

E. ANGLADE

Nouvelles recherches sur les surfaces réglées

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 3^e série, tome 26 (1934), p. 65-185

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1934_3_26__65_0>

© Université Paul Sabatier, 1934, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

NOUVELLES RECHERCHES
SUR
LES SURFACES RÉGLÉES

PAR E. ANGLADE

Professeur agrégé au Lycée de Béziers.

CHAPITRE I

Équations fondamentales. Conséquences.

Une surface réglée est engendrée par une droite mobile glissant sur une courbe fixe qui sert de *directrice*. Il est évident que l'on peut prendre pour directrice une courbe quelconque coupant toutes les génératrices; mais l'étude sera d'autant plus simple que la courbe sera mieux choisie et il faut ajouter qu'un choix heureux, quand on oriente les recherches dans une certaine voie, peut cesser de convenir dans d'autres circonstances.

Il existe sur chaque surface une courbe, la *ligne de striction*⁽¹⁾, dont les propriétés sont particulièrement importantes. A chacun de ses points on associe un élément qui détermine la répartition des plans tangents sur la génératrice correspondante. On reconnaît le *paramètre de distribution*⁽²⁾.

Comme les deux éléments que nous venons de signaler jouent un rôle de tout premier ordre, il est naturel de rapporter les surfaces à leur ligne de striction. On se rendra compte par la suite que ce procédé entraîne de grandes simplifications et permet de pousser très loin l'étude des surfaces réglées.

(¹) La ligne de striction est simultanément le lieu du point central d'une génératrice variable et le lieu du pied de la perpendiculaire commune à deux génératrices infiniment voisines (L. BIANCHI. *Lezioni di Geometria differenziale*, 3^e édition, nouveau tirage en quatre volumes, 1927, t. 1, p. 385. Nous désignerons désormais cet ouvrage par les lettres L. B.).

(²) Le paramètre de distribution K tire son importance du fait que les normales à une surface réglée, menées le long d'une génératrice, engendrent un parabololoïde hyperbolique équilatère dont le paramètre est précisément K (L. B., t. 1, page 391).

1. — Notations.

Nous désignerons par :

- x, y, z , les coordonnées d'un point M de la ligne de striction (C);
- X, Y, Z , les coordonnées d'un point de la surface réglée (S);
- α, β, γ , les cosinus directeurs de la tangente à la courbe (C);
- a, b, c , les cosinus directeurs de la génératrice (G);
- λ, μ, ν , les cosinus directeurs de la génératrice du cône (E) supplémentaire du cône directeur (D);
- v , l'arc de la ligne de striction;
- σ , l'arc de la courbe (Σ) décrite par le point dont les coordonnées sont a, b, c ;
- τ , l'arc de la courbe (T) décrite par le point (λ, μ, ν) .

Les sens positifs peuvent être fixés arbitrairement sur (C), (G) et (Σ). La tangente à la courbe (Σ) aura pour cosinus directeurs $\frac{da}{d\sigma}, \frac{db}{d\sigma}, \frac{dc}{d\sigma}$.

Nous dirigerons la génératrice du cône (E) de telle sorte que le vecteur (λ, μ, ν) forme un trièdre trirectangle direct avec les deux autres vecteurs (a, b, c) , $\left(\frac{da}{d\sigma}, \frac{db}{d\sigma}, \frac{dc}{d\sigma}\right)$.

Dans ces conditions

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ \frac{da}{d\sigma} & \frac{db}{d\sigma} & \frac{dc}{d\sigma} \\ \lambda & \mu & \nu \end{vmatrix} = 1,$$

et,

$$(\lambda, \mu, \nu) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ \frac{da}{d\sigma} & \frac{db}{d\sigma} & \frac{dc}{d\sigma} \end{vmatrix}.$$

Par suite

$$(d\lambda, d\mu, d\nu) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d\left(\frac{da}{d\sigma}\right) & d\left(\frac{db}{d\sigma}\right) & d\left(\frac{dc}{d\sigma}\right) \end{vmatrix}.$$

Cette relation prouve que

$$\sum a d\lambda = 0.$$

Comme

$$\sum \lambda d\lambda = 0.$$

on voit que les courbes (T) et (Σ) ont leurs tangentes parallèles. Il est possible de choisir sur (T) le même sens positif que sur (Σ). C'est ce que nous ferons désormais.

Cette convention nous permet d'écrire les relations fondamentales

$$(1) \quad \frac{da}{d\sigma} = \frac{d\lambda}{d\tau}, \quad \frac{db}{d\sigma} = \frac{d\mu}{d\tau}, \quad \frac{dc}{d\sigma} = \frac{d\nu}{d\tau},$$

que nous utiliserons fréquemment.

Il faut observer que ces considérations, utiles pour une surface quelconque, n'ont plus leur raison d'être pour une surface réglée à plan directeur. En effet, la courbe (T) se réduit à un point⁽¹⁾.

2. — Condition pour qu'une courbe (C) soit la ligne de striction d'une surface réglée (S).

Nous supposons que les coordonnées x, y, z , d'un point de (C) et les cosinus correspondants a, b, c sont exprimés en fonction d'un même paramètre. La surface (S) a pour équations

$$X = x + au, \quad Y = y + bu, \quad Z = z + cu.$$

u représente la mesure algébrique de la portion de génératrice comptée à partir

⁽¹⁾ On voit ce qui distingue les notations que nous adoptons de celles de Beltrami (*Sulla flessione delle superficie rigate*, Annali di matematica, t. VII, 1865). Nous introduisons systématiquement la ligne de striction, le cône supplémentaire du cône directeur, ainsi que les arcs σ et τ .

Les conventions actuelles sont légèrement différentes de celles que l'on trouvera exposées dans l'article suivant :

E. ANGLADE. *Ligne de striction et paramètre de distribution*, Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 1931.

de (C). En un point de (S), les paramètres directeurs du plan tangent sont les coefficients du tableau

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ dx + u da & dy + u db & dz + u dc \end{vmatrix}.$$

Par suite, les cosinus directeurs du plan asymptote sont définis par l'équation symbolique

$$(\lambda, \mu, \nu) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ \frac{da}{d\sigma} & \frac{db}{d\sigma} & \frac{dc}{d\sigma} \end{vmatrix}$$

qui met en évidence le rôle joué par le cône supplémentaire (E).

Le point central est défini par la relation

$$(\lambda, \mu, \nu) \times \begin{vmatrix} a & b & c \\ \frac{dx}{d\sigma} + u \frac{da}{d\sigma} & \frac{dy}{d\sigma} + u \frac{db}{d\sigma} & \frac{dz}{d\sigma} + u \frac{dc}{d\sigma} \end{vmatrix} = 0,$$

qui s'écrit encore

$$u + \sum \frac{da}{d\sigma} \frac{dx}{d\sigma} = 0.$$

(C) sera donc la ligne de striction si

$$(2) \quad \sum da dx = 0, \quad (*)$$

ce qui exprime que *les tangentes aux points correspondants des courbes (C) et (Σ) doivent être rectangulaires*. Mais comme $\frac{da}{d\sigma}$, $\frac{db}{d\sigma}$, $\frac{dc}{d\sigma}$, sont les cosinus directeurs du plan central, on voit que (2) traduit aussi une propriété qui résulte de la définition même de la ligne de striction : *le plan central doit contenir la tangente à la courbe (C)*.

(*) Cette relation est identique à celle qui caractérise les congruences isotropes et de laquelle on déduit, en particulier, le théorème de Ribaucour (L. B., t. 2, p. 463) :

« En menant, par le centre d'une sphère, des parallèles aux génératrices d'une congruence isotrope, on réalise une correspondance par éléments orthogonaux, entre cette sphère et la surface moyenne de la congruence. »

3. — **Le cône directeur et la ligne de striction suffisent à déterminer une surface réglée.**

On peut se demander jusqu'à quel point la ligne de striction (C) et le cône directeur (D) déterminent une surface. La relation (2) va nous permettre de préciser cette importante question.

Les coordonnées x, y, z , d'un point de (C), peuvent être exprimées en fonction de l'arc v , tandis que a, b, c , peuvent s'écrire en fonction de l'arc σ . Tout le problème revient à calculer v en fonction de σ , c'est-à-dire à chercher la distribution des génératrices le long de la courbe (C).

La relation (2) prend la forme

$$\sum \frac{da}{d\sigma} \frac{dx}{dv} = 0,$$

ou

$$F(v, \sigma) = 0.$$

Cette dernière équation peut admettre plusieurs racines $v = f(\sigma)$. Les surfaces réglées qui admettent (C) pour ligne de striction et (D) pour cône directeur sont parfaitement déterminées.

4. — **Autres formes de la condition (2).**

1°) Si a, b, c , sont définis, dans un trièdre fixe, par les formules

$$a = \sin \omega \cos \psi, \quad b = \sin \omega \sin \psi, \quad c = \cos \omega,$$

la condition (2) prend la forme

$$(3) \quad \omega' [\cos \omega (x' \cos \psi + y' \sin \psi) - z' \sin \omega] + \psi' \sin \omega (y' \cos \psi - x' \sin \psi) = 0,$$

d'apparence compliquée, mais qui conduira, malgré cela, à des résultats fort curieux. Dans cette dernière expression, $x', y', z', \omega', \psi'$, désignent des dérivées prises par rapport à un même paramètre.

2°) Dans certains cas, il peut être intéressant de fixer la direction de la génératrice par rapport au trièdre de Serret-Frenet relatif au point M de la ligne de striction. Désignons par α', β', γ' , les cosinus directeurs de la normale principale

et par $\alpha'', \beta'', \gamma''$, ceux de la binormale. En introduisant l'angle φ que fait le plan osculateur avec le plan central et l'angle θ ⁽¹⁾ que fait la génératrice avec la tangente à la courbe (C), nous trouvons,

$$\begin{aligned} a &= \alpha \cos \theta + \sin \theta (\alpha' \cos \varphi + \alpha'' \sin \varphi), & b &= \beta \cos \theta + \sin \theta (\beta' \cos \varphi + \beta'' \sin \varphi), \\ c &= \gamma \cos \theta + \sin \theta (\gamma' \cos \varphi + \gamma'' \sin \varphi), \end{aligned}$$

et, en différenciant,

$$da = (A\alpha + B\alpha' + C\alpha'') dv, \quad db = (A\beta + B\beta' + C\beta'') dv, \quad dc = (A\gamma + B\gamma' + C\gamma'') dv.$$

Dans ces formules, A, B, C, désignent les expressions

$$\begin{aligned} A &= -\sin \theta \left(\frac{d\theta}{dv} + \frac{\cos \varphi}{R} \right), & B &= \frac{d(\sin \theta \cos \varphi)}{dv} + \frac{\cos \theta}{R} + \frac{\sin \theta \sin \varphi}{T}, \\ C &= \frac{d(\sin \theta \sin \varphi)}{dv} - \frac{\sin \theta \cos \varphi}{T}. \end{aligned}$$

R et T représentent les rayons de courbure et de torsion de la ligne de striction.

La condition (2) qui peut s'écrire

$$\sum \alpha da = 0,$$

devient

$$\sin \theta \left(\frac{d\theta}{dv} + \frac{\cos \varphi}{R} \right) = 0.$$

Pour $\theta = 0$, la surface est développable. Ce cas étant éliminé, il reste

$$(4) \quad \frac{d\theta}{dv} + \frac{\cos \varphi}{R} = 0.$$

En observant que $-\frac{\cos \varphi}{R}$ est la courbure géodésique de (C), on met en évidence le théorème de Bonnet⁽²⁾ :

⁽¹⁾ Désignons par \vec{Mg} l'axe qui complète un trièdre trirectangle direct avec la tangente MT à la ligne de striction (C) et la normale au plan central. φ est l'angle dont il faut faire tourner la normale principale de la courbe (C) pour l'amener à coïncider avec l'axe \vec{Mg} . Le sens positif des rotations est défini par le sens adopté sur la tangente MT.

θ est compté positivement dans le sens direct défini par la normale au plan central.

⁽²⁾ G. DARBOUX. *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, t. 3, p. 311, 1894.

O. BONNET. *Mémoire sur la théorie générale des surfaces* (Journal de l'École Polytechnique, 32^e cahier, p. 70; 1848).

« Une ligne tracée sur une surface réglée peut être, soit une géodésique, soit la ligne de striction, soit une trajectoire coupant les génératrices sous un angle constant. Si deux quelconques de ces propriétés lui appartiennent, il en est de même de la troisième. »

3°) Les relations évidentes

$$\sum a \frac{da}{d\sigma} = 0, \quad \sum \lambda \frac{da}{d\sigma} = 0,$$

jointes à la condition (2),

$$\sum \alpha \frac{da}{d\sigma} = 0,$$

montrent que les vecteurs (a, b, c) , (λ, μ, ν) , (α, β, γ) , sont coplanaires. En faisant intervenir l'angle θ , on peut écrire

$$(5) \quad \alpha = a \cos \theta - \lambda \sin \theta, \quad \beta = b \cos \theta - \mu \sin \theta, \quad \gamma = c \cos \theta - \nu \sin \theta.$$

Nous définissons ainsi la position occupée par la tangente à la ligne de striction dans le trièdre formé par les vecteurs (a, b, c) , $\left(\frac{da}{d\sigma}, \frac{db}{d\sigma}, \frac{dc}{d\sigma}\right)$, (λ, μ, ν) .

Les relations (5) auront de nombreuses applications en raison de leur grande simplicité.

5. — Calcul du paramètre de distribution.

La formule qui donne le paramètre de distribution⁽¹⁾ devient, avec les notations que nous avons adoptées et en tenant compte des relations (2) et (5),

$$K = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \Sigma a dx \\ \Sigma a dx & \Sigma dx^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ da & db & dc \\ a & b & c \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \Sigma a \alpha \\ \Sigma a \alpha & \Sigma \alpha^2 \end{vmatrix} dv^2}{\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \frac{da}{d\sigma} & \frac{db}{d\sigma} & \frac{dc}{d\sigma} \\ a & b & c \end{vmatrix} dv d\sigma} = \frac{\sin^2 \theta dv^2}{\sin \theta dv d\sigma}.$$

K prend la forme définitive

$$(6) \quad K = \sin \theta \frac{dv}{d\sigma}.$$

(1) E. VESSIOT. *Leçons de géométrie supérieure*, p. 103, 1919.

Il est aisé de se rendre compte que le signe de K est indépendant des directions choisies sur la génératrice et la ligne de striction. Il caractérise le sens dans lequel tourne le plan tangent quand le point de contact se déplace sur MG .

L'expression (6), d'aspect simple, est particulièrement apte à s'introduire dans les calculs. Nous allons le montrer sur deux exemples.

En éliminant dv entre les relations (4) et (6) nous obtenons

$$(7) \quad \frac{K}{R} \cos \varphi = \frac{d(\cos \theta)}{d\sigma},$$

équation de forme intéressante liant entre eux des éléments fondamentaux de (S). Pour $\varphi = 0$, la ligne de striction est asymptotique et la formule précédente devient

$$(7 \text{ bis}) \quad \frac{K}{R} = \frac{d(\cos \theta)}{d\sigma}.$$

D'autre part, le plan tangent en un point de coordonnées curvilignes (u, v) est défini par

$$\begin{vmatrix} X-x-au & Y-y-bu & Z-z-cu \\ a & b & c \\ x+u \frac{da}{d\sigma} \frac{d\sigma}{dv} & y+u \frac{db}{d\sigma} \frac{d\sigma}{dv} & z+u \frac{dc}{d\sigma} \frac{d\sigma}{dv} \end{vmatrix} = 0,$$

ou, en vertu de (5),

$$u \frac{d\sigma}{dv} \sum \lambda(X-x) + \sin \theta \sum \frac{da}{d\sigma}(X-x) = 0.$$

Mais, en remarquant que

$$\frac{d\sigma}{dv} = \frac{\sin \theta}{K},$$

l'équation du plan tangent devient

$$(8) \quad u \sum \lambda(X-x) + K \sum \frac{da}{d\sigma}(X-x) = 0. \quad (')$$

La forme simple de cette équation nous permettra de faire apparaître certaines propriétés des congruences W dont les nappes focales sont des surfaces gauches.

(¹) x, y, z sont les coordonnées du point d'intersection de la génératrice et de la ligne de striction.

Enfin, pour terminer, signalons une propriété des congruences isotropes de Ribaucour.

On sait⁽¹⁾ que toutes les surfaces appartenant à une congruence isotrope et contenant une même génératrice ont, pour cette génératrice, le même paramètre de distribution. Dans ces conditions, la relation (6) qui peut s'écrire

$$\sin \theta = K \frac{d\sigma}{dv},$$

prouve que :

Dans une congruence isotrope, une génératrice coupe la ligne de striction de toute surface qui la contient, sous un angle θ dont le sinus est proportionnel au rapport $\frac{d\sigma}{dv}$ des éléments linéaires orthogonaux des courbes (Σ) et (C) .

6. — Surfaces à cône directeur de révolution.

Prenons oz pour axe du cône et utilisons la forme (3) de la condition fondamentale. L'angle ω étant constant, cette équation se réduit à

$$y' \cos \psi - x' \sin \psi = 0,$$

ou,

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \psi.$$

On met ainsi en évidence une propriété importante de ces surfaces :

La génératrice MG et la tangente à la ligne de striction sont dans un même plan parallèle à l'axe du cône directeur.

Ce résultat peut aussi bien s'énoncer :

Le plan central d'une surface à cône directeur de révolution enveloppe un cylindre (K) ayant la ligne de striction pour directrice et une parallèle à l'axe du cône directeur pour génératrice. La génératrice de la surface réglée coupe sous un angle constant la génératrice du cylindre⁽²⁾.

⁽¹⁾ L. B., t. 2, p. 463.

On trouvera dans l'ouvrage de M. G. DARBOUX (*Surfaces*, t. 1, p. 479 et suivantes, 1914), l'exposé de curieuses propriétés établies par Ribaucour (*Étude des élassoïdes*, Mémoires couronnés et Mémoires des savants étrangers publiés par l'Académie royale de Belgique, in-4°, t. XLIV, 1881).

⁽²⁾ Réciproquement, l'équation (3) prouve que si une surface à cône directeur de révolution d'axe (δ) est tangente à un cylindre de génératrice parallèle à (δ) , la ligne de striction est la courbe de contact.

Ce qui précède fournit un moyen de construire ces surfaces. On les obtient en menant, le long d'une courbe (C) d'un cylindre, des tangentes à ce cylindre également inclinées sur la génératrice.

Il faut aussi remarquer que tout ce que nous avons dit peut être étendu aux surfaces à plan directeur. Il suffit de supposer ω égal à $\frac{\pi}{2}$.

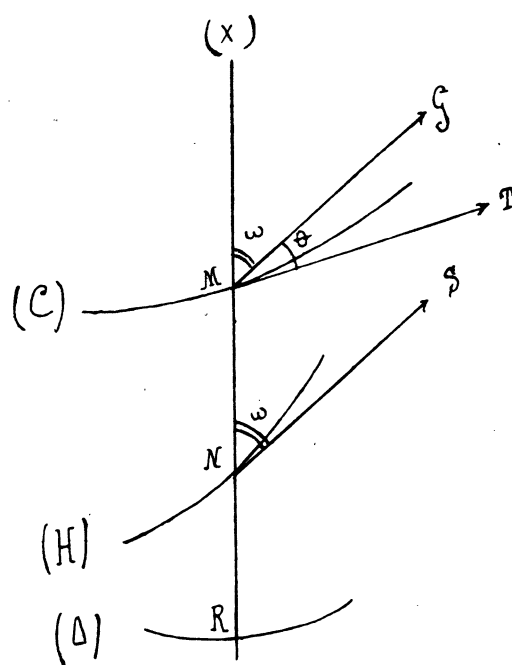


FIG. 1.

La droite MG reste parallèle à la tangente NS à une hélice (H) tracée sur le cylindre (K) dont on désigne la section droite par (Δ). Nous représenterons par h l'arc de l'hélice et par s l'arc de (Δ).

On voit immédiatement que

$$dv \sin(\omega + \theta) = ds,$$

et,

$$dh \sin \omega = ds.$$

Donc, en divisant par $d\sigma$, l'on peut écrire,

$$\frac{dv}{d\sigma} \sin(\omega + \theta) = \frac{dh}{d\sigma} \sin \omega.$$

Dans cette dernière relation, $\frac{dh}{d\sigma}$ est le rayon de courbure R_h de l'hélice. De plus, en vertu de (6), on peut poser

$$\frac{dv}{d\sigma} = \frac{K}{\sin \theta}.$$

Nous obtenons ainsi,

$$\frac{K}{\sin \theta} \sin(\omega + \theta) = R_h \sin \omega,$$

ou,

$$(9) \quad R_h = K(\cotg \theta + \cotg \omega).$$

Pour toute surface (S) à cône directeur de révolution (D), on peut tracer sur le cylindre (K) une hélice (H) dont le cône directeur des tangentes est précisément (D).

Le rayon de courbure de cette hélice s'obtient en multipliant le paramètre de distribution de la surface (S) par la somme des cotangentes des angles θ et ω dont on connaît la signification géométrique.

On peut aussi énoncer cette propriété sous la forme suivante :

Pour une surface à cône directeur de révolution, l'expression

$$\frac{R}{K} - \cotg \theta$$

conserve une valeur constante lorsque la génératrice MG varie. Cette constante est la cotangente de la moitié de l'angle au sommet du cône (D).

Si la surface (S) admet un plan directeur, l'hélice (H) vient se confondre avec la section droite (Δ) du cylindre (K). La relation (9) s'écrit, dans ce cas,

$$(9 \text{ bis}) \quad R_{\Delta} = K \cotg \theta.$$

Le rayon de courbure de la section droite d'un cylindre (K) s'obtient en multipliant le paramètre de distribution d'une surface (S) à plan directeur, dont le plan central enveloppe (K), par la cotangente de l'angle que fait la génératrice de (S) avec la ligne de striction.

L'expression $K \cotg \theta$ a la même valeur pour les génératrices correspondantes des surfaces à plan directeur déduites d'un même cylindre (K).

Un cas particulier intéressant se présente quand le cylindre (K) est de révolution. R_{Δ} est constant. On peut donc énoncer la proposition suivante :

Si une surface à plan directeur possède un cylindre (K) de révolution, le paramètre de distribution reste proportionnel à la tangente trigonométrique de l'angle θ .

Il peut aussi se produire que la courbe (C) soit une hélice d'un cylindre (K) quelconque⁽¹⁾; $\cotg \theta$ et $\cotg \omega$ sont alors deux constantes. Par conséquent :

Si une surface à cône directeur de révolution ou à plan directeur touche le cylindre (K) suivant une hélice, le paramètre de distribution est proportionnel au rayon de courbure de la ligne de striction.

⁽¹⁾ On suppose que la tangente à l'hélice fait un angle constant avec la génératrice du cylindre.

7. — Sur une propriété des hélices.

L'équation (3) s'est considérablement simplifiée en supposant ω constant. Elle nous a montré que par une courbe (C) donnée à l'avance on pouvait faire passer une infinité de surfaces à cône directeur de révolution. Il suffisait de choisir arbitrairement l'angle ω et le cylindre (K) passant par (C).

Cette équation se réduit encore, en supposant que la projection de MG sur le plan xoy est confondue avec la normale à la projection de (C). Cela sera réalisé pour

$$x' \cos \psi + y' \sin \psi = 0.$$

L'équation (3) prend la nouvelle forme

$$(10) \quad z' \omega = \psi' (y' \cos \psi - x' \sin \psi).$$

Le paramètre qui intervient dans les dérivations est quelconque. Nous avons donc le droit de choisir l'arc s de la projection de la courbe (C) sur xoy . Dans ces conditions⁽¹⁾

$$y' = \cos \psi, \quad x' = -\sin \psi,$$

et l'équation (10) devient

$$(10 \text{ bis}) \quad d\omega = \frac{ds}{dz} d\psi.$$

La courbe (C) étant connue, les valeurs de x, y, z, ψ , sont parfaitement déterminées en fonction de s . L'équation (10 bis) permet de calculer ω et de déterminer ainsi les surfaces admettant (C) pour ligne de striction.

Le calcul est particulièrement simple lorsque $\frac{ds}{dz}$ est une constante A. La courbe (C) est une hélice. On trouve

$$\omega = A\psi,$$

à une constante additive près qu'il est inutile d'introduire puisque l'angle ψ est compté à partir d'une droite ox arbitraire dans le plan xoy .

Une hélice (C) est donc la ligne de striction de toute surface engendrée par une droite MG remplissant les conditions suivantes :

(1) Les deux équations

$$x' = \sin \psi, \quad y' = -\cos \psi,$$

conduisent aux mêmes surfaces.

1° MG glisse le long de (C) en restant dans le plan mené par la normale principale MN parallèlement à l'axe (δ) du cône directeur des tangentes ;

2° MG fait avec l'axe (δ) un angle proportionnel à l'angle que fait MN avec une droite fixe du plan xoy normal à (δ) ;

3° Le coefficient de proportionnalité est la tangente du demi-angle au sommet du cône directeur des tangentes à la courbe (C).

Il faut observer que l'angle ω doit être porté dans un sens parfaitement déterminé.

Quand l'hélice est circulaire, la génératrice MG rencontre l'axe de cette courbe. La construction géométrique que nous venons d'indiquer ne conduit alors qu'à une seule surface réglée ; mais cette surface est de nature intéressante. Sa ligne de striction est une hélice circulaire. De plus, elle admet une directrice rectiligne.

Nous nous bornerons à l'exemple que nous venons de traiter, sans avoir épuisé tout ce que l'équation (10 bis) peut donner.

8. — Surfaces réglées réciproques.

On sait que la ligne de striction (C) d'une surface réglée (S) est le lieu du pied de la perpendiculaire commune à deux génératrices infiniment voisines. Cette perpendiculaire MR est dirigée suivant la génératrice (λ, μ, ν) du cône-supplémentaire du cône directeur.

La relation (2), vérifiée le long de la ligne de striction de (S), peut s'écrire

$$\sum \alpha \frac{da}{d\sigma} = 0.$$

Mais, en vertu de (1), la relation précédente entraîne :

$$\sum \alpha \frac{d\lambda}{d\tau} = 0.$$

Nous établissons ainsi la proposition suivante :

La perpendiculaire commune à deux génératrices infiniment voisines d'une surface réglée (S) engendre une surface réglée (S') ayant la même ligne de striction que (S).

Nous dirons que (S) et (S') sont deux surfaces réglées réciproques. Les cônes directeurs sont réciproques. De plus, les deux surfaces sont tangentes le long de leur ligne de striction commune. Pour le prouver, il suffit d'observer que le plan central de la surface (S) a les mêmes cosinus directeurs que le plan central de (S').

L'existence des surfaces réciproques peut aussi s'établir simplement en partant de l'équation (4),

$$\frac{d\theta}{dv} + \frac{\cos \varphi}{R} = 0.$$

Cette équation, vérifiée pour une courbe (C) et une génératrice MG, l'est encore, pour la même courbe et la même valeur de φ , si l'on augmente θ d'une quantité constante w . Soit (S_w) la surface obtenue.

Toutes les surfaces (S_w) , déduites d'une même surface (S), sont tangentes le long de leur ligne de striction commune.

En donnant à w la valeur $\frac{\pi}{2}$, la surface (S_w) correspondante est précisément la surface (S') déjà envisagée.

Enfin, remarquons que toute surface (S_w) , relative à une surface à plan directeur, admet un cône directeur de révolution. La surface (S') est alors un cylindre.

9. — Relations entre les paramètres de distribution.

Soient (S) et (S') deux surfaces réciproques. Pour la surface (S), le paramètre de distribution est défini par

$$K = \sin \theta \frac{dv}{d\sigma}.$$

Celui de la surface (S') est

$$K' = \cos \theta \frac{dv}{d\tau}.$$

Nous en déduisons les relations

$$(11) \quad \frac{K}{K'} = \operatorname{tg} \theta \frac{d\tau}{d\sigma},$$

et,

$$(12) \quad dv^2 = K^2 d\sigma^2 + K'^2 d\tau^2.$$

Nous pouvons donner immédiatement une interprétation géométrique du dernier résultat.

Les éléments linéaires $d\sigma$ et $d\tau$ des cônes directeurs de deux surfaces réciproques, multipliés par les paramètres de distribution correspondants, sont les côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle dont l'hypoténuse est l'élément linéaire de la ligne de striction commune.

La formule (11) peut aussi s'interpréter aisément. Il suffit de remarquer que $\frac{d\tau}{d\sigma}$ représente la courbure géodésique de la courbe (Σ) découpée sur la sphère de rayon un par le cône directeur de la surface (S) . C'est ce que nous allons d'abord établir.

Tout point de (Σ) a pour coordonnées a, b, c . Par conséquent, les cosinus directeurs de la tangente à cette courbe sont $\frac{da}{d\sigma}, \frac{db}{d\sigma}, \frac{dc}{d\sigma}$. Nous désignerons par l, m, n , les cosinus directeurs de la normale principale et par ρ_σ le rayon de courbure.

Nous avons déjà vu au n° 1 que l'on pouvait écrire, sous forme symbolique,

$$(\lambda, \mu, \nu) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ \frac{da}{d\sigma} & \frac{db}{d\sigma} & \frac{dc}{d\sigma} \end{vmatrix}.$$

On en déduit,

$$\left(\frac{d\lambda}{d\tau}, \frac{d\mu}{d\tau}, \frac{d\nu}{d\tau} \right) = \frac{1}{\rho_\sigma} \begin{vmatrix} a & b & c \\ l & m & n \end{vmatrix} \frac{d\sigma}{d\tau}.$$

On voit immédiatement que la direction $\frac{da}{d\sigma}, \frac{db}{d\sigma}, \frac{dc}{d\sigma}$, est simultanément perpendiculaire au plan central des deux surfaces réciproques et à la normale principale de la courbe (Σ) . Ce plan et cette normale sont donc parallèles.

En introduisant l'angle ε que fait la normale principale avec la normale à la sphère (*) qui contient (Σ) , on peut écrire

$$(13) \quad l = -(a \cos \varepsilon + \lambda \sin \varepsilon), \quad m = -(b \cos \varepsilon + \mu \sin \varepsilon), \quad n = -(c \cos \varepsilon + \nu \sin \varepsilon).$$

En tenant compte de (1), nous voyons que

$$\left(\frac{da}{d\sigma}, \frac{db}{d\sigma}, \frac{dc}{d\sigma} \right) = -\frac{1}{\rho_\sigma} \begin{vmatrix} a & b & c \\ a \cos \varepsilon + \lambda \sin \varepsilon & b \cos \varepsilon + \mu \sin \varepsilon & c \cos \varepsilon + \nu \sin \varepsilon \end{vmatrix} \frac{d\sigma}{d\tau}.$$

En multipliant par

$$\left(\frac{da}{d\sigma}, \frac{db}{d\sigma}, \frac{dc}{d\sigma} \right) = - \begin{vmatrix} a & b & c \\ \lambda & \mu & \nu \end{vmatrix},$$

on trouve

$$(14) \quad \frac{\sin \varepsilon}{\rho_\sigma} = \frac{d\tau}{d\sigma}.$$

(*) On suppose cette normale dirigée vers le centre.

$\frac{d\tau}{d\sigma}$ est bien la courbure géodésique de la courbe (Σ) tracée sur la sphère de rayon un.

La formule (11) peut, à présent, se traduire par la proposition :

Le rapport des paramètres de distribution de deux surfaces réciproques (S) et (S') est égal au produit de la courbure géodésique de (Σ) par la tangente de l'angle que fait la génératrice de (S) avec la ligne de striction.

Il ne faut pas oublier que, sur la sphère qui la contient, la courbe (Σ) a pour courbure normale

$$\frac{\cos \varepsilon}{\rho_{\sigma}} = 1.$$

La formule (14), qui donne $\frac{\sin \varepsilon}{\rho_{\sigma}}$, peut donc se transformer en

$$(15) \quad \frac{d\tau}{d\sigma} = \operatorname{tg} \varepsilon.$$

Puisque les géodésiques d'une sphère sont les grands cercles, la torsion géodésique

$$\frac{1}{t_{\sigma}} - \frac{d\varepsilon}{d\sigma}$$

de la courbe (Σ) est nulle. Cela prouve que

$$\frac{1}{t_{\sigma}} = \frac{d\varepsilon}{d\sigma}.$$

$\frac{1}{t_{\sigma}}$ est nul lorsque $\frac{d\tau}{d\sigma}$ est constant. Par suite, (Σ) est une courbe plane et le cône directeur est de révolution.

Nous observons aussi, puisque nous avons introduit simultanément les courbes (Σ) et (T) dans cette étude, que (T) a pour courbure géodésique $\frac{d\sigma}{d\tau}$. C'est une conséquence de la réciprocité signalée au n° 8. On met ainsi en évidence la propriété :

Les courbes sphériques (Σ) et (T) ont des courbures géodésiques inverses.

Ces deux courbes ont les tangentes⁽¹⁾, les plans osculateurs, les normales principales et les binormales respectivement parallèles.

Cette propriété ne caractérise pas les courbes (Σ) et (T) . Deux courbes qui se correspondent par transformation de Combescure⁽²⁾ la possèdent aussi.

⁽¹⁾ Voir au § 1.

⁽²⁾ Pour la définition de la transformation de Combescure étendue aux courbes, voir L. B., t. 1, p. 50.

Supposons que $\frac{d\tau}{d\sigma}$ soit une certaine fonction de σ que nous représenterons par $f(\sigma)$. On sait que

$$\frac{d\tau}{d\sigma} = \operatorname{tg} \varepsilon.$$

L'angle ε est donc déterminé, à $K\pi$ près, en fonction de σ . Le rayon de courbure de (Σ) peut être déduit de la relation

$$\frac{\cos \varepsilon}{\rho_\sigma} = 1.$$

D'autre part, toutes les courbes d'une sphère ayant une torsion géodésique nulle, on peut écrire

$$\frac{1}{t_\sigma} = \frac{d\varepsilon}{d\sigma}.$$

Les rayons de courbure et de torsion de (Σ) étant connus en fonction de σ , cette courbe est déterminée à un déplacement près. M. G. Darboux⁽¹⁾ a montré que la solution de ce problème dépend d'une équation de Riccati.

La courbe ainsi définie est bien sphérique, puisque la condition⁽²⁾

$$\frac{\rho_\sigma}{t_\sigma} + \frac{d}{d\sigma} \left\{ t_\sigma \frac{d\rho_\sigma}{d\sigma} \right\} = 0$$

est vérifiée.

De plus, le rayon R_σ de la sphère osculatrice qui contient (Σ) est défini par

$$R_\sigma^2 = \rho_\sigma^2 + t_\sigma^2 \left(\frac{d\rho_\sigma}{d\sigma} \right)^2.$$

On montre aisément qu'il est égal à un.

En prenant pour ε une autre détermination, on n'apporte aucune modification à la courbe (Σ) . En effet, le sens positif de la normale principale change en même temps que le signe de ρ_σ .

Le cône directeur (D) qui a son sommet au centre de la sphère osculatrice et qui passe par (Σ) est donc défini, à un déplacement près, par l'équation intrinsèque

$$\frac{d\tau}{d\sigma} = f(\sigma).$$

⁽¹⁾ G. DARBOUX. *Théorie générale des surfaces*, t. 1, p. 27 et suivantes, 1914.

⁽²⁾ L. B., t. 1, p. 41.

10. — Propriétés des surfaces (S_w) .

Passons à l'étude des surfaces (S_w) que nous avons fait apparaître au n° 8.

La génératrice d'une telle surface a pour cosinus directeurs

$$a_1 = a \cos w + \lambda \sin w, \quad b_1 = b \cos w + \mu \sin w, \quad c_1 = c \cos w + \nu \sin w.$$

De même

$$\lambda_1 = \lambda \cos w - a \sin w, \quad \mu_1 = \mu \cos w - b \sin w, \quad \nu_1 = \nu \cos w - c \sin w.$$

On en déduit

$$\begin{aligned} da_1 &= \frac{da}{d\sigma}(d\sigma \cos w + d\tau \sin w), & db_1 &= \frac{db}{d\sigma}(d\sigma \cos w + d\tau \sin w), & dc_1 &= \dots; \\ d\lambda_1 &= \frac{d\lambda}{d\sigma}(d\tau \cos w - d\sigma \sin w), & d\mu_1 &= \frac{d\mu}{d\sigma}(d\tau \cos w - d\sigma \sin w), & d\nu_1 &= \dots, \end{aligned}$$

et, par suite,

$$(16) \quad d\sigma_1 = d\tau \sin w + d\sigma \cos w, \quad d\tau_1 = d\tau \cos w - d\sigma \sin w.$$

Le résultat fourni par les équations (16) peut être facilement interprété. Dans ce but, considérons le vecteur dont les composantes, sur les génératrices MG_1 et MR_1 des surfaces (S_w) et (S'_w) , sont $\frac{d\sigma_1}{dv}$ et $\frac{d\tau_1}{dv}$. Ses projections sur les génératrices MG et MR , des surfaces réciproques (S) et (S') , sont $\frac{d\sigma}{dv}$ et $\frac{d\tau}{dv}$. Ce vecteur est donc indépendant de l'angle w . Ainsi, nous voyons que :

Le vecteur (V) dont les composantes sur MG et MR sont $\frac{d\sigma}{dv}$ et $\frac{d\tau}{dv}$, est le même pour toutes les surfaces réglées qui admettent la même ligne de striction et qui sont tangentes le long de cette ligne.

On sait que le vecteur (V) est construit dans le plan central de la surface (S) et qu'il est, par conséquent, parallèle au plan normal à la courbe (Σ) .

La binormale à cette courbe a pour cosinus directeurs les coefficients du tableau

$$\begin{vmatrix} \frac{da}{d\sigma} & \frac{db}{d\sigma} & \frac{dc}{d\sigma} \\ -(a \cos \varepsilon + \lambda \sin \varepsilon) & -(b \cos \varepsilon + \mu \sin \varepsilon) & -(c \cos \varepsilon + \nu \sin \varepsilon) \end{vmatrix},$$

dans lequel ε désigne l'angle que nous avons introduit au n° 9.

Les paramètres directeurs du vecteur (V) peuvent s'écrire

$$ad\sigma + \lambda d\tau, \quad bd\sigma + \mu d\tau, \quad cd\sigma + \nu d\tau.$$

La condition pour que le vecteur et la binormale soient perpendiculaires est donc

$$\begin{vmatrix} ad\sigma + \lambda d\tau & bd\sigma + \mu d\tau & cd\sigma + \nu d\tau \\ \frac{da}{d\sigma} & \frac{db}{d\sigma} & \frac{dc}{d\sigma} \\ a \cos \varepsilon + \lambda \sin \varepsilon & b \cos \varepsilon + \mu \sin \varepsilon & c \cos \varepsilon + \nu \sin \varepsilon \end{vmatrix} = 0.$$

En multipliant par

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ \frac{da}{d\sigma} & \frac{db}{d\sigma} & \frac{dc}{d\sigma} \\ \lambda & \mu & \nu \end{vmatrix} = 1,$$

on obtient la relation définitive

$$\frac{d\tau}{d\sigma} = \operatorname{tg} \varepsilon,$$

vérifiée en vertu de (15).

Par suite, le vecteur (V) est parallèle aux normales principales des courbes (Σ) et (T).

La caractéristique du plan central est l'intersection des plans

$$\sum \frac{da}{d\sigma} (X - x) = 0, \quad \sum (ad\sigma + \lambda d\tau) (X - x) = 0.$$

Elle a pour paramètres directeurs

$$\lambda d\sigma - a d\tau, \quad \mu d\sigma - b d\tau, \quad \nu d\sigma - c d\tau.$$

Elle est perpendiculaire au vecteur (V) et, par suite, parallèle aux binormales de (Σ) et (T).

Les diverses surfaces (S_w), déduites de (S), ont le même plan central. Comme les courbes (Σ_w) ont leurs tangentes perpendiculaires à ce plan central, on voit qu'elles se correspondent par transformation de Combescure⁽¹⁾. Leurs normales principales ont la même direction parallèle au vecteur (V).

(¹) Réciproquement, si deux courbes (Σ_1) et (Σ_2), de la sphère de centre O et de rayon un, se correspondent par transformation de Combescure, si deux surfaces (S_1) et (S_2), de

Ce vecteur a la même longueur pour toutes les surfaces (S_w) déduites de (S) . On peut écrire

$$(17) \quad \left(\frac{d\sigma_1}{dv}\right)^2 + \left(\frac{d\tau_1}{dv}\right)^2 = \left(\frac{d\sigma}{dv}\right)^2 + \left(\frac{d\tau}{dv}\right)^2,$$

relation que les équations (16) permettent de vérifier immédiatement. En tenant compte des valeurs trouvées pour K et K' au début du paragraphe 9, nous obtenons

$$(17 \text{ bis}) \quad \frac{\sin^2(\theta + w)}{K_1^2} + \frac{\cos^2(\theta + w)}{K_1'^2} = \frac{\sin^2 \theta}{K^2} + \frac{\cos^2 \theta}{K'^2},$$

ce qui montre que :

L'expression

$$\frac{\sin^2 \theta}{K^2} + \frac{\cos^2 \theta}{K'^2}$$

a la même valeur pour toutes les surfaces (S_w) de même ligne de striction et tangentes le long de cette ligne.

Il est évident, dans ces conditions, que cette expression doit pouvoir s'exprimer en fonction de φ sans que θ intervienne. Un calcul très simple va nous le montrer.

Posons, comme au n° 4,

$$\begin{aligned} a &= x \cos \theta + \sin \theta (x' \cos \varphi + x'' \sin \varphi), \\ b &= \beta \cos \theta + \sin \theta (\beta' \cos \varphi + \beta'' \sin \varphi), \\ c &= \gamma \cos \theta + \sin \theta (\gamma' \cos \varphi + \gamma'' \sin \varphi). \end{aligned}$$

En tenant compte de la relation

$$\frac{d\theta}{dv} + \frac{\cos \varphi}{R} = 0,$$

nous trouvons,

$$(E) \quad \frac{da}{dv} = A x' + B x'', \quad \frac{db}{dv} = A \beta' + B \beta'', \quad \frac{dc}{dv} = A \gamma' + B \gamma'',$$

même ligne de striction, ont des cônes directeurs de sommet O passant par (Σ_1) et (Σ_2) , et si les points correspondants de (Σ_1) et (Σ_2) sont ceux que l'on construit en menant par O les parallèles aux génératrices de (S_1) et (S_2) issues d'un même point de la ligne de striction, ces surfaces ont le même plan central.

Pour le montrer, il suffit d'observer, comme nous l'avons déjà fait, que les plans centraux de (S_1) et (S_2) sont normaux aux tangentes des courbes (Σ_1) et (Σ_2) . Ces tangentes étant parallèles, les plans sont confondus.

avec

$$A = \sin \varphi \left\{ \sin \theta \left(\frac{1}{T} - \frac{d\varphi}{dv} \right) + \frac{\cos \theta \sin \varphi}{R} \right\}, \quad B = -\cos \varphi \left\{ \sin \theta \left(\frac{1}{T} - \frac{d\varphi}{dv} \right) + \frac{\cos \theta \sin \varphi}{R} \right\}.$$

On voit donc que

$$\left(\frac{d\sigma}{dv} \right)^2 = \sum \left(\frac{da}{dv} \right)^2 = \left\{ \sin \theta \left(\frac{1}{T} - \frac{d\varphi}{dv} \right) + \frac{\cos \theta \sin \varphi}{R} \right\}^2.$$

En remplaçant θ par $\theta + \frac{\pi}{2}$, cette relation devient

$$\left(\frac{d\tau}{dv} \right)^2 = \left\{ \cos \theta \left(\frac{1}{T} - \frac{d\varphi}{dv} \right) - \frac{\sin \theta \sin \varphi}{R} \right\}^2.$$

Par conséquent

$$(18) \quad \left(\frac{d\sigma}{dv} \right)^2 + \left(\frac{d\tau}{dv} \right)^2 = \left(\frac{1}{T} - \frac{d\varphi}{dv} \right)^2 + \frac{\sin^2 \varphi}{R^2},$$

ce qui peut aussi s'écrire

$$(18 \text{ bis}) \quad \frac{\sin^2 \theta}{K^2} + \frac{\cos^2 \theta}{K'^2} = \left(\frac{1}{T} - \frac{d\varphi}{dv} \right)^2 + \frac{\sin^2 \varphi}{R^2}.$$

C'est bien ce que nous voulions établir.

11. — Introduction de la torsion géodésique et de la courbure normale relatives à la ligne de striction.

La formule (18 bis) peut être facilement interprétée. Il suffit d'observer que, sur la surface (S), $\frac{\sin \varphi}{R}$ et $\frac{1}{T} - \frac{d\varphi}{dv}$ représentent la courbure normale $\frac{1}{R_n}$ et la torsion géodésique $\frac{1}{T_g}$ de la ligne de striction (1).

L'équation (18 bis) prend la forme

$$(19) \quad \frac{\sin^2 \theta}{K^2} + \frac{\cos^2 \theta}{K'^2} = \frac{1}{R_n^2} + \frac{1}{T_g^2}.$$

(1) Dans la formule $\frac{1}{T_g} = \frac{1}{T} - \frac{d\theta}{ds}$, qui donne la torsion géodésique, il suffit de remplacer θ par $\varphi - \frac{\pi}{2}$ et ds par dv . (E. VESSIOT, *Leçons de géométrie supérieure*, p. 32. Hermann, 1919.)

Sur toute surface réglée, l'expression $\frac{\sin^2 \theta}{K^2} + \frac{\cos^2 \theta}{K'^2}$ est égale à la somme des carrés de la courbure normale et de la torsion géodésique relatives à la ligne de striction.

Lorsque la ligne de striction est une géodésique, la relation (19) devient

$$\frac{\sin^2 \theta}{K^2} + \frac{\cos^2 \theta}{K'^2} = \frac{1}{R^2} + \frac{1}{T^2}.$$

Enfin, si la surface (S) admet un plan directeur, la quantité $\left(\frac{d\tau}{dv}\right)^2 = \frac{\cos^2 \theta}{K'^2}$ est nulle et (19) s'écrit

$$\frac{\sin^2 \theta}{K^2} = \frac{1}{R_n^2} + \frac{1}{T_g^2}.$$

Pour calculer les éléments $\frac{1}{R_n}$ et $\frac{1}{T_g}$, qui s'introduisent naturellement dans l'étude précédente, nous pouvons poser, comme nous l'avons déjà fait à plusieurs reprises,

$$\begin{aligned} a &= x \cos \theta + \sin \theta (\alpha' \cos \varphi + \alpha'' \sin \varphi), \\ b &= \beta \cos \theta + \sin \theta (\beta' \cos \varphi + \beta'' \sin \varphi), \\ c &= \gamma \cos \theta + \sin \theta (\gamma' \cos \varphi + \gamma'' \sin \varphi). \end{aligned}$$

D'autre part, on voit aussi que,

$$\begin{aligned} \lambda &= -\alpha \sin \theta + \cos \theta (\alpha' \cos \varphi + \alpha'' \sin \varphi), \\ \mu &= -\beta \sin \theta + \cos \theta (\beta' \cos \varphi + \beta'' \sin \varphi), \\ \nu &= -\gamma \sin \theta + \cos \theta (\gamma' \cos \varphi + \gamma'' \sin \varphi), \end{aligned}$$

ce qui entraîne

$$(H) \quad \frac{da}{d\sigma} = x' \sin \varphi - x'' \cos \varphi, \quad \frac{db}{d\sigma} = \beta' \sin \varphi - \beta'' \cos \varphi, \quad \frac{dc}{d\sigma} = \gamma' \sin \varphi - \gamma'' \cos \varphi \dots$$

En dérivant $\frac{da}{d\sigma}$ par rapport à v , il vient

$$a \frac{d\sigma}{dv} + \lambda \frac{d\tau}{dv} = \left(\frac{x}{R} + \frac{x''}{T} \right) \sin \varphi + \frac{x'}{T} \cos \varphi - (x' \cos \varphi + x'' \sin \varphi) \frac{d\varphi}{dv},$$

équation qui peut s'écrire

$$Lx + Mx' + N\alpha'' = 0$$

avec

$$\begin{aligned} L &= \cos \theta \frac{d\sigma}{dv} - \sin \theta \frac{d\tau}{dv} - \frac{\sin \varphi}{R}, \\ M &= \cos \varphi \left(\sin \theta \frac{d\sigma}{dv} + \cos \theta \frac{d\tau}{dv} - \frac{1}{T} + \frac{d\varphi}{dv} \right), \\ N &= \sin \varphi \left(\sin \theta \frac{d\sigma}{dv} + \cos \theta \frac{d\tau}{dv} - \frac{1}{T} + \frac{d\varphi}{dv} \right). \end{aligned}$$

Par ce procédé, on peut former le système d'équations

$$L\alpha + M\alpha' + N\alpha'' = 0, \quad L\beta + M\beta' + N\beta'' = 0, \quad L\gamma + M\gamma' + N\gamma'' = 0,$$

équivalent au système

$$L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0,$$

et qui se réduit à

$$(20) \quad \frac{\sin \varphi}{R} = \cos \theta \frac{d\sigma}{dv} - \sin \theta \frac{d\tau}{dv}, \quad \frac{1}{T} - \frac{d\varphi}{dv} = \sin \theta \frac{d\sigma}{dv} + \cos \theta \frac{d\tau}{dv}.$$

On peut encore écrire ces formules

$$(21) \quad \frac{\sin \varphi}{R} = \sin \theta \cos \theta \left(\frac{1}{K} - \frac{1}{K'} \right), \quad \frac{1}{T} - \frac{d\varphi}{dv} = \frac{\sin^2 \theta}{K} + \frac{\cos^2 \theta}{K'},$$

et, en éliminant K' ,

$$(21 \text{ bis}) \quad \frac{1}{K} = \frac{\cotg \theta}{R_n} + \frac{1}{T_g}.$$

Nous obtenons ainsi les éléments que nous voulions calculer.

Les équations (21) peuvent aussi bien se former par dérivation des expressions donnant les cosinus a , b , c . Les calculs sont moins simples, mais on est conduit à la troisième relation

$$\frac{d\theta}{dv} + \frac{\cos \varphi}{R} = 0,$$

qui définit la courbure géodésique de la ligne de striction. Nous l'avons déjà trouvée au § 4.

Les équations (21) rappellent, par leur aspect, les équations d'Euler et de O. Bonnet⁽¹⁾ relatives à la courbure normale et à la torsion géodésique d'une courbe

(1) G. DARBOUX. *Théorie générale des surfaces*, t. 2, p. 400, 1915 (Gauthier-Villars et C^{ie}).

tracée sur une surface quelconque. Mais il est évident que l'analogie ne peut pas être poussée plus loin puisque K et K' ne sont pas indépendants de θ .

Enfin, observons que les expressions $\sin \theta \cos \theta \left(\frac{1}{K} - \frac{1}{K'} \right)$ et $\frac{\sin^2 \theta}{K} + \frac{\cos^2 \theta}{K'}$ conservent leur valeur quand on passe d'une surface (S) à une surface (S') .

Les équations (20) permettent d'écrire

$$(22) \quad \frac{d\sigma}{dv} = \frac{\sin \theta}{T_g} + \frac{\cos \theta}{R_u}, \quad \frac{d\tau}{dv} = \frac{\cos \theta}{T_g} - \frac{\sin \theta}{R_u},$$

et, par suite,

$$\frac{d\tau}{d\sigma} = \frac{\frac{\cos \theta}{T_g} - \frac{\sin \theta}{R_u}}{\frac{\sin \theta}{T_g} + \frac{\cos \theta}{R_u}}$$

ou,

$$(23) \quad \frac{d\tau}{d\sigma} = \frac{\frac{R_u}{T_g} - \operatorname{tg} \theta}{\frac{R_u}{T_g} \operatorname{tg} \theta + 1}.$$

La courbure géodésique, en des points homologues des courbes sphériques (Σ_w) , est une fonction homographique de la tangente de l'angle θ correspondant (*).

12. — Quelques conséquences de l'équation (4).

L'équation considérée est

$$\frac{d\theta}{dv} + \frac{\cos \varphi}{R} = 0.$$

Nous allons l'utiliser pour chercher les surfaces réglées dont les génératrices coupent la ligne de striction sous un angle constant.

Pour que cela se produise, il faut et il suffit que la ligne de striction soit une droite $\left(\frac{1}{R} = 0 \right)$ ou une géodésique non rectiligne $\left(\varphi = \frac{\pi}{2} \right)$ de la surface (*).

(*) La relation (23) est, en réalité, une relation involutive liant $\frac{d\tau}{d\sigma}$ et $\operatorname{tg} \theta$.

(*) C'est une conséquence du théorème de Bonnet que nous avons signalé au n° 4. Voir aussi : PIRONDINI *Studi relativi specialmente alle superficie gobbe*, Journal de Battaglini, 1885, p. 304.

Toute surface à ligne de striction rectiligne (Δ) peut donc être engendrée par une droite coupant (Δ) sous un angle constant.

D'autre part, soit une droite prise dans le plan rectifiant d'une courbe (C). Si elle coupe la courbe sous un angle constant, elle engendre une surface admettant (C) pour ligne de striction. C'est ce qui se produit, en particulier, pour la binormale.

Pour cette dernière catégorie de surfaces, le paramètre de distribution prend une forme très simple susceptible de conduire à d'importantes applications géométriques.

Comme la ligne de striction est une géodésique de la surface réglée, l'équation (22) s'écrit

$$\frac{d\sigma}{dv} = \frac{\sin \theta}{T} + \frac{\cos \theta}{R},$$

et donne pour expression du paramètre K

$$K = \sin \theta : \left(\frac{\cos \theta}{R} + \frac{\sin \theta}{T} \right).$$

Nous conserverons cette dernière relation sous la forme

$$(24) \quad \frac{\sin \theta}{K} = \frac{\cos \theta}{R} + \frac{\sin \theta}{T}. \quad (')$$

Si la surface est engendrée par la binormale de la ligne de striction, nous voyons que

$$(24 \text{ bis}) \quad K = T.$$

Le paramètre de distribution de la surface des binormales d'une courbe (C) est égal au rayon de torsion de cette courbe.

D'autre part, la relation (24) prouve que :

Si θ et K sont constants, la ligne de striction est une courbe de Bertrand, puisque sa torsion et sa courbure vérifient une relation linéaire. Si θ est égal à $\frac{\pi}{2}$, la ligne de striction est une courbe à torsion constante.

Tout ceci donne le moyen de construire, à l'aide des courbes de Bertrand et des courbes à torsion constante, des surfaces à paramètre de distribution constant. L'angle θ devra être droit si la torsion est constante. Si la relation qui caractérise la courbe de Bertrand est

$$\frac{a}{R} + \frac{b}{T} = c,$$

(') Une relation identique est donnée par Bianchi (L. B., t. 1, p. 406) et par M. G. Darboux (*Leçons sur la théorie générale des surfaces*, 3^e partie, p. 313, 1894).

il suffira de choisir θ de telle sorte que⁽¹⁾

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{b}{a}.$$

La formule (23) devient

$$\frac{d\tau}{d\sigma} = \frac{\frac{R}{T} - \operatorname{tg} \theta}{\frac{R}{T} \operatorname{tg} \theta + 1}.$$

Lorsque la ligne de striction est une géodésique d'une surface réglée (S), la courbure géodésique de (Σ) est une fonction homographique du rapport $\frac{R}{T}$.

$\frac{R}{T}$ est constant en même temps que $\frac{d\tau}{d\sigma}$. Cela ne peut se produire que si la courbe (C) est une hélice. Les surfaces correspondantes admettent un cône directeur de révolution de même axe que le cône directeur des tangentes à la courbe (C).

13. — Surfaces dont la ligne de striction est une asymptotique.

Pour que la ligne de striction (C) soit une asymptotique, il faut que $\varphi = 0$ ⁽²⁾. La relation (4) s'écrit

$$d\theta + \frac{dv}{R} = 0. \quad (3)$$

Or, $\frac{dv}{R}$ est l'élément linéaire de l'indicatrice des tangentes de la courbe (C). *A une constante près, la mesure de l'angle θ est opposée à celle de l'arc de cette indicatrice.*

La formule (22) devient

$$(25) \quad \frac{d\tau}{dv} = \frac{\sin \theta}{T}.$$

⁽¹⁾ CH. BICHE (Sur certaines surfaces réglées, Comptes rendus, t. CVI, p. 829, 1888) a montré que cette génératrice est parallèle à la binormale de la courbe de Bertrand associée.

⁽²⁾ La relation $\varphi = \pi$ se ramène à $\varphi = 0$ en changeant le sens de la normale au plan central.

⁽³⁾ L. B., t. I, p. 387.

Le paramètre de distribution est donc, en vertu de (6),

$$K = T. \quad (1)$$

Si la ligne de striction (C) est une asymptotique de la surface (S), le paramètre de distribution est égal au rayon de torsion de (C).

Ce paramètre est le même pour toutes les surfaces (S_w) déduites de (S).

Si la ligne de striction n'est pas une géodésique, la condition (4, § 4) permet d'écrire la relation (21 bis, § 11) sous la forme

$$\frac{1}{T} - \frac{1}{K} = \cotg \theta \cdot \lg \varphi \frac{d\theta}{dv} + \frac{d\varphi}{dv},$$

qui montre que

$$\sin \theta \sin \varphi = \text{constante}$$

est la condition nécessaire et suffisante pour que le paramètre de distribution soit égal au rayon de torsion de la ligne de striction.

En observant que $\sin \theta \sin \varphi$ est le cosinus de l'angle que fait la génératrice avec la binormale, on peut énoncer :

Pour que le paramètre de distribution soit égal au rayon de torsion de la ligne de striction, il faut et il suffit que la génératrice décrive un cône de révolution autour de la binormale.

La condition $\sin \theta \sin \varphi = \text{constante}$ est évidemment vérifiée lorsque la ligne de striction est une asymptotique.

L'expression de $\frac{d\tau}{d\sigma}$, donnée au n° 11, devient ici

$$(26) \quad \frac{d\tau}{d\sigma} = \cotg \theta.$$

La courbure géodésique de (Σ) est égale à la cotangente de l'angle θ que fait la génératrice avec la ligne de striction.

Nous verrons plus loin, sur l'équation des lignes asymptotiques, que (26) caractérise bien les surfaces que nous étudions dans ce paragraphe.

Considérons maintenant le vecteur (V) que nous avons introduit au n° 10. Nous avons montré qu'il admet les paramètres directeurs

$$a d\sigma + \lambda d\tau, \quad b d\sigma + \mu d\tau, \quad c d\sigma + \nu d\tau.$$

(1) L. B., t. 1, p. 392. Cette relation n'a un sens que si la ligne de striction n'est pas une droite.

Or, les cosinus directeurs de la tangente MT à la ligne de striction s'écrivent, en vertu de (5),

$$\alpha = a \cos \theta - \lambda \sin \theta, \quad \beta = b \cos \theta - \mu \sin \theta, \quad \gamma = c \cos \theta - \nu \sin \theta.$$

Pour que (V) et MT soient normaux, il faut et il suffit que

$$\sum \alpha (a d\sigma + \lambda d\tau) = 0,$$

ou que,

$$\frac{d\tau}{d\sigma} = \cotg \theta.$$

Nous retrouvons la condition (26).

Le vecteur (V) est normal à la ligne de striction et, puisqu'il est contenu dans le plan central, il est dirigé suivant la normale principale.

Nous avons déjà dit, au n° 10, que ce vecteur est parallèle à la normale principale de (Σ). *Les normales principales aux courbes (C) et (Σ) sont donc parallèles.*

Le plan central est normal à la tangente de la courbe (Σ). Par suite :

La tangente à la ligne de striction est parallèle à la binormale de (Σ)⁽¹⁾.

14. — Surfaces réglées à ligne de striction circulaire.

Les équations de la ligne de striction étant

$$x = R \cos \frac{v}{R}, \quad y = R \sin \frac{v}{R}, \quad z = 0,$$

les cosinus directeurs de la tangente s'écrivent

$$\alpha = -\sin \frac{v}{R}, \quad \beta = \cos \frac{v}{R}, \quad \gamma = 0.$$

(1) On trouvera dans L. B., t. 1, p. 388, une construction qui fait intervenir les géodésiques de la développable ayant la ligne de striction pour arête de rebroussement.

En tenant compte des valeurs de α , β , γ , données par les formules (5), on peut poser

$$-\sin \frac{v}{R} = a \cos \theta - \lambda \sin \theta, \quad \cos \frac{v}{R} = b \cos \theta - \mu \sin \theta, \quad c \cos \theta - v \sin \theta = 0.$$

La dernière de ces équations donne

$$\sin \theta = \frac{\varepsilon c}{\sqrt{c^2 + v^2}}, \quad \cos \theta = \frac{\varepsilon v}{\sqrt{c^2 + v^2}}, \quad (\varepsilon = \pm 1),$$

et, par suite,

$$\sin \frac{v}{R} = \varepsilon \frac{\lambda c - a v}{\sqrt{c^2 + v^2}}, \quad \cos \frac{v}{R} = \varepsilon \frac{b v - \mu c}{\sqrt{c^2 + v^2}},$$

ce qui prouve qu'une surface à ligne de striction circulaire est définie en même temps que le cône directeur. Les équations d'une telle surface sont

$$(27) \quad X = \varepsilon R \frac{b v - \mu c}{\sqrt{c^2 + v^2}} + a u, \quad Y = \varepsilon R \frac{\lambda c - a v}{\sqrt{c^2 + v^2}} + b u, \quad Z = c u.$$

Il est facile de vérifier, sur ces équations, que la ligne de striction est bien circulaire.

Si l'on observe que

$$\frac{da}{d\sigma} = -(b v - \mu c), \quad \frac{db}{d\sigma} = -(\lambda c - a v), \quad c^2 + v^2 = \left(\frac{da}{d\sigma}\right)^2 + \left(\frac{db}{d\sigma}\right)^2,$$

on peut attribuer aux équations (27) la nouvelle forme

$$(27 \text{ bis}) \quad X = \frac{\varepsilon R da}{\sqrt{da^2 + db^2}} + a u, \quad Y = \frac{\varepsilon R db}{\sqrt{da^2 + db^2}} + b u, \quad Z = c u.$$

Ainsi, on ne fait intervenir que les cosinus a , b , c , donnés en même temps que le cône directeur.

Si l'on donne pour a , b , c , les valeurs

$$a = \sin \omega \sin t, \quad b = \sin \omega \cos t, \quad c = \cos \omega,$$

la surface correspondante est définie par

$$X = \varepsilon R \cos t + u \sin \omega \sin t, \quad Y = -\varepsilon R \sin t + u \sin \omega \cos t, \quad Z = u \cos \omega.$$

Ces équations, dans lesquelles t est le paramètre, définissent l'hyperboloïde de révolution

$$X^2 + Y^2 - Z^2 \operatorname{tg}^2 \omega = R^2.$$

Suivant le signe de ε , on fait apparaître l'un ou l'autre des deux systèmes de génératrices⁽¹⁾.

Une méthode analogue, dans le détail de laquelle nous n'entrerons pas, montre que les surfaces

$$X = \frac{p}{2} \left(\frac{db}{da} \right)^2 + au, \quad Y = -p \frac{db}{da} + bu, \quad Z = cu,$$

ont pour ligne de striction la parabole

$$y^2 = 2px, \quad z = 0.$$

15. — Détermination d'une surface connaissant K , $\cotg \theta$, a , b , c , en fonction d'une même variable.

Nous avons déjà vu que les cosinus directeurs de la tangente à la ligne de striction s'écrivent

$$x = a \cos \theta - \lambda \sin \theta, \quad \beta = b \cos \theta - \mu \sin \theta, \quad \gamma = c \cos \theta - \nu \sin \theta.$$

D'autre part, la formule (6) qui donne le paramètre de distribution permet de poser

$$dv = \frac{K}{\sin \theta} d\sigma.$$

(¹) Si θ est constant, de la formule

$$c \cos \theta - \nu \sin \theta = 0$$

on déduit

$$\frac{dc}{d\sigma} = 0.$$

Cela prouve que le cône directeur est de révolution autour de oz .

L'hyperboloïde de révolution est la seule surface dont la ligne de striction est un cercle qui coupe les génératrices sous un angle constant (E. AMIGUES, *Équations générales des surfaces réglées dont la ligne de striction satisfait à certaines conditions*. Nouvelles Annales de Mathématiques, p. 77, t. 8, 1889).

Les équations de la ligne de striction

$$x = \int \alpha dv, \quad y = \int \beta dv, \quad z = \int \gamma dv,$$

prennent la forme,

$$(28) \quad x = \int K(a \cotg \theta - \lambda) d\sigma, \quad y = \int K(b \cotg \theta - \mu) d\sigma, \quad z = \int K(c \cotg \theta - \nu) d\sigma.$$

On trouve donc, pour la surface,

$$(28 \text{ bis}) \quad X = au + \int K(a \cotg \theta - \lambda) d\sigma, \quad Y = bu + \int K(b \cotg \theta - \mu) d\sigma, \quad Z = \dots$$

Réciproquement, il est possible de montrer que cette surface réglée (28 bis) correspond bien aux éléments que nous avons choisis par avance et que les équations (28) sont celles de la ligne de striction⁽¹⁾.

Les éléments K , $\cotg \theta$, et les cosinus a, b, c , suffisent à déterminer une surface réglée.

Pour que la ligne de striction soit une asymptotique, il faut que $\frac{d\tau}{d\sigma} = \cotg \theta$. En tenant compte de cette relation, établie au n° 13, les équations (28 bis) deviennent

$$(29) \quad X = au + \int K(ad\tau - \lambda d\sigma), \quad Y = bu + \int K(bd\tau - \mu d\sigma), \quad Z = \dots$$

Sous cette nouvelle forme, elles définissent toutes les surfaces dont la ligne de striction est une asymptotique.

Nous avons vu, au n° 13, que pour de telles surfaces la ligne de striction (C) a un rayon de torsion égal à K . Pour obtenir les équations des *courbes à torsion*

⁽¹⁾ Il est intéressant de comparer la méthode que nous avons suivie pour déterminer les surfaces (28 bis) avec celle qui est adoptée par Minding (Voir *L. B.*, t. 1, p. 394).

Minding se donne θ , M , N , en fonction de l'arc v de la directrice. Si l'on veut que la directrice soit la ligne de striction, il revient au même de fixer K et $\cotg \theta$ en fonction de v . Mais l'introduction de la variable v oblige à exprimer les cosinus directeurs de la génératrice de la surface à l'aide de la même variable, ce qui complique considérablement le problème.

Signalons enfin une méthode très intéressante, exposée par M. E. VESSIOT dans ses *Leçons de géométrie supérieure* (p. 109, 1919). La directrice choisie est une trajectoire orthogonale des génératrices.

constante $\frac{1}{T}$, il suffit donc de remplacer, dans (28), K par la constante T et $\cotg \theta$ par $\frac{d\tau}{d\sigma}$. On trouve ainsi

$$(30) \quad x = T \int (a d\tau - \lambda d\sigma), \quad y = T \int (b d\tau - \mu d\sigma), \quad z = T \int (c d\tau - \nu d\sigma).$$

Ces équations, rapprochées de celles que l'on donne habituellement, nous permettront de mettre en évidence quelques résultats intéressants.

16. — Surfaces à paramètre de distribution constant. Courbes de Bertrand.
Courbes à torsion constante.

Les équations des surfaces à paramètre de distribution constant s'écrivent

$$(31) \quad X = au + K \int (a \cotg \theta - \lambda) d\sigma, \quad Y = bu + K \int (b \cotg \theta - \mu) d\sigma, \quad Z = \dots$$

Si θ est constant, la ligne de striction est une courbe de Bertrand (n° 12) définie par la relation

$$\frac{\sin \theta}{T} + \frac{\cos \theta}{R} = \frac{\sin \theta}{K}.$$

Il suffira de faire varier le cône directeur (a, b, c) pour obtenir toutes les courbes de Bertrand de la même famille.

Ces courbes ont pour équations

$$x = K \left(\cotg \theta \int a d\sigma - \int \lambda d\sigma \right), \quad y = K \left(\cotg \theta \int b d\sigma - \int \mu d\sigma \right), \quad z = \dots,$$

ou, en posant $K \cotg \theta = m$, $K = n$,

$$(32) \quad x = m \int a d\sigma - n \int \lambda d\sigma, \quad y = m \int b d\sigma - n \int \mu d\sigma, \quad z = m \int c d\sigma - n \int \nu d\sigma. \quad (1)$$

(1) Ce sont, à un signe près, les équations indiquées par M. G. Darboux (*Leçons sur la théorie générale des surfaces*, t. 1, p. 63, 1914). Il les fait apparaître en utilisant les formules de Serret qu'il retrouve à l'aide de considérations cinématiques.

On trouvera dans la *Géométrie différentielle de M. Bianchi* (t. 1, p. 62 à 68, 1927), l'exposé des propriétés remarquables qui caractérisent les courbes de Bertrand.

Nous avons montré au n° 12 que pour $\theta = \frac{\pi}{2}$ le paramètre constant k est égal à T . Les équations (32) deviennent,

$$(33) \quad x = -T \int \lambda d\sigma, \quad y = -T \int \mu d\sigma, \quad z = -T \int \nu d\sigma.$$

Elles définissent alors les lignes à torsion constante T .

En tenant compte des relations

$$\lambda = b \frac{dc}{d\sigma} - c \frac{db}{d\sigma}, \quad \mu = c \frac{da}{d\sigma} - a \frac{dc}{d\sigma}, \quad \nu = a \frac{db}{d\sigma} - b \frac{da}{d\sigma},$$

on trouve,

$$(33 \text{ bis}) \quad x = T \int (c db - b dc), \quad y = T \int (a dc - c da), \quad z = T \int (b da - a db).$$

Ces formules font intervenir le cône directeur des binormales, comme celles qui sont données par M. G. Darboux dans l'important ouvrage que nous avons déjà signalé à plusieurs reprises.

Comparons maintenant ces résultats à ceux qui ont été obtenus à la fin du paragraphe précédent.

Si M et M' sont deux points correspondants des courbes

$$(C) \quad x = T \int a d\tau, \quad y = T \int b d\tau, \quad z = T \int c d\tau,$$

$$(C') \quad x = -T \int \lambda d\sigma, \quad y = -T \int \mu d\sigma, \quad z = -T \int \nu d\sigma,$$

les formules (30) font immédiatement voir que le milieu de MM' décrit une courbe (C'') de torsion constante égale à $\frac{2}{T}$.

C'est une propriété remarquable de toutes les courbes (C) et (C') , de même torsion constante, dont les cônes directeurs des tangentes sont supplémentaires (*).

On peut observer que (C) et (C') ont leurs normales principales parallèles à la tangente à l'indicatrice de courbure (Σ) relative à (C) . Nous avons vu, par ailleurs (**), que la normale principale de (C'') est parallèle à celle de (Σ) . Par suite, *la courbe (C'') a sa normale principale perpendiculaire à celles des courbes (C) et (C') .*

Avant de terminer ce paragraphe, observons qu'il existe une construction simple des surfaces à paramètre de distribution constant.

(*) On peut étendre cette propriété aux courbes à torsion variable.

(**) Se reporter au n° 13.

En effet, la caractéristique du plan asymptote est parallèle à la génératrice. C'est la droite d'intersection des plans

$$\sum \lambda(X-x) = 0, \quad \sum \frac{da}{d\sigma}(X-x) - \frac{dv}{d\tau} \sum \lambda z = 0.$$

Réciproquement, si l'on mène, dans le plan osculateur (P) d'une courbe (A), une parallèle à la tangente, cette parallèle décrit une surface (S) qui admet précisément (P) pour plan asymptote⁽¹⁾.

Puisque la surface (S) et la courbe (A) ont le même cône directeur, la seconde équation peut s'écrire

$$\sum \frac{da}{d\sigma}(X-x) + k \frac{T_A}{R_A} = 0^{(2)}.$$

En désignant par n la distance qui sépare la génératrice de la tangente à la courbe (A), nous obtenons

$$n = -k \frac{T_A}{R_A}.$$

Par suite, une surface à paramètre de distribution constant est engendrée par une droite du plan osculateur d'une courbe (A). Cette droite doit être menée parallèlement à la tangente, à une distance proportionnelle à $\frac{T_A}{R_A}$.

Le point de la courbe (A) est à l'intersection des plans⁽³⁾

$$\sum \lambda(X-x) = 0, \quad \sum \frac{da}{d\sigma}(X-x) + k' \lg \theta = 0, \quad \sum a(X-x) - \frac{d}{d\sigma}(k' \lg \theta) = 0.$$

Lorsque K' et θ sont constants, les résultats du paragraphe 12, appliqués à la surface réciproque (S'), montrent que la ligne de striction (C) est une courbe de Bertrand géodésique de (S). La normale au plan central est simultanément la normale principale des deux courbes (C) et (A). Ainsi :

Toutes les fois que (C) est une géodésique de (S) et que K' est constant, (A) est une courbe de Bertrand.

⁽¹⁾ Pour que le plan asymptote soit osculateur à une hélice, il faut et il suffit que la surface possède un cône directeur de révolution.

⁽²⁾ T_A et R_A représentent les rayons de courbure et de torsion de (A).

⁽³⁾ L'expression $-\frac{dv}{d\tau} \sum \lambda z$ est égale à $K' \lg \theta$ (§ 9).

17. — Surfaces réglées à plan directeur.

Soit xoy le plan directeur. Nous pouvons poser

$$a = \cos \sigma, \quad b = \sin \sigma, \quad c = 0.$$

Les cosinus de la génératrice du cône supplémentaire sont tous nuls, sauf v qui est égal à un. Les formules (28 bis) deviennent

$$(34) \quad X = u \cos \sigma + \int K \cotg \theta \cos \sigma d\sigma, \quad Y = u \sin \sigma + \int K \cotg \theta \sin \sigma d\sigma, \quad Z = - \int K d\sigma,$$

et définissent ainsi les surfaces à plan directeur.

Si $K \cotg \theta$ est constant, la ligne de striction est tracée sur un cylindre de révolution d'axe oz ⁽¹⁾. C'est le cylindre (K) envisagé au n° 6.

En prenant pour $K \cotg \theta$ et K des expressions convenables, les quadratures intervenant dans les formules (34) s'explicitent.

Par exemple, pour $\theta = \frac{\pi}{2}$ on trouve des conoïdes droits. Parmi eux, *l'hélicoïde gauche à plan directeur* s'obtient en donnant au paramètre de distribution une valeur constante. D'une façon générale, θ et K étant constants, les surfaces sont des hélicoïdes.

18. — Surfaces à directrice rectiligne.

Soient

$$X = x + au, \quad Y = y + bu, \quad Z = z + cu,$$

les équations d'une telle surface.

L'axe oz sera une directrice rectiligne s'il est possible de trouver une valeur de u qui annule simultanément X et Y . Cela se produira si

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b}.$$

⁽¹⁾ Cela peut s'établir sur les équations (34) ou bien sur la formule (9 bis) du n° 6.

On trouvera, exposées dans un article de M. A. BURL (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 9^e série, t. VIII, p. 52, 1929), de curieuses propriétés des lignes asymptotiques de ces surfaces.

En désignant par m la valeur commune des deux rapports, on voit que l'on peut poser, pour la ligne de striction,

$$x = ma, \quad y = mb.$$

Il reste à déterminer la valeur de z . Elle sera donnée par la troisième équation (28) si les deux autres ont la forme que nous venons d'indiquer.

Nous devons donc avoir

$$K(a \cotg \theta - \lambda) = m \frac{da}{d\sigma} + a \frac{dm}{d\sigma},$$

$$K(b \cotg \theta - \mu) = m \frac{db}{d\sigma} + b \frac{dm}{d\sigma}.$$

Ces équations sont vérifiées pour

$$(35) \quad m = \frac{K}{v} \frac{dc}{d\sigma}, \quad \cotg \theta = \frac{1}{K} \frac{d}{d\sigma} \left\{ \frac{K}{v} \frac{dc}{d\sigma} \right\} - \frac{c}{v},$$

et les équations (28 bis) s'écrivent

$$(36) \quad X = a \left(u + \frac{K}{v} \frac{dc}{d\sigma} \right), \quad Y = b \left(u + \frac{K}{v} \frac{dc}{d\sigma} \right), \quad Z = c \left(u + \frac{K}{v} \frac{dc}{d\sigma} \right) - \int \frac{K}{v} d\sigma.$$

Les conoïdes obliques s'obtiendront en remplaçant a, b, c , par les expressions

$$a = p \cos \sigma + p' \sin \sigma, \quad b = q \cos \sigma + q' \sin \sigma, \quad c = r \cos \sigma + r' \sin \sigma,$$

dans lesquelles $(p, q, r), (p', q', r')$, désignent les cosinus de deux droites rectangulaires du plan directeur.

Les surfaces (36) à cône directeur de révolution peuvent aussi s'obtenir très simplement. Il suffit de poser

$$a = p \cos \omega + (p' \cos t + p'' \sin t) \sin \omega,$$

$$b = q \cos \omega + (q' \cos t + q'' \sin t) \sin \omega,$$

$$c = r \cos \omega + (r' \cos t + r'' \sin t) \sin \omega,$$

ω étant une constante et t une variable. $(p, q, r), (p', q', r'), (p'', q'', r'')$, désignent les cosinus directeurs des arêtes d'un trièdre trirectangle. C'est la première arête qui est l'axe du cône de révolution.

Les équations (36) mettent bien en évidence la ligne de striction et ne contiennent qu'une seule quadrature qu'il sera aisé de faire disparaître en choisissant convenablement K .

La première des relations (35) correspond, pour les surfaces à directrice rectiligne, à une propriété que l'on peut énoncer :

Dans toute surface à directrice rectiligne (Δ) , le paramètre de distribution est égal, au signe près, au produit de la distance m qui sépare (Δ) de la ligne de striction par le rapport des cosinus des angles que font, avec la directrice, la normale au plan asymptote et la normale au plan central.

La seconde relation (35) s'écrit, en tenant compte de la première,

$$(37) \quad \frac{d \log m}{d\sigma} = (\nu \cot g \theta + c) : \frac{dc}{d\sigma}.$$

Elle exprime une propriété géométrique intéressante qui lie la distance m aux angles que fait la directrice (Δ) avec la génératrice, la normale au plan central et la normale au plan asymptote.

CHAPITRE II

Formules de Frenet. Introduction des distances d'un point fixe aux plans fondamentaux.

Dans l'étude des courbes gauches on se sert le plus souvent des formules de Serret-Frenet dont il est inutile de souligner l'importance. Cependant, ce ne sont pas les seules relations que l'on puisse utiliser. En particulier, le géomètre italien Cesàro a introduit systématiquement les distances d'un point fixe aux faces du trièdre principal lié à la courbe (*).

Les formules valables pour l'arête de rebroussement d'une développable peuvent être étendues à la ligne de striction d'une surface gauche. Nous allons montrer qu'on peut établir, pour une telle surface, des équations tout à fait semblables à celles de Serret-Frenet et Cesàro.

19. — Extension des formules de Frenet aux surfaces gauches.

Nous poserons, dans tout ce qui suit,

$$(1) \quad \varphi = \frac{K}{\sin \theta}, \quad l = \frac{K'}{\cos \theta},$$

K et K' étant les paramètres de distribution de la surface (S) et de sa réciproque (S') .

En vertu des relations utilisées au début du n° 9, nous pouvons aussi bien écrire

$$(1 \text{ bis}) \quad \varphi = \frac{dv}{d\sigma}, \quad l = \frac{dv}{d\tau} \quad (2).$$

Nous désignerons par a' , b' , c' , les cosinus directeurs $\frac{da}{d\sigma}$, $\frac{db}{d\sigma}$, $\frac{dc}{d\sigma}$, de la normale au plan central.

(*) CESÀRO. *Lezioni di geometria intrinseca*, chap. ix et x, Napoli, 1896. Voir aussi L. B., t. 1, p. 60.

(2) Les surfaces à plan directeur sont définies par l'équation $\frac{1}{l} = 0$.

On voit immédiatement que

$$\frac{da}{dv} = a' \frac{d\sigma}{dv}, \quad \frac{db}{dv} = b' \frac{d\sigma}{dv}, \quad \frac{dc}{dv} = c' \frac{d\sigma}{dv},$$

ou,

$$(A) \quad \frac{da}{dv} = \frac{a'}{\varphi}, \quad \frac{db}{dv} = \frac{b'}{\varphi}, \quad \frac{dc}{dv} = \frac{c'}{\varphi}.$$

D'autre part, on sait que

$$(a', b', c') = \begin{vmatrix} \lambda & \mu & \nu \\ a & b & c \end{vmatrix}.$$

Par conséquent

$$\left(\frac{da'}{dv}, \frac{db'}{dv}, \frac{dc'}{dv} \right) = \begin{vmatrix} a' & b' & c' \\ a & b & c \end{vmatrix} \frac{d\tau}{dv} + \begin{vmatrix} \lambda & \mu & \nu \\ a' & b' & c' \end{vmatrix} \frac{d\sigma}{dv},$$

ou,

$$(A') \quad \frac{da'}{dv} = -\left(\frac{a}{\varphi} + \frac{\lambda}{l} \right), \quad \frac{db'}{dv} = -\left(\frac{b}{\varphi} + \frac{\mu}{l} \right), \quad \frac{dc'}{dv} = -\left(\frac{c}{\varphi} + \frac{\nu}{l} \right).$$

Les relations

$$\frac{d\lambda}{dv} = \frac{d\lambda}{d\tau} \frac{d\tau}{dv}, \quad \frac{d\mu}{dv} = \frac{d\mu}{d\tau} \frac{d\tau}{dv}, \quad \frac{d\nu}{dv} = \frac{d\nu}{d\tau} \frac{d\tau}{dv},$$

deviennent, en tenant compte des formules (1) du n° 1,

$$(A'') \quad \frac{d\lambda}{dv} = \frac{a'}{l}, \quad \frac{d\mu}{dv} = \frac{b'}{l}, \quad \frac{d\nu}{dv} = \frac{c'}{l}.$$

Les formules (A), (A'), (A''), et celles de Frenet sont bien analogues.

D'ailleurs, si la surface est développable, son trièdre principal se confond avec celui de l'arête de rebroussement (C). De plus, dans ce cas,

$$\varphi = R, \quad l = T.$$

Les relations (A), (A'), (A''), deviennent celles de Frenet relatives à la courbe (C). Ces dernières ne sont qu'un cas particulier de celles que nous avons établies.

20. — Équations intrinsèques d'une surface gauche.

Les équations de Serret, c'est-à-dire les équations générales (A), (A'), (A''), dans lesquelles on fait $\theta = 0$, montrent qu'il suffit de se donner R et T en fonction de l'arc de l'arête de rebroussement pour que la développable correspondante soit définie⁽¹⁾. Cela laisse prévoir que les équations

$$(2) \quad \varphi = f(v), \quad t = g(v), \quad \theta = h(v),$$

dans lesquelles v représente l'arc de la ligne de striction, déterminent une surface gauche à un déplacement près.

Considérons deux surfaces réglées (S) et (S₁) satisfaisant aux équations précédentes. Nous allons montrer qu'elles sont égales.

Déplaçons la surface (S₁) de façon à superposer les génératrices MG et M₁G₁ qui correspondent à la même valeur v_0 de la variable v et faisons coïncider les trièdres principaux⁽²⁾.

Pour $v = v_0$, nous pouvons écrire

$$\left\{ \begin{array}{lll} a_1 = a, & b_1 = b, & c_1 = c, \\ a'_1 = a', & b'_1 = b', & c'_1 = c', \\ \lambda_1 = \lambda, & \mu_1 = \mu, & \nu_1 = \nu. \end{array} \right.$$

Le système différentiel linéaire du paragraphe 19,

$$\frac{dl}{dv} = \frac{m}{\varphi}, \quad \frac{dm}{dv} = -\left(\frac{l}{\varphi} + \frac{n}{t}\right), \quad \frac{dn}{dv} = \frac{m}{t},$$

admet les solutions

$$\begin{array}{lll} (a, & a', & \lambda), & (a_1, & a'_1, & \lambda_1), \\ (b, & b', & \mu), & (b_1, & b'_1, & \mu_1), \\ (c, & c', & \nu), & (c_1, & c'_1, & \nu_1), \end{array}$$

égales deux à deux pour $v = v_0$. D'après ce que l'on sait sur les systèmes différen-

⁽¹⁾ *Équations intrinsèques d'une courbe gauche.* L. B., t. 1, p. 16.

⁽²⁾ Le trièdre principal d'une surface a son sommet au point central. Ses arêtes sont : la génératrice, la normale au plan central et la normale au plan asymptote.

tiels du premier ordre, on peut affirmer que ces solutions sont identiques. Par conséquent, les égalités

$$\begin{aligned} a_1 &= a, & b_1 &= b, & c_1 &= c, \\ a'_1 &= a', & b'_1 &= b', & c'_1 &= c', \\ \lambda_1 &= \lambda, & \mu_1 &= \mu, & \nu_1 &= \nu, \end{aligned}$$

subsistent pour toutes les valeurs de v .

Après le déplacement envisagé les cônes directeurs se superposent.

La relation

$$k = \varepsilon \sin \theta,$$

montre que les deux surfaces ont le même paramètre de distribution. Par suite, les équations (28 bis) du paragraphe 15 définissent la même surface. Les surfaces (S) et (S₁) se superposent par un déplacement convenablement choisi.

Il devient possible d'énoncer la proposition suivante :

Deux surfaces réglées qui vérifient simultanément les équations (2) sont égales⁽¹⁾.

Désormais nous désignerons les équations (2) sous le nom d'*équations intrinsèques des surfaces gauches*.

Il reste à démontrer qu'à tout système d'équations intrinsèques on peut *effectivement* faire correspondre une surface.

Les équations (28 bis) du paragraphe 15 montrent que le problème se ramène à la recherche du cône directeur de la surface, tous les autres éléments étant fournis par les équations (2).

Il faut donc déterminer trois solutions

$$(a, a', \lambda), \quad (b, b', \mu), \quad (c, c', \nu),$$

du système différentiel linéaire

$$(3) \quad \frac{dl}{dv} = \frac{m}{\varepsilon}, \quad \frac{dm}{dv} = -\left(\frac{l}{\varepsilon} + \frac{n}{l}\right), \quad \frac{dn}{dv} = \frac{m}{l}.$$

En outre, ces solutions doivent remplir les conditions

$$(4) \quad \begin{cases} a^2 + a'^2 + \lambda^2 = b^2 + b'^2 + \mu^2 = c^2 + c'^2 + \nu^2 = 1, \\ ab + a'b' + \lambda\mu = ac + a'c' + \lambda\nu = bc + b'c' + \mu\nu = 0, \end{cases}$$

pour qu'elles puissent représenter les cosinus directeurs des arêtes d'un trièdre trirectangle.

On sait⁽²⁾ que ces solutions sont déterminées par leurs valeurs initiales et que

⁽¹⁾ La méthode suivie pour établir cette proposition est analogue à celle qu'a utilisée M. Bianchi (L. B., t. 1, p. 17) à propos des équations intrinsèques des courbes gauches.

⁽²⁾ L. B., t. 1, p. 18 et *Théorie générale des surfaces*, p. 27 et suivantes, t. 1, 1914.

les conditions (4) sont vérifiées, quelle que soit la valeur attribuée à v , si les valeurs initiales les satisfont. Il suffira donc de choisir, comme valeurs initiales, les cosinus directeurs des arêtes d'un trièdre trirectangle direct.

M. G. Darboux a établi que la recherche des solutions de (3) se ramenait alors à l'intégration d'une équation de Riccati. Nous n'entrerons pas dans le détail de cet important problème. On se reportera aux ouvrages de MM. Bianchi et Darboux pour en trouver la solution complète.

Une fois ce point précisé, formons les équations de la surface. On déduit des équations intrinsèques

$$d\sigma = \frac{dv}{f(v)}, \quad \mathbf{k} = f(v) \sin \theta, \quad \theta = h(v).$$

Les formules (28 bis) du paragraphe 15 prennent la forme

$$(6) \quad \begin{cases} X = au + \int (a \cos \theta - \lambda \sin \theta) dv, \\ Y = bu + \int (b \cos \theta - \mu \sin \theta) dv, \\ Z = cu + \int (c \cos \theta - \nu \sin \theta) dv, \end{cases}$$

et représentent une surface (S) dont la ligne de striction a pour élément linéaire dv .

Il est aisé de prouver, en s'aidant des équations (3) vérifiées par le cône directeur, que la surface (S) admet les équations intrinsèques données en (2).

On peut conclure :

Les équations intrinsèques

$$\varphi = f(v), \quad t = g(v), \quad \theta = h(v),$$

définissent une surface réglée, à un déplacement près.

Ces résultats sont obtenus par une méthode semblable à celle qui est utilisée pour les courbes gauches. Mais il existe une voie beaucoup plus rapide.

Le système

$$(2) \quad \varphi = f(v), \quad t = g(v), \quad \theta = h(v),$$

peut être remplacé par

$$(2 \text{ bis}) \quad d\sigma = \frac{dv}{f(v)}, \quad \frac{d\tau}{d\sigma} = \frac{f(v)}{g(v)}, \quad \theta = h(v).$$

Les deux premières équations fournissent la valeur de $\frac{d\tau}{d\sigma}$ en fonction de σ .

Le cône directeur est donc défini à un déplacement près (§ 9).

En utilisant la variable v , les cosinus directeurs de la génératrice s'écrivent sous la forme générale

$$a_i = pa + p'b + p''c, \quad b_i = qa + q'b + q''c, \quad c_i = ra + r'b + r''c.$$

a, b, c , correspondent à un cône particulier et les constantes $(p, q, r), (p', q', r'), (p'', q'', r'')$, sont les cosinus directeurs des arêtes d'un trièdre trirectangle direct.

S'il existe une surface d'équations intrinsèques (2), elle sera définie par (*)

$$(S_i) \quad X_i = pX + p'Y + p''Z, \quad Y_i = qX + q'Y + q''Z, \quad Z_i = rX + r'Y + r''Z,$$

avec

$$(S) \quad \begin{cases} X = au + \int (a \cos \theta - \lambda \sin \theta) dv, \\ Y = bu + \int (b \cos \theta - \mu \sin \theta) dv, \\ Z = cu + \int (c \cos \theta - \nu \sin \theta) dv. \end{cases}$$

Toute surface (S_i) se déduit de (S) par déplacement. Ainsi, tout se ramène à vérifier que la surface (S) remplit les conditions (2).

Le cône directeur a été choisi de telle sorte que

$$d\sigma = \frac{dv}{f(v)}, \quad \frac{d\tau}{d\sigma} = \frac{f(v)}{g(v)}.$$

Par suite, puisque v est l'arc de la ligne de striction (C) ,

$$\varphi = f(v), \quad t = \varphi \frac{d\sigma}{d\tau} = g(v).$$

Enfin, on voit sur les équations de (S) que la génératrice fait avec (C) l'angle θ .

Cette nouvelle méthode montre bien que les équations (2) définissent une surface réglée, à un déplacement près.

21. — Surfaces (H) .

Nous désignerons ainsi les surfaces pour lesquelles $\frac{\varphi}{t}$ et θ sont des constantes.

Pour $\theta = 0$, la relation $\frac{\varphi}{t} = c^{te}$ se ramène à $\frac{R}{T} = c^{te}$ et définit une développable ayant une hélice pour arête de rebroussement (*).

(*) Il suffit de porter a_i, b_i, c_i , $\theta = h(v)$, $K = f(v) \sin \theta$, dans les équations (28 bis).

(*) L. B., t. 1, p. 22. La relation $\frac{R}{T} = c^{te}$ caractérise les hélices.

La relation $\frac{\dot{z}}{t} = \frac{d\tau}{d\sigma}$ montre que les surfaces (H) ont un cône directeur de révolution.

Lorsque l'angle θ est constant, la ligne de striction est une géodésique (§ 12). La relation (23) du paragraphe 11 s'écrit

$$(7) \quad \frac{d\tau}{d\sigma} = \frac{\frac{R}{T} - \lg \theta}{\frac{R}{T} \lg \theta + 1},$$

et prouve que $\frac{R}{T}$ est constant en même temps que $\frac{\dot{z}}{t}$ et θ . La ligne de striction d'une surface (H) est une hélice tracée sur le cylindre (K) introduit au paragraphe 6.

Réciproquement, si la ligne de striction (C) est en même temps une hélice et une géodésique, on est en présence d'une surface (H).

En effet, l'angle θ est constant si la courbe (C) est une géodésique⁽¹⁾. De plus $\frac{R}{T}$ est aussi constant puisque (C) est une hélice. Par suite, en vertu de (7), $\frac{\dot{z}}{t}$ est invariable.

La courbe (Σ) est un cercle. Comme la normale au plan central est parallèle à la tangente à ce cercle, on peut énoncer :

La normale au plan central d'une surface (H) est perpendiculaire à l'axe du cône directeur.

C'est une propriété que l'on peut rapprocher de celle de la normale principale d'une hélice quelconque.

Sans nuire à la généralité du problème qui se pose à propos de la recherche des surfaces (H), on peut supposer que le cône directeur a pour axe oz . Soit 2ω l'angle au sommet. On peut écrire, en introduisant la variable w ,

$$\begin{aligned} a &= \sin \omega \sin w, & b &= \sin \omega \cos w, & c &= \cos \omega, & d\sigma &= \sin \omega dw; \\ \lambda &= \cos \omega \sin w, & \mu &= \cos \omega \cos w, & \nu &= -\sin \omega, & d\tau &= \cos \omega dw. \end{aligned}$$

Dans ces conditions,

$$(8) \quad \frac{\dot{z}}{t} = \cotg \omega.$$

Pour définir la surface, il suffit de se donner φ , t et θ en fonction de w .

⁽¹⁾ Voir au paragraphe 12.

L'angle constant ω devra vérifier la relation (8). Les formules (28 bis, § 15) deviennent

$$(9) \quad \begin{cases} X = \sin \omega \left[u \sin w + \sin(\omega - \theta) \int \varphi \sin w dw \right], \\ Y = \sin \omega \left[u \cos w + \sin(\omega - \theta) \int \varphi \cos w dw \right], \\ Z = u \cos \omega + \sin \omega \cos(\omega - \theta) \int \varphi dw. \end{cases}$$

Ce sont les équations des surfaces (H). Les quadratures qu'elles contiennent s'explicitent pour un choix convenable de la fonction φ .

Un cas intéressant se produit chaque fois que les trois éléments φ , t , θ , sont constants. Les relations (22) et (22 bis) du paragraphe 11 s'écrivent

$$(10) \quad \frac{\sin \theta}{T} + \frac{\cos \theta}{R} = \frac{1}{\varphi}, \quad \frac{\cos \theta}{T} - \frac{\sin \theta}{R} = \frac{1}{t}.$$

et prouvent que *la courbure et la torsion de la ligne de striction restent invariables*. Par suite :

Les surfaces pour lesquelles φ , t , θ , ont des valeurs constantes sont des hélicoïdes gauches.

La réciproque s'établit immédiatement, à l'aide des équations (10).

22. — Surfaces (B).

Nous appellerons surfaces (B) celles qui remplissent les conditions

$$(11) \quad \frac{m}{\varphi} + \frac{n}{t} = 1, \quad \theta = \text{constante},$$

analogues à celles qui caractérisent les courbes de Bertrand⁽¹⁾. On peut écrire la première de ces conditions :

$$(11 \text{ bis}) \quad dv = m d\sigma + n d\tau.$$

Comme

$$dv = \frac{K}{\sin \theta} d\sigma,$$

(1) Les courbes de Bertrand correspondent aux relations

$$\frac{m}{R} + \frac{n}{T} = 1, \quad \theta = 0,$$

qui ne sont qu'un cas particulier de (11).

les équations (28 bis), si souvent utilisées, deviennent

$$(12) \quad \begin{cases} X = au + \int (a \cos \theta - \lambda \sin \theta) (m d\sigma + n d\tau), \\ Y = bu + \int (b \cos \theta - \mu \sin \theta) (m d\sigma + n d\tau), \\ Z = cu + \int (c \cos \theta - \nu \sin \theta) (m d\sigma + n d\tau). \end{cases}$$

On n'aura aucune difficulté pour montrer qu'elles définissent les surfaces (B) vérifiant les relations (11).

Puisque le cône directeur est arbitraire, il existe une infinité de surfaces (B) qui satisfont aux mêmes relations.

Le théorème de Bonnet⁽¹⁾ prouve que la ligne de striction est une géodésique. Par suite, les formules (22) et (22 bis) du paragraphe 11 prennent la forme

$$\frac{\sin \theta}{T} + \frac{\cos \theta}{R} = \frac{1}{\varepsilon}, \quad \frac{\cos \theta}{T} - \frac{\sin \theta}{R} = \frac{1}{t}.$$

Elles permettent de remplacer les relations (11) par les relations équivalentes

$$(14) \quad \theta = \text{constante}, \quad \frac{m \cos \theta - n \sin \theta}{R} + \frac{m \sin \theta + n \cos \theta}{T} = 1,$$

qui montrent que la ligne de striction est, en même temps, une géodésique et une courbe de Bertrand.

Ceci indique qu'une surface (B) est engendrée par une droite qui glisse le long d'une courbe de Bertrand (C), en la coupant sous un angle constant θ et en restant dans le plan rectifiant.

Comme l'angle θ est arbitraire, la courbe (C) détermine ∞^1 surfaces (B) tangentes le long de leur ligne de striction.

On sait⁽²⁾ que la normale principale d'une courbe de Bertrand (C) est normale principale d'une courbe (C₁) de même espèce. A une surface (B) de ligne de striction (C) on peut donc faire correspondre ∞^1 surfaces (B₁) de ligne de striction (C₁). Les plans centraux de (B) et (B₁) sont parallèles et les lignes de striction ont la même normale principale.

⁽¹⁾ Voir au paragraphe 4.

⁽²⁾ G. DARBOUX, *Théorie générale des surfaces*, t. 1, p. 21, 1914. L. B., t. 1, p. 62.

Les résultats établis dans ce qui précède permettent d'affirmer que les équations

$$(15) \quad \begin{cases} x = \int (a \cos \theta - \lambda \sin \theta) (m d\sigma + n d\tau), \\ y = \int (b \cos \theta - \mu \sin \theta) (m d\sigma + n d\tau), \\ z = \int (c \cos \theta - \nu \sin \theta) (m d\sigma + n d\tau), \end{cases}$$

déduites de (12), sont celles des courbes de Bertrand. Elles sont différentes de celles que nous avons établies au paragraphe 16. C'est que le cône directeur n'est plus le même.

θ étant fixé arbitrairement, il suffit de donner à m et n les valeurs

$$m = B \sin \theta + A \cos \theta, \quad n = B \cos \theta - A \sin \theta,$$

pour que les courbes (15) vérifient la relation

$$\frac{A}{R} + \frac{B}{T} = 1.$$

Les équations des courbes de Bertrand peuvent donc s'écrire,

$$(\theta = 0) \quad \begin{cases} x = \int a(A d\sigma + B d\tau) \\ y = \int b(A d\sigma + B d\tau) \\ z = \int c(A d\sigma + B d\tau) \end{cases} \quad \text{ou,} \quad \left(\theta = \frac{\pi}{2}\right) \quad \begin{cases} x = \int \lambda(A d\tau - B d\sigma) \\ y = \int \mu(A d\tau - B d\sigma) \\ z = \int \nu(A d\tau - B d\sigma) \end{cases}$$

En utilisant la transformation de Combescure, on aboutit aux formules obtenues pour $\theta = 0$.

Le résultat du paragraphe 16 peut fort bien se retrouver en choisissant pour θ une valeur comprise entre 0 et π et telle que

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{B}{A}.$$

n est alors nul et l'élément $d\tau$ n'intervient plus dans les quadratures.

Pour terminer ce paragraphe, observons que les équations (15) font intervenir les courbes de Bertrand (C_1) et (C_2) définies par,

$$(C_1) \begin{cases} x_1 = \int a(m d\sigma + n d\tau) \\ y_1 = \int b(m d\sigma + n d\tau) \\ z_1 = \int c(m d\sigma + n d\tau) \end{cases} \quad (C_2) \begin{cases} x_2 = - \int \lambda(m d\sigma + n d\tau) \\ y_2 = - \int \mu(m d\sigma + n d\tau) \\ z_2 = - \int \nu(m d\sigma + n d\tau) \end{cases}$$

En des points homologues M_1 et M_2 les normales principales sont parallèles et les tangentes perpendiculaires.

Les homothétiques des courbes (15) sont des courbes de même nature. Il en résulte que les équations

$$x = Mx_1 + Nx_2, \quad y = My_1 + Ny_2, \quad z = Mz_1 + Nz_2,$$

représentent une courbe de Bertrand, quelles que soient les constantes M et N .

Le point M_0 qui divise M_1M_2 dans le rapport constant k a pour coordonnées

$$x = \frac{x_1 - kx_2}{1 - k}, \quad y = \frac{y_1 - ky_2}{1 - k}, \quad z = \frac{z_1 - kz_2}{1 - k}.$$

Ce qui précède met en évidence la proposition :

Tout point qui partage le segment M_1M_2 dans un rapport constant, décrit une courbe de Bertrand.

De plus, la présence des deux constantes arbitraires M et N explique que l'on puisse remplacer les courbes (C_1) et (C_2) par des homothétiques, sans que la propriété énoncée cesse de subsister.

Pour $n = 0$, (C_1) et (C_2) ont respectivement la courbure et la torsion constantes. Les résultats précédents démontrent la nouvelle proposition (1) :

Si deux courbes ont leurs cônes directeurs supplémentaires, si l'une est à torsion constante et l'autre à courbure constante, tout point partageant dans un rapport constant le segment M_1M_2 qui relie les points homologues, décrit une courbe de Bertrand.

Les hélices, qui sont des courbes de Bertrand particulières, possèdent des propriétés analogues. Mais la méthode suivie ne saurait leur convenir, en raison de la forme de la seconde des relations (14). Une étude directe est nécessaire.

Les considérations du paragraphe 21 prouvent que les hélices ont des équations générales de la forme

$$(16) \quad x = \sin(\omega - \theta) \int \varphi \sin w dw, \quad y = \sin(\omega - \theta) \int \varphi \cos w dw, \quad z = \cos(\omega - \theta) \int \varphi dw.$$

(1) Ce mode de génération peut être étendu à toute courbe de Bertrand donnée. La même remarque sera valable pour les hélices.

En faisant intervenir les hélices

$$(H_1) \quad x_1 = \sin \omega \int \varphi \sin w \, dw, \quad y_1 = \sin \omega \int \varphi \cos w \, dw, \quad z_1 = \cos \omega \int \varphi \, dw,$$

$$(H_2) \quad x_2 = -\cos \omega \int \varphi \sin w \, dw, \quad y_2 = -\cos \omega \int \varphi \cos w \, dw, \quad z_2 = \sin \omega \int \varphi \, dw,$$

dont les cônes directeurs sont supplémentaires et qui correspondent aux valeurs $\theta = 0$ et $\theta = \frac{\pi}{2}$ de l'angle θ , on peut poser :

$$x = x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta, \quad y = y_1 \cos \theta + y_2 \sin \theta, \quad z = z_1 \cos \theta + z_2 \sin \theta.$$

Comme les homothétiques de ces courbes sont encore des hélices, on voit que les équations

$$x = Mx_1 + Nx_2, \quad y = My_1 + Ny_2, \quad z = Mz_1 + Nz_2,$$

représentent une hélice quelles que soient les constantes M et N .

Par suite :

Si l'on considère les hélices (H_1) et (H_2) [ou des homothétiques], tout point qui divise M_1M_2 dans un rapport constant décrit une hélice.

M_1 et M_2 sont les points homologues de (H_1) et (H_2) .

23. — Extension des formules de Cesàro aux surfaces gauches.

Cesàro a introduit dans l'étude des courbes, les distances d'un point fixe aux faces du trièdre de Serret. Cette méthode conduit à de nombreux résultats. Nous allons l'appliquer aux surfaces gauches.

Nous désignerons par m, n, p , les distances d'un point fixe, que nous prendrons pour origine des coordonnées, aux trois plans fondamentaux⁽¹⁾ de la surface. Des expressions des coordonnées d'un point de la ligne de striction

$$(17) \quad x = ma + na' + p\lambda, \quad y = mb + nb' + p\mu, \quad z = mc + nc' + p\nu,$$

on tire

$$(17 \text{ bis}) \quad m = \sum ax, \quad n = \sum a'x, \quad p = \sum \lambda x.$$

⁽¹⁾ Nous désignons ainsi le plan normal à la génératrice, le plan central et le plan asymptote. Les distances sont comptées positivement, à partir de l'origine, dans les sens choisis sur les normales à ces plans.

En dérivant par rapport à v et en tenant compte des formules (A), (A'), (A'') du paragraphe 19, on obtient

$$(18) \quad \frac{dm}{dv} = \frac{n}{z} + \cos \theta, \quad \frac{dn}{dv} = -\left(\frac{m}{z} + \frac{p}{t}\right), \quad \frac{dp}{dv} = \frac{n}{t} - \sin \theta.$$

Dans ce calcul, les cosinus α, β, γ , de la tangente à la ligne de striction sont remplacés par les valeurs obtenues au paragraphe 4.

Pour $\theta = 0$, les plans fondamentaux se réduisent à ceux de l'arête de rebroussement. Les équations (18) sont alors identiques à celles de Cesàro⁽¹⁾:

La seconde équation joue un rôle particulièrement important. Elle exprime que la courbe (17) est la ligne de striction. En effet, la condition (2) du paragraphe 2 peut s'écrire

$$\sum \left\{ m \frac{da}{dv} + n \frac{da'}{dv} + p \frac{d\lambda}{dv} + a \frac{dm}{dv} + a' \frac{dn}{dv} + \lambda \frac{dp}{dv} \right\} a' = 0$$

ou,

$$\frac{dn}{dv} + m \frac{d\sigma}{dv} + p \frac{d\tau}{dv} = 0.$$

Cette relation est identique à celle que nous avons envisagée. Nous la conserverons sous la forme

$$(19) \quad dn + m d\sigma + p d\tau = 0^{(2)}.$$

Par suite :

La surface

$$X = ma + na' + p\lambda + au, \quad Y = mb + nb' + p\mu + bu, \quad Z = mc + nc' + p\nu + cu,$$

admet la courbe (17) pour ligne de striction si la condition (19) est vérifiée.

Dans ces conditions, pour déterminer une surface, il suffit de se donner a, b, c, n, p , en fonction d'un même paramètre et de calculer m dans (19).

Toute surface a donc des équations de la forme

$$(20) \quad X = \left(u - \frac{dn}{d\sigma} - p \frac{d\tau}{d\sigma}\right) a + na' + p\lambda, \quad Y = \left(u - \frac{dn}{d\sigma} - p \frac{d\tau}{d\sigma}\right) b + nb' + p\mu, \quad Z = \dots$$

⁽¹⁾ L. B., t. 1, p. 60.

⁽²⁾ Pour une surface à plan directeur, elle se réduit à $dn + m d\sigma = 0$.

24. — Une surface est déterminée quand on connaît m, n, p, θ ,
en fonction d'une même variable.

La démonstration est identique à celle que l'on donne à propos des courbes gauches.

En éliminant $\frac{1}{\varphi}$ et $\frac{1}{l}$ entre les équations (18), il vient

$$(21) \quad m \cos \theta - p \sin \theta = \frac{1}{2} \frac{d(m^2 + n^2 + p^2)}{dv},$$

formule qui se traduit par l'énoncé :

La distance d'un point fixe O à la normale au plan central menée par le point M de la ligne de striction (C), se projette sur la tangente à la courbe (C) suivant un segment égal à la demi-dérivée, prise par rapport à l'arc v , du carré de la distance OM.

La même propriété subsiste pour les surfaces développables :

La distance d'un point fixe O à la normale principale, menée par le point M d'une courbe (C), se projette sur la tangente suivant un segment égal à la demi-dérivée du carré de OM prise par rapport à l'arc de (C).

Une fois ce résultat établi, revenons au problème qui nous occupe.

Des formules (18) et (21) on déduit :

$$\frac{1}{\varphi} = \frac{1}{n} \left(\frac{dm}{dv} - \cos \theta \right), \quad \frac{1}{l} = \frac{1}{n} \left(\frac{dp}{dv} + \sin \theta \right), \quad dv = \frac{d(m^2 + n^2 + p^2)}{2(m \cos \theta - p \sin \theta)}.$$

C'est un système équivalent à (18), si $m \cos \theta - p \sin \theta$ et n sont différents de 0. Comme θ est connu en fonction de la même variable, nous sommes ramenés aux équations intrinsèques du paragraphe 20, à condition cependant que $m^2 + n^2 + p^2$ ne soit pas une constante.

La surface est donc déterminée à un déplacement près.

Pour $n = 0$, le plan central passe par un point fixe et enveloppe un cône. Les équations (18) deviennent

$$\frac{dm}{dv} = \cos \theta, \quad \frac{dp}{dv} = -\sin \theta, \quad \frac{m}{\varphi} + \frac{p}{l} = 0.$$

Les deux premières sont en général incompatibles, à moins que m et p ne soient convenablement choisis. Dans ce dernier cas il y a indétermination, car c'est seulement le rapport $\frac{\varphi}{l}$ que l'on peut calculer.

La formule (21) prouve que si les conditions

$$m \cos \theta - p \sin \theta = 0, \quad m^2 + n^2 + p^2 = \text{constante},$$

ne sont pas réalisées simultanément, il n'existe aucune surface gauche ayant les éléments donnés. Mais si ces deux relations sont vérifiées, *la ligne de striction est tracée sur une sphère*. Les relations (18) se réduisent à deux et il y a encore une indétermination que l'on peut lever en se donnant v en fonction de la variable déjà introduite.

En se donnant m, n, p , en fonction de l'arc v , on est conduit à un problème qui admet plusieurs solutions. C'est ce qu'indique l'équation (21) qui fournit pour θ deux valeurs comprises entre $-\pi$ et $+\pi$. Il existe donc deux surfaces convenables dans le cas envisagé.

25. — Calcul de K, K', θ , pour une surface définie par les équations (20).

En tenant compte de la relation (19)

$$dn + m d\sigma + p d\tau = 0,$$

on peut prendre pour équations de la ligne de striction

$$x = ma + na' + p\lambda, \quad y = mb + nb' + p\mu, \quad z = mc + nc' + p\nu.$$

Les relations (5) du paragraphe 4 permettent de poser

$$\cos \theta dv = \sum a dx, \quad \sin \theta dv = - \sum \lambda dx, \quad \operatorname{tg} \theta = - \frac{\sum \lambda dx}{\sum a dx}.$$

Nous trouvons ainsi

$$(22) \quad \cos \theta dv = dm - n d\sigma, \quad \sin \theta dv = n d\tau - dp, \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{n d\tau - dp}{dm - n d\sigma}.$$

et, par suite, les formules que nous voulions établir sont :

$$(23) \quad K = n \frac{d\tau}{d\sigma} - \frac{dp}{d\sigma}, \quad K' = \frac{dm}{d\tau} - n \frac{d\sigma}{d\tau}.$$

26. — Surfaces dont le plan asymptote reste tangent à une sphère.

L'origine des coordonnées étant au centre de la sphère de rayon R_s , on aura les surfaces cherchées en posant $p = R_s$ dans les équations (20).

Le paramètre de distribution prend la nouvelle forme

$$k = n \frac{d\tau}{d\sigma}.$$

Il est égal au produit de la courbure géodésique de (Σ) par la distance du centre de la sphère au plan central.

Quand le cône directeur est de révolution, $\frac{d\tau}{d\sigma}$ est constant. Dans ce cas, le paramètre de distribution est proportionnel à la distance du centre de la sphère (O) au plan central.

D'autre part, le plan asymptote est tangent à une développable dont l'arête de rebroussement (A) est une hélice (§ 16). Cette développable est circonscrite à la sphère (O) le long d'une courbe (δ). (δ) est une développante sphérique de l'hélice (A).

Pour que l'une des surfaces étudiées soit formée par les binormales de la ligne de striction (C), il faut et il suffit que $\theta = \frac{\pi}{2}$. Les équations (22) donnent alors

$$n = \frac{dm}{d\sigma}.$$

En portant cette valeur de n dans la relation (19), on obtient l'équation différentielle

$$(24) \quad \frac{d^2 m}{d\sigma^2} + m + R_s \frac{d\tau}{d\sigma} = 0,$$

qui fournit m et dont l'intégration ne présente aucune difficulté si le cône directeur est de révolution.

Toujours pour $\theta = \frac{\pi}{2}$, il faut observer que $\frac{d\tau}{d\sigma}$ est le rapport du rayon de torsion au rayon de courbure de (C). On peut donc écrire

$$K = n \frac{T}{R}.$$

De plus, le plan normal à la ligne de striction est tangent à une sphère. En effet, il occupe la position du plan asymptote de la surface.

Pour $R_s = 0$, on trouve les surfaces

$$X = a \left(u - \frac{dn}{d\sigma} \right) + na', \quad Y = b \left(u - \frac{dn}{d\sigma} \right) + nb', \quad Z = c \left(u - \frac{dn}{d\sigma} \right) + nc',$$

dont le plan asymptote passe par un point fixe. Tous les résultats précédents subsis-

tent, mais l'équation (24) est d'intégration plus facile. Elle admet la solution générale

$$m = A \cos(\sigma + \varphi),$$

dans laquelle A et φ sont des constantes arbitraires.

27. — Surfaces dont le plan central reste tangent à une sphère.

Soit R le rayon de la sphère. Les équations

$$(25) \quad X = a \left(u - p \frac{d\tau}{d\sigma} \right) + R a' + p \lambda, \quad Y = b \left(u - p \frac{d\tau}{d\sigma} \right) + R b' + p \mu, \quad Z = \dots,$$

définissent les surfaces cherchées. On les obtient en posant $n = R$ dans les équations (20).

Pour $R = 0$, le plan central passe par un point fixe.

La condition (19) se réduit à

$$\frac{m}{p} = - \frac{d\tau}{d\sigma}.$$

Soit P le plan asymptote et Q le plan normal à la génératrice mené par le point central. Nous pouvons énoncer la proposition :

Si le plan central reste tangent à une sphère de centre O , la courbure géodésique de (Σ) est opposée au rapport des distances du point O aux plans Q et P .

En particulier, ce rapport est constant quand le cône directeur est de révolution. Dans ce cas, le plan central enveloppe un cylindre (K) dont nous avons montré l'existence au paragraphe 6. Il est circonscrit à la sphère O . Par suite :

Si le plan central d'une surface à cône directeur de révolution est tangent à une sphère, le cylindre (K) est de révolution.

28. — Développables.

Pour qu'une surface soit développable, il faut et il suffit que $\theta = 0$, ou que, en vertu de (22),

$$(26) \quad n = \frac{dp}{d\tau}.$$

C'est la troisième formule de Cesàro.

La relation (19) devient

$$(27) \quad m = -\left(p + \frac{d^2 p}{d\tau^2}\right)^{(1)}.$$

Par suite, les développables ont pour équations

$$(28) \quad X = a\left[u - \frac{d\tau}{d\sigma}\left(p + \frac{d^2 p}{d\tau^2}\right)\right] + a'\frac{dp}{d\tau} + p\lambda, \quad Y = b\left[u - \frac{d\tau}{d\sigma}\left(p + \frac{d^2 p}{d\tau^2}\right)\right] + b'\frac{dp}{d\tau} + p\mu, \quad Z = \dots$$

Une développable est déterminée quand on connaît, en fonction d'une même variable, la distance de l'origine au plan osculateur et les cosinus directeurs de la tangente à l'arête de rebroussement (C), définie par :

$$(29) \quad x = p\lambda + a'\frac{dp}{d\tau} - a\frac{d\tau}{d\sigma}\left(p + \frac{d^2 p}{d\tau^2}\right), \quad y = p\mu + b'\frac{dp}{d\tau} - b\frac{d\tau}{d\sigma}\left(p + \frac{d^2 p}{d\tau^2}\right), \quad z = \dots$$

(a, b, c) , (a', b', c') , (λ, μ, ν) , représentent les cosinus directeurs de la tangente, de la normale principale et de la binormale.

La première des relations (22) s'écrit

$$(30) \quad dv = dm - nd\sigma,$$

et permet le calcul de l'arc de la courbe (C). Elle donne aussi

$$(30 \text{ bis}) \quad R = \frac{dm}{d\sigma} - n, \quad T = \frac{dm}{d\tau} - n\frac{d\sigma}{d\tau}.$$

Les équations (29) vont nous permettre de résoudre des problèmes, classiques pour la plupart, mais qu'il est intéressant d'aborder en utilisant une méthode analogue à celle qui est suivie pour les surfaces réglées.

29. — Transformation de Combescure.

Combescure a montré⁽²⁾ qu'il était possible d'associer à tout système triple orthogonal d'autres systèmes de même représentation sphérique. En des points

⁽¹⁾ $\frac{d^2 p}{d\tau^2}$ désignera, quelle que soit la variable, la dérivée seconde de p par rapport à l'arc τ .

⁽²⁾ E. COMBESCURE. *Sur les déterminants fonctionnels et les coordonnées curvilignes*, Annales de l'École Normale Supérieure, t. IV, 1^{re} série, 1867.

G. DARBOUX. *Théorie générale des Surfaces*, t. 4, p. 289, 1925.

homologues, les tangentes aux courbes d'intersection des surfaces de ces systèmes sont parallèles.

Avec L. Bianchi⁽¹⁾ nous dirons que ces courbes, de même indicatrice de courbure, sont transformées de Combescure.

Cet auteur introduit des équations de la forme

$$x = \int a f(v) dv, \quad y = \int b f(v) dv, \quad z = \int c f(v) dv,$$

qui définissent les courbes (C') que l'on peut déduire de (C). Ces équations contiennent des quadratures qu'il est difficile de faire disparaître.

Cet inconvénient ne se présente pas avec les équations (29). Si la courbe (C) est donnée, les cosinus a, b, c , sont parfaitement déterminés. Il suffira de faire varier l'expression de la distance p de l'origine au plan osculateur pour obtenir toutes les courbes (C').

Les équations (29) donnent, sans quadrature, la solution du problème qui se pose à propos de la transformation de Combescure.

De (30 bis) on tire

$$\frac{R}{T} = \frac{d\tau}{d\sigma},$$

ce qui prouve que le rapport des rayons de courbure et de torsion est un invariant de la transformation. En effet, le second membre ne dépend que du cône directeur des tangentes.

30. — Courbes (C) dont les binormales sont parallèles aux tangentes d'une courbe (C₁).

Désignons par (x, β, γ) , (x', β', γ') , (x'', β'', γ'') , les cosinus directeurs de la tangente, de la normale principale et de la binormale de (C₁).

Pour obtenir les courbes cherchées, il suffit de poser dans les équations (29)

$$a = x'', \quad b = \beta'', \quad c = \gamma''; \quad a' = -x', \quad b' = -\beta', \quad c' = -\gamma'; \quad \lambda = x, \quad \mu = \beta, \quad \nu = \gamma.$$

En désignant par σ_1 et τ_1 les arcs des indicatrices de (C₁), on trouve les équations

$$(31) \quad x = p x + \frac{dp}{d\sigma_1} x' - \frac{d\sigma_1}{d\tau_1} \left(p + \frac{d^2 p}{d\sigma_1^2} \right) x'', \quad y = p \beta + \frac{dp}{d\sigma_1} \beta' - \frac{d\sigma_1}{d\tau_1} \left(p + \frac{d^2 p}{d\sigma_1^2} \right) \beta'', \quad z = \dots$$

dans lesquelles la fonction p est arbitraire.

⁽¹⁾ L. B., t. I, p. 50.

La relation

$$\frac{d\tau}{d\sigma} = \frac{d\sigma_1}{d\tau_1}$$

permet d'écrire

$$\frac{R}{T} = \frac{T_1}{R_1}$$

ou encore,

$$(32) \quad RR_1 = TT_1.$$

Ce résultat peut s'énoncer :

Soit une courbe (C) dont les tangentes sont perpendiculaires aux plans osculateurs d'une courbe (C₁). En des points homologues, le produit des rayons de courbure est égal au produit des rayons de torsion.

Ces deux courbes ont des cônes directeurs supplémentaires. Par suite :

Si la tangente d'une courbe (C) est perpendiculaire au plan osculateur de (C₁), réciproquement la tangente de (C₁) est normale au plan osculateur de (C).

31. — Courbes (C) dont les normales principales sont parallèles aux tangentes d'une courbe (C₁).

La tangente à la courbe (C) devra être parallèle au plan normal de (C₁). En désignant par ω l'angle qu'elle fait avec la normale principale, on peut écrire

$$a = \alpha' \cos \omega + \alpha'' \sin \omega, \quad b = \beta' \cos \omega + \beta'' \sin \omega, \quad c = \gamma' \cos \omega + \gamma'' \sin \omega,$$

et, en différentiant,

$$da = -\alpha \cos \omega d\tau_1 + \alpha' \sin \omega (d\tau_1 - d\omega) + \alpha'' \cos \omega (d\omega - d\tau_1), \quad db = \dots, \quad dc = \dots$$

La normale principale aura pour cosinus directeurs α, β, γ , si

$$(33) \quad d\tau_1 = d\omega.$$

Ce résultat s'énonce :

L'angle que fait la tangente de la courbe (C) avec la normale principale de (C₁) a même mesure que l'arc de l'indicatrice de torsion de (C₁)⁽¹⁾.

(1) L'égalité (33) entraîne $\omega = \tau_1$, si l'origine est convenablement choisie sur l'indicatrice de torsion.

Nous pouvons donc poser

$$(34) \quad a = \alpha' \cos \tau_1 + \alpha'' \sin \tau_1, \quad a' = \alpha, \quad \lambda = \alpha' \sin \tau_1 - \alpha'' \cos \tau_1, \quad \text{etc.},$$

et, par suite,

$$da = -\alpha \cos \tau_1 d\sigma_1, \quad d\lambda = -\alpha \sin \tau_1 d\sigma_1,$$

ce qui entraîne

$$d\sigma = -\cos \tau_1 d\sigma_1, \quad d\tau = -\sin \tau_1 d\sigma_1.$$

Ces dernières relations montrent que

$$(35) \quad \frac{R}{T} = \operatorname{tg} \omega.$$

La tangente à la courbe (C) fait, avec la normale principale de (C₁), un angle dont la tangente trigonométrique est égale au rapport des rayons de courbure et de torsion.

Considérons une surface (S) dont le cône directeur est confondu avec celui des tangentes à la courbe (C) et supposons que la ligne de striction soit une asymptotique. La tangente à cette ligne a pour cosinus directeurs⁽¹⁾

$$a \cos \theta - \lambda \sin \theta, \quad b \cos \theta - \mu \sin \theta, \quad c \cos \theta - \nu \sin \theta,$$

ou, en vertu de (34),

$$\alpha' \cos(\theta + \omega) + \alpha'' \sin(\theta + \omega), \quad \beta' \cos(\theta + \omega) + \beta'' \sin(\theta + \omega), \quad \gamma' \cos(\theta + \omega) + \gamma'' \sin(\theta + \omega).$$

Mais les relations (35) et (26, § 15) qui s'écrivent

$$\frac{d\tau}{d\sigma} = \cotg \theta, \quad \frac{d\tau}{d\sigma} = \operatorname{tg} \omega,$$

prouvent que

$$\cotg \theta = \operatorname{tg} \omega,$$

ou que

$$\cos(\theta + \omega) = 0.$$

Les cosinus directeurs de la tangente à la ligne de striction sont donc, au signe près, ceux de la binormale de (C₁).

(¹) Voir au § 4, formules (5).

Ce résultat met en évidence la proposition :

Si (S) est une surface à ligne de striction asymptotique et si son cône directeur est celui de la courbe (C), la tangente à la ligne de striction est parallèle à la binormale de (C₁),

En remplaçant $d\sigma_1$, $d\tau_1$, ω , α , α' , λ , etc., par les valeurs obtenues, les équations (29) deviennent

$$(36) \begin{cases} x = p(\alpha' \sin \tau_1 - \alpha'' \cos \tau_1) - \frac{\alpha}{\sin \tau_1} \frac{dp}{d\sigma_1} - \lg \tau_1, & \left\{ p + \frac{1}{\sin \tau_1} \frac{d}{d\sigma} \left(\frac{1}{\sin \tau_1} \frac{dp}{d\sigma_1} \right) \right\} (\alpha' \cos \tau_1 + \alpha'' \sin \tau_1), \\ y = p(\beta' \sin \tau_1 - \beta'' \cos \tau_1) - \frac{\beta}{\sin \tau_1} \frac{dp}{d\sigma_1} - \lg \tau_1, & \left\{ p + \frac{1}{\sin \tau_1} \frac{d}{d\sigma} \left(\frac{1}{\sin \tau_1} \frac{dp}{d\sigma_1} \right) \right\} (\beta' \cos \tau_1 + \beta'' \sin \tau_1), \\ z = p(\gamma' \sin \tau_1 - \gamma'' \cos \tau_1) - \frac{\gamma}{\sin \tau_1} \frac{dp}{d\sigma_1} - \lg \tau_1, & \left\{ p + \frac{1}{\sin \tau_1} \frac{d}{d\sigma} \left(\frac{1}{\sin \tau_1} \frac{dp}{d\sigma_1} \right) \right\} (\gamma' \cos \tau_1 + \gamma'' \sin \tau_1), \end{cases}$$

et déterminent toutes les courbes (C).

Le calcul de τ_1 fait intervenir une quadrature. Il faut aussi observer que la fonction p et l'origine de l'arc τ_1 sont arbitraires.

32. — Courbes (C) à normales principales parallèles aux binormales de (C₁).

Cette fois le plan rectifiant de (C) doit être parallèle au plan osculateur de (C₁). En désignant par ω l'angle des tangentes aux deux courbes, nous obtenons

$$(37) \quad \alpha = \alpha \cos \omega + \alpha' \sin \omega, \quad \alpha' = \alpha'', \quad \lambda = \alpha \sin \omega - \alpha' \cos \omega, \text{ etc.,}$$

et, en différentiant,

$$d\alpha = -\alpha(d\omega + d\sigma_1) \sin \omega + \alpha'(d\omega + d\sigma_1) \cos \omega - \alpha'' \sin \omega d\tau_1, \quad db = \dots, \quad dc = \dots;$$

$$d\lambda = \alpha(d\omega + d\sigma_1) \cos \omega + \alpha'(d\omega + d\sigma_1) \sin \omega + \alpha'' \cos \omega d\tau_1, \quad d\mu = \dots, \quad d\nu = \dots.$$

La normale principale de la courbe (C) sera parallèle à la binormale de (C₁) si

$$d\omega + d\sigma_1 = 0,$$

ou,

$$\omega = -\sigma_1^{(1)}.$$

(¹) L'origine est arbitraire sur l'indicatrice de courbure de (C₁).

La tangente à une courbe (C) fait, avec la tangente de la courbe correspondante (C₁), un angle dont la mesure est opposée à celle de l'arc de l'indicatrice de courbure de (C₁).

Dans ces conditions, on voit aisément que

$$(38) \quad \frac{d\tau}{d\sigma} = -\cotg \omega,$$

ou,

$$(38 \text{ bis}) \quad \frac{R}{T} = -\cotg \omega.$$

Le rapport des rayons de courbure et de torsion de la courbe (C) est opposé à la cotangente de l'angle que font les tangentes des courbes (C) et (C₁).

Soit une surface (S) à ligne de striction asymptotique et dont le cône directeur est celui de la courbe (C). Les cosinus directeurs de la tangente à la ligne de striction sont :

$$\alpha \cos(\omega + \theta) + \alpha' \sin(\omega + \theta), \quad \beta \cos(\omega + \theta) + \beta' \sin(\omega + \theta), \quad \gamma \cos(\omega + \theta) + \gamma' \sin(\omega + \theta).$$

Or, les relations

$$\frac{d\tau}{d\sigma} = \cotg \theta, \quad \frac{d\tau}{d\sigma} = -\cotg \omega,$$

prouvent que

$$\sin(\omega + \theta) = 0.$$

La tangente à la ligne de striction est parallèle à celle de la courbe (C₁).

La ligne de striction de la surface (S) et la courbe (C₁) se correspondent par transformation de Combescure.

Les équations des courbes étudiées se forment en suivant la même méthode qu'au paragraphe précédent.

33. — Courbes dont le plan osculateur reste tangent à une sphère⁽¹⁾.

Soit O le centre de cette sphère et R_s son rayon. Les courbes (C) cherchées s'obtiennent en posant $p = R_s$ dans les équations (29) qui prennent la forme particulièrement simple

$$(39) \quad x = R_s \left(\lambda - a \frac{d\tau}{d\sigma} \right), \quad y = R_s \left(\mu - b \frac{d\tau}{d\sigma} \right), \quad z = R_s \left(\nu - c \frac{d\tau}{d\sigma} \right).$$

⁽¹⁾ L. B., t. 1, p. 62.

E. GOURSAT, *Cours d'analyse mathématique*, t. 1, p. 587, exercice n° 12, 1927.

La formule (26)

$$n = \frac{dp}{d\tau},$$

montre que le plan osculateur reste tangent à une sphère de centre O, à condition que le plan rectifiant passe par le point O. Les courbes (C) sont les géodésiques du cône enveloppé par le plan rectifiant.

D'autre part, la relation (27) devient

$$(40) \quad m = -R_s \frac{d\tau}{d\sigma},$$

ou,

$$(40 \text{ bis}) \quad \frac{R}{T} = -\frac{m}{R_s}.$$

Le rapport des rayons de courbure et de torsion est proportionnel à la distance du centre de la sphère au plan normal à la génératrice.

Les courbes (C) partagent cette propriété avec celles qui vérifient l'équation différentielle⁽¹⁾

$$\frac{d^2 p}{d\tau^2} + p = R_s.$$

De (30) on déduit la relation

$$(41) \quad v = m + \text{cte}$$

qui caractérise les courbes (C). Elle peut s'écrire

$$(41 \text{ bis}) \quad \frac{R}{T} = -\frac{v}{R_s} + \text{cte}.$$

Pour toute géodésique d'un cône, le rapport $\frac{R}{T}$ est une fonction linéaire de l'arc.

Cette propriété caractérise les géodésiques du cône⁽²⁾ et, par suite, les courbes dont le plan osculateur reste tangent à une sphère.

La développable dont l'arête de rebroussement est la courbe (C) touche la sphère O suivant une courbe (δ). Deux plans tangents à la sphère O, menés en deux points infiniment voisins N et N' de (δ), se coupent suivant la tangente MT à

(¹) Cette équation se déduit de la relation $m = -\frac{d\tau}{d\sigma} \left(p + \frac{d^2 p}{d\tau^2} \right)$.

(²) Voir L. B., t. I, p. 33.

la courbe (C). Cette tangente est perpendiculaire au plan NON' et coupe (δ) à angle droit. Par conséquent :

La courbe (δ) , suivant laquelle le plan osculateur touche la sphère (O), est une développante de (C). La tangente à (δ) est donc parallèle à la normale principale de (C). La courbe (δ) et l'indicatrice de courbure sont transformées de Combescure.

Le plan rectifiant relatif au point M de (C) passe par O. Sa caractéristique est donc MO. Ce que nous avons déjà dit au § 10, à propos du plan central, nous permet d'énoncer la proposition :

Si M est un point d'une géodésique (C) d'un cône de sommet O, la droite OM est parallèle à la binormale de l'indicatrice de courbure de (C).

34. — Surfaces rectifiantes circonscrites à la sphère.

Pour que la surface rectifiante d'une courbe (C) soit circonscrite à une sphère de centre O, il faut et il suffit que n soit une constante R_s .

L'équation (26) devient

$$p = \tau R_s + A, \quad (A = \text{cte}),$$

et permet d'énoncer :

Pour que le plan rectifiant reste tangent à une sphère de centre O, il faut et il suffit que la distance du point O au plan osculateur soit une fonction linéaire de l'arc de l'indicatrice de torsion.

La formule (27) se réduit à

$$m = -p \frac{d\tau}{d\sigma} \quad \text{ou} \quad \frac{R}{T} = -\frac{m}{p}.$$

Pour que la surface rectifiante de la courbe (C) satisfasse à la condition imposée, il faut et il suffit que le rapport $\frac{R}{T}$ soit opposé au rapport des distances du point O aux plans normal et osculateur.

La formule (30) peut s'écrire

$$dv = dm - R_s d\sigma,$$

ou

$$(42) \quad v = m - R_s \sigma + \text{cte}.$$

Elle exprime aussi une propriété caractéristique des courbes étudiées. On peut l'énoncer :

L'arc v , compté à partir d'une origine convenable, s'obtient en retranchant de la distance du point O au plan normal, le produit du rayon de la sphère par la mesure de l'arc de l'indicatrice de courbure.

Soit N le point de contact du plan rectifiant et de la sphère (O) . La droite caractéristique MN est parallèle à la binormale de l'indicatrice de courbure.

Cette propriété, comme celle que nous avons énoncée au paragraphe précédent, est une conséquence immédiate des développements du paragraphe 10.

Les courbes (C) sont définies par les équations

$$(43) \quad \begin{cases} x = \left(\lambda - a \frac{d\tau}{d\sigma} \right) (\tau R_s + A) + a' R_s, \\ y = \left(\mu - b \frac{d\tau}{d\sigma} \right) (\tau R_s + A) + b' R_s, \\ z = \left(\nu - c \frac{d\tau}{d\sigma} \right) (\tau R_s + A) + c' R_s, \end{cases}$$

dans lesquelles il suffit de poser $R_s = 0$ pour obtenir les formules (39).

Désignons par (C_1) et (C_2) les courbes

$$(C_1) \quad x_1 = \tau \left(\lambda - a \frac{d\tau}{d\sigma} \right) + a', \quad y_1 = \tau \left(\mu - b \frac{d\tau}{d\sigma} \right) + b', \quad z_1 = \tau \left(\nu - c \frac{d\tau}{d\sigma} \right) + c';$$

$$(C_2) \quad x_2 = \lambda - a \frac{d\tau}{d\sigma}, \quad y_2 = \mu - b \frac{d\tau}{d\sigma}, \quad z_2 = \nu - c \frac{d\tau}{d\sigma}.$$

Les équations (43) prennent la forme

$$x = R_s x_1 + A x_2, \quad y = R_s y_1 + A y_2, \quad z = R_s z_1 + A z_2.$$

Soient M'_1 et M'_2 les points homologues des courbes (C_1) et (C_2) homothétiques de (C_1) et (C_2) . Tout point qui divise $M'_1 M'_2$ dans un rapport constant k , décrit une courbe (C) dont la surface rectifiante est tangente à une sphère.

En faisant varier le nombre k , on obtient des courbes qui se correspondent par transformation de Combescure.

35. — Courbes sphériques.

Ce sont les courbes dont le plan normal passe par un point fixe. Elles sont définies par la condition

$$m = 0,$$

ou par la suivante :

$$\frac{d^2 p}{d\tau^2} + p = 0,$$

qui donne

$$p = R_s \cos(\tau + \varphi).$$

φ et R_s sont des constantes arbitraires.

L'équation (26) devient

$$n = -R_s \sin(\tau + \varphi),$$

et permet d'écrire les équations (29) sous la forme

$$(44) \quad \begin{cases} x = R_s[\lambda \cos(\tau + \varphi) - a' \sin(\tau + \varphi)], \\ y = R_s[\mu \cos(\tau + \varphi) - b' \sin(\tau + \varphi)], \\ z = R_s[\nu \cos(\tau + \varphi) - c' \sin(\tau + \varphi)]. \end{cases}$$

τ se calcule par une quadrature.

Supposons R_s positif. Le rayon OM , orienté vers l'extérieur de la sphère, a pour cosinus directeurs

$$\lambda \cos(\tau + \varphi) - a' \sin(\tau + \varphi), \quad \mu \cos(\tau + \varphi) - b' \sin(\tau + \varphi), \quad \nu \cos(\tau + \varphi) - c' \sin(\tau + \varphi).$$

La binormale fait avec le rayon un angle ayant même mesure que l'arc de l'indicatrice de torsion compté à partir d'une origine convenable⁽¹⁾.

Désignons par (C_1) et (C_2) les courbes

$$(C_1) \quad x_1 = \lambda \cos \tau - a' \sin \tau, \quad y_1 = \mu \cos \tau - b' \sin \tau, \quad z_1 = \nu \cos \tau - c' \sin \tau;$$

$$(C_2) \quad x_2 = \lambda \sin \tau + a' \cos \tau, \quad y_2 = \mu \sin \tau + b' \cos \tau, \quad z_2 = \nu \sin \tau + c' \cos \tau.$$

Les équations (44) peuvent aussi bien s'écrire

$$(44 \text{ bis}) \quad x = Mx_1 + Nx_2, \quad y = My_1 + Ny_2, \quad z = Mz_1 + Nz_2,$$

M et N étant des constantes arbitraires.

Soient M'_1 et M'_2 les points homologues de deux courbes homothétiques de (C_1) et (C_2) . Tout point qui partage $M'_1 M'_2$ dans un rapport constant décrit une courbe sphérique.

Ce résultat rappelle ceux que nous avons déjà obtenus dans d'autres paragraphes. Il s'explique aisément si l'on observe que le triangle rectangle $M_1 OM_2$ est invariable.

⁽¹⁾ E. VESSIOT, *Leçons de géométrie supérieure*, p. 115, 1919. On trouvera dans cet ouvrage une formule $\left(\theta' = \frac{1}{T}\right)$ qui peut conduire au même énoncé.

36. — Hélices.

Au paragraphe 29 nous avons établi la relation

$$\frac{R}{T} = \frac{d\tau}{d\sigma}$$

qui montre que les hélices s'obtiennent, en partant des équations (29), en supposant le cône directeur de révolution.

L'axe oz est arbitraire; on peut le diriger suivant l'axe du cône. Les cosinus (a, b, c) , (λ, μ, ν) , (a', b', c') , s'écrivent, comme au paragraphe 21,

$$\begin{aligned} a &= \sin \omega \sin w, & b &= \sin \omega \cos w, & c &= \cos \omega; \\ a' &= \cos w, & b' &= -\sin w, & c' &= 0; \\ \lambda &= \cos \omega \sin w, & \mu &= \cos \omega \cos w, & \nu &= -\sin \omega. \end{aligned}$$

On trouve aussi

$$d\sigma = \sin \omega dw, \quad d\tau = \cos \omega dw.$$

En portant ces expressions dans les équations (29), on obtient, pour les hélices :

$$(45) \quad \begin{cases} x = \frac{1}{\cos \omega} \left(\cos w \frac{dp}{dw} - \sin w \frac{d^2 p}{dw^2} \right), \\ y = -\frac{1}{\cos \omega} \left(\sin w \frac{dp}{dw} + \cos w \frac{d^2 p}{dw^2} \right), \\ z = -\frac{1}{\sin \omega} \left(p + \frac{d^2 p}{dw^2} \right). \end{cases}$$

La simplicité de ces équations, ainsi que l'absence de toute quadrature, semble les désigner spécialement en vue des applications.

Pour une hélice quelconque, la relation (30)

$$dv = dm - \frac{dp}{d\tau} d\tau$$

entraîne

$$(46) \quad v = m - p \frac{T}{R} + \text{cte.}$$

L'arc d'une hélice est une fonction linéaire des distances d'un point fixe au plan osculateur et au plan normal.

Réciproquement, si l'arc v est de la forme

$$v = m + bp + \text{cte},$$

on peut affirmer que la courbe (C) est une hélice.

En effet, la relation

$$dv = dm - \frac{dp}{d\tau} d\sigma,$$

comparée à la précédente, prouve que

$$\frac{d\tau}{d\sigma} = \frac{R}{T} = -\frac{1}{b}.$$

Les hélices circulaires s'obtiennent en imposant au plan rectifiant la condition de rester tangent à une sphère de centre O. Pour que cela se produise, il faut et il suffit que n soit constant. Désignons par R_s cette constante. La condition précédente équivaut à

$$p = R_s \tau + \text{cte}, \quad \text{ou,} \quad p = R_s w \cos \omega + \text{cte}.$$

La distance m , fournie par (27), s'écrit

$$m = -R_s w \frac{\cos^2 \omega}{\sin \omega} + \text{cte}.$$

et permet de donner la formule (30) sous la forme

$$dv = -\frac{R_s}{\sin \omega} dw$$

qui nous montre que p et m sont des fonctions linéaires de l'arc de l'hélice.

Réciproquement, supposons que

$$m = av + b, \quad p = \alpha v + \beta.$$

La relation (30)

$$dv = dm - dp \frac{d\sigma}{d\tau},$$

entraîne

$$\frac{R}{T} = \frac{d\tau}{d\sigma} = \frac{\alpha}{a-1}.$$

Toute courbe pour laquelle m et p sont des fonctions linéaires de l'arc est une hélice.

Mais cette hélice n'est pas nécessairement circulaire. En effet, la relation (21, § 24) s'écrit

$${}_2m = \frac{d(m^2 + n^2 + p^2)}{dv},$$

ou,

$$\frac{d(n^2)}{dv} = {}_2m - \frac{d(m^2 + p^2)}{dv},$$

ce qui prouve que n n'est constant que si l'on a simultanément

$$\alpha^2 = a(1 - a), \quad \alpha\beta = b(1 - a).$$

Ces conditions entraînent

$$\frac{\alpha}{a} = \frac{\beta}{b}$$

et montrent, en particulier, que le rapport $\frac{m}{p}$ doit être constant.

37. — Hélices sphériques.

Nous avons montré, au paragraphe 35, qu'il suffit de remplacer p par l'expression $R_s \cos(\tau + \varphi)$, pour obtenir les courbes tracées sur la sphère de rayon $|R_s|$. En particulier, cette substitution transforme les équations (45) en celles des hélices sphériques.

Pour $\varphi = 0$, on trouve

$$\begin{aligned} x &= R_s (\cos \omega \sin w \cos \tau - \cos w \sin \tau), & y &= R_s (\cos \omega \cos w \cos \tau + \sin w \sin \tau), \\ z &= -R_s \sin \omega \cos \tau. \end{aligned}$$

Aux diverses valeurs de φ correspondent des hélices qui se déduisent les unes des autres par rotation autour de oz .

Les deux premières équations peuvent s'écrire

$$(47) \quad \begin{cases} x = R_s \left[\cos^2 \frac{\omega}{2} \sin(w - \tau) - \sin^2 \frac{\omega}{2} \sin(w + \tau) \right], \\ y = R_s \left[\cos^2 \frac{\omega}{2} \cos(w - \tau) - \sin^2 \frac{\omega}{2} \cos(w + \tau) \right]. \end{cases}$$

En posant

$$(48) \quad R = R_s \cos \omega, \quad r = R_s \frac{1 - \cos \omega}{2}, \quad \tau = w \cos \omega, \quad \varphi = 2w \sin^2 \frac{\omega}{2}, \quad \theta = 2w \cos \omega,$$

ces équations deviennent celles de l'épicycloïde (1)

$$(49) \quad x = (R + r) \sin \varphi - r \sin(\theta + \varphi), \quad y = (R + r) \cos \varphi - r \cos(\theta + \varphi), \quad \left(\frac{\theta}{\varphi} = \frac{R}{r} \right).$$

Une hélice sphérique se projette sur un plan normal à l'axe du cône directeur suivant une épicycloïde(2).

Réciproquement, on peut, à l'aide des relations (48), transformer des équations de la forme (49) en équations de la forme (47) qui caractérisent les hélices sphériques.

Ainsi, nous retrouvons le théorème connu :

Toute épicycloïde engendrée par un cercle de rayon r , roulant sur un cercle fixe de rayon R , est la projection d'une hélice tracée sur la sphère de rayon $(R + 2r)$.

La relation (46), relative à une hélice quelconque, s'écrit à présent

$$v = -p \frac{T}{R} + \text{cte.}$$

L'arc d'une hélice sphérique est une fonction linéaire de la distance du centre de la sphère au plan osculateur.

Réciproquement, à l'aide des formules

$$dv = dm - n d\tau, \quad n = \frac{dp}{d\tau},$$

on n'aura aucune difficulté pour prouver que toute *courbe sphérique* dont l'arc est une fonction linéaire de p est une hélice.

(1) HENRI POINCARÉ, *Cinématique et mécanismes*, p. 65, 1899 (Carré et Naud).

(2) CLAIRAUT et BERNOULLI (*Mémoires présentés à l'Académie des Sciences en 1732*) ont montré qu'une hélice sphérique peut être considérée comme une épicycloïde engendrée par un point d'un grand cercle qui roule sans glisser sur un petit cercle de la même sphère. On peut donner une démonstration cinématique très simple de cette propriété.

38. — Hélices tracées sur une quadrique de révolution (*).

Soit

$$(50) \quad z^2 = a(x^2 + y^2) + b$$

l'équation d'une telle quadrique, autre que le parabolôïde

$$(50 \text{ bis}) \quad x^2 + y^2 - 2hz = 0$$

que nous étudierons à part.

Les équations d'une hélice placée sur la quadrique (50) seront déterminées quand on connaîtra p en fonction de w . En portant les expressions (45) de x , y , z (*) dans la relation (50), on trouve l'équation différentielle

$$(51) \quad \frac{1}{\sin^2 \omega} (p + p'')^2 = \frac{a}{\cos^2 \omega} (p'^2 + p''^2) + b,$$

dont les solutions vérifient aussi la nouvelle équation formée par dérivation :

$$(51 \text{ bis}) \quad (p' + p''') \{ (1 - a \operatorname{tg}^2 \omega) p'' + p \} = 0.$$

Les fonctions p définies par

$$p''' + p' = 0,$$

sont de la forme

$$p = A \cos(w + \varphi) + B$$

mais ne peuvent convenir, car elles donnent à x , y , z , des valeurs constantes.

Il reste donc à intégrer

$$(1 - a \operatorname{tg}^2 \omega) p'' + p = 0.$$

Plusieurs cas doivent être envisagés suivant le signe de $(1 - a \operatorname{tg}^2 \omega)$.

(*) PIRONDINI, *Journal de Crelle*, t. 118, p. 61, 1897.

E. CESÁRO, *Rendiconti di Napoli*, p. 73, 1903.

G. SCHEFFERS, *Leipziger Berichte*, p. 369, 1902.

(*) On veut que oz soit en même temps l'axe du cône directeur et l'axe de révolution.

Si $(1 - a \operatorname{tg}^2 \omega) > 0$, on se trouve en présence d'un ellipsoïde ou d'un hyperboloïde dont la demi-ouverture du cône asymptote est supérieure à ω . La solution est alors

$$p = A \cos(rw + \varphi), \quad \left(r = \frac{1}{\sqrt{1 - a \operatorname{tg}^2 \omega}} \right),$$

et ne peut convenir que si elle vérifie l'équation (51). On trouve la condition

$$A^2 = -\frac{b}{a} \cos^2 \omega (1 - a \operatorname{tg}^2 \omega),$$

qui prouve que φ est la seule constante arbitraire. A ne peut être calculé que si a et b sont de signe contraire; il faut que la quadrique soit un ellipsoïde ou un hyperboloïde à une seule nappe. *L'hyperboloïde à deux nappes et le cône de révolution ne contiennent aucune hélice si l'angle ω n'est pas suffisamment grand.*

Le cas $(1 - a \operatorname{tg}^2 \omega) < 0$ ne peut être envisagé que pour un hyperboloïde (ou un cône) dont la demi ouverture du cône asymptote est inférieure à ω .

On trouve

$$p = A e^{rw} + B e^{-rw}, \quad \left(r = \frac{1}{\sqrt{a \operatorname{tg}^2 \omega - 1}} \right),$$

et, en portant dans (51),

$$AB = \frac{b}{4a} \cos^2 \omega (a \operatorname{tg}^2 \omega - 1).$$

Une seule des deux constantes A et B est arbitraire. *De plus, ce calcul montre que les hélices peuvent être déterminées quelle que soit la nature de l'hyperboloïde si ω est suffisamment grand.*

Si la quadrique se réduit à un cône, l'une des constantes est nulle. La solution de l'équation différentielle se réduit à

$$p = A e^{rw}, \quad \left(r = \pm \frac{1}{\sqrt{a \operatorname{tg}^2 \omega - 1}} \right).$$

Il ne reste plus qu'à rechercher les hélices tracées sur le paraboloidé. Leur équation différentielle est

$$(52) \quad \frac{1}{\cos^2 \omega} (p'^2 + p''^2) + \frac{2h}{\sin \omega} (p + p'') = 0,$$

ou, en dérivant,

$$(52 \text{ bis}) \quad (p' + p''') \left(p'' + \frac{h \cos^2 \omega}{\sin \omega} \right) = 0.$$

Seule la solution

$$v = -\frac{h \cos^2 \omega}{2 \sin \omega} w^2 + \Lambda w + B$$

peut convenir. Il faut qu'elle vérifie la relation (52), ce qui a lieu pour

$$B = \frac{\sin \omega}{2 h \cos^2 \omega} \left\{ \left(\frac{h \cos^2 \omega}{\sin \omega} \right)^2 - \Lambda^2 \right\}.$$

En résumé, l'angle ω n'est soumis à des restrictions que sur l'hyperboloïde à deux nappes et le cône de révolution.

La variation de la constante arbitraire se traduit par une rotation autour de oz . Chaque valeur de ω détermine une hélice, à une rotation près.

On peut montrer que, réciproquement, aux fonctions

$$p = \Lambda \cos rw, \quad p = \Lambda e^{rw} + B e^{-rw}, \quad p = \Lambda e^{rw}, \quad p = \Lambda w^2 + Bw + C,$$

les équations (45) font correspondre des hélices tracées sur des quadriques.

Les résultats obtenus au paragraphe 37 par une autre méthode, se retrouvent en posant $a = -1$, $b = R_s^2$, dans les équations relatives à l'ellipsoïde.

Les hélices tracées sur l'ellipsoïde et l'hyperboloïde à une seule nappe⁽¹⁾ correspondent à une expression de p tout à fait analogue à celle qui détermine les hélices sphériques. Il semble que cela doive entraîner une similitude dans les propriétés.

En portant

$$p = \Lambda \cos rw$$

dans les équations (45), on trouve

$$\begin{cases} x = \frac{\Lambda r}{\cos \omega} (r \sin w \cos rw - \cos w \sin rw), \\ y = \frac{\Lambda r}{\cos \omega} (r \cos w \cos rw + \sin w \sin rw), \\ z = -\frac{\Lambda}{\sin \omega} (1 - r^2) \cos rw, \end{cases}$$

⁽¹⁾ L'hyperboloïde à une nappe contient deux sortes d'hélices. On considère seulement celles qui ont tous leurs points à distance finie.

ou,

$$\begin{cases} x = \frac{Ar}{2 \cos \omega} \{ (r+1) \sin(w-rw) - (1-r) \sin(w+rw) \}, \\ y = \frac{Ar}{2 \cos \omega} \{ (r+1) \cos(w-rw) - (1-r) \cos(w+rw) \}, \\ z = -\frac{A}{\sin \omega} (1-r^2) \cos rw. \end{cases}$$

Supposons que l'hélice soit tracée sur un ellipsoïde de révolution. Pour que cela se produise, il faut et il suffit que r soit inférieur à un. En posant, dans ces conditions,

$$R = \frac{Ar^2}{\cos \omega}, \quad \varphi = \frac{Ar(1-r)}{2 \cos \omega}, \quad \theta = 2rw, \quad \varphi = w(1-r),$$

on ramène les deux premières équations à la forme

$$x = (R + \varphi) \sin \varphi - \varphi \sin(\theta + \varphi), \quad y = (R + \varphi) \cos \varphi - \varphi \cos(\theta + \varphi), \quad \left(\frac{\theta}{\varphi} = \frac{R}{\varphi} \right).$$

On prouve ainsi que :

Toute hélice tracée sur l'ellipsoïde de révolution, et dont le cône directeur a même axe que cette quadrique, se projette sur un plan normal à cet axe suivant une épicycloïde.

Pour que l'hélice soit tracée sur un hyperboloïde à une nappe, il faut et il suffit que $r > 1$. Par suite, on se rend immédiatement compte que les équations précédentes sont celles d'une hypocycloïde.

Si une hélice tracée sur un hyperboloïde de révolution autour de oz possède un cône directeur d'axe oz et si tous ses points sont à distance finie, elle se projette sur le plan xoy suivant une hypocycloïde.

39. — Hélice cylindro-conique.

On désigne ainsi⁽¹⁾ toute hélice tracée sur un cône de révolution de même axe que le cône directeur. Nous avons montré au paragraphe précédent que ces hélices sont caractérisées par la relation

$$(53) \quad p = A e^{rw},$$

dans laquelle A et r sont deux constantes arbitraires.

⁽¹⁾ L. B., t. 1, p. 25.

Voir aussi les Mémoires indiqués à propos des hélices tracées sur une quadrique de révolution.

Les équations (45) prouvent aisément que la variation de A peut indistinctement s'interpréter comme une homothétie de centre O ou une rotation autour de oz .

Les diverses hélices cylindro-coniques (C) déduites de l'une d'elles par rotation autour de oz sont homothétiques par rapport au sommet du cône qui les contient.

Toutes sont donc égales à celle que l'on obtient en posant

$$p = e^{rw}.$$

Les équations (45) s'écrivent

$$\begin{cases} x = \frac{r}{\cos \omega} (\cos w - r \sin w) e^{rw}, \\ y = -\frac{r}{\cos \omega} (\sin w + r \cos w) e^{rw}, \\ z = -\frac{1}{\sin \omega} (1 + r^2) e^{rw}, \end{cases}$$

et montrent que :

Toute hélice cylindro-conique est tracée sur un cylindre dont la section droite est une spirale logarithmique.

Ces mêmes équations permettent d'établir que l'hélice coupe sous un angle constant les génératrices du cône de révolution qui la contient. C'est une propriété connue que nous n'établirons pas. *L'hélice cylindro-conique s'étale suivant une spirale logarithmique, quand on développe le cône (*)*.

Les formules (26), (27) et (30) du paragraphe 28 deviennent

$$n = \frac{r}{\cos \omega} e^{rw}, \quad m = -\cotg \omega \left(1 + \frac{r^2}{\cos^2 \omega} \right) e^{rw}, \quad dv = -\frac{r(1 + r^2)}{\sin \omega \cos \omega} e^{rw} dw,$$

et mettent en évidence la propriété :

Les distances m , n , p , sont proportionnelles à l'arc v , compté à partir du point asymptotique de l'hélice.

Réciproquement, si

$$m = Mv, \quad n = Nv, \quad p = Pv,$$

la courbe correspondante est une hélice cylindro-conique. En effet, le raisonnement

(*) En réalité on obtient, dans un même angle α , des arcs de spirale logarithmique homothétiques entre eux. Il faudrait, pour réaliser la spirale complète, faire tourner les arcs 1, 2, 3, ..., d'angles respectivement égaux à α , 2α , 3α , ..., autour du point asymptotique.

de la fin du paragraphe (36) montre que la courbe est une hélice. De plus, la relation

$$n = \frac{dp}{d\tau},$$

entraîne

$$v = \Lambda e^{\frac{N}{P}\tau}, \quad (\Lambda = \text{cte}),$$

ou,

$$v = \Lambda_1 e^{\frac{N}{P} \cos \omega \cdot m}, \quad (\Lambda_1 = \text{cte}).$$

Il est donc possible d'attribuer à p l'expression de la forme (53) :

$$p = \Lambda_1 P e^{\frac{N}{P} \cos \omega \cdot m}.$$

C'est la relation qui caractérise les hélices cylindro-coniques.

Il faut observer qu'il n'est pas permis d'attribuer à M , N , P , des valeurs arbitraires. La relation (21, § 24), étendue aux courbes, donne

$$M^2 + N^2 + P^2 = M.$$

Si cette condition est satisfaite, les équations

$$M = \frac{r^2 + \cos^2 \omega}{1 + r^2}, \quad N = -\frac{r \sin \omega}{1 + r^2}, \quad P = -\frac{\sin \omega \cos \omega}{1 + r^2},$$

déterminent ω , r , et, par suite, l'hélice elle-même.

CHAPITRE III

Lignes asymptotiques des surfaces réglées.

On sait que cette question dépend, en général, d'une équation de Riccati. De nombreux cas particuliers ont été traités. Signalons surtout le résultat de M. Émile Picard qui ramène à une seule quadrature la recherche des asymptotiques de toute surface réglée dont les génératrices appartiennent à un complexe linéaire (*Traité d'Analyse*, t. I, seconde édition, 1901, p. 440).

Diverses formules ont été données, dans le même ordre d'idées, par L. Raffy (*Applications géométriques de l'Analyse*, 1897, p. 156).

M. A. Buhl en revenant, dans le *Journal de Mathématiques pures et appliquées* (9^e série, t. VIII, 1929, p. 45), sur les Thèses de Doctorat de Paul Appell et de M. Émile Picard, à l'occasion du Jubilé scientifique de ces deux illustres géomètres, est aussi revenu, très naturellement, au même sujet.

40. — Équation des lignes asymptotiques ⁽¹⁾.

Dans ce qui suit, nous poserons :

$$a' = \frac{da}{d\sigma}, \quad a'' = \frac{da'}{d\sigma}, \quad x' = \frac{dx}{d\sigma}, \quad x'' = \frac{dx'}{d\sigma}, \quad \dots$$

Des équations de la surface

$$X = x + au, \quad Y = y + bu, \quad Z = z + cu,$$

on déduit

$$dX = (x' + a'u) d\sigma + a du, \quad d^2X = (x'' + a''u) d\sigma^2 + 2a' du d\sigma + (x' + a'u) d^2\sigma, \quad \dots,$$

⁽¹⁾ E. ANGLADE, *Ligne de striction et paramètre de distribution* (Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 1931). On retrouvera dans cet article les divers résultats exposés dans le chapitre III.

Les lignes asymptotiques sont définies par

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial u} & \frac{\partial Y}{\partial u} & \frac{\partial Z}{\partial u} \\ \frac{\partial X}{\partial \sigma} & \frac{\partial Y}{\partial \sigma} & \frac{\partial Z}{\partial \sigma} \\ d^2 X & d^2 Y & d^2 Z \end{vmatrix} = 0,$$

équation différentielle que l'on peut écrire

$$(1) \quad 2 \begin{vmatrix} a \\ x' \\ a' \end{vmatrix} \frac{du}{d\sigma} + \begin{vmatrix} a \\ x' \\ x'' \end{vmatrix} + u \left\{ \begin{vmatrix} a \\ a' \\ x'' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a \\ x' \\ a'' \end{vmatrix} \right\} + u^2 \begin{vmatrix} a \\ a' \\ a'' \end{vmatrix} = 0,$$

en éliminant les solutions évidentes que sont les génératrices.

En remplaçant x, y, z , par les expressions (28 bis) trouvées au paragraphe 15, on obtient

$$(2) \quad 2K \frac{du}{d\sigma} + K^2 \left(\cotg \theta - \frac{d\tau}{d\sigma} \right) - u \frac{dK}{d\sigma} - u^2 \frac{d\tau}{d\sigma} = 0.$$

Cette équation de Riccati, de forme purement géométrique, rappelle celle que donne M. Vessiot dans ses *Leçons de Géométrie supérieure* (p. 116, 1919), en rapportant la surface réglée à une trajectoire orthogonale des génératrices.

On en déduit, en particulier, le théorème de Paul Serret⁽¹⁾ :

Le rapport anharmonique des points où quatre asymptotiques coupent une génératrice variable est constant.

41. — Lignes asymptotiques des surfaces à plan directeur.

L'équation différentielle (2) se réduit à

$$2K \frac{du}{d\sigma} + K^2 \cotg \theta - u \frac{dK}{d\sigma} = 0,$$

puisque $d\tau = 0$. Elle admet la solution générale

$$(3) \quad 2u + \sqrt{K} \int \sqrt{K} \cotg \theta d\sigma = 0.$$

(1) PAUL SERRET, *Théorie nouvelle géométrie et mécanique des courbes à double courbure*, p. 165, 1860.

La recherche des asymptotiques d'une surface à plan directeur ne dépend que d'une quadrature.

Ce résultat est bien en accord avec le théorème énoncé par M. Émile Picard dans sa thèse⁽¹⁾.

La formule (3) montre que deux asymptotiques non rectilignes (P) et (P₀) déterminent sur une génératrice variable (G) un segment dont le carré est proportionnel au paramètre de distribution. En effet, l'expression $\frac{(u - u_0)^2}{K}$ est une constante⁽²⁾.

Pour un choix convenable des fonctions K et θ , la quadrature (3) peut s'exprimer :

1°. — Posons, par exemple,

$$K = -\frac{1}{\cos^2 \sigma}, \quad \cotg \theta = -m \cos \sigma, \quad (m = \text{cte}).$$

Les équations (34, § 17) deviennent

$$X = u \cos \sigma + m \sigma, \quad Y = u \sin \sigma - m \log(\cos \sigma), \quad Z = \lg \sigma,$$

et les lignes asymptotiques sont définies par

$$2u + \frac{m}{\cos \sigma}(\sigma + A) = 0, \quad (A = \text{cte}).$$

2°. — Si l'on prend

$$K = -\sigma^2, \quad \cotg \theta = -\frac{m}{\sigma},$$

on trouve la surface

$$X = u \cos \sigma + m(\sigma \sin \sigma + \cos \sigma), \quad Y = u \sin \sigma + m(\sin \sigma - \sigma \cos \sigma), \quad Z = \frac{\sigma^3}{3},$$

qui admet les lignes asymptotiques

$$2u + m\sigma(\sigma + A) = 0.$$

3°. — Enfin, les relations

$$K = -\cos^2 \sigma, \quad \cotg \theta = -\frac{m}{\cos^2 \sigma},$$

⁽¹⁾ E. PICARD, *Application de la Théorie des Complexes linéaires à l'étude des surfaces et des courbes gauches* (Annales de l'École Normale, 2^e série, t. 6, p. 329, 1877).

⁽²⁾ PAUL SERRET, *Théorie nouvelle géométrique et mécanique des courbes à double courbure*, p. 167, 1860.

entraînent

$$\begin{cases} X = u \cos \sigma + m \sin \sigma, & Y = u \sin \sigma - m \cos \sigma, & Z = \frac{1}{2} \left(\sigma + \frac{\sin 2\sigma}{2} \right); \\ 2u + m \cos \sigma \cdot \left[\log \operatorname{tg} \left(\frac{\sigma}{2} + \frac{\pi}{4} \right) + \Lambda \right] = 0. \end{cases}$$

Pour cette surface, le produit $K \cotg \theta$ est constant. La ligne de striction est tracée sur un cylindre de révolution⁽¹⁾.

Les exemples pourraient être multipliés.

42. — Cas où la surface à plan directeur admet un paramètre de distribution constant.

La solution (3) s'écrit

$$(4) \quad 2u + K \int \cotg \theta \, d\sigma = 0.$$

Elle est de la forme

$$u = f(\sigma) + \Lambda.$$

Par suite⁽²⁾ :

Les lignes asymptotiques des surfaces à plan directeur dont le paramètre de distribution est constant découpent des segments égaux sur les génératrices.

Réciproquement, pour que cette propriété soit vérifiée, il faut que

$$u = f(\sigma) + \Lambda$$

soit une solution de (2) quelle que soit la constante Λ . Cela ne peut se produire que si les coefficients de u^* et de u sont nuls. Ces deux conditions

$$\frac{d\tau}{d\sigma} = 0, \quad \frac{d \log K}{d\sigma} = 0,$$

expriment que les surfaces étudiées dans ce paragraphe sont les seules qui possèdent la propriété envisagée.

⁽¹⁾ Voir au paragraphe 17.

⁽²⁾ M. E. VESSIOT propose, dans ses *Leçons de Géométrie supérieure*, un exercice sur cette question.

Citons, par exemple, les *hélicoïdes à plan directeur* que l'on trouve en posant

$$\cotg \theta = \text{cte},$$

et, en particulier, l'*hélicoïde minimum* $\left(\theta = \frac{\pi}{2}\right)$. La quadrature qui figure dans (4) s'explique. On obtient

$$2u + k\sigma \cotg \theta + \Lambda = 0.$$

Citons aussi la surface

$$\cotg \theta = \sigma$$

d'équations

$$X = u \cos \sigma + k(\cos \sigma + \sigma \sin \sigma), \quad Y = u \sin \sigma + k(\sin \sigma - \sigma \cos \sigma), \quad Z = -k\sigma,$$

et dont les lignes asymptotiques sont définies par

$$4u + k\sigma^2 + \Lambda = 0.$$

Comme au paragraphe précédent, on pourrait donner de très nombreux exemples.

43. — Lignes asymptotiques des surfaces à directrice rectiligne.

Ces surfaces sont définies (§ 18) par

$$X = a(u + m), \quad Y = b(u + m), \quad Z = c(u + m) - \int \frac{K}{v} d\sigma,$$

à condition de désigner par m l'expression

$$m = \frac{K}{v} \frac{dc}{d\sigma}.$$

En observant que

$$u = -m$$

est une solution de l'équation différentielle (2), nous sommes amenés à poser

$$u = \frac{1}{p} - m$$

pour obtenir l'équation linéaire

$$2 \frac{dp}{d\sigma} + p \left(\frac{d \log K}{d\sigma} - \frac{2m}{K} \frac{d\tau}{d\sigma} \right) + \frac{1}{K} \frac{d\tau}{d\sigma} = 0,$$

que la relation

$$\frac{d\tau}{d\sigma} = \frac{dv}{dc}$$

permet d'écrire

$$2 \frac{dp}{d\sigma} + p \frac{d}{d\sigma} \left(\log \frac{K}{v^2} \right) + \frac{1}{K} \frac{d\tau}{d\sigma} = 0.$$

Elle admet la solution générale

$$(5) \quad 2p\sqrt{K} + v \int \frac{d\tau}{v\sqrt{K}} = 0.$$

La recherche des lignes asymptotiques d'une surface à directrice rectiligne ne dépend que d'une quadrature.

C'est encore une vérification du théorème de M. Picard.

Toutes les fois que le paramètre de distribution sera constant, (5) se transformera en

$$2pK + v \int \frac{d\tau}{v} = 0.$$

44. — Conséquences.

Aucune quadrature ne subsiste dans le cas où la surface est un conoïde droit ou oblique. C'est une conséquence de la relation

$$d\tau = 0.$$

L'intégrale générale (5) prend la forme géométrique extrêmement simple

$$\frac{1}{p} = \Lambda \sqrt{K}.$$

Désignons par N un point du conoïde et par N' le point où la génératrice issue de N rencontre la directrice. Lorsque N décrit une asymptotique, la distance NN' reste proportionnelle à la racine carrée du paramètre de distribution.

Plus généralement, considérons deux asymptotiques (P) et (P₀) d'une surface à directrice rectiligne et supposons que les valeurs correspondantes de la constante arbitraire qui intervient dans (5) soient A et A₀. Nous voyons immédiatement que

$$2(p - p_0)\sqrt{K} + v(\lambda - \lambda_0) = 0.$$

Le rapport $\frac{K(p - p_0)^2}{v^2}$ est donc invariable quand la génératrice décrit la surface réglée.

Dans cette expression, v représente le cosinus de l'angle que fait la directrice avec la normale au plan asymptote.

Les conoïdes ne sont pas les seules surfaces pour lesquelles la quadrature (5) disparaît⁽¹⁾. Pour le montrer, remplaçons le paramètre de distribution par l'expression

$$K = \frac{B}{x^2 v^2 c'^2}, \quad (B = \text{cte}),$$

dans laquelle x représente une fonction de v . Les lignes asymptotiques sont définies par la relation de forme plus simple

$$2pB + xv^2 c' \int x dv = 0,$$

qui s'explicite si x est bien choisi⁽²⁾.

Par exemple, pour $x = -\frac{1}{v^2}$, on trouve

$$\begin{cases} K = B \frac{v^2}{c'^2}, \\ 2pB = c' \left(\frac{1}{v} + \lambda \right), \end{cases} \quad (A = \text{cte}).$$

La quadrature (5) s'explicite pour toute surface à directrice rectiligne dont le paramètre de distribution est proportionnel à $\frac{v^2}{c'^2}$.

On obtient ainsi une catégorie de surfaces extrêmement étendue, puisque le cône directeur reste arbitraire.

(¹) Voir sur ce sujet l'article de M. A. Buhl (p. 50) déjà signalé au paragraphe 18.

(²) D'une façon générale, il suffit de prendre $x = \frac{dF(v)}{dv}$.

45. — Surfaces dont la ligne de striction est une asymptotique.

$u = 0$ doit être une solution de l'équation (2). Pour que cela se produise, il faut et il suffit que

$$\frac{d\tau}{d\sigma} = \cotg \theta.$$

Nous retrouvons la condition (26) du paragraphe 13.

Le terme indépendant de u disparaît dans l'équation de Riccati qui se transforme en

$$2 \frac{du}{d\sigma} - u \frac{d \log K}{d\sigma} - \frac{u^2}{K} \frac{d\tau}{d\sigma} = 0.$$

C'est une équation de Bernouilli qui admet l'intégrale générale

$$(6) \quad 2\sqrt{K} + u \int \frac{d\tau}{\sqrt{K}} = 0.$$

La recherche des lignes asymptotiques ne dépend encore que d'une quadrature.

Si le rayon de torsion de la ligne de striction est constant, la solution précédente s'écrit ⁽¹⁾

$$2K + u(\tau + \Lambda) = 0.$$

Mais, le calcul de τ exige toujours une quadrature.

Enfin, observons que si Λ et Λ_0 sont les constantes arbitraires qui déterminent les asymptotiques (P) et (P₀), la relation (6) permet d'écrire

$$2\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u_0}\right)\sqrt{K} + \Lambda - \Lambda_0 = 0.$$

On en déduit la propriété :

L'expression $K\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u_0}\right)^2$ est invariable quand la génératrice décrit une surface dont la ligne de striction est une asymptotique.

En particulier, si K est constant, l'expression $\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u_0}\right)$ reste invariable. C'est ce qui se produit pour les *hélicoïdes réglés* contenant leur axe.

⁽¹⁾ K est constant en même temps que T (§ 13).

46. — Surface des binormales d'une courbe à torsion constante.

Lorsque le paramètre de distribution est constant, l'équation (2) se réduit à

$$(7) \quad 2K \frac{du}{d\sigma} + K^2 \left(\cotg \theta - \frac{d\tau}{d\sigma} \right) - u^2 \frac{d\tau}{d\sigma} = 0.$$

Pour l'une des surfaces étudiées, K est égal au rayon de torsion T (§ 12) et l'angle θ est droit. L'équation (7) peut donc s'écrire

$$2T \frac{du}{d\tau} = u^2 + T^2,$$

et est vérifiée par

$$u = T \operatorname{tg} \frac{\tau + \Lambda}{2}.$$

Il ne subsiste qu'une quadrature qui sert au calcul de τ .

L'équation de Riccati est devenue beaucoup plus simple en raison de la constance du paramètre K et de la valeur particulière attribuée à θ .

47. — Lignes asymptotiques des surfaces (R).

Nous appellerons *surfaces* (R) celles dont les paramètres K et K' sont *simultanément* constants.

En tenant compte de la relation

$$\frac{K}{K'} = \operatorname{tg} \theta \frac{d\tau}{d\sigma}$$

établie au paragraphe 9, on trouve que ces surfaces sont caractérisées par les équations

$$\begin{cases} X = au + K' \int a d\tau - K \int \lambda d\sigma, \\ Y = bu + K' \int b d\tau - K \int \mu d\sigma, \\ Z = cu + K' \int c d\tau - K \int \nu d\sigma. \end{cases}$$

Considérons les courbes à torsion constante

$$(C_1) \quad x_1 = N \int a d\tau, \quad y_1 = N \int b d\tau, \quad z_1 = N \int c d\tau, \quad (N = \text{cte}).$$

$$(C_2) \quad x_2 = P \int \lambda d\sigma, \quad y_2 = P \int \mu d\sigma, \quad z_2 = P \int \nu d\sigma, \quad (P = \text{cte}),$$

dont les points homologues sont représentés par M_1 et M_2 .

Les surfaces (R) s'obtiennent en partant des courbes à torsion constante (C_1) et (C_2) dont les cônes directeurs sont supplémentaires. Il suffit de mener, par le point M qui divise M_1M_2 dans un rapport constant, une parallèle à la tangente à l'une de ces courbes. Le lieu géométrique de M est la ligne de striction de la surface ainsi déterminée.

Les *hélicoïdes réglés* sont les surfaces (R) qui admettent un cône directeur de révolution. Dans ce cas, les courbes (C_1) et (C_2) sont des hélices circulaires. La génération précédente est encore applicable.

L'équation différentielle (7) peut s'écrire

$$2K \frac{du}{d\sigma} + K(K' - K) \frac{d\tau}{d\sigma} - u^2 \frac{d\tau}{d\sigma} = 0,$$

ou,

$$2K \frac{du}{d\tau} = u^2 + K(K - K').$$

On sait en calculer l'intégrale. u s'exprime simplement en fonction de τ ⁽¹⁾.
Par suite :

La détermination des asymptotiques d'une surface (R) se ramène à une seule quadrature.

Cette quadrature, qui intervient dans le calcul de τ , s'explicite si la surface est un hélicoïde. C'est bien ce que nous avons déjà trouvé dans quelques cas particuliers.

⁽¹⁾ Il faut envisager deux cas suivant le signe de $K(K - K')$.

CHAPITRE IV

Déformation des surfaces réglées.

La déformation des surfaces gauches a été étudiée d'une manière très complète. La plupart des résultats obtenus sur ce sujet sont exposés dans les ouvrages de Bianchi et dans ceux de MM. Darboux et Gambier⁽¹⁾. Nous en reprendrons l'étude, par la méthode que nous avons appliquée jusqu'ici, en nous bornant au cas de surfaces réglées applicables avec correspondance des génératrices.

Nous utiliserons, sans démonstration préalable, les résultats établis par E. Elia Levi⁽²⁾. Ce géomètre a montré que deux surfaces isométriques à courbure totale négative sont toujours applicables; mais, ainsi que l'indique M. Gambier (*Mémorial*, f. XXXI, p. 49), il faut supposer réalisée une continuité dans la distribution des plans tangents.

48. — Élément linéaire.

Les équations (28 bis, § 15) donnent immédiatement

$$(1) \quad dS^2 = du^2 + 2K \cotg \theta \, du \, d\sigma + \left(\frac{K^2}{\sin^2 \theta} + u^2 \right) d\sigma^2.$$

Cette forme quadratique peut encore s'écrire

$$(2) \quad dS^2 = du^2 + 2 \cos \theta \, du \, dv + \left(1 + \frac{u^2 \sin^2 \theta}{K^2} \right) dv^2,$$

à condition de remplacer $d\sigma$ par l'expression équivalente $\frac{\sin \theta}{K} dv$.

⁽¹⁾ L. B., t. I, p. 377.

G. DARBOUX. *Théorie générale des surfaces*, t. 3, p. 293, 1894.

B. GAMBIER. *Applicabilité des surfaces étudiée au point de vue fini*, *Mémorial des Sciences mathématiques*, f. XXXI, 1928.

B. GAMBIER. *Déformation des surfaces étudiées du point de vue infinitésimal*, *Mémorial*, fasc. 26, 1927.

⁽²⁾ E. E. LEVI. *Reale Accademia delle Scienze di Torino*, 1907-1908.

Si la surface

$$X_i = x_i + a u_i, \quad Y_i = y_i + b u_i, \quad Z = z_i + c u_i,$$

n'est pas rapportée à sa ligne de striction, il suffira de poser (§ 2),

$$u_i = u - \sum \frac{da}{d\tau} \frac{dx_i}{d\sigma},$$

pour obtenir les équations

$$X = \left(x_i - a \sum \frac{da}{d\sigma} \frac{dx_i}{d\sigma} \right) + a u, \quad Y = \left(y_i - b \sum \frac{da}{d\sigma} \frac{dx_i}{d\sigma} \right) + b u, \quad Z = \dots,$$

qui conduisent à la forme quadratique (2).

49. — Conditions pour que deux surfaces gauches soient applicables.

Soient (S) et (S_i) deux surfaces applicables. L'élément linéaire de (S) est donné par la formule (2).

La surface (S_i), rapportée à la directrice (C_i) qui correspond à la ligne de striction de (S), a pour équations

$$X = x_i + a_i u, \quad Y_i = y_i + b_i u, \quad Z_i = z_i + c_i u.$$

Son élément linéaire

$$dS_i^2 = du^2 + 2 \cos \theta_i du dv + \left[1 + 2u \frac{d\sigma_i}{dv} \left(\sum \frac{da_i}{d\sigma_i} \frac{dx_i}{dv} \right) + u^2 \left(\frac{d\sigma_i}{dv} \right)^2 \right] dv^2$$

doit être identique à (2).

Par suite,

$$\sum \frac{da_i}{d\sigma} \frac{dx_i}{dv} = 0.$$

La courbe (C_i) vérifie la condition (2, § 2). Les lignes de striction se correspondent dans la déformation⁽¹⁾.

D'autre part, il faut que

$$d\sigma_i = \varepsilon d\sigma, \quad (\varepsilon = \pm 1).$$

(1) L. B., t. I, p. 387.

Lorsque les génératrices (G) et (G_1) engendrent les surfaces (S) et (S_1) , les parallèles qu'on leur mène par l'origine décrivent des arcs égaux sur les courbes (Σ) et (Σ_1) .

Il est possible, par une déformation convenable, de placer le cône directeur de (S_1) sur celui de (S) , de manière à superposer les génératrices homologues.

La relation $d\sigma_1 = \varepsilon d\sigma$ peut être interprétée différemment. Elle exprime que l'angle de deux génératrices infiniment voisines se conserve au cours d'une déformation.

Enfin, la condition

$$\cos \theta_1 = \cos \theta,$$

équivalente à

$$\theta_1 = \varepsilon' \theta, \quad (\varepsilon' = \pm 1),$$

traduit une propriété que l'on pouvait prévoir *a priori*. En effet, en déformant une surface, l'angle de deux courbes ne change pas.

Tous ces résultats, rapprochés de la formule (6, § 5), montrent que les paramètres de distribution K et K_1 sont égaux ou opposés ($K_1 = \varepsilon \varepsilon' K$)⁽¹⁾.

Réciproquement, considérons deux surfaces (S) et (S_1) telles que les équations

$$K_1(\sigma_1) = \varepsilon K(\sigma), \quad \theta_1(\sigma_1) = \varepsilon' \theta(\sigma),$$

soient satisfaites pour

$$\sigma_1 = \varepsilon \varepsilon' \sigma^{(2)}.$$

Les deux surfaces ont le même dS^2 et sont applicables.

Les sens positifs sur (Σ) et sur (Σ_1) sont arbitraires. Sans rien changer à la généralité du problème, nous les supposons tels que l'on ait

$$\varepsilon \varepsilon' = +1.$$

Dans ces conditions, on peut énoncer :

Pour que deux surfaces soient applicables, il faut et il suffit que les équations

$$(3) \quad \theta_1(\sigma_1) = \varepsilon \theta(\sigma), \quad K_1(\sigma_1) = \varepsilon K(\sigma),$$

soient une conséquence de l'égalité $\sigma = \sigma_1$, les arcs σ et σ_1 étant comptés à partir de deux points homologues de (Σ) et (Σ_1) .

⁽¹⁾ L. B., t. 1, p. 391.

⁽²⁾ On prendra pour origines, sur (Σ) et (Σ_1) , deux points déterminés en partant de deux génératrices homologues de (S) et (S_1) .

Si θ , K , θ_1 , K_1 , sont constants et s'ils vérifient les équations (3), les surfaces (S) et (S₁) sont applicables; mais les origines des arcs σ et σ_1 sont arbitraires. Cela signifie qu'il est possible d'appliquer (S) sur (S₁) d'une infinité de façons différentes.

On peut donc énoncer la proposition :

Si deux surfaces (S) et (S₁) sont applicables, θ et K étant constants, on peut les superposer d'une infinité de façons différentes en faisant glisser l'une des lignes de striction sur l'autre.

En particulier, une surface (S) de la catégorie précédente glisse sur elle-même d'un mouvement continu⁽¹⁾ si cela se produit pour la courbe de Bertrand qui sert de ligne de striction (§ 12).

50. — Recherche des surfaces gauches applicables sur une surface donnée.

Soit une surface gauche (S) dont on a exprimé le paramètre de distribution K et l'angle θ en fonction de σ . Soit un cône arbitraire (D) dont nous représenterons les cosinus directeurs de la génératrice par $a(\sigma)$, $b(\sigma)$, $c(\sigma)$.

Les résultats établis au paragraphe précédent prouvent que les surfaces gauches applicables sur la surface (S), sont définies par les équations⁽²⁾

$$(4) \quad \begin{cases} X = au + \int K(a \cotg \theta - \varepsilon \lambda) d\sigma, \\ Y = bu + \int K(b \cotg \theta - \varepsilon \mu) d\sigma, \\ Z = cu + \int K(c \cotg \theta - \varepsilon \nu) d\sigma, \end{cases}$$

que l'on obtient en remplaçant, dans (28 bis, § 15), K par εK et θ par $\varepsilon \theta$.

On obtiendra toutes les surfaces cherchées en déformant le cône directeur (D), en déplaçant l'origine des arcs σ et aussi en changeant le sens positif sur la courbe (Σ). Par suite :

Il existe une infinité de surfaces applicables sur (S) qui admettent le même cône directeur que (S).

Elles sont distinctes, si le cône directeur est quelconque. Mais, si le cône directeur est un cône de révolution (ou se réduit à un plan), un changement d'origine sur (Σ) équivaut à un déplacement. Les diverses surfaces ($\varepsilon = +1$) et ($\varepsilon = -1$) sont respectivement égales (§ 20).

⁽¹⁾ On peut appliquer à cet exemple de déformation continue, la théorie générale que l'on trouvera dans L. B., t. I, p. 343.

⁽²⁾ Comme dans la méthode suivie par MINDING (*Ueber die Biegung gewisser Flächen*, Journal de Crelle, t. 18, 1838), toute surface applicable sur (S) est définie en partant de son cône directeur.

Il n'existe que deux surfaces à plan directeur applicables sur une surface donnée. Elles sont symétriques par rapport à ce plan directeur.

En posant $\varepsilon = +1$, puis $\varepsilon = -1$, dans les équations (4), on trouve les surfaces

$$(S_1) \quad \begin{cases} X = au + \int K(a \cotg \theta - \lambda) d\sigma, \\ Y = bu + \int K(b \cotg \theta - \mu) d\sigma, \\ Z = cu + \int K(c \cotg \theta - \nu) d\sigma, \end{cases}$$

$$(S_{-1}) \quad \begin{cases} X = au + \int K(a \cotg \theta + \lambda) d\sigma, \\ Y = bu + \int K(b \cotg \theta + \mu) d\sigma, \\ Z = cu + \int K(c \cotg \theta + \nu) d\sigma, \end{cases}$$

qui sont applicables et dont les génératrices homologues sont parallèles⁽¹⁾. *Ce sont les génératrices parallèles qui coïncident après la déformation.*

(S) n'étant pas applicable sur une quadrique, les équations (4) donnent toutes les surfaces gauches applicables sur (S)⁽²⁾.

Supposons à présent que (S) soit applicable sur la surface du second degré (Q) dont nous désignerons les systèmes de droites par (D₁) et (D₂). Pour obtenir toutes les surfaces gauches (S₁) déduites de (S) par déformation, on appliquera les formules (4) à la quadrique (Q) en parlant soit du système (D₁), soit du système (D₂). Les génératrices de (S) et (S₁) ne se correspondent que si ces deux surfaces sont déduites du même système de droites de (Q).

On peut trouver, par la méthode que nous venons de signaler, toutes les surfaces réglées applicables sur une quadrique.

51. — Déformation continue.

Dans une déformation continue, le paramètre k et l'angle θ *conservent leur signe*. C'est une conséquence des résultats établis au paragraphe 49.

Réciproquement, si K et θ ont la même expression en fonction de σ pour deux

⁽¹⁾ E. BELTRAMI. *Sulla flessione delle superficie rigate*, Annali di Matematica pura ed applicata, pubblicati da B. Tortolini, p. 105, 1865.

⁽²⁾ O. BONNET. *Mémoire sur les surfaces applicables*, Journal de l'École Polytechnique, XLIII^e cahier, p. 44, 1867.

surfaces (S_1) et (S_2) , on peut passer de l'une à l'autre par une déformation *réglée* continue.

Soient (D_1) et (D_2) les cônes directeurs des surfaces (S_1) et (S_2) . Nous désignons par (g_1^0) et (g_2^0) les génératrices de (D_1) et (D_2) qui correspondent à $\sigma = \sigma_0$.

On peut imaginer un cône (D_m) dont la forme et la position dépendent d'un paramètre m . Supposons que pour $m = m_1$ et $m = m_2$ ce cône occupe les positions (D_1) et (D_2) et que la génératrice $\sigma = \sigma_0$ soit celle qui se superpose à (g_1^0) et à (g_2^0) . Supposons, d'autre part, que les dérivées

$$\frac{\partial a}{\partial \sigma}, \frac{\partial b}{\partial \sigma}, \frac{\partial c}{\partial \sigma}, \frac{\partial a}{\partial m}, \frac{\partial b}{\partial m}, \frac{\partial c}{\partial m}, \frac{\partial^2 a}{\partial \sigma \partial m}, \frac{\partial^2 b}{\partial \sigma \partial m}, \frac{\partial^2 c}{\partial \sigma \partial m},$$

existent et prennent des valeurs *finies* dans tout le domaine décrit par le point (σ, m) .

La relation symbolique

$$(\lambda, \mu, \nu) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ \frac{\partial a}{\partial \sigma} & \frac{\partial b}{\partial \sigma} & \frac{\partial c}{\partial \sigma} \end{vmatrix}$$

entraîne

$$\left(\frac{\partial \lambda}{\partial m}, \frac{\partial \mu}{\partial m}, \frac{\partial \nu}{\partial m} \right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial a}{\partial m} & \frac{\partial b}{\partial m} & \frac{\partial c}{\partial m} \\ \frac{\partial a}{\partial \sigma} & \frac{\partial b}{\partial \sigma} & \frac{\partial c}{\partial \sigma} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ \frac{\partial^2 a}{\partial \sigma \partial m} & \frac{\partial^2 b}{\partial \sigma \partial m} & \frac{\partial^2 c}{\partial \sigma \partial m} \end{vmatrix}$$

et prouve que les dérivées $\frac{\partial \lambda}{\partial m}, \frac{\partial \mu}{\partial m}, \frac{\partial \nu}{\partial m}$ *existent* et *restent finies* dans le même domaine.

Soient (S_m) et $(S_{m+\delta m})$ les surfaces définies par (4) et dont les cônes directeurs sont (D_m) et $(D_{m+\delta m})$. En déplaçant (S_m) par translation, on peut faire coïncider les points homologues $\sigma = \sigma_0$ des lignes de striction (C_m) et $(C_{m+\delta m})$. Dans ces conditions, on obtient

$$\begin{cases} x_{m+\delta m} - x_m = \delta m \int_{\sigma_0}^{\sigma} K \left\{ \left(\frac{\partial a}{\partial m} + \varepsilon_a \right) \cot g \theta - \left(\frac{\partial \lambda}{\partial m} + \varepsilon_\lambda \right) \right\} d\sigma, \\ y_{m+\delta m} - y_m = \delta m \int_{\sigma_0}^{\sigma} K \left\{ \left(\frac{\partial b}{\partial m} + \varepsilon_b \right) \cot g \theta - \left(\frac{\partial \mu}{\partial m} + \varepsilon_\mu \right) \right\} d\sigma, \\ z_{m+\delta m} - z_m = \delta m \int_{\sigma_0}^{\sigma} K \left\{ \left(\frac{\partial c}{\partial m} + \varepsilon_c \right) \cot g \theta - \left(\frac{\partial \nu}{\partial m} + \varepsilon_\nu \right) \right\} d\sigma, \end{cases}$$

en désignant par $\varepsilon_a, \varepsilon_\lambda, \dots$, des quantités infiniment petites en même temps que δm .

Si K et $\cotg \theta$ conservent des valeurs finies dans tout l'intervalle de variation de σ , l'ensemble des valeurs absolues des nombres

$$\begin{aligned} & K \left\{ \left(\frac{\partial a}{\partial m} + \varepsilon_a \right) \cotg \theta - \left(\frac{\partial \lambda}{\partial m} + \varepsilon_\lambda \right) \right\}, \\ & K \left\{ \left(\frac{\partial b}{\partial m} + \varepsilon_b \right) \cotg \theta - \left(\frac{\partial \mu}{\partial m} + \varepsilon_\mu \right) \right\}, \\ & K \left\{ \left(\frac{\partial c}{\partial m} + \varepsilon_c \right) \cotg \theta - \left(\frac{\partial \nu}{\partial m} + \varepsilon_\nu \right) \right\}, \end{aligned}$$

admet une borne supérieure M . Par suite :

$$\begin{aligned} |x_{m+\delta m} - x_m| &< M |(\sigma - \sigma_0) \delta m|, & |y_{m+\delta m} - y_m| &< M |(\sigma - \sigma_0) \delta m|, \\ |z_{m+\delta m} - z_m| &< M |(\sigma - \sigma_0) \delta m|. \end{aligned}$$

Considérons, sur les courbes $(C_{m+\delta m})$ et (C_m) , les deux régions homologues définies par

$$|\sigma - \sigma_0| < \Lambda.$$

Les points homologues de ces régions sont à une distance inférieure à $\Lambda M |\delta m|$. Il suffira de choisir

$$|\delta m| < \frac{\alpha}{\Lambda M}$$

pour que cette distance reste inférieure à un nombre α donné *a priori*.

Les points de la courbe $(C_{m+\delta m})$ tendent vers leurs homologues de (C_m) lorsque δm tend vers 0.

Par conséquent :

La surface $(S_{m+\delta m})$ tend vers la surface (S_m) lorsque le cône directeur $(D_{m+\delta m})$ tend vers (D_m) .

En faisant varier m de m_1 à m_2 , on obtient une suite continue de surfaces (S_m) applicables les unes sur les autres avec correspondance des génératrices.

On peut donc passer de (S_1) à (S_2) par une déformation réglée continue si

$$K_1(\sigma) = K(\sigma), \quad \eta_1(\sigma) = \eta(\sigma).$$

Tout ceci prouve que les surfaces (S_{+1}) déduites de (4) sont applicables par déformation réglée continue. La même remarque est valable pour deux surfaces (S_{-1}) .

Par contre, il ne sera jamais possible de superposer une surface (S_{+1}) à une surface (S_{-1}) sans passer par l'intermédiaire de surfaces non réglées. En particulier, deux surfaces gauches symétriques par rapport à un plan (ou par rapport à un point) sont applicables par une déformation continue *non réglée*.

52. — Conséquences.

Considérons une surface (S) pour laquelle k et θ sont des constantes. En prenant pour cône directeur (D) un cône de révolution, on trouve les hélicoïdes applicables sur (S).

On peut écrire, comme au paragraphe 21,

$$\begin{aligned} a &= \sin \omega \sin w, & b &= \sin \omega \cos w, & c &= \cos \omega, & d\tau &= \sin \omega \cdot dw, \\ \lambda &= \cos \omega \sin w, & \mu &= \cos \omega \cos w, & \nu &= -\sin \omega. \end{aligned}$$

Les hélicoïdes ont pour équations :

$$(H_1) \quad \begin{cases} X = \sin \omega \left[u \sin w - \frac{k}{\sin \theta} \sin(\omega - \theta) \cos w \right], \\ Y = \sin \omega \left[u \cos w + \frac{k}{\sin \theta} \sin(\omega - \theta) \sin w \right], \\ Z = u \cos \omega + \frac{k}{\sin \theta} \cos(\omega - \theta) \sin \omega \cdot w, \end{cases}$$

$$(H_{-1}) \quad \begin{cases} X = \sin \omega \left[u \sin w - \frac{k}{\sin \theta} \sin(\omega + \theta) \cos w \right], \\ Y = \sin \omega \left[u \cos w + \frac{k}{\sin \theta} \sin(\omega + \theta) \sin w \right], \\ Z = u \cos \omega + \frac{k}{\sin \theta} \cos(\omega + \theta) \sin \omega \cdot w. \end{cases}$$

L'angle ω est arbitraire. Toute surface pour laquelle k et θ sont constants est applicable sur une infinité d'hélicoïdes réglés.

La courbe de Bertrand qui joue le rôle de ligne de striction sur (S) se déduit de l'hélice par déformation continue d'un hélicoïde (H_1) ⁽¹⁾.

Cette déformation de (H_1) donne toutes les courbes de Bertrand de la même famille.

(1) L'hélicoïde (H_1) défini par $\omega = \theta$ admet une directrice rectiligne. Ainsi, toute courbe de Bertrand peut se déduire d'une droite (Δ) par déformation continue d'un hélicoïde ayant (Δ) pour ligne de striction.

Si on prend ω égal à $\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$, on obtient

$$(H'_1) \quad \begin{cases} X = \cos \theta \left[u \sin w - \frac{K}{\sin \theta} \cos w \right], \\ Y = \cos \theta \left[u \cos w + \frac{K}{\sin \theta} \sin w \right], \\ Z = -u \sin \theta, \end{cases}$$

$$(H'_{-1}) \quad \begin{cases} X = \cos \theta \left[u \sin w - \frac{K \cos 2\theta}{\sin \theta} \cos w \right], \\ Y = \cos \theta \left[u \cos w + \frac{K \cos 2\theta}{\sin \theta} \sin w \right], \\ Z = -u \sin \theta - 2K \cos^2 \theta \cdot w. \end{cases}$$

(H'_1) est un hyperboloïde de révolution. Ainsi :

Toute surface pour laquelle θ et K sont constants est applicable sur un hyperboloïde de révolution à une nappe et sur un hélicoïde qui a ses génératrices parallèles à celles de l'hyperboloïde ⁽¹⁾.

En particulier, tout hélicoïde réglé est applicable par déformation continue sur l'hyperboloïde de révolution. Ce résultat est une vérification du théorème de Bour ⁽²⁾.

Ce qui précède montre que ⁽³⁾ :

Toute courbe de Bertrand se déduit du cercle de gorge de l'hyperboloïde de révolution par déformation continue de cette surface.

Les surfaces (H'_1) et (H'_{-1}) n'existent plus dans le cas d'une surface formée par les binormales d'une courbe à torsion constante.

En prenant $\omega = \frac{\pi}{2}$, les équations (H'_1) et (H'_{-1}) deviennent celles des hélicoïdes à plan directeur applicables sur (S) :

$$(H''_1) \quad \begin{cases} X = u \sin w - K \cotg \theta \cos w, \\ Y = u \cos w + K \cotg \theta \sin w, \\ Z = Kw, \end{cases} \quad (H''_{-1}) \quad \begin{cases} X = u \sin w - K \cotg \theta \cos w, \\ Y = u \cos w + K \cotg \theta \sin w, \\ Z = -Kw. \end{cases}$$

⁽¹⁾ G. DARBOUX (*Surfaces*, t. 3, p. 298, 1894) donne cet exemple de correspondance par génératrices parallèles.

⁽²⁾ BOUR. *Mémoire sur la déformation des surfaces*, Journal de l'École Polytechnique, 39^e cahier, p. 82.

Il est question du théorème suivant :

Une surface hélicoïdale est toujours applicable sur une surface de révolution.

⁽³⁾ E. LAGUERRE. *Sur une propriété de l'hyperboloïde de révolution*, Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques, t. 2, p. 279, 1871.

Cette propriété peut aussi s'obtenir, ainsi que la construction indiquée par Bioche (§ 12), en utilisant la transformation complémentaire (L. B., t. 2, p. 445).

Pour $\theta = \frac{\pi}{2}$, on obtient deux hélicoïdes minima symétriques par rapport au plan xoy .

Par suite :

Toute surface (S) formée par les binormales d'une courbe à torsion constante est applicable sur l'hélicoïde minimum et sur l'alysséide.

L'hélicoïde formé par les binormales d'une hélice circulaire (C) est applicable, par *déformation réglée continue*, sur la surface des binormales d'une courbe dont la torsion est égale à celle de (C). Donc :

Toute courbe à torsion constante se déduit de l'hélice circulaire par déformation de la surface formée par les binormales de cette hélice.

53. — Propriétés des surfaces sur lesquelles la ligne de striction est une géodésique.

La ligne de striction est une géodésique si l'angle θ est constant.

En posant

$$\begin{aligned} a &= \sin \theta \sin w, & b &= \sin \theta \cos w, & c &= \cos \theta, \\ \lambda &= \cos \theta \sin w, & \mu &= \cos \theta \cos w, & \nu &= -\sin \theta, \end{aligned}$$

la surface (S_{+1}) que l'on déduit de (4) admet oz pour ligne de striction.

La ligne de striction peut être rendue rectiligne par une déformation continue.

En particulier, toute surface formée par les binormales d'une courbe gauche se transforme ainsi en un conoïde droit.

La relation (21 bis, § 11), écrite pour les points homologues des lignes de striction de deux surfaces (S_x) et (S_z) obtenues par déformation continue de (S), entraîne

$$\frac{1}{K} = \frac{\cotg \theta}{R_n^{(x)}} + \frac{1}{T_g^{(x)}} = \frac{\cotg \theta}{R_n^{(z)}} + \frac{1}{T_g^{(z)}}.$$

On en déduit la relation

$$\left(\frac{1}{R_n^{(x)}} - \frac{1}{R_n^{(z)}} \right) : \left(\frac{1}{T_g^{(x)}} - \frac{1}{T_g^{(z)}} \right) = -\operatorname{tg} \theta,$$

qui s'écrit, lorsque la ligne de striction est géodésique,

$$\left(\frac{1}{R_x} - \frac{1}{R_z} \right) : \left(\frac{1}{T_x} - \frac{1}{T_z} \right) = -\operatorname{tg} \theta.$$

Elle met en évidence la propriété suivante :

En déformant une surface (S) dont la ligne de striction est une géodésique, on obtient une suite continue de surfaces applicables sur (S). L'expression

$$\left(\frac{1}{R_x} - \frac{1}{R_y}\right) : \left(\frac{1}{T_x} - \frac{1}{T_y}\right)$$

a la même valeur constante pour les divers couples de surfaces de cette suite.

54. — Déformation qui transforme une courbe donnée en ligne asymptotique.

Nous avons montré (§ 9) que le cône directeur était défini, à un déplacement près, par l'équation intrinsèque

$$\frac{d\tau}{d\sigma} = \varphi(\sigma).$$

Cette équation détermine la configuration d'une surface gauche applicable par déformation continue sur une surface donnée (S).

Si l'on veut que la courbe $u = f(\sigma)$ soit une asymptotique, il faut et il suffit que l'équation

$$2K \frac{du}{d\sigma} + K^2 \left(\cotg \theta - \frac{d\tau}{d\sigma} \right) - u \frac{dK}{d\sigma} - u^2 \frac{d\tau}{d\sigma} = 0$$

admette la solution $u = f(\sigma)$.

On trouve la condition

$$\frac{d\tau}{d\sigma} = \frac{2K \frac{df}{d\sigma} + K^2 \cotg \theta - f \frac{dK}{d\sigma}}{K^2 + f^2}.$$

Il existe une seule surface, applicable sur (S) par déformation continue, pour laquelle la courbe $u = f(\sigma)$ est une asymptotique.

En changeant les signes de θ et K , on obtiendrait une seconde expression de $\frac{d\tau}{d\sigma}$ qui conviendrait à une surface applicable par déformation réglée continue sur une surface symétrique de (S).

La ligne de striction devient asymptotique pour

$$\frac{d\tau}{d\sigma} = \cotg \theta.$$

Il n'existe qu'une seule surface, déduite de (S) par déformation réglée continue, dont la ligne de striction est une asymptotique.

Soient (S_1) et (S_2) deux surfaces pour lesquelles $\cotg \theta$ a la même expression en fonction de σ . Si on les déforme de façon à rendre asymptotiques les lignes de striction (C_1) et (C_2) , leurs cônes directeurs deviennent égaux.

55. — Introduction du rayon de courbure et du rayon de torsion de la ligne de striction.

La première des équations (20, § 11)

$$(5) \quad \frac{d\tau}{d\sigma} = \cotg \theta - \frac{K \sin \varphi}{R \sin^2 \theta},$$

jointe à la condition (4, § 4)

$$(6) \quad \cos \varphi = -R \frac{d\theta}{dv},$$

montre qu'à toute fonction R de la variable σ on peut associer deux expressions différentes de $\frac{d\tau}{d\sigma}$.

Réciproquement, à ces deux expressions correspondent deux surfaces (S_1) et (S_2) applicables sur la surface donnée (S) et pour lesquelles R est bien de la forme choisie. C'est une conséquence immédiate des équations (5) et (6).

Une surface (S) étant donnée, il existe deux surfaces (S_1) et (S_2) , applicables sur (S) par déformation réglée continue, pour lesquelles le rayon de courbure de la ligne de striction possède, en chaque point, une valeur fixée a priori ⁽¹⁾.

Les lignes de striction des surfaces (S_1) et (S_2) sont distinctes. En effet, la formule (21 bis, § 11) entraîne

$$(7) \quad \frac{1}{T} = \frac{d\varphi}{dv} + \frac{1}{K} - \frac{\cotg \theta \sin \varphi}{R}.$$

La relation (6) définit deux fonctions φ opposées. Dans ces conditions, $\frac{1}{T_1}$ et $\frac{1}{T_2}$ n'ont pas, en général, la même expression.

Deux cas particuliers intéressants se présentent naturellement.

⁽¹⁾ φ ne pourra être calculé dans (6), pour l'éliminer dans (5), que si $\left| \frac{1}{R} \right| \geq \left| \frac{d\theta}{dv} \right|$.

On retrouve la condition pour qu'une courbe d'une surface devienne, après déformation, égale à une courbe donnée (L. B., t. 1, p. 369).

L'expression

$$\frac{d\varphi}{dv} - \frac{\cotg \theta \sin \varphi}{R}$$

est nulle pour $\theta = \frac{\pi}{2}$ et pour $\varphi = 0$ (ou $\varphi = \pi$).

Dans le premier cas, la surface (S) est formée par les binormales d'une courbe (C). Les deux courbes (C₁) et (C₂) sont égales, ainsi que les surfaces (S₁) et (S₂).

L'équation $R = f(\sigma)$ détermine une seule surface (S₁) applicable par déformation réglée continue sur une surface (S) formée par les binormales d'une courbe (C).

Pour $\varphi = 0$ (ou $\varphi = \pi$), la ligne de striction est une asymptotique. Ce cas se produit si

$$|R| = \left| \frac{dv}{d\theta} \right|.$$

L'équation

$$R = \pm \frac{dv}{d\theta}$$

ne détermine qu'une surface applicable sur une surface donnée. Sa ligne de striction est en même temps asymptotique.

Les relations (7) et (20, § 11) peuvent s'écrire

$$(7 \text{ bis}) \quad \frac{d\varphi}{dv} + \cotg \theta \lg \varphi \frac{d\theta}{dv} = \frac{1}{T} - \frac{1}{K},$$

$$(8) \quad \frac{d\tau}{d\sigma} = \frac{K}{\sin^2 \theta} \left(\frac{1}{T} - \frac{d\varphi}{dv} \right) - \lg \theta,$$

et permettent de calculer $\frac{d\tau}{d\sigma}$ connaissant K , θ , T , en fonction de σ .

Le changement de variable

$$t = \lg \frac{\varphi}{2}$$

transforme (7 bis) en une équation de Riccati dont l'intégrale dépend d'une constante arbitraire. Par conséquent :

Une surface (S) étant donnée, il existe une infinité de surfaces (S₁) applicables sur (S) par déformation réglée continue et telles que la ligne de striction ait, en chaque point, une torsion fixée a priori.

Il est donc possible de transformer la ligne de striction en ligne à courbure ou à torsion constante.

Ces résultats sont aussi la conséquence d'une formule très générale que l'on obtient par la méthode de Beltrami ⁽¹⁾. On peut représenter cette formule par

$$F\left[v, \frac{1}{T}, \frac{1}{R}, \frac{d}{dv}\left(\frac{1}{R}\right)\right] = 0.$$

Elle est vérifiée par une courbe quelconque au cours d'une déformation réglée.

Nous terminerons ce paragraphe en observant que les égalités (5) et (8) donnent immédiatement $\frac{d\tau}{d\sigma}$ si l'on connaît, soit la courbure normale, soit la torsion géodésique, en fonction de σ .

Chacune des équations

$$R_n = F(\sigma), \quad T_g = G(\sigma),$$

ne détermine qu'une surface applicable par déformation continue sur une surface donnée.

56. — Introduction de la courbure totale.

La courbure totale est fournie par la formule ⁽²⁾

$$k = \frac{(12, 12)}{A}$$

qui fait intervenir le symbole de Riemann (12, 12) et le discriminant A de la forme quadratique

$$dS^2 = du^2 + 2 \cos \theta \, du \, dv + \left(1 + \frac{u^2 \sin^2 \theta}{K^2}\right) dv^2.$$

On trouve

$$k = -\frac{K^2}{(u^2 + K^2)^2}.$$

Le long de la ligne de striction, la courbure totale est minimum et égale à

$$(9) \quad k_0 = -\frac{1}{K^2}.$$

Cette relation lie le paramètre de distribution à la courbure totale k_0 . Cette dernière étant invariable au cours d'une déformation, on voit que la même propriété devait nécessairement appartenir au paramètre de distribution.

⁽¹⁾ L. B., t. 1, p. 397.

⁽²⁾ L. B., t. 1, p. 101.

57. — Torsion géodésique des trajectoires orthogonales des génératrices.

La torsion géodésique d'une courbe varie, en général, quand on déforme la surface qui la contient. Les trajectoires orthogonales des génératrices font exception à cette règle.

Soit une surface rapportée à un système de coordonnées orthogonales formé des courbes $\alpha = \text{cte}$, $\beta = \text{cte}$. On sait ⁽¹⁾ que ces courbes ont pour torsion géodésique

$$\frac{1}{t_\alpha} = -\frac{1}{t_\beta} = \frac{D'}{\sqrt{EG}},$$

et pour courbure normale

$$\frac{1}{\varphi_\alpha} = \frac{D''}{G}, \quad \frac{1}{\varphi_\beta} = \frac{D}{E}.$$

La relation

$$k = \frac{DD'' - D'^2}{EG}$$

peut s'écrire

$$\frac{1}{\varphi_\alpha \varphi_\beta} + \frac{1}{t_\alpha t_\beta} = k.$$

Si les courbes $\beta = \text{cte}$ sont des asymptotiques, cette équation se réduit à

$$\frac{1}{t_\alpha^2} = -k.$$

Si, de plus, ces courbes $\beta = \text{cte}$ sont les génératrices d'une surface gauche, la relation précédente reste vérifiée au cours d'une déformation réglée.

La torsion géodésique d'une trajectoire orthogonale des génératrices reste invariable au cours d'une déformation réglée.

*
* *

Tout ce chapitre ne constitue qu'un aperçu rapide des propriétés de la déformation des surfaces gauches. Il suffit de se reporter aux admirables ouvrages de

(1) L. B., t. 1, p. 297.

Darboux et Bianchi pour se rendre compte de l'étendue des connaissances acquises dans ce domaine.

Citons plus particulièrement L. Bianchi dont on connaît les remarquables travaux sur la déformation des quadriques. Il utilise une transformation (B_*) par congruences (W) ⁽¹⁾, parfaitement analogue à la transformation de Bäcklund. Cette analogie est surtout mise en évidence par l'intéressante notion de « *facettes formant un ensemble stratifiable* »⁽²⁾.

Une transformation (B_*) , appliquée à une surface réglée (S) obtenue par déformation d'une quadrique (Q) , définit, par l'intermédiaire d'une équation de Riccati, ∞^1 surfaces réglées (S_1) applicables sur (S) par *déformation réglée continue*.

(S) et (S_1) sont les nappes focales d'une congruence (W) . Mais, les points focaux ne sont pas ceux qui se correspondent dans la déformation. La loi d'applicabilité dépend de l'*affinité d'Ivory* entre quadriques homofocales.

⁽¹⁾ LUIGI BIANCHI. *Lezioni di geometria differenziale*, volume III, 1909.

⁽²⁾ L. B., t. 3, p. 266, 1927.

CHAPITRE V

Congruences (W).

Comme nous venons de l'indiquer, les congruences (W) dont les nappes focales sont des surfaces gauches ont acquis un intérêt considérable depuis les travaux de L. Bianchi sur la déformation des quadriques.

Dans ce nouveau chapitre, nous allons nous efforcer de faire apparaître quelques propriétés de ces congruences (¹).

58. — Conditions pour que deux surfaces gauches (S) et (S₁) soient les nappes focales d'une congruence (W).

Soient F et F₁ deux points pris sur les génératrices MG et M₁G₁ des surfaces (S) et (S₁). Cherchons les conditions à vérifier pour que le segment FF₁ soit tangent aux deux surfaces.

Il faut et il suffit que le plan tangent en F passe par F₁ et que celui que l'on trace en F₁ passe par F.

Ces plans tangents ont pour équations (8, § 5)

$$u \sum \lambda (X - x) + K \sum a' (X - x) = 0,$$

$$u_1 \sum \lambda_1 (X - x_1) + K_1 \sum a'_1 (X - x_1) = 0.$$

Comme les coordonnées des points F et F₁ s'écrivent

$$\begin{array}{lll} \text{(F)} & X = x + a u, & Y = y + b u, & Z = z + c u, \\ \text{(F}_1\text{)} & X_1 = x_1 + a_1 u_1, & Y_1 = y_1 + b_1 u_1, & Z_1 = z_1 + c_1 u_1. \end{array}$$

(¹) On trouvera dans L. B. (t. 3, p. 43, 1927) une étude des congruences (W) les plus générales.

Nous n'étudierons que les congruences (W) qui ont pour nappes focales des surfaces gauches dont les génératrices se correspondent.

on trouve les conditions

$$u \sum \lambda(x_i - x + a_i u_i) + K \sum a'(x_i - x + a_i u_i) = 0,$$

$$u_i \sum \lambda_i(x - x_i + a u) + K_i \sum a'_i(x - x_i + a u) = 0,$$

qui peuvent se mettre sous la forme

$$(1) \quad \begin{cases} uu_i \sum \lambda_i a_i + u \sum \lambda(x_i - x) + K u_i \sum a' a_i + K \sum a'(x_i - x) = 0, \\ uu_i \sum \lambda_i a + u_i \sum \lambda_i(x - x_i) + K_i u \sum a'_i a + K_i \sum a'_i(x - x_i) = 0. \end{cases}$$

Elles établissent sur MG et $M_i G_i$ deux correspondances homographiques.

Soient F_i et F'_i les points de $M_i G_i$ qui correspondent à un même point F de MG. Les relations (1) expriment que F_i et F'_i doivent être confondus. En général, les surfaces (S) et (S_i) étant quelconques, ainsi que les génératrices MG et $M_i G_i$, on ne peut trouver que deux points F dont les homologues coïncident.

Mais, si les deux relations homographiques définissent la même correspondance, on pourra tracer une infinité de segments FF_i tangents aux deux surfaces le long de MG et de $M_i G_i$. Cela se produira si

$$(2) \quad \frac{\sum \lambda a_i}{\sum \lambda_i a} = \frac{\sum \lambda(x_i - x)}{K_i \sum a'_i a} = \frac{K \sum a' a_i}{\sum \lambda_i(x - x_i)} = \frac{K \sum a'(x_i - x)}{K_i \sum a'_i(x - x_i)}.$$

Désignons par t et t_i les variables qui déterminent les positions de MG et de $M_i G_i$. Les conditions (2) ne font intervenir que ces deux variables. S'il est possible de trouver une solution de la forme

$$t_i = \varphi(t),$$

qui les vérifie simultanément, on peut affirmer⁽¹⁾ que la congruence des droites FF_i est une congruence (W). Ainsi :

Pour que deux surfaces (S) et (S_i) soient les nappes focales d'une congruence (W) dans laquelle les asymptotiques rectilignes se correspondent, il faut et il suffit que les équations (2) admettent une même solution de la forme $t_i = \varphi(t)$.

Avant de donner une interprétation géométrique des conditions (2), nous allons montrer que l'une des nappes focales peut être choisie arbitrairement.

⁽¹⁾ L. B., t. 3, p. 20, 1909.

59. — Surfaces (S_*) dérivées d'une surface gauche (S) .

Soit FF_1 un segment de droite tangent à la surface (S) au point F . Si X, Y, Z , sont les coordonnées de F , les coordonnées X_1, Y_1, Z_1 , de F_1 peuvent s'écrire

$$(3) \quad X_1 = X + l \frac{\partial X}{\partial u} + m \frac{\partial X}{\partial v}, \quad Y_1 = Y + l \frac{\partial Y}{\partial u} + m \frac{\partial Y}{\partial v}, \quad Z_1 = Z + l \frac{\partial Z}{\partial u} + m \frac{\partial Z}{\partial v}.$$

En prenant pour l et m des fonctions convenables des variables u et v , le point F_1 décrit une surface quand F se déplace sur (S) .

Nous appellerons *surface* (S_*) toute surface réglée qui dérive de (S) par cette construction et dont les génératrices correspondent à celles de (S) .

Pour que F_1 engendre une droite lorsque F décrit MG , il faut et il suffit que les cosinus directeurs

$$\begin{aligned} & \frac{\frac{\partial X_1}{\partial u}}{\sqrt{\left(\frac{\partial X_1}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y_1}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z_1}{\partial u}\right)^2}}, \\ & \frac{\frac{\partial Y_1}{\partial u}}{\sqrt{\left(\frac{\partial X_1}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y_1}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z_1}{\partial u}\right)^2}}, \\ & \frac{\frac{\partial Z_1}{\partial u}}{\sqrt{\left(\frac{\partial X_1}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y_1}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z_1}{\partial u}\right)^2}}, \end{aligned}$$

soient indépendants de u . Cette condition se traduit par les équations

$$(4) \quad \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\frac{\partial X_1}{\partial u}}{\sqrt{\Delta}} \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\frac{\partial Y_1}{\partial u}}{\sqrt{\Delta}} \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\frac{\partial Z_1}{\partial u}}{\sqrt{\Delta}} \right) = 0,$$

dans lesquelles

$$\Delta = \left(\frac{\partial X_1}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial Y_1}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial Z_1}{\partial u} \right)^2.$$

Elles peuvent être remplacées par l'équation symbolique

$$(5) \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 X_1}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 Y_1}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 Z_1}{\partial u^2} \\ \frac{\partial X_1}{\partial u} & \frac{\partial Y_1}{\partial u} & \frac{\partial Z_1}{\partial u} \end{vmatrix} = k \left(\frac{\partial X_1}{\partial u}, \frac{\partial Y_1}{\partial u}, \frac{\partial Z_1}{\partial u} \right)$$

qui contient une fonction k à déterminer.

De (5) on déduit

$$k \sum \left(\frac{\partial X_1}{\partial u} \right)^2 = 0,$$

et, par conséquent,

$$k = 0.$$

Dans ces conditions, pour que F_1 décrive une droite en même temps que F , il faut et il suffit que les coefficients du tableau (5) soient simultanément nuls. Nous obtenons ainsi les conditions définitives

$$(6) \quad \frac{\partial^2 X_1}{\partial u^2} = k_1 \frac{\partial X_1}{\partial u}, \quad \frac{\partial^2 Y_1}{\partial u^2} = k_1 \frac{\partial Y_1}{\partial u}, \quad \frac{\partial^2 Z_1}{\partial u^2} = k_1 \frac{\partial Z_1}{\partial u}.$$

Les expressions

$$X = x + au, \quad Y = y + bu, \quad Z = z + cu,$$

donnent, pour les coordonnées de F_1 ,

$$X_1 = x + au + la + m \left(a \cos \theta - \lambda \sin \theta + ua' \frac{\sin \theta}{K} \right), \quad Y_1 = y + bu + \dots, \quad Z = \dots$$

Par suite

$$\begin{aligned} \frac{\partial X_1}{\partial u} &= a \left(1 + \frac{\partial l}{\partial u} + \frac{\partial m}{\partial u} \cos \theta \right) + a' \frac{\sin \theta}{K} \left(u \frac{\partial m}{\partial u} + m \right) - \lambda \sin \theta \frac{\partial m}{\partial u}, & \frac{\partial Y_1}{\partial u} &= \dots, & \frac{\partial Z_1}{\partial u} &= \dots \\ \frac{\partial^2 X_1}{\partial u^2} &= a \left(\frac{\partial^2 l}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 m}{\partial u^2} \cos \theta \right) + a' \frac{\sin \theta}{K} \left(u \frac{\partial^2 m}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial m}{\partial u} \right) - \lambda \sin \theta \frac{\partial^2 m}{\partial u^2}, & \frac{\partial^2 Y_1}{\partial u^2} &= \dots, & \frac{\partial^2 Z_1}{\partial u^2} &= \dots \end{aligned}$$

En posant

$$\begin{aligned} L &= \frac{\partial^2 l}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 m}{\partial u^2} \cos \theta - k_1 \left(1 + \frac{\partial l}{\partial u} + \frac{\partial m}{\partial u} \cos \theta \right), & M &= \frac{\sin \theta}{K} \left[u \frac{\partial^2 m}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial m}{\partial u} - k_1 \left(u \frac{\partial m}{\partial u} + m \right) \right], \\ N &= -\sin \theta \left(\frac{\partial^2 m}{\partial u^2} - k_1 \frac{\partial m}{\partial u} \right), \end{aligned}$$

les équations (6) prennent la forme

$$La + Ma' + N\lambda = 0, \quad Lb + Mb' + N\mu = 0, \quad Lc + Mc' + N\nu = 0.$$

Elles forment un système équivalent au système

$$L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0,$$

que l'on peut remplacer par

$$(7) \quad \frac{\partial^2 m}{\partial u^2} = k_1 \frac{\partial m}{\partial u}, \quad 2 \frac{\partial m}{\partial u} = k_1 m, \quad \frac{\partial^2 l}{\partial u^2} = k_1 \left(1 + \frac{\partial l}{\partial u} \right).$$

On trouve immédiatement

$$(8) \quad m = \frac{1}{Au + B}, \quad l = \frac{-Au^2 + Cu + D}{Au + B},$$

en désignant par A, B, C, D, des fonctions arbitraires de v .

Ainsi :

Pour que le point F_1 décrive une surface (S_k) , il faut et il suffit que l et m soient des fonctions de la forme (8).

60. — Recherche des congruences (W) dont les nappes focales sont des surfaces gauches.

On obtient ces congruences en déterminant les surfaces (S_k) tangentes au segment FF_1 . C'est un problème qui dépend de l'équation

$$(9) \quad \begin{vmatrix} X_1 - X & Y_1 - Y & Z_1 - Z \\ \frac{\partial X_1}{\partial u} & \frac{\partial Y_1}{\partial u} & \frac{\partial Z_1}{\partial u} \\ \frac{\partial X_1}{\partial v} & \frac{\partial Y_1}{\partial v} & \frac{\partial Z_1}{\partial v} \end{vmatrix} = 0.$$

Avec L. Bianchi ⁽¹⁾ nous écrirons

$$\begin{aligned} \frac{\partial X_1}{\partial u} &= L \frac{\partial X}{\partial u} + M \frac{\partial X}{\partial v} + (Dl + D'm) z', & \frac{\partial Y_1}{\partial u} &= L \frac{\partial Y}{\partial u} + \dots, & \frac{\partial Z_1}{\partial u} &= \dots, \\ \frac{\partial X_1}{\partial v} &= P \frac{\partial X}{\partial u} + Q \frac{\partial X}{\partial v} + (D'l + D''m) z', & \frac{\partial Y_1}{\partial v} &= P \frac{\partial Y}{\partial u} + \dots, & \frac{\partial Z_1}{\partial v} &= \dots \end{aligned}$$

⁽¹⁾ L. B., t. 3, p. 7, 1909.

en désignant par L, M, P, Q, les expressions

$$\begin{aligned} L &= \frac{\partial l}{\partial u} + \begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{Bmatrix} l + \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{Bmatrix} m + 1, & M &= \frac{\partial m}{\partial u} + \begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{Bmatrix} l + \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{Bmatrix} m, \\ P &= \frac{\partial l}{\partial v} + \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{Bmatrix} l + \begin{Bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{Bmatrix} m, & Q &= \frac{\partial m}{\partial v} + \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{Bmatrix} l + \begin{Bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{Bmatrix} m + 1. \end{aligned}$$

D'autre part, α', β', γ' , sont les cosinus directeurs de la normale à la surface (S).

L'équation (9) devient

$$\begin{vmatrix} l & m & 0 \\ L & M & (Dl + D'm) \\ P & Q & (D'l + D''m) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial u} & \frac{\partial Y}{\partial u} & \frac{\partial Z}{\partial u} \\ \frac{\partial X}{\partial v} & \frac{\partial Y}{\partial v} & \frac{\partial Z}{\partial v} \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{vmatrix} = 0.$$

On peut la mettre sous la forme équivalente

$$(10) \quad \begin{vmatrix} l & m & 0 \\ L & M & 1 \\ P & Q & \left(\frac{l}{m} + \frac{D''}{D'} \right) \end{vmatrix} = 0,$$

à condition d'observer que $D = 0$ dans la seconde forme quadratique fondamentale

$$D du^2 + 2 D' du dv + D'' dv^2.$$

Les symboles de Christoffel $\begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{Bmatrix}$ et $\begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{Bmatrix}$, calculés dans la forme quadratique

$$dS^2 = du^2 + 2 \cos \theta du dv + \left(1 + \frac{u^2 \sin^2 \theta}{K^2} \right) dv^2,$$

ont une valeur nulle.

Par suite, (10) se développe suivant l'équation

$$(11) \quad \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{l}{m} \right) - \left(\frac{l}{m} + \frac{D''}{D'} \right) \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{l}{m} \right) + \frac{l}{m} \left[\frac{D''}{D'} \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{Bmatrix} \right] - \frac{1}{m} \left(2 \frac{l}{m} + \frac{D''}{D'} \right) + \begin{Bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{Bmatrix} - \frac{D''}{D'} \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{Bmatrix} = 0.$$

Les autres symboles de Christoffel ont pour valeur

$$\begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{Bmatrix} = -\frac{u \cos \theta}{u^2 + K^2}, \quad \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{Bmatrix} = \frac{u}{u^2 + K^2}, \quad \begin{Bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{Bmatrix} = \frac{Eu^3 + Fu^2 + Gu + H}{u^2 + K^2}, \quad \begin{Bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{Bmatrix} = \frac{Ru^2 + Su + T}{u^2 + K^2}$$

en posant

$$\left\{ \begin{array}{l} E = -\frac{\sin^2 \theta}{K^2}, \quad F = \frac{K' \cos \theta}{K} - \frac{\theta'}{\sin \theta}, \quad G = -1, \quad H = -\frac{K^2 \theta'}{\sin \theta}, \\ R = \theta' \cotg \theta - \frac{K'}{K}, \quad S = \cos \theta, \quad T = K^2 \theta' \cotg \theta. \end{array} \right.$$

De plus, l'équation différentielle des lignes asymptotiques fournit

$$\frac{D''}{D'} = eu^2 + fu + g, \quad \left\{ \begin{array}{l} e = -\frac{\sin \theta}{K^2} \frac{d\tau}{d\sigma}, \\ f = -\frac{K'}{K}, \\ g = \sin \theta \left(\cotg \theta - \frac{d\tau}{d\sigma} \right). \end{array} \right.$$

Dans ce qui précède, on désigne par K' et θ' les dérivées $\frac{dK}{dv}$, $\frac{d\theta}{dv}$.

En multipliant les deux membres de (11) par $(u^2 + K^2)$ et en tenant compte de (8), on forme l'équation équivalente

$$(12) \quad \zeta u^4 + \gamma u^3 + \xi u^2 + \psi u + \varphi = 0$$

dans laquelle ζ , γ , ξ , ψ , φ , désignent les expressions

$$\left\{ \begin{array}{l} \zeta = -\frac{dA}{dv} + A(2B + C + R) - eB, \\ \gamma = \frac{dC}{dv} - C(2B + C + R) + A(S + eK^2) - fB + eD + E + e \cos \theta, \\ \xi = \frac{dD}{dv} - D(2B + C + R - f) + K^2 \left(AC + 2AB - eB - \frac{dA}{dv} \right) + A(T + fK^2) \\ \quad - gB - C(S + eK^2) + F + f \cos \theta, \\ \psi = K^2 \left(\frac{dC}{dv} - 2BC - C^2 - fB \right) + gK^2 A - C(fK^2 + T) + D(g - S) + G + g \cos \theta, \\ \varphi = K^2 \frac{dD}{dv} - K^2 [2BD + CD + g(B + C)] - DT + H. \end{array} \right.$$

La condition (12) sera vérifiée pour toutes les valeurs possibles de u si

$$\zeta = 0, \quad \gamma = 0, \quad \xi = 0, \quad \psi = 0, \quad \varphi = 0.$$

Mais toutes ces équations ne sont pas distinctes. Elles se réduisent aux trois suivantes

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dA}{dv} - A(2B + C + R) + eB = 0, \\ \frac{dC}{dv} - C(2B + C + R) + A(eK^2 + S) - fB + eD + E + e \cos \theta = 0, \\ \frac{dD}{dv} - D \left(2B + C + \frac{T}{K^2} \right) - g(B + C) + \frac{H}{K^2} = 0. \end{array} \right.$$

C'est ce que laissaient prévoir les résultats du paragraphe 58.

L'une des fonctions A, B, C, D, reste arbitraire. A chaque surface (S) on peut donc associer une infinité de congruences (W). Chacune de ces congruences admet pour nappes focales la surface (S) et une deuxième surface prise dans l'ensemble des surfaces (S_i).

61. — Propriétés de ces congruences.

Soient (S) et (S_i) les nappes focales d'une de ces congruences. Sur la surface (S), nous désignerons la génératrice, la normale au plan central et la normale au plan asymptote par \vec{MG} , \vec{MN} et \vec{MR} . Enfin, nous représenterons par d la longueur du vecteur \vec{MM}_i déterminé par les points centraux de (S) et (S_i).

Les équations (2) forment un système qui peut être remplacé par

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} K = -d \frac{\cos(\vec{MM}_i, \vec{M}_i \vec{R}_i) \cdot \cos(\vec{MR}, \vec{M}_i \vec{G}_i)}{\cos(\vec{MN}, \vec{M}_i \vec{G}_i) \cdot \cos(\vec{MG}, \vec{M}_i \vec{R}_i)}, \\ K_i = d \frac{\cos(\vec{MM}_i, \vec{MR}) \cdot \cos(\vec{M}_i \vec{R}_i, \vec{MG})}{\cos(\vec{M}_i \vec{N}_i, \vec{MG}) \cdot \cos(\vec{M}_i \vec{G}_i, \vec{MR})}, \\ \frac{K}{K_i} = - \frac{\cos(\vec{MM}_i, \vec{M}_i \vec{N}_i) \cdot \cos(\vec{MR}, \vec{M}_i \vec{G}_i)}{\cos(\vec{MM}_i, \vec{MN}) \cdot \cos(\vec{M}_i \vec{R}_i, \vec{MG})}. \end{array} \right.$$

Ainsi :

Le paramètre de distribution de (S_i) s'obtient en multipliant la projection du vecteur \vec{MM}_i sur la normale au plan central de (S) par le rapport

$$\frac{\cos(\vec{M}_i \vec{R}_i, \vec{MG})}{\cos(\vec{M}_i \vec{N}_i, \vec{MG}) \cdot \cos(\vec{M}_i \vec{G}_i, \vec{MR})}$$

qui ne fait intervenir que les cônes directeurs (D) et (D_i).

La comparaison des deux valeurs de $\frac{K}{K_1}$ données par (14) nous conduit à la nouvelle relation

$$(15) \quad \frac{\cos(\vec{MM}_1, \vec{MR}) \cdot \cos(\vec{MG}, \vec{M}_1\vec{R}_1)}{\cos(\vec{MM}_1, \vec{MN}) \cdot \cos(\vec{MG}, \vec{M}_1\vec{N}_1)} = \frac{\cos(\vec{MM}_1, \vec{M}_1\vec{R}_1) \cdot \cos(\vec{M}_1\vec{G}_1, \vec{MR})}{\cos(\vec{MM}_1, \vec{M}_1\vec{N}_1) \cdot \cos(\vec{M}_1\vec{G}_1, \vec{MN})},$$

qui ne fait intervenir que les cônes directeurs (D) , (D_1) et la direction du vecteur MM_1 .

Si (S_1) et (S'_1) sont des surfaces qui déterminent avec (S) deux congruences (W) , la première des relations (14), appliquée aux couples de génératrices homologues MG , M_1G_1 et MG , $M'_1G'_1$, permet de poser

$$(16) \quad MM_1 \cdot \frac{\cos(\vec{MM}_1, \vec{M}_1\vec{R}_1) \cdot \cos(\vec{MR}, \vec{M}_1\vec{G}_1)}{\cos(\vec{MN}, \vec{M}_1\vec{G}_1) \cdot \cos(\vec{MG}, \vec{M}_1\vec{R}_1)} = MM'_1 \cdot \frac{\cos(\vec{MM}'_1, \vec{M}'_1\vec{R}'_1) \cdot \cos(\vec{MR}, \vec{M}'_1\vec{G}'_1)}{\cos(\vec{MN}, \vec{M}'_1\vec{G}'_1) \cdot \cos(\vec{MG}, \vec{M}'_1\vec{R}'_1)}$$

Ces relations expriment des propriétés très générales valables, en particulier, dans une transformation (B_k) .

62. — Application à la transformation (B_k) .

Soit (S) une surface gauche applicable sur une quadrique. Au moyen d'une transformation (B_k) on peut lui associer une surface (S_1) applicable sur (S) par déformation réglée continue⁽¹⁾. (S) et (S_1) sont les nappes focales d'une congruence (W) .

Soit M_1G_1 la génératrice de (S_1) homologue de MG . Quand on applique (S_1) sur (S) , M_1G_1 occupe la position $M'G'$ dont l'homologue sur (S_1) est $M'_1G'_1$. Les paramètres de distribution K_1 et K' sont égaux.

En vertu de (14), on peut écrire, en désignant par d et d' les distances des points centraux correspondants,

$$K_1 = d \frac{\cos(\vec{MM}_1, \vec{MR}) \cdot \cos(\vec{M}_1\vec{R}_1, \vec{MG})}{\cos(\vec{M}_1\vec{N}_1, \vec{MG}) \cdot \cos(\vec{M}_1\vec{G}_1, \vec{MR})},$$

$$K' = -d' \frac{\cos(\vec{M}'M'_1, \vec{M}'_1\vec{R}'_1) \cdot \cos(\vec{M}'R', \vec{M}'_1\vec{G}'_1)}{\cos(\vec{M}'N', \vec{M}'_1\vec{G}'_1) \cdot \cos(\vec{M}'G', \vec{M}'_1\vec{R}'_1)}.$$

(¹) L. B., t. 3, p. 36, 1909.

Par suite :

$$(17) \quad d \frac{\cos(\vec{M}\vec{M}_1, \vec{M}\vec{R}) \cdot \cos(\vec{M}_1\vec{R}_1, \vec{M}\vec{G})}{\cos(\vec{M}_1\vec{N}_1, \vec{M}\vec{G}) \cdot \cos(\vec{M}_1\vec{G}_1, \vec{M}\vec{R})} + d' \frac{\cos(\vec{M}'\vec{M}', \vec{M}'_1\vec{R}'_1) \cdot \cos(\vec{M}'\vec{R}', \vec{M}'_1\vec{G}'_1)}{\cos(\vec{M}'\vec{N}', \vec{M}'_1\vec{G}'_1) \cdot \cos(\vec{M}'\vec{G}', \vec{M}'_1\vec{R}'_1)} = 0.$$

Telle est la formule que nous voulions établir.

63. — Nouvel aspect des conditions que doivent remplir les surfaces gauches qui servent de nappes focales à une congruence (W).

Soient P et P₁ les points où les génératrices MG et M₁G₁ coupent les plans asymptotes des surfaces (S₁) et (S). Nous poserons

$$\overline{MP} = \varphi, \quad \overline{M_1P_1} = \varphi_1,$$

et nous désignerons par :

- 1°) l, m, n , les cosinus directeurs de M₁G₁ dans le trièdre principal ⁽¹⁾ de (S);
- 2°) l_1, m_1, n_1 , les cosinus directeurs de MG dans le trièdre principal de (S₁);
- 3°) ξ, ζ, o , les coordonnées de P₁ dans le premier trièdre;
- 4°) ξ_1, ζ_1, o_1 , les coordonnées de P dans le second trièdre;
- 5°) u et u_1 les mesures algébriques des segments portés par les génératrices MG et M₁G₁, les origines respectives étant P et P₁.

Les équations de (S) et (S₁) prennent la forme :

$$(S) \quad \begin{cases} X = x + a_1 \xi + a'_1 \zeta + u(l_1 a_1 + m_1 a'_1 + n_1 \lambda_1), \\ Y = y + b_1 \xi + b'_1 \zeta + u(l_1 b_1 + m_1 b'_1 + n_1 \mu_1), \\ Z = z + c_1 \xi + c'_1 \zeta + u(l_1 c_1 + m_1 c'_1 + n_1 \nu_1), \end{cases}$$

$$(S_1) \quad \begin{cases} X_1 = x + a \xi + a' \zeta + u_1(la + ma' + n\lambda), \\ Y_1 = y + b \xi + b' \zeta + u_1(lb + mb' + n\mu), \\ Z_1 = z + c \xi + c' \zeta + u_1(lc + mc' + n\nu). \end{cases}$$

Les plans tangents sont définis par

$$K \sum a' (X - x) + (u + \varphi) \sum \lambda (X - x) = 0,$$

$$K_1 \sum a'_1 (X - x_1) + (u_1 + \varphi_1) \sum \lambda_1 (X - x_1) = 0.$$

⁽¹⁾ Voir au paragraphe 20.

Comme au paragraphe 58, nous sommes amenés à considérer les relations homographiques

$$K(\zeta + mu) + u(u + \varphi)n = 0,$$

$$K_1(\zeta_1 + m_1u) + u(u_1 + \varphi_1)n_1 = 0,$$

qui doivent définir la même correspondance sur les bases PG, P_1G_1 .

Pour que cela se produise, il faut et il suffit que

$$(18) \quad K_1m_1 + \varphi_1n_1 = 0, \quad Km + \varphi n = 0, \quad \frac{n}{n_1} = \frac{K\zeta}{K_1\zeta_1}.$$

Ces conditions pourraient aussi se déduire de (14) par de simples considérations géométriques. En particulier, elles montrent que *le paramètre de distribution de (S) s'obtient, au signe près, en multipliant la longueur de la portion de génératrice de (S), comprise entre le point central M_1 et le plan asymptote de (S), par le rapport des cosinus des angles que fait M_1G_1 avec la normale au plan asymptote et la normale au plan central de (S).*

En introduisant les plans centraux, par une méthode analogue à celle que nous venons de suivre, on obtiendrait des formules beaucoup plus compliquées sans apporter de résultat essentiellement nouveau.

CHAPITRE VI

Applications des formules fondamentales du chapitre I à la théorie générale des surfaces.

Les formules (4, § 4) et (24 bis, § 12) ont été établies en supposant connus les principaux points de la théorie des courbes gauches et la notion de plan tangent à une surface. Elles permettent de déterminer aisément les éléments les plus importants qui interviennent dans l'étude d'une surface quelconque.

64. — Courbure normale et théorème de Meusnier.

Soit une surface quelconque (R), d'équations

$$x = f(u, v), \quad y = g(u, v), \quad z = h(u, v).$$

On représentera par λ, μ, ν , les cosinus directeurs de la normale. Supposons qu'une droite **MG** glisse sur une courbe (C) de (R) en restant dans un plan normal à la surface (R) et tangent à la courbe (C). Cette droite décrit ainsi une surface gauche (S). Cherchons la condition que doit remplir **MG** pour que la ligne de striction soit précisément (C).

Nous désignerons par s l'arc de (C) et nous supposerons que **MG** fait un angle θ avec la tangente **MT** à cette courbe.

Les cosinus directeurs de **MG** s'écrivent

$$a = \lambda \sin \theta + \frac{dx}{ds} \cos \theta, \quad b = \mu \sin \theta + \frac{dy}{ds} \cos \theta, \quad c = \nu \sin \theta + \frac{dz}{ds} \cos \theta.$$

La condition (2, § 2)

$$\sum da dx = 0$$

devient

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{\sum d\lambda dx}{ds^2}.$$

ou,

$$(1) \quad \frac{d\theta}{ds} + \frac{D du^2 + 2D' dudv + D'' dv^2}{E du^2 + 2F dudv + G dv^2} = 0.$$

Dans cette dernière relation, nous avons posé

$$ds^2 = E du^2 + 2F dudv + G dv^2, \\ - \sum d\lambda dx = D du^2 + 2D' dudv + D'' dv^2.$$

La relation (4, § 4), qui s'écrit

$$\frac{d\theta}{ds} + \frac{\cos \varphi}{R} = 0,$$

entraîne

$$(2) \quad \frac{\cos \varphi}{R} = \frac{D du^2 + 2D' dudv + D'' dv^2}{E du^2 + 2F dudv + G dv^2}.$$

φ désigne l'angle que fait le plan osculateur de (C) avec le plan normal à la surface (R).

La formule (2) est celle qui donne la courbure normale d'une courbe (C) tracée sur une surface (R). On en déduit le *théorème de Meusnier*.

65. — Courbure géodésique.

Supposons que la génératrice MG glisse le long d'une courbe (C) d'une surface (R) en restant, cette fois, dans le plan tangent.

L'angle (MG, MT), que nous représenterons toujours par θ , sera compté positivement dans le sens défini par la direction positive de la normale à la surface (R).

Cherchons encore la condition à remplir pour que la surface gauche (S), décrite par MG, admette (C) pour ligne de striction.

La tangente MT a pour cosinus directeurs

$$\frac{dx}{ds}, \quad \frac{dy}{ds}, \quad \frac{dz}{ds}.$$

Ceux de la normale à la courbe (C), contenue dans le plan tangent de (R), sont les coefficients du tableau

$$\begin{vmatrix} \frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} & \frac{dz}{ds} \\ \lambda & \mu & \nu \end{vmatrix}.$$

La direction de la génératrice est donc définie par

$$(a, b, c) = \cos \theta \left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds} \right) + \sin \theta \begin{vmatrix} \frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} & \frac{dz}{ds} \\ \lambda & \mu & \nu \end{vmatrix}.$$

Par suite

$$\begin{aligned} (da, db, dc) = & \cos \theta \left[d \left(\frac{dx}{ds} \right), d \left(\frac{dy}{ds} \right), d \left(\frac{dz}{ds} \right) \right] + \sin \theta \begin{vmatrix} d \left(\frac{dx}{ds} \right) & d \left(\frac{dy}{ds} \right) & d \left(\frac{dz}{ds} \right) \\ \lambda & \mu & \nu \end{vmatrix} \\ & + \sin \theta \begin{vmatrix} \frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} & \frac{dz}{ds} \\ d\lambda & d\mu & d\nu \end{vmatrix} + \left\{ \cos \theta \begin{vmatrix} \frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} & \frac{dz}{ds} \\ \lambda & \mu & \nu \end{vmatrix} - \sin \theta \left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds} \right) \right\} d\theta. \end{aligned}$$

La condition

$$\sum da dx = 0$$

prend la forme

$$d\theta \cdot ds = \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ d \left(\frac{dx}{ds} \right) & d \left(\frac{dy}{ds} \right) & d \left(\frac{dz}{ds} \right) \\ \lambda & \mu & \nu \end{vmatrix}$$

équivalente à :

$$(3) \quad \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{ds^3} \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ d^2 x & d^2 y & d^2 z \\ \lambda & \mu & \nu \end{vmatrix}.$$

Telle est la condition cherchée.

Si on la rapproche de (4, § 4), on voit que

$$\frac{\cos \varphi}{R} = - \frac{1}{ds^3} \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ d^2 x & d^2 y & d^2 z \\ \lambda & \mu & \nu \end{vmatrix}.$$

Cette fois, φ représente l'angle que fait le plan osculateur de la courbe (C) avec le plan tangent à la surface (R). L'angle ω que fait la normale principale de la courbe (C) avec la normale à la surface a pour valeur⁽¹⁾

$$\omega = \varphi - \frac{\pi}{2}.$$

(1) Le sens positif des rotations est le sens direct défini par MT.

Par suite

$$(4) \quad \frac{\sin \omega}{R} = \frac{1}{ds^3} \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \\ \lambda & \mu & \nu \end{vmatrix}.$$

Nous retrouvons l'expression courante⁽¹⁾ de la courbure géodésique d'une courbe tracée sur une surface. On sait⁽²⁾ que le second membre ne dépend que des coefficients de la forme quadratique

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdu dv + Gdv^2.$$

Par conséquent, au cours d'une déformation, $\frac{d\theta}{ds}$ conserve la même valeur. Si la surface (R) se déforme en entraînant, dans chaque plan tangent, la génératrice correspondante de (S), la nouvelle surface (S') obtenue possède pour ligne de striction la déformée de (C).

On retrouve ainsi la proposition due à M. Darboux⁽³⁾ qui en a tiré une explication géométrique de la méthode utilisée par Weingarten dans la recherche des surfaces admettant un élément linéaire donné.

66. — Théorème d'Enneper-Beltrami.

Les normales à la surface (R), menées le long de la courbe (C), engendrent une surface (S). Pour que la courbe (C) soit la ligne de striction de (S), il faut et il suffit qu'elle soit asymptotique sur (R). C'est une conséquence immédiate de (1, § 64).

Le paramètre de distribution de (S) a une valeur définie par

$$K^2 = \frac{ds^2}{d\sigma^2}.$$

Or, nous pouvons écrire⁽⁴⁾

$$d\sigma^2 = -k_1 ds^2 + h_1 \sum d\lambda dx,$$

en désignant par k_1 et h_1 la courbure totale et la courbure moyenne relatives à la surface (R).

⁽¹⁾ E. VESSIOT. *Leçons de géométrie supérieure*, p. 30, 1919.

⁽²⁾ Même ouvrage, p. 31.

⁽³⁾ G. DARBOUX. *Théorie générale des surfaces*, t. 4, p. 343, 1925.

B. GAMBIER. *Déformation des surfaces étudiées du point de vue infinitésimal*, *Mémorial des Sciences mathématiques*, fascicule 26, 1927, p. 47.

⁽⁴⁾ L. B., t. 1, p. 225, 1927.

Le long de (C)

$$\sum d\lambda dx = 0.$$

Dans ces conditions

$$K^2 = -\frac{1}{k_1}.$$

Comme la ligne de striction est une trajectoire orthogonale des génératrices, l'on a aussi ⁽¹⁾

$$K = T.$$

Par suite

$$T = \pm \sqrt{-\frac{1}{k_1}}.$$

Nous obtenons ainsi la formule de laquelle on déduit le théorème d'*Enneper-Beltrami*.

Remarquons aussi que la relation (9, § 56) donne

$$k_0 = -\frac{1}{K^2} = k_1,$$

en désignant par k_0 la courbure totale de (S) le long de (C).

Les deux surfaces (R) et (S) ont la même courbure totale le long de la ligne asymptotique (C).

* .

Les quelques pages de ce chapitre ont montré, dans un domaine élémentaire, le rôle que l'on peut attribuer à la géométrie réglée dans l'étude des surfaces quelconques. Signalons, à ce propos, les belles recherches de G. Kœnigs⁽²⁾ et le remarquable ouvrage que vient de publier M. Lucien Godeaux⁽³⁾.

⁽¹⁾ Formule (24 bis, § 12).

⁽²⁾ *La géométrie réglée et ses applications*, Gauthier-Villars, 1895.

Sur les propriétés infinitésimales de l'espace réglé, Annales de l'Ecole Normale Supérieure, 1882.

⁽³⁾ *La théorie des surfaces et l'espace réglé*, Actualités scientifiques, n° 138, 1934, Hermann. (Cet ouvrage comprend une riche bibliographie sur la géométrie projective différentielle).

M. Lucien Godeaux donne une synthèse attrayante de ses récents travaux de géométrie projective différentielle. Nous indiquerons seulement qu'il utilise la représentation de l'espace réglé sur une hyperquadrique (Q) d'un espace linéaire à cinq dimensions, ainsi que les propriétés d'une suite de Laplace (L) autopolaire par rapport à (Q). Les propriétés de cette suite conduisent naturellement à celles de la quadrique de Lie, des directrices de Wilczynski et du quadrilatère de Demoulin.

Toutes ces questions ont fait l'objet d'un grand nombre d'études où l'on trouve, en particulier, les noms de MM. Demoulin, Finikoff, Rozet et Tzitzeica.

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE

1. E. AMIGUES, *Équations générales des surfaces réglées dont la ligne de striction satisfait à certaines conditions*, Nouvelles annales de mathématiques, t. 8, 1889; [§ 14].
2. E. ANGLADE, *Ligne de striction et paramètre de distribution*, Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 1931; [§§ 1, 40].
3. E. BELTRAMI, *Sulla flessione delle superficie rigate*, Annali di matematica, t. 7, 1865; [§§ 1, 50].
4. J. BERNOULLI, *Mémoires présentés à l'Académie des Sciences en 1732*; [§ 37].
5. L. BIANCHI, *Lezioni di geometria differenziale*, 3^e édition, nouveau tirage en 4 vol., 1927 (Nicola Zanichelli, Bologna).
Tome 1: [§§ 9, 12, 13, 15, 16, 20, 21, 22, 23, 29, 33, 39, 49, 55, 56, 57, 66; p. 65, 102, 149];
Tome 2: [§§ 2, 5, 52];
Tome 3: [§ 57; p. 165].
6. L. BIANCHI, *Lezioni di geometria differenziale: Teoria delle trasformazioni delle superficie applicabili sulle quadriche*, vol. 3, 1909 (Enrico Spoerri, Pisa); [§§ 57, 58, 60, 62].
7. CH. BIOCHE, *Sur certaines surfaces réglées*, Comptes rendus, t. 106, 1888; [§ 12].
8. O. BONNET, *Mémoire sur les surfaces applicables*, Journal de l'École Polytechnique, 42^e cahier, 1867; [§ 50].
9. O. BONNET, *Mémoire sur la théorie générale des surfaces*, Journal de l'École Polytechnique, 32^e cahier, 1848; [§§ 4, 12, 22].
10. E. BOUR, *Mémoire sur la déformation des surfaces*, Journal de l'École Polytechnique, 39^e cahier, 1862; [§ 52].
11. A. BUHL, *Lignes asymptotiques et lignes de courbure*, Journal de Mathématiques pures et appliquées, 9^e série, t. 8, 1929; [§§ 17, 44; p. 139].
12. E. CESÀRO, *Lezioni di geometria intrinseca*, 1896, Napoli; [p. 102].
13. E. CESÀRO, *Rendiconti di Napoli*, 1903; [§ 38].
14. A.-C. CLAIRAUT, *Mémoires présentés à l'Académie des Sciences en 1732*; [§ 37].
15. E. COMBESCURE, *Sur les déterminants fonctionnels et les coordonnées curvilignes*, Annales de l'École Normale Supérieure, t. 4, 1^{re} série, 1867; [§ 29].

16. G. DARBOUX, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, 4 volumes.
 Tome 1, 1914: [§§ 5, 9, 16, 20, 22];
 Tome 2, 1915: [§ 11];
 Tome 3, 1894: [§§ 4, 12, 52; p. 149];
 Tome 4, 1925: [§§ 29, 65].
 17. B. GAMBIER, *Applicabilité des surfaces étudiée au point de vue fini*, Mémorial des Sciences mathématiques, fascicule XXXI, 1928; [p. 149].
 18. B. GAMBIER, *Déformation des surfaces étudiées du point de vue infinitésimal*, Mémorial des Sciences mathématiques, fascicule XXVI, 1927; [§ 65; p. 149].
 19. L. GODEAUX, *La théorie des surfaces et l'espace réglé*, Actualités scientifiques, n° 138, 1934 (Hermann); [§ 66].
 20. E. GOURSAT, *Cours d'analyse mathématique*, t. 1, 1927 (Gauthier-Villars et C^{ie}); [§ 33].
 21. G. KOENIGS, *La géométrie réglée et ses applications*, Gauthier-Villars, 1895; [§ 66].
 — *Sur les propriétés infinitésimales de l'espace réglé*, Annales de l'Ecole Normale Supérieure, 1882; [§ 66].
 22. E. LAGUERRE, *Sur une propriété de l'hyperboloïde de révolution*, Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques, t. 2, 1871; [§ 52].
 23. E. E. LEVI, *Reale Accademia delle Scienze di Torino*, 1907-1908; [p. 149].
 24. F. MINDING, *Ueber die Biegung gewisser Flächen*, Journal de Crelle, t. 18, 1838; [§§ 15, 50].
 25. E. PICARD, *Application de la théorie des complexes linéaires à l'étude des surfaces et des courbes gauches*, Annales de l'École Normale Supérieure, 2^e série, t. 6, 1877; [§ 41; p. 139].
 26. PIRONDINI, *Studii relativi specialmente alle superficie gobbe*, Journal de Battaglini, p. 304, 1885; [§ 12].
 27. PIRONDINI, *Journal de Crelle*, t. 118, p. 61, 1897; [§ 38].
 28. H. POINCARÉ, *Cinématique et mécanismes*, 1899 (Carré et Naud); [§ 37].
 29. G. SCHEFFERS, *Leipziger Berichte*, p. 369, 1902; [§ 38].
 30. PAUL SERRET, *Théorie nouvelle géométrique et mécanique des courbes à double courbure*, 1860; [§ 40; 41].
 31. L. RAFFY, *Applications géométriques de l'Analyse*, 1897; [p. 139].
 32. A. RIBAUCCOUR, *Étude des élassoïdes*, Mémoires couronnés et Mémoires des savants étrangers publiés par l'Académie royale de Belgique, t. 44, 1881; [§ 5].
 33. E. VESSIOT, *Leçons de Géométrie supérieure*, Hermann, 1919; [§§ 5, 11, 15, 35, 40, 42, 65].
-

TABLE DES MATIÈRES DE CE MÉMOIRE

CHAPITRE I

Équations fondamentales. Conséquences.

	Pages.
1. Notations.....	65
2. Condition pour qu'une courbe (C) soit la ligne de striction d'une surface réglée (S).....	67
3. Le cône directeur et la ligne de striction suffisent à déterminer une surface réglée.....	69
4. Autres formes de la condition (2).....	69
5. Calcul du paramètre de distribution.....	71
6. Surfaces à cône directeur de révolution.....	73
7. Sur une propriété des hélices.....	76
8. Surfaces réglées réciproques.....	77
9. Relations entre les paramètres de distribution.....	78
10. Propriétés des surfaces (S_w).....	82
11. Introduction de la torsion géodésique et de la courbure normale relatives à la ligne de striction.....	85
12. Quelques conséquences de l'équation (4).....	88
13. Surfaces dont la ligne de striction est une asymptotique.....	90
14. Surfaces réglées à ligne de striction circulaire.....	92
15. Détermination d'une surface connaissant K , $\cotg \theta$, a , b , c , en fonction d'une même variable.....	94
16. Surfaces à paramètre de distribution constant. Courbes de Bertrand. Courbes à torsion constante.....	96
17. Surfaces réglées à plan directeur.....	99
18. Surfaces à directrice rectiligne.....	99

CHAPITRE II

Formules de Frenet. Introduction des distances d'un point fixe aux plans fondamentaux.

19. Extension des formules de Frenet aux surfaces gauches.....	102
20. Équations intrinsèques d'une surface gauche.....	104
21. Surfaces (H).....	107
22. Surfaces (B).....	109
23. Extension des formules de Cesàro aux surfaces gauches.....	113

24. Une surface est déterminée quand on connaît m, n, p, θ , en fonction d'une même variable	115
25. Calcul de K, K', θ , pour une surface définie par les équations (20).....	116
26. Surfaces dont le plan asymptote reste tangent à une sphère.....	116
27. Surfaces dont le plan central reste tangent à une sphère.....	118
28. Développables	118
29. Transformation de Combescure,	119
30. Courbes (C) dont les binormales sont parallèles aux tangentes d'une courbe (C_1).	120
31. Courbes (C) dont les normales principales sont parallèles aux tangentes d'une courbe (C_1).....	121
32. Courbes (C) à normales principales parallèles aux binormales de (C_1).....	123
33. Courbes dont le plan osculateur reste tangent à une sphère.....	124
34. Surfaces rectifiantes circonscrites à la sphère.....	126
35. Courbes sphériques.....	127
36. Hélices	129
37. Hélices sphériques.....	131
38. Hélices tracées sur une quadrique de révolution.....	133
39. Hélice cylindro-conique.....	136

CHAPITRE III

Lignes asymptotiques des surfaces réglées.

40. Équation des lignes asymptotiques	139
41. Lignes asymptotiques des surfaces à plan directeur	140
42. Cas où la surface à plan directeur admet un paramètre de distribution constant.	142
43. Lignes asymptotiques des surfaces à directrice rectiligne	143
44. Conséquences.....	144
45. Surfaces dont la ligne de striction est une asymptotique.....	146
46. Surface des binormales d'une courbe à torsion constante.....	147
47. Lignes asymptotiques des surfaces (R)	147

CHAPITRE IV

Déformation des surfaces réglées.

48. Élément linéaire.....	149
49. Conditions pour que deux surfaces gauches soient applicables.....	150
50. Recherche des surfaces gauches applicables sur une surface donnée.....	152
51. Déformation continue	153
52. Conséquences.....	156
53. Propriétés des surfaces sur lesquelles la ligne de striction est une géodésique ...	158
54. Déformation qui transforme une courbe donnée en ligne asymptotique	159
55. Introduction du rayon de courbure et du rayon de torsion de la ligne de striction.	160
56. Introduction de la courbure totale.....	162
57. Torsion géodésique des trajectoires orthogonales des génératrices	163

CHAPITRE V

Congruences (W).

58. Conditions pour que deux surfaces gauches (S) et (S ₁) soient les nappes focales d'une congruence (W).....	165
59. Surfaces (S _K) dérivées d'une surface gauche (S).....	167
60. Recherche des congruences (W) dont les nappes focales sont des surfaces gauches.....	169
61. Propriétés de ces congruences.....	172
62. Application à la transformation (B _K).....	173
63. Nouvel aspect des conditions que doivent remplir les surfaces gauches qui servent de nappes focales à une congruence (W).....	174

CHAPITRE VI

**Applications des formules fondamentales du chapitre I
à la théorie générale des surfaces.**

64. Courbure normale et théorème de Meusnier.....	176
65. Courbure géodésique.....	177
66. Théorème d'Enneper-Beltrami.....	179
INDEX BIBLIOGRAPHIQUE.....	181
