un à gauche C′ et que tout élément possède un inverse à gauche pour le complexe unitaire à gauche et un inverse à droite pour le complexe à droite de manière que $a\,\overline{\mathrm{A}} \supset \mathrm{C}' \quad \bar{\bar{\mathrm{A}}}\,a \supset \mathrm{C} \quad \overline{\mathrm{A}}$ ensemble des inverses à gauche de $a \quad \bar{\bar{\mathrm{A}}}$ ensemble des inverses à droite de $a$.

La condition est visiblement nécessaire. Si elle est remplie on a :

$$(a\bar{a})\,b = b = a(\bar{a}b).$$

Les opérations inverses sont donc bien parfaites.

On peut donner également une condition pour que tout sous-système soit un sous-multigroupe. Appelons élément *régulier* un élément tel que le sous-système qu'il engendre contienne un complexe unitaire à droite et un complexe unitaire à gauche. Un sous-système dont tous les éléments sont réguliers est un sous-multigroupe. En effet le sous-système contient avec tout élément $a$ un élément $\bar{\bar{a}}$ tel que $\bar{\bar{a}}a = u \quad bu = b$ d'où $b(\bar{\bar{a}}a) = b = (b\bar{\bar{a}})a$.

En particulier si tous les éléments sont réguliers le système est un multigroupe. Cette condition n'est nullement nécessaire. Mais elle définit un type de multigroupes : les multigroupes *réguliers*, Dans un multigroupe régulier tous les sous-systèmes sont des sous-multigroupes unitaires. Réciproquement cette condition suffit à les caractériser.

On peut enfin donner une condition pour qu'un sous-système soit fermé :

Pour qu'un sous-système soit fermé il faut et il suffit qu'il contienne un complexe et avec un élément tous ses inverses relatifs à ce complexe. En effet on déduit de $ax \supset b \quad \bar{b}(ax) \cap \mathrm{C} \quad (\bar{b}a)x \cap \mathrm{C}$ d'où $\bar{b}a = \bar{x}$ donc $\bar{x}$ est dans le sous-système et par suite $x$ aussi. La condition est visiblement nécessaire.

On peut interpréter de la manière suivante la condition pour qu'un sous-système soit fermé d'un certain côté : il faut et il suffit que dans le système des classes suivant ce sous-systéme, le sous-systéme soit une classe qui est son seul inverse par rapport à elle-même.

### III) Inverses et semi-homomorphie.

De $ab \supset c$ on déduit en introduisant les inverses par rapport à un certain complexe C $ab\dot{\bar{c}} \cap C$ puis $b\dot{\bar{c}} \supset \overset{\times}{\bar{a}}$ le point indiquant qu'il s'agit d'un inverse donné et l'$\times$ qu'il s'agit d'un inverse convenable.

Cette condition pourrait s'interpréter comme l'analogue d'une semi-homomorphie droite du type (NCC). Ce n'èst effectivement une semi-homomorphie que si $ab \supset c$ entraîne $ab \supset \dot{\bar{\dot{\bar{c}}}}$ car alors $ab\dot{\bar{c}} \cap C$ équivaut à $ab \supset c$.

On peut remarquer que cette condition est en particulier remplie si tout élément possède un inverse unique à droite et à gauche.

Appliquons plusieurs fois la relation précédemment obtenue. On obtient à la troisième fois $\overline{\overline{\dot{\bar{\overset{\times}{\bar{a}}}}\,\dot{\bar{\overset{\times}{\bar{b}}}}}} \supset \overset{\times}{\bar{\dot{\bar{c}}}}$. On peut interpréter ceci comme une sur-opération de l'opération donnée dans un système où les inverses sont bilatères. (On nomme sur-opération d'une opération $ab$ une opération $a_0 b$ telle que $a_0 b \supset ab$).

*Conditions d'inversabilité.* — Nous avons déjà rencontré cette condition au chapitre I ; nous allons la préciser en même temps que nous l'étendrons au cas général. Nous supposerons que $ab \supset c$ entraîne $\bar{\bar{a}}c \supset b$ (Inversabilité à droite).

On en déduit en vertu de l'égalité écrite plus haut : $\overline{\overline{ba}} \supset \bar{\bar{c}}$.

On peut interpréter cette condition au moyen de la semi-homomorphie. On réunit dans une même classe les éléments qui ont un inverse commun soit du même côté soit de côtés différents. Les classes ainsi définies sont disjointes et définissent une semi-homomorphie directe car si $ab \supset c$ $\overset{\times}{\bar{\overset{\times}{\bar{a}}}}\,\overset{\times}{\bar{\overset{\times}{\bar{b}}}} \supset \overset{:}{c}$.

Un complexe par rapport auquel il y a inversabilité à droite n'est pas quelconque. Adjoignons à un tel complexe des éléments de manière à le transformer en complexe contenant avec tout élément ses inverses à droite et à gauche par rapport à lui-même. On obtient un sous-système réversible à droite.

En effet de $ua = b$ on tire $a = \bar{u}b$, les classes à droite sont donc disjointes. On a de plus $u.u = v$ entraîne $\bar{\bar{u}}v \supset u$ donc le complexe contient $v$.

Il en résulte que le nouveau complexe est unitaire à gauche. Il est de plus fermé. Le système quotient à gauche est inversable car de $aub = c$ on tire $ac = ub$.

Si le système est inversable à droite et à gauche, le système quotient possède une unité scalaire et est inversable à droite et à gauche. C'est un hypergroupe inversable.

L'une des propriétés que nous venons de donner se laisse généraliser de la manière suivante :

Tout sous-système fermé et contenant C est réversible, à droite.

En effet de $ua = b$ on tire $\bar{u}.b = a$ et le système quotient est inversable, car $a'b' = c'$ entraîne $\bar{a}'.c' = b'$.

## IV) Permutations multiformes.

Nous nommerons permutation multiforme et nous représenterons par la notation

$$P \begin{Bmatrix} a_1 & a_2 & & a_n \\ A_1 & A_2 & & A_n \end{Bmatrix} A_1 = (a_1\, a_4\, a_1 \ldots), \text{ etc.}$$

une correspondance entre un élément d'un système et un sous-ensemble de ce même système. Cette définition est due à Dresher Ore. On voit que cette définition n'est pas autre chose que celle des classes les plus générales. Nous garderons néanmoins le terme de permutation dans ce qui va suivre car il fait plus image.

On peut définir le produit de deux permutations comme la succession de ces deux opérations. C'est une opération autre que celles qui ont été définies à propos des classes. On peut définir également la réunion de deux permutations comme la permutation qui donne comme résultat la réunion de ce que donnaient les deux permutations.

*Représentation régulière d'un système.* — Sans développer complètement une théorie analogue à celle de la représention des groupes par des permutations, on peut cependant généraliser la notion de représentation régulière. Considérons les permutations

$$P_a \begin{Bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \ldots \\ ab_1 & ab_2 & ab_3 \ldots \end{Bmatrix}$$

On voit immédiatement que $P_a P_b = P_c$, $c$ parcourant les déterminations de $ab$. On obtient ainsi ce que l'on nomme la première représentation régulière du système.

Les permutations peuvent conduire à des propriétés importantes des systèmes. Signalons par exemple la suivante. Si de la permutation attachée à un élément $a$ on peut extraire une permutation uniforme contenant un élément arbitraire $b$ (mais pas forcément une permutation unique contenant tous les éléments) $a$ est régulier et réciproquement.

En effet si $a$ est régulier $(a, a^2 \ldots a^n)$ contient un complexe unitaire, donc $a^n u \supset u$ on peut donc choisir les déterminations de $u$, $au$, $a^p u$ de manière à ce que une expression des éléments ainsi obtenus soit $u$.

Réciproquement, si on peut trouver une permutation partant de tout élément et si $n$ désigne le nombre maximum d'éléments permutés par ces permutations $(a, a^2, \ldots, a^n)$ est bien un complexe unitaire car $a^n u \supset u$ pour tout $u$.

Cherchons maintenant comment la donnée de la représentation régulière [1] détermine le système dont on est parti. La détermination est évidemment parfaite si on se donne les permutations et la manière dont elles correspondent aux éléments.

Dans le cas où le système possède une unité scalaire, on peut décrire cette correspondance sans utiliser complètement la composition de chaque permutation.

Considérons les classes suivantes $C_a$ sera l'ensemble des permutations telles que l'unité ait $a$ parmi ses transformés. Ces classes sont régulières. Le noyau d'une telle classe est formé du seul élément $P_a$. On obtient le système à partir de la division n classes en appliquant la symorphie directe du type (NNC). En effet ceci revient à prendre les classes telle que $e$ donne une des déterminations de $ab$.

Ce théorème présente un certain intérêt puisqu'il donne une manière d'obtenir un système assujetti à la seule condition d'avoir une unité scalaire.

Pour illustrer ce qui précède nous allons encore démontrer la propriété suivante :

Une division en classes dans un système normal (donc en particulier uniforme) définit par symorphie du type (CCC) un système qui n'est pas quelconque. Soient A, B, C, D quatre classes quelconques A.B, C.D deux déterminations des produits AB et CD on peut trouver une détermination B.C du produit BC de manière que (A.B)C $\cap$ A(B.C) soit non vide (B.C)D $\cap$ B(C.D) soit non vide. En effet A.B est une classe qui contient un certain élément $a.b$ A $\supset a$ B $\supset b$. De même C.$c$ est une classe contenant un certain élément $c.d$ prenons pour B.C une classe contenant l'élément $bc$ tel que $(a.b)c \cap a(b.c)$ non vide $(b.c)d \cap b(c.d)$ non vide. Cela est possible en vertu du théorème démontré page 10.

On a bien les conditions écrites plus haut car les deux produits contiennent les classes contenant l'élément $a.b.c$ pour la première, $b.c.d$ pour la seconde.

---

1. Un ensemble quelconque de permutations ne se laisse pas transformer d'une manière unique en ensemble provenant d'un système multiforme comme cela a lieu pour les groupes, car le produit de deux permutations pourra en général être décomposé de plusieurs manières en une somme de permutations.

CHAPITRE VI

# Hypergroupe, hypergroupe inversable.

## I) Étude de la notion d'hypergroupe.

Nous avions caractérisé la notion d'hypergroupe par l'existence d'une unité unique et d'un inverse unique de chaque côté.

Nous allons voir que ces conditions se laissent réduire pour les systèmes finis.

1) Soit un multigroupe fini et un complexe par rapport auquel tout élément a un inverse unique d'un côté.

Tout élément a aussi un inverse unique de l'autre côté. Car dans un système fini une correspondance univoque ne conserve le nombre d'éléments que si elle est biunivoque. Il en résulte que le complexe se compose d'un seul élément (toujours en supposant le système fini).

En effet en désignant ce complexe par E on a $a\bar{a} \supset E$. Soit $u$ un élément de E $(a\bar{a})\bar{u} \supset E$ donc $\bar{a}\bar{u} \supset \bar{a}$ ou puisque tout élément est inverse à gauche $a\bar{u} \supset a$ en particulier $u'\bar{u} \supset u'$ ceci contredit l'unicité de l'inverse si $u' \neq u$.

De plus $u$ est unité car $\bar{u}$ est unité et une unité coïncide toujours avec son inverse donc $au \supset a$. Enfin cette unité est unique car si $v$ était une autre unité $uv \supset u$ ce qui contredit l'unicité de l'inverse.

Tout complexe unitaire contient cette unité car $Ca \supset a$ entraîne $Ce \supset e$ d'où $C \supset a$.

Enfin l'unité est scalaire car si $ea \supset b$ $ea\bar{b} \supset e$ $a\bar{b} \supset e$ ce qui contredit l'unicité de l'inverse.

Un exemple simple montre que ceci n'entraîne nullement que l'inverse est bilatère.

Nous n'examinerons pas le cas des systèmes infinis.

## II) Sous-hypergroupes.

On nomme sous-hypergroupe d'un hypergroupe un sous-multigroupe qui contient l'unité. Il est clair que ceci entraîne que le sous-multigroupe est un hypergroupe.

L'exemple donné page 23 montre qu'un sous-système d'un hypergroupe peut être un hypergroupe sans être un sous-hypergroupe.

Par contre un sous-multigroupe unitaire est toujours un sous-hypergroupe, car tout complexe unitaire contient l'unité.

*Théorème.* — Un sous-hypergroupe est un sous-système fermé.

Cela résulte du théorème de la page 53 puisque tout élément a un seul inverse.

Étudions maintenant la correspondance $a \to a_1$. Nous désignerons ainsi l'inverse à gauche de $\bar{a}$. Nous poserons de plus $(a_1)_1 = a_2$, etc.

On a $a_1 b_1 = c_1$ [1] la correspondance $a \to a_1$ est donc une isomorphie du système sur lui-même ou pour employer les mêmes termes qu'en théorie des groupes une automorphie. Les automorphies forment un groupe. Il peut bien entendu y avoir d'autres automorphies que celles qui viennent d'être signalées.

### III) Hypergroupe inversable.

Dans un hypergroupe inversable tout inverse est bilatère car de $a\bar{a} = e$ on tire $\bar{\bar{a}}e = \bar{a}$ d'où $\bar{\bar{a}} = \bar{a}$.

Le système ainsi obtenu est exactement ce que nous avions appelé antérieurement hypergroupe inversable.

Nous l'étudierons en détail dans la section V.

### IV) Étude des conditions de résolubilité et de normalité.

*Résolubilité.* — Dès qu'un système résoluble contient un complexe unitaire à droite et un à gauche c'est un multigroupe. En effet on a alors $ab = cd$ entraîne $a = cj$.

De plus tout sous-multigroupe fermé est réversible car de $ag = b$ on tire $ag' = bg''$ $a = bj$ $g'' = jg'$.

*Théorème.* — Par rapport à un complexe unitaire bilatère un élément d'un système résoluble possède un inverse bilatère.

En effet $u.b = bu'$ entraîne $b.\bar{b} = u$ $\bar{b}b = u'$.

Étudions en particulier les systèmes où il y a un inverse unique d'un côté. Si un tel système est résoluble il y a un seul inverse qui est bilatère. On retrouve ainsi encore une fois la notion d'hypergroupe inversable.

Nous n'étudierons pas le cas de la résolubilité de seconde espèce.

*Normalité.* — Soit un sous-système d'un système normal, et deux éléments inverses par rapport à ce sous-système : $a\bar{a} = u$.

Tout élément $\bar{a}u'$ ($u'$ dans le sous-système) est aussi inverse de $a$. En effet $a_x(\bar{a}.u') = (a.\bar{a})_x u' = u''$ ce qui démontre la propriété.

---

1. En vertu du résultat démontré page 54.

On trouvera au paragraphe suivant une étude de la condition de normalité dans le cas de l'hypergroupe inversable.

V) Caractérisation axiomatique de l'hypergroupe inversable.

A cause de son importance nous donnerons de l'hypergroupe inversable une définition axiomatique tout à fait indépendante de ce qui précède.

Un système qui satisfait aux conditions suivantes :

*a)* L'opération est normale;
*b)* Il y a une unité scalaire $e$;
*c)* Tout élément a au moins un inverse à gauche

est un hypergroupe inversable.

Il est inutile de supposer l'opération parfaite, cela résulte des hypothèses car de l'existence de $eb$ on déduit celle de $(\bar{a}a)b$ donc celle de $ab$.

Tout élément a un inverse unique car $\bar{a}a \supset e$ $\bar{\bar{a}}\bar{a} \supset e$ entraîne $\bar{\bar{a}}_x(\bar{a}a) = (\bar{\bar{a}}\bar{a})_x a = e_x a = \bar{\bar{a}}_x e = a = \bar{\bar{a}}$.

Il y a associativité car $(a.(b.c)) = a((b.c).\bar{c})$. Prenons $(b.c)\bar{c}$ tel qu'il soit précisément égal à $b$. Ou en déduit $(a(b.c))\bar{c} = ab$ $a.(b\ c) = (a.b)\ c$.

L'hypergroupe ainsi défini est résoluble car : $a.b = c.d$ entraîne $d = \bar{c}.(a.b) = (\bar{c}.a).b$ $a = c(\bar{c}\ a)$. Il est par suite inversable $a.x = b$ équivaut à $x = \bar{a}.b$. Enfin l'inverse de $a.b$ est $\bar{b}.\bar{a}$.

On démontre facilement la réciproque.

Application : un hypergroupe commutatif et dans lequel chaque élément est son propre inverse est inversable car précisément l'inverse de $ab$ est $\overline{ba}$.

*Sous-hypergroupes d'un hypergroupe inversable.* — L'exemple de la page 23 montre qu'un sous-système n'est pas toujours un sous-multigroupe. Par contre un sous-multigroupe unitaire est toujours un sous-hypergroupe normal. Cela résulte immédiatement de la propriété pour les hypergroupes (page 61). Les sous-hypergroupes étant inversables, sont réversibles.

VI) Homomorphie directe dans les hypergroupes et les groupes.

Commençons par la remarque évidente suivante : tous les homomorphes directs d'un système possédant une unité, un élément idempotent une unité scalaire possèdent de même une unité, un élément idempotent, une unité scalaire.

Cherchons à quelle condition l'homomorphe peut être un hypergroupe.

On a le théorème suivant : il faut que les classes soient disjointes pour que l'homomorphe soit un hypergroupe. En effet, soit une classe C et un $e$ sous-classe C' et soit $\bar{C}'$ l'inverse de C' d'un certain côté $C\bar{C}'$ doit contenir $C'\bar{C}'$ donc $\bar{C}'$ aurait deux inverses C et C' tous les deux du même côté.

*Réciproquement :* Si des classes disjointes définissent une homomorphie directe dans un hypergroupe, le système homomorphe est aussi un hypergroupe.

En effet si $C_a C_b \supset C_e$ cela veut dire qu'à tout élément de $C_a$ on peut associer un élément de $C_b$ tel que $ab \supset u$ $u$ étant un élément de $C_e$ ; on en tire $a b \bar{u} \cup e$ $b\bar{u} = \bar{\bar{a}}$ $b = \bar{\bar{a}} u'$. Or $C_b$ contient avec un élément $b'$ tous les $b'u$ ; il y a donc au plus une classe inverse d'une classe donnée d'un certain côté. Le système quotient est donc bien un hypergroupe. On voit de plus le résultat fondamental suivant :

*Les seuls homomorphes directs stricts d'un hypergroupe sont ses hypergroupes quotients.*

Nous n'étudierons pas en détail les homomorphies non strictes. Contentons-nous du théorème suivant :

Dans un hypergroupe où tout inverse est bilatère, il n'y a pas de sous-système invariant d'un seul côté.

En effet de $au \supset b$ $b \supset ua$ on tire $\bar{a} \subset \bar{b} u$ $\bar{a} \subset u \bar{b}$.

Soit maintenant un hypergroupe inversable. On a de plus la propriété tous les homomorphes stricts sont des hypergroupes inversables, car l'homomorphie stricte respecte la condition de normalité.

Il se présente dans ce cas d'autres simplifications. Toute homomorphie stricte est à la fois directe droite et gauche, En effet les opérations directes et inverses ne sont pas distinctes car de $ab = c$ on tire $\bar{a} c = b$ et réciproquement. Or l'homomorphie respecte la correspondance $a \rightarrow \bar{a}$ donc toute homomorphie est à la fois directe droite et gauche.

Donnons encore pour terminer un exemple d'homomorphie non stricte dans un groupe : soit de groupe cyclique d'ordre infini $a^n$ et le sous-système $a^0$, $a^2$, $a^{2n}$ ; les classes suivent ce sous-système définissent un système qui est isomorphe au groupe cyclique d'ordre infini.

# BIBLIOGRAPHIE


**Dresher** et **Ore**. *Theory of multigroupes* (American Journal of Mathematics, t. 60, 1938, p. 705).

**Dubreil** et **Dubreil-Jacotin**. *Théorie algébrique des relations d'équivalence* (Journal de Mathématiques pures et appliquées, 1939, p 63).

**Griffiths**. *On hypergroups, multigroups and product systéms* (American journal of Mathematics, 60, 1938, p. 345).

**Krasner**. 1) *Mémoires de l'Académie royale de Bruxelles* (Classe des Sciences), 2e série, in-4°, t. XI, p. 29, 1937). — *Sur la théorie de la ramification des idéaux de corps non galoisiens de nombres algébriques.*

2) *Sur la primitivité des corps p-adiques* (Matematica 13 Cluj, 1937, p. 72).

3) *Sur une généralisation de la notion de sous-groupe invariant* (Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 208, p. 1867, 1939).

**Kuntzmann**. 1) *Opérations multiformes, hypergroupes* (Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 204, 1937, p. 1787).

2) *Homomorphie entre systèmes multiformes* (C. R. A. S., t. 205, 1937, p. 208).

3) *Systèmes multiformes et systèmes hypercomplexes* (C. R. A. S., t. 208, 1939, p. 493).

4) *Classes dans un multigroupe* (C. R. A. S., t. 208, 1939, p. 959).

5) *Notion générale d'homomorphie dans un système multiforme* (C. R. A. S., 209, 1939, p. 1858).

**Marty**. 1) *Sur une généralisation de la notion de groupe* (Congrès des mathématiciens scandinaves, Stockholm, 1934).

2) *Recherches sur les groupes finis de fonctions algébriques*. Societas Scientiarum Fennica. Commentationes Physico mathematicae VII, 12, 1934.

3) *Sur le rôle de la notion d'hypergroupe dans l'étude des groupes non abéliens* (C. R. A. S., t. 201, 1935, p. 636).

4) *Sur les groupes et hypergroupes attachés à une fraction rationnelle* (Annales de l'Ecole normale, t. 53, 1936, p. 83).

**Wall**. *Hypergroups* (American journal of mathematics, 59, 1937, p. 77).