

CONSTANTIN WORONETZ

**Mouvements des fluides en couches minces sur des surfaces courbes**

*Annales de la faculté des sciences de Toulouse 3<sup>e</sup> série*, tome 26 (1934), p. 1-64

[http://www.numdam.org/item?id=AFST\\_1934\\_3\\_26\\_\\_1\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AFST_1934_3_26__1_0)

© Université Paul Sabatier, 1934, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# MOUVEMENTS DES FLUIDES EN COUCHES MINCES

## SUR DES SURFACES COURBES

Par M. CONSTANTIN WORONETZ

---

### PRÉFACE

La théorie générale des mouvements plans des fluides peut être facilement étendue aux cas des mouvements sur des surfaces courbes, l'épaisseur de la couche fluide étant supposée uniforme et très petite, par rapport au rayon de courbure de la surface. Les premiers essais de développement d'une telle théorie, au point de vue des applications électro-magnétiques, ont été faits par Boltzmann (27) et Kirchhoff (28).

Nous donnons, dans le premier Chapitre de cet ouvrage, un exposé général de cette théorie, en suivant, dans ses lignes principales, le cours de M. H. Villat, professé à la Sorbonne en 1932.

On sait quel rôle important joue la théorie des variables complexes dans l'étude des mouvements plans des fluides. Les travaux de Beltrami (3) permettent d'étendre cette théorie au cas du mouvement sur des surfaces courbes. Nous appliquons les formules établies par Beltrami, pour utiliser quelques analogies évidentes entre les deux mouvements. Ces analogies permettent de ramener chaque problème du mouvement sur des surfaces courbes au problème correspondant du mouvement plan.

Il suffit de réduire l'élément linéaire de la surface à la forme

$$ds^2 = \lambda^2(du^2 + dv^2),$$

d'envisager deux fonctions complexes  $Z = u + iv$  et  $z = x + iy$  sur la surface et dans le plan, et d'effectuer la représentation conforme de la surface sur le plan, en posant  $Z = z$ . Considérons deux mouvements : un sur la surface courbe, l'autre dans le plan  $z$ . La fonction  $\lambda(u, v)$  devient une fonction connue de  $x$  et de  $y$ . Les lignes de courant et les lignes équipotentiels, si elles existent, conservent les mêmes équations dans les deux mouvements. Quant aux vitesses, elles seront dans le rapport  $1 : \lambda$ .

Il est évident que, si le coefficient  $\lambda$  est constant, les deux mouvements ne diffèrent guère. Ce cas correspond au mouvement sur des surfaces développables et peut être étudié par les méthodes habituelles.

Dans le cas général  $\lambda$  est une fonction connue de  $u$  et de  $v$ , ou de  $x$  et de  $y$ . Il y a deux problèmes à distinguer. Si les conditions aux limites ne contiennent pas des restrictions relatives à la vitesse, il suffit de résoudre le problème correspondant dans le plan et passer au problème sur la surface courbe par un simple changement des variables  $x$  et  $y$  en  $u$  et  $v$ .

Dans le cas contraire, il est nécessaire de changer les données du problème plan, de telle sorte, qu'après le passage au problème sur la surface courbe, les conditions aux limites soient satisfaites.

Dans les Chapitres II et III nous étudions un mouvement discontinu sur la surface d'un cylindre circulaire. Le sillage est formé, dans le premier de ces Chapitres, par un domaine d'eau morte, limité par des lignes de glissement aux vitesses constantes. Dans le second Chapitre, ce sillage présente une zone tourbillonnaire, analogue à celle de la théorie d'Oseen.

Ces problèmes ne sont pas seulement une application de la théorie exposée antérieurement, mais ont un sens beaucoup plus large. Ils permettent d'éclaircir quelques singularités, qui apparaissent dans l'étude du mouvement discontinu d'une masse fluide indéfinie. Les difficultés que rencontrent les théories de la résistance des fluides, ayant recours à des sillages indéfinis, sont bien connues. Les deux hypothèses : de l'existence des sillages indéfinis et de la permanence du mouvement, sont difficilement compatibles et conduisent souvent à des contradictions. Nous n'analysons pas ici ces théories en détail et renvoyons, à ce sujet, à notre Mémoire, paru en 1932 (5).

M. D. Riabouchinsky (12) a indiqué qu'on pourrait échapper à ces difficultés en admettant que le courant forme un circuit fermé. On peut supposer, par exemple, qu'un solide se trouve dans un volume fluide, ayant la forme d'un tore. En augmentant indéfiniment les dimensions du tore, on passe à un mouvement de fluide indéfini autour d'un solide.

Nous développons cette idée de Riabouchinsky dans un cas particulier où les obstacles se réduisent aux deux segments de droites, parallèles à la génératrice du cylindre, et symétriques par rapport à une de ses parallèles. Nous distinguons ici deux problèmes différents : celui des sillages extérieurs ouverts et celui des sillages intérieurs fermés.

Ces problèmes peuvent être résolus complètement en fonctions elliptiques. En variant les paramètres, on peut choisir arbitrairement la longueur des segments et leur distance mutuelle. On passe facilement au problème plan en augmentant indéfiniment le rayon du cylindre. Les valeurs limites des paramètres correspondent aux positions limites de deux segments.

Deux cas ont un intérêt particulier : celui où la distance mutuelle de deux segments devient nulle et celui où elle est égale à  $2\pi r$ . Ces deux cas limites sont les seuls où les deux segments se confondent et le mouvement se produit autour d'un seul segment. On ne retrouve pas ainsi les formules classiques de Kirchhoff et d'Oseen, mais on obtient deux mouvements triviaux : celui d'un courant contournant un segment de droite et celui où le sillage est limité par deux cercles parallèles sur la surface du cylindre.

Il en résulte que les problèmes, étudiés par Kirchhoff et par Oseen supposent implicitement un deuxième obstacle, symétrique au premier, sur lequel se referment les lignes de glissement. Cet obstacle, restant dans notre problème sur la surface de cylindre à une distance finie, s'éloigne à l'infini dans le cas du mouvement plan, quand le rayon du cylindre croît indéfiniment.

Le dernier Chapitre de cet ouvrage est consacré aux recherches des sillages sur des surfaces courbes non développables. Les conditions aux limites de problème plan correspondant sont distinctes de celles du problème plan classique. Les vitesses le long des lignes, correspondant, sur le plan, aux lignes de glissement sur la surface, ne sont plus constantes, mais proportionnelles à  $\lambda(x, y)$ .

On est amené, ainsi, à la recherche d'une frontière d'après les données qu'elle porte. C'est un problème, formulé par Riabouchinsky (21), inverse à ceux de Dirichlet et de Neumann. Nous n'envisageons pas ce problème dans toute sa généralité, mais appliquons une méthode, développée par Signorini (23) et Demtchenko (24), permettant l'étude de quelques types particuliers de ce problème.

Introduisons un demi-plan supérieur  $t = t' + it''$ . La méthode mentionnée est applicable dans le cas où la vitesse sur la frontière cherchée est une fonction connue de la variable  $t'$ . Ce n'est pas le cas dans notre problème, car on connaît  $\lambda$  comme fonction de  $x$  et de  $y$ , mais non de  $t'$  et de  $t''$ . Cette difficulté peut être surmontée, si  $\lambda$  est une fonction connue, peu différente d'une valeur constante, que l'on peut toujours réduire à l'unité. Ce cas correspond au mouvement sur une surface courbe, voisine d'une surface développable.

Nous donnons une méthode générale, permettant de trouver de proche en proche les solutions approchées de ce problème. Nous poussons les calculs jusqu'au bout dans un exemple, où la surface courbe est une surface de révolution, voisine d'un cylindre circulaire.

Nous indiquons, ensuite, que la même méthode peut être appliquée dans l'étude des variations des lignes de glissement, dues à des déformations des obstacles immergés. Nous trouvons, par cette méthode, les équations approchées des lignes de glissement dans un cas particulier, où l'obstacle présente un arc du cercle, dont le rayon est très grand.

---

## CHAPITRE I

### Sur les analogies entre les mouvements plans des fluides et les mouvements sur des surfaces courbes.

#### § 1. 1. Généralités.

Considérons un courant fluide d'épaisseur uniforme, très petite, glissant sur la surface d'un corps de forme quelconque. Les coordonnées rectangulaires  $x, y, z$  d'un point de la surface étant des fonctions des deux variables  $u$  et  $v$ , on obtient l'expression d'un arc de courbe tracée sur la surface sous la forme

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2,$$

avec

$$\begin{aligned} E &= \left( \frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial u} \right)^2, \\ F &= \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v}, \\ G &= \left( \frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial v} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial v} \right)^2. \end{aligned}$$

Si les coordonnées curvilignes  $u$  et  $v$  sont rectangulaires,  $F$  est égal à 0 et

$$ds^2 = E du^2 + G dv^2.$$

Désignons par  $q$  la vitesse, par  $u'$  et  $v'$  les dérivées de  $u$  et de  $v$  par rapport au temps  $t$ , et par  $\bar{u}, \bar{v}$  les projections de la vitesse sur les directions  $v = C^*$  et  $u = C^*$ . On a évidemment

$$\bar{u} = \sqrt{E} u', \quad \bar{v} = \sqrt{G} v',$$

et le tourbillon  $2\Omega$  aura l'expression

$$2\Omega = \frac{1}{\sqrt{EG}} \left[ \frac{\partial}{\partial u} (\sqrt{G} \bar{v}) - \frac{\partial}{\partial v} (\sqrt{E} \bar{u}) \right].$$

Les équations du mouvement peuvent être mises sous la forme

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} &= -2\Omega \bar{v} - \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial}{\partial u} \left( \Phi + \frac{q^2}{2} - \frac{p}{\rho} \right), \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} &= -2\Omega \bar{u} - \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial v} \left( \Phi + \frac{q^2}{2} - \frac{p}{\rho} \right),\end{aligned}$$

où  $-m\Phi$  désigne le potentiel de la force extérieure,  $\rho$  la densité superficielle du fluide et  $p$  la pression. Si la densité n'est pas constante il faut remplacer  $\frac{p}{\rho}$  par  $\int \frac{dp}{\rho}$ .

L'équation

$$(1) \quad \frac{\partial}{\partial u} (\sqrt{G} \bar{v}) - \frac{\partial}{\partial v} (\sqrt{E} \bar{u}) = 0$$

caractérise le mouvement irrotationnel. En introduisant le potentiel de vitesses  $\varphi(u, v)$ , on peut mettre les projections  $\bar{u}$  et  $\bar{v}$  de la vitesse sous la forme

$$(2) \quad \bar{u} = \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \quad \bar{v} = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \varphi}{\partial v}.$$

Il est facile de généraliser d'une façon analogue l'équation de continuité. En appliquant les mêmes raisonnements, que dans le cas du mouvement plan du fluide, on obtient cette équation sous la forme

$$(3) \quad \sqrt{EG} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial u} (\rho \sqrt{G} \bar{u}) + \frac{\partial}{\partial v} (\rho \sqrt{E} \bar{v}) = 0.$$

Si la densité  $\rho$  est constante, l'équation (3) devient

$$(3') \quad \frac{\partial}{\partial u} (\sqrt{G} \bar{u}) + \frac{\partial}{\partial v} (\sqrt{E} \bar{v}) = 0.$$

Dans ce cas les projections  $\bar{u}$  et  $\bar{v}$  de la vitesse peuvent être mises sous la forme

$$(4) \quad \bar{u} = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \Psi}{\partial v}, \quad \bar{v} = -\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \Psi}{\partial u},$$

où  $\Psi(u, v)$  est la fonction de courant.

Les deux fonctions  $\varphi$  et  $\Psi$  satisfont aux équations

$$\frac{1}{\sqrt{EG}} \left[ \frac{\partial}{\partial u} \left( \sqrt{\frac{G}{E}} \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left( \sqrt{\frac{E}{G}} \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) \right] = 0,$$

$$\frac{1}{\sqrt{EG}} \left[ \frac{\partial}{\partial u} \left( \sqrt{\frac{G}{E}} \frac{\partial \Psi}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left( \sqrt{\frac{E}{G}} \frac{\partial \Psi}{\partial v} \right) \right] = 0$$

que l'on obtient en portant les expressions (2) et (4) dans les équations (3') et (1). Ces équations présentent une généralisation de l'équation de Laplace.

### § 1. 2. Coordonnées isothermes.

Toutes les fois que l'élément linéaire d'une surface peut être ramené à la forme

$$(5) \quad ds^2 = \lambda^2(du^2 + dv^2);$$

où  $\lambda^2$  est une fonction de  $u$  et de  $v$ , on dit que les courbes  $u = C^{te}$  et  $v = C^{te}$  forment un réseau isotherme ou isométrique. La première dénomination est empruntée à la théorie de la chaleur et la seconde, due à Bonnet, s'explique par le fait, que la surface est divisée en carrés infiniment petits par les courbes  $u = C^{te}$  et  $v = C^{te}$ .

La démonstration de ce théorème classique est évidente, ainsi que la démonstration (4) du théorème inverse : tous les systèmes de coordonnées curvilignes rectangulaires, qui divisent la surface en carrés infiniment petits, donnent à l'élément linéaire de la surface la forme (5).

L'introduction des coordonnées isothermes permet de résoudre le problème de la représentation conforme d'une surface quelconque sur le plan. Ce fait a une grande importance pour nous, car il donne la possibilité de réduire chaque problème du mouvement sur une surface courbe à un problème correspondant du mouvement plan. On connaît de beaux travaux sur les diverses méthodes de représentation des surfaces sur le plan; il suffit de noter, par exemple, ceux de Lagrange, d'Euler et de Gauss, se rapportant à la théorie des cartes géographiques.

L'élément linéaire du plan ayant la forme

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

on voit qu'il est impossible d'effectuer la représentation d'une surface quelconque sur le plan en conservant les longueurs des arcs, sauf dans le cas où la surface est applicable sur le plan. Dans ce cas l'élément linéaire de la surface peut être ramené à la forme

$$ds^2 = du^2 + dv^2.$$

Dans le cas général, on s'est borné à établir un mode de représentation où les éléments infiniment petits, qui se correspondent sur les deux surfaces, sont semblables. Si l'on applique les coordonnées isothermes, on aura entre les éléments linéaires de deux surfaces la relation

$$ds^2 = \lambda^2 ds_1^2,$$

d'où, en considérant sur l'une d'elles une région assez petite pour que l'on puisse négliger la variation de  $\lambda$ , on verra que les lignes correspondantes, tracées sur les deux surfaces, seront dans un rapport constant. Par conséquent, deux triangles correspondants infiniment petits seront semblables et les angles se conserveront quand on passera d'une surface à l'autre.

Il en résulte que, pour effectuer la représentation d'une surface quelconque sur le plan en conservant la similitude des éléments infiniment petits, il suffit de ramener l'élément linéaire de la surface à la forme

$$ds^2 = \lambda^2 (du^2 + dv^2),$$

c'est-à-dire il suffit de trouver un système de coordonnées isothermes sur la surface.

La recherche des systèmes orthogonaux et isothermes sur une surface réelle est un problème bien connu (2). Il suffit d'intégrer complètement l'équation  $ds^2 = 0$ , que l'on peut écrire sous la forme

$$ds^2 = \left( \sqrt{E} du + \frac{F + iH}{\sqrt{E}} dv \right) \left( \sqrt{E} du + \frac{F - iH}{\sqrt{E}} dv \right) = 0$$

avec

$$H^2 = EG - F^2.$$

Soit

$$f_1(u, v) = \alpha, \quad f_2(u, v) = \beta$$

les intégrales de cette équation. En posant

$$\alpha = u_1 + iv_1, \quad \beta = u_1 - iv_1,$$

on obtient l'élément linéaire de la surface sous la forme cherchée.

On voit, donc, qu'il existe sur chaque surface une infinité de systèmes orthogonaux et isothermes. Notons, que la connaissance d'un seul système  $u_1$  et  $v_1$ , entraîne celle de tous les autres, donnés par les formules :

$$u' + iv' = F_1(u_1 + iv_1), \quad u' - iv' = F_2(u_1 - iv_1),$$

ou

$$u' + iv' = F_1(u_1 - iv_1), \quad u' - iv' = F_2(u_1 + iv_1).$$



§ 1. 21. **Exemple.**

Appliquons la théorie précédente à une classe de surfaces, dont nous nous occuperons dans la plupart de questions traitées plus loin. Considérons les surfaces de révolution, données, dans les coordonnées sphériques  $r, \theta, \omega$  par l'équation

$$r = r(\omega).$$

L'élément linéaire d'une telle surface a la forme

$$ds^2 = r^2 \sin^2 \omega \left( \frac{r'^2 + r'^2}{r^2 \sin^2 \omega} d\omega^2 + d\theta^2 \right).$$

En posant

$$(6) \quad u = k \int \frac{\sqrt{r'^2 + r'^2}}{r \sin \omega} d\omega, \quad v = k\theta,$$

on obtient

$$ds^2 = \lambda^2 (du^2 + dv^2),$$

où le coefficient

$$\lambda = \frac{r \sin \omega}{k}$$

devient une fonction de  $u$  seulement. Ce coefficient peut être constant seulement dans le cas d'un cylindre circulaire où

$$r \sin \omega = C^{\text{te}}.$$

On voit que dans le cas des surfaces de révolution ce sont les méridiens et les parallèles qui forment un réseau isotherme et l'on peut représenter une telle surface sur le plan en faisant correspondre aux points  $u, v$  de la surface, déterminés par les formules (6), les points  $x, y$  du plan. On obtient ainsi une projection nommée projection de Mercator, où les méridiens, faisant des angles égaux, seront représentés par des droites parallèles équidistantes, et les parallèles par des droites perpendiculaires aux précédentes.

### § 1. 3. Applications des coordonnées isothermes à l'étude des mouvements fluides sur des surfaces.

Les formules, que nous avons données au début de ce Chapitre, peuvent être simplifiées essentiellement par l'emploi des coordonnées isothermes. En supposant l'élément linéaire de la surface donné sous la forme

$$ds^2 = \lambda^2 (du^2 + dv^2),$$

on obtient pour les projections de la vitesse sur les directions  $u$  et  $v$  les expressions

$$(7) \quad \bar{u} = \lambda \frac{du}{dt}, \quad \bar{v} = \lambda \frac{dv}{dt},$$

et pour le tourbillon la formule

$$(8) \quad 2\Omega = \frac{1}{\lambda^2} \left[ \frac{\partial}{\partial u} (\lambda \bar{v}) - \frac{\partial}{\partial v} (\lambda \bar{u}) \right].$$

L'équation de continuité aura la forme

$$(9) \quad \lambda^2 \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial u} (\rho \lambda \bar{u}) + \frac{\partial}{\partial v} (\rho \lambda \bar{v}) = 0$$

et, dans le cas de  $\rho = C^*$ , donne

$$(9') \quad \frac{\partial}{\partial u} (\lambda \bar{u}) + \frac{\partial}{\partial v} (\lambda \bar{v}) = 0.$$

En introduisant le potentiel des vitesses  $\varphi$  et la fonction de courant  $\Psi$ , on obtiendra, que ces fonctions satisfassent à des équations identiques à celle de Laplace

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda^2} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) &= 0, \\ \frac{1}{\lambda^2} \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \right) &= 0, \end{aligned}$$

et que les composantes  $\bar{u}$  et  $\bar{v}$  de la vitesse puissent être exprimées par les formules

$$(10) \quad \begin{aligned} \bar{u} &= \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \varphi}{\partial u} = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \Psi}{\partial v}, \\ \bar{v} &= \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \varphi}{\partial v} = -\frac{1}{\lambda} \frac{\partial \Psi}{\partial u}. \end{aligned}$$

L'équation  $\Psi = C^*$  présente évidemment l'équation de lignes de courant.

## § 1. 4. Variable complexe sur une surface quelconque.

On sait quel rôle important joue la théorie des variables complexes, établie par Cauchy, dans l'étude des mouvements plans des fluides. Il serait donc utile de pouvoir appliquer cette théorie à l'analyse des mouvements fluides sur des surfaces quelconques. La première généralisation de la théorie fondamentale des variables complexes sur une surface quelconque est due à Beltrami (3) et a été approfondie par Klein (4). Nous nous bornerons ici, pour simplifier les raisonnements, à donner les résultats obtenus à l'aide de cette théorie, dans le cas où l'élément linéaire de la surface est ramené à un système de coordonnées isothermes.

On obtient les deux fonctions conjuguées

$$Z = x + iy, \quad \bar{Z} = x - iy$$

dans le plan, comme solution complète de l'équation

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = 0$$

et l'élément linéaire  $ds$  peut être mis sous la forme

$$ds^2 = dZ d\bar{Z}.$$

Par analogie, si l'élément linéaire de la surface quelconque a la forme

$$ds^2 = \lambda^2(du^2 + dv^2)$$

on obtient les deux fonctions conjuguées

$$z = u + iv, \quad \bar{z} = u - iv$$

comme solution complète de l'équation  $ds^2 = 0$  et l'on a

$$ds^2 = \lambda^2 dz d\bar{z}.$$

On voit, donc, que dès que la surface est rapportée à un système isotherme, la définition d'une fonction complexe sur cette surface devient identique à celle que l'on prend, pour point de départ, dans la représentation de la variable complexe sur le plan. Autrement dit, dès que l'on connaît une représentation conforme de la surface sur le plan, les fonctions complexes du point de la surface sont identiques aux fonctions complexes du point correspondant dans le plan. Inversement, la

connaissance d'une fonction complexe sur une surface permet d'effectuer la représentation conforme de cette surface sur le plan. Si l'on connaît deux fonctions complexes sur deux surfaces différentes, on réalisera une représentation conforme des surfaces l'une sur l'autre.

Considérons une fonction  $f(z) = \varphi + i\Psi$  de variable complexe  $z = u + iv$ .

Pour que cette fonction soit analytique il suffit que deux équations

$$(11) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial u} &= \frac{\partial \Psi}{\partial v}, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial v} &= -\frac{\partial \Psi}{\partial u}, \end{aligned}$$

identiques à celles de Cauchy, soient satisfaites. Les fonctions  $\varphi$  et  $\Psi$  sont des fonctions harmoniques, car elles satisfont, évidemment, à l'équation de Laplace

$$\Delta \varphi = 0, \quad \Delta \Psi = 0.$$

Supposons que  $\varphi(u, v)$  soit le potentiel et  $\Psi(u, v)$  la fonction de courant d'un mouvement fluide sur une surface et appelons potentiel complexe la fonction  $f = \varphi + i\Psi$ . En raison des formules (10) on voit que les conditions (11) sont satisfaites et que le potentiel complexe présente une fonction analytique de variable complexe  $z = u + iv$ .

Appelons vitesse complexe la fonction

$$w = \bar{u} - i\bar{v},$$

où  $\bar{u}$  et  $\bar{v}$  désignent les projections de la vitesse  $q$  sur les directions  $u$  et  $v$ . L'équation de continuité

$$\frac{\partial}{\partial u} (\lambda \bar{u}) + \frac{\partial}{\partial v} (\lambda \bar{v}) = 0$$

et la condition de nullité du tourbillon

$$\frac{\partial}{\partial u} (\lambda \bar{v}) - \frac{\partial}{\partial v} (\lambda \bar{u}) = 0$$

montrent que la fonction  $w$ , dans le cas du mouvement d'un fluide sur une surface quelconque, n'est plus une fonction analytique de la variable  $z$ , mais la fonction  $\lambda w$  est analytique.

Calculons maintenant la fonction  $\frac{df}{dz}$ , fonction qui joue un rôle si important dans l'étude des mouvements plans. On a évidemment

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{df}{dz} \frac{\partial z}{\partial u},$$

d'où il s'ensuit

$$\frac{df}{dz} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} + i \frac{\partial \Psi}{\partial u} = \lambda (\bar{u} - i\bar{v}) = \lambda w = \lambda q e^{-i\theta},$$

où  $\theta$  désigne l'angle que fait la vitesse  $q$  avec la direction  $u$ . Il est évident que la fonction

$$\Omega = \log \frac{df}{dz}$$

est aussi une fonction analytique et est donnée par la formule

$$\Omega = \log \frac{df}{dz} = \log (\lambda q) - i\theta.$$

### § 1. 5. Sur les analogies entre les mouvements plans des fluides et les mouvements sur une surface quelconque.

La théorie générale, que nous venons d'exposer, donne la possibilité d'étudier les mouvements des fluides sur une surface quelconque par des méthodes analogues à celles que l'on applique à l'étude des mouvements plans des fluides. L'épaisseur du courant fluide étant uniforme et très petite, la composante de la vitesse, normale à un élément  $\delta s$ , est égale à  $\frac{\partial \Psi}{\partial s}$  ou  $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ , où  $\delta n$  est un élément normal à  $\delta s$ .

Les lignes équipotentiels  $\varphi = C^1$  et les lignes de courant  $\Psi = C^2$  divisent la surface en carrés infiniment petits, car, en désignant par  $\delta s_1$  et  $\delta s_2$  les éléments d'une ligne de courant et d'une ligne équipotentielle, on a

$$\frac{\partial \Psi}{\partial s_2} = \frac{\partial \varphi}{\partial s_1},$$

et par conséquent  $\delta s_1 = \delta s_2$ , si l'on prend  $\delta \varphi$  égal à  $\delta \Psi$ . On peut donc représenter conformément la surface considérée sur le plan et étudier le mouvement ainsi obtenu. Chaque problème du mouvement d'un fluide sur une surface quelconque

sera ainsi amené au problème correspondant du mouvement plan du fluide. Pour la sphère, par exemple, on peut appliquer, parmi une infinité d'autres méthodes, la projection stéréographique ou celle de Mercator.

Supposons que l'élément linéaire de la surface est donné sous la forme

$$ds^2 = \lambda^2(du^2 + dv^2),$$

$\lambda$  étant une fonction de  $u$  et de  $v$ , ne contenant pas les différentiels  $du$  et  $dv$ . Nous avons vu, dans le § 1. 2, que l'élément linéaire de chaque surface réelle peut être ramené à cette forme. En faisant correspondre au point  $u, v$ , de la surface, le point  $x, y$  du plan, on effectuera la représentation conforme de la surface sur le plan. Chaque ligne tracée sur la surface se transformera en une ligne correspondante dans le plan et l'étude du mouvement autour d'un obstacle quelconque placé sur la surface se ramènera à l'étude du mouvement autour d'un obstacle correspondant dans le plan. Si l'on connaît les fonctions  $\varphi(x, y)$  et  $\Psi(x, y)$  représentant un tel mouvement plan, on obtiendra les fonctions  $\varphi(u, v)$  et  $\Psi(u, v)$  représentant le mouvement correspondant sur la surface en remplaçant  $x$  et  $y$  par  $u$  et  $v$ .

L'élément linéaire du plan ayant la forme

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

on voit que les longueurs des arcs, de deux courbes correspondantes, sur la surface et sur le plan, seront dans le rapport  $\lambda : 1$ . Quant aux vitesses, elles seront dans le rapport inverse  $1 : \lambda$ , car les fonctions  $\varphi$  et  $\Psi$  sont les mêmes dans les deux cas et les composantes  $\bar{u}$  et  $\bar{v}$  de la vitesse sur la surface sont données par les formules

$$\begin{aligned}\bar{u} &= \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \varphi}{\partial u} = -\frac{1}{\lambda} \frac{\partial \Psi}{\partial v}, \\ \bar{v} &= \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \varphi}{\partial v} = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \Psi}{\partial u}.\end{aligned}$$

Les énergies cinétiques des masses fluides se trouvant sur les portions correspondantes de deux surfaces sont les mêmes. Il est sous-entendu que la densité et l'épaisseur ne changent pas. Il en est de même pour la circulation

$$C_L = \int_L \frac{\partial \Psi}{\partial n} ds$$

sur une courbe fermée  $L$ .

Il est manifeste que les raisonnements précédents s'appliquent indifféremment que le mouvement soit irrotationnel ou non.

On voit, qu'au point de vue purement géométrique, les deux mouvements, sur le plan et sur une surface quelconque, ne diffèrent pas et que l'on passe, d'un mouvement à l'autre, par un simple changement de variables. Les lignes de courant et les lignes équipotentielles conservent les mêmes équations et, s'il n'y a pas de conditions pour les vitesses, tout problème résolu sur le plan donne la solution du problème correspondant sur la surface.

Mais si la vitesse du mouvement étudié sur la surface est soumise à des conditions quelconques, ces conditions ne se conservent plus dans le mouvement plan correspondant, mais se modifient, et cette modification dépend de la forme de la surface considérée. Les valeurs absolues des vitesses, de deux mouvements correspondants, étant dans le rapport  $1 : \lambda$ , nous verrons plus loin que ce fait crée des difficultés presque insurmontables dans l'analyse du mouvement discontinu sur une surface courbe.

Dans le cas où le coefficient  $\lambda$  est constant, c'est-à-dire où l'élément linéaire de la surface peut être ramené à la forme

$$ds^2 = du^2 + dv^2,$$

qui caractérise les surfaces développables, ces difficultés disparaissent, et l'on peut analyser le mouvement discontinu, sur une telle surface, par les méthodes habituelles.

Dans les deux chapitres suivants nous étudierons un mouvement semblable sur la surface d'un cylindre circulaire, en considérant un courant fluide contournant deux segments de droites, parallèles à la génératrice du cylindre.

---

## CHAPITRE II (5)

### **Mouvement discontinu des fluides sur la surface d'un cylindre circulaire. Problème de Helmholtz.**

#### **§ 2. 1. Sur les difficultés qui apparaissent dans l'analyse du mouvement d'une masse fluide indéfinie.**

Le problème que nous analyserons dans ce chapitre et dans le chapitre suivant n'est pas seulement une application de la théorie exposée dans les chapitres précédents, mais a un sens beaucoup plus large. Ce problème permet d'éclaircir quelques singularités qui apparaissent dans l'étude du mouvement discontinu d'une masse fluide indéfinie.

Pour échapper au paradoxe de d'Alembert, les théories de la résistance des fluides admettent souvent qu'un sillage indéfini se forme derrière un solide contourné par un courant fluide uniforme. La façon dont ces théories introduisent et traitent le mouvement à l'infini demande quelques précisions. En effet, nous pouvons concevoir une masse fluide indéfinie seulement comme limite d'une masse bien déterminée, dont les dimensions tendent vers l'infini. De ce point de vue, les hypothèses d'existence des sillages indéfinis et de la permanence du mouvement sont difficilement compatibles et conduisent souvent à des contradictions.

Selon la théorie de Helmholtz-Kirchhoff, ces sillages présentent des zones d'eau morte derrière l'obstacle. La résultante des pressions sur le corps, étant une force de résistance, s'oppose au mouvement du solide. Mais M. Émile Picard (6) et M. Henri Villat (7), en traitant des questions différentes, ont remarqué qu'on peut considérer des sillages se formant aussi bien à l'amont qu'à l'aval du corps et, comme l'a indiqué M. D. Riabouchinsky (8), il suffit dans certains cas pour obtenir ces derniers de changer le signe des vitesses relatives. La pression, conservant son signe, devient alors une force propulsive et produit indéfiniment du travail.

Dans la théorie d'Oseen, on suppose que ce sillage présente une zone tourbillonnaire. Nous n'envisagerons pas cette théorie dans tous les détails, mais remarquerons seulement qu'elle nous conduit à une discontinuité des pressions, ce qui est physiquement impossible. N. Zeilon a démontré que, pour le mouvement autour d'un cylindre, la vitesse du courant tourbillonnaire peut être choisie de telle manière que cette discontinuité n'apparaisse que très loin du solide et qu'au voisinage



du corps, derrière lui, la pression reste constante. A notre point de vue cette correction n'est pas suffisante, puisqu'il est impossible de donner au mouvement des propriétés singulières arbitraires, même si elles apparaissent à l'infini. Un tel mouvement ne peut être analysé que de proche en proche en augmentant le domaine considéré.

Cette même remarque peut être appliquée aussi à la discussion Nøther-Oseen (9). En analysant, suivant la théorie d'Oseen, le mouvement d'un cylindre circulaire Nøther démontre qu'il n'existe de solution de ce problème que si deux conditions complémentaires sont satisfaites. Pour expliquer ces résultats C. Oseen suppose que le potentiel  $\varphi$ , restant régulier dans tout le domaine fini, est donné à l'infini par l'expression

$$A \log r + B \arctg \frac{y}{x} + \text{fonct. reg.},$$

A et B étant deux constantes, qui servent à satisfaire aux conditions de Nøther. En analysant le mouvement dans un domaine fini et en augmentant ensuite de proche en proche ce domaine, on trouve qu'il est difficile d'accepter cette correction.

M. Witoszynski (10), en indiquant que la théorie des profils de Joukovski donne une énergie cinétique indéfinie, introduit un potentiel complexe multiforme, ayant, pour un profil circulaire, la forme

$$(1) \quad W(z) = -u \left( z + \frac{a^2}{z} \right) + i k u a \frac{\sqrt{z} - \sqrt{a e^{i\alpha}}}{\sqrt{z} + \sqrt{a e^{i\alpha}}}.$$

La théorie de Witoszynsky est soumise aux mêmes difficultés, car on tire de l'équation (1), que l'énergie cinétique devient infiniment grande quand la couche de discontinuité s'étend à l'infini (11).

## § 2. 2. Mouvement fluide dans le cas où le courant forme un circuit fermé.

Aux Congrès de Mécanique appliquée de Zürich en 1926 et de Stockholm en 1930, M. D. Riabouchinsky (12) a indiqué qu'on pourrait échapper à ces difficultés des théories de la résistance des fluides en admettant que le courant forme un circuit fermé. Le mouvement reste évidemment permanent si l'on suppose, par exemple, qu'un solide se trouve dans un volume fluide ayant la forme d'un tore. En augmentant indéfiniment les dimensions du tore, on passe à un mouvement de fluide indéfini autour d'un solide. En prolongeant les sillages derrière le solide dans le tore il est logique de supposer que nous obtiendrons pour un tore infiniment grand le cas trivial, où les sillages sont limités par la surface d'un cylindre, ayant pour base le contour du corps.

Pour obtenir le cas de Helmholtz-Kirchhoff il suffit de supposer dans le tore encore un obstacle, symétrique au premier et lié avec lui par des lignes de glissement. Si l'angle polaire  $\alpha$  qui caractérise la position mutuelle des deux obstacles ne varie pas quand les dimensions du tore augmentent indéfiniment, le second obstacle s'éloigne à l'infini et les surfaces de glissement prennent la forme de celles de Kirchhoff, se refermant sur le deuxième obstacle.

Dans les paragraphes qui suivent j'examine le cas d'un courant d'épaisseur uniforme, infiniment petite, circulant autour d'un cylindre et contournant deux obstacles symétriques par rapport à l'une des génératrices du cylindre. Il est évident que l'on peut généraliser le problème en distribuant symétriquement sur la surface du cylindre  $n$  paires d'obstacles au lieu d'une seule paire. Si  $n$  est un nombre fractionnaire le problème n'est possible que sous la condition d'existence d'un potentiel complexe non régulier. Nous excluons ce cas comme non compatible avec les propriétés physiques du mouvement. Les formules de Beltrami, que nous avons établies dans le chapitre précédent, nous permettent d'étudier directement le mouvement sur la développée plane du cylindre, car le coefficient  $\lambda$  est constant. En raison du principe de symétrie de Schwarz, pour résoudre le problème général de  $n$  paires d'obstacles, il suffit d'étudier le mouvement autour d'une seule paire. Selon la façon dont on coupe la surface du cylindre le long de deux génératrices, les sillages nous apparaissent comme des domaines intérieurs fermés ou extérieurs ouverts. Pour passer au problème plan il suffit d'effectuer un passage à la limite, en augmentant indéfiniment le rayon du cylindre.

### § 2.3. Fonctions $f$ , $\Omega$ , $\frac{dz}{df}$ et $z$ .

Prenons comme obstacles deux segments de droites parallèles aux génératrices du cylindre, leurs longueurs étant  $2l$  et la distance mutuelle  $2l$ . Dans le cas des sillages ouverts la représentation conforme des plans  $\Omega = -\log q + i\theta$  et  $f = \varphi + i\Psi$  (fig. 1) sur le plan auxiliaire  $t$  nous donne

$$\frac{df}{dt} = \frac{Ac}{\sqrt{c^2 - t^2}},$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{Bct}{(a^2 - t^2)\sqrt{(b^2 - t^2)(c^2 - t^2)}},$$

d'où l'on déduit

$$(2) \quad f = Ac \operatorname{arc.} \sin \frac{t}{c},$$

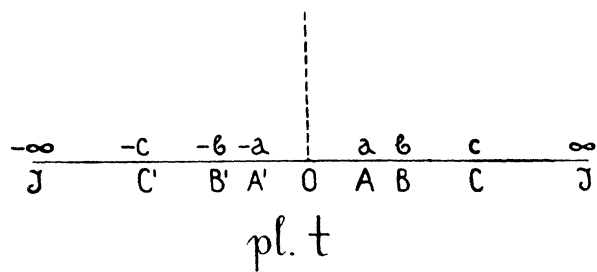
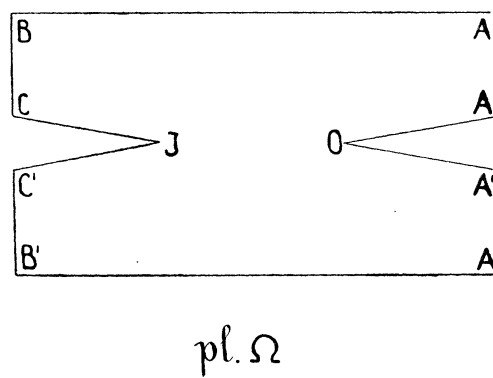
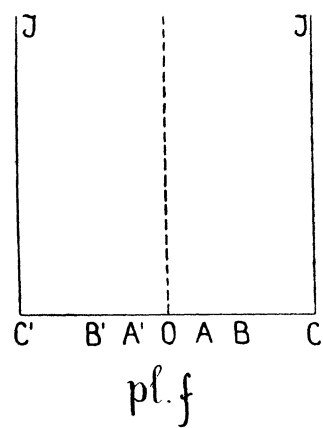
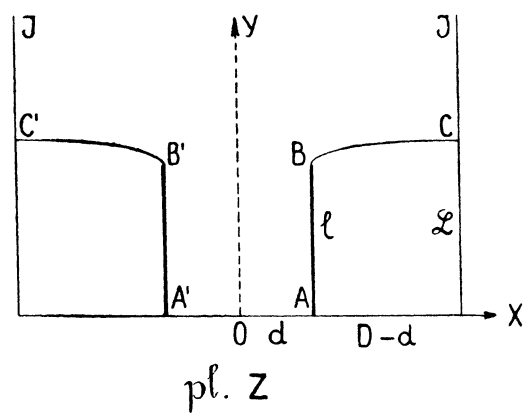


Fig. 1

$$(3) \quad \Omega = \frac{Bc}{\sqrt{(b^2 - a^2)(c^2 - a^2)}} \left\{ \log [\sqrt{(c^2 - a^2)(t^2 - b^2)} + \sqrt{(b^2 - a^2)(t^2 - c^2)}] - \log \sqrt{t^2 - a^2} \right\} + C.$$

A, B et C étant trois constantes arbitraires.

Dans le cas des sillages fermés on obtient des formules presque identiques, que nous établirons plus loin. En désignant par  $q_0$  et  $q_1$  les vitesses du courant à l'infini et sur les lignes de glissement nous déterminons les constantes B et C en satisfaisant aux conditions que pour le point  $B't = -b$ ,  $\Omega = -\log q - i\frac{\pi}{2}$  et pour le point  $Bt = b$ ,  $\Omega = -\log q + i\frac{\pi}{2}$ .

L'expression (3) prend alors la forme

$$(4) \quad \frac{1}{q} e^{i\theta} = \frac{dz}{df} = \frac{1}{q_1} \cdot \frac{\sqrt{(c^2 - a^2)(t^2 - b^2)} + \sqrt{(b^2 - a^2)(t^2 - c^2)}}{\sqrt{(c^2 - b^2)(t^2 - a^2)}}$$

d'où, en remarquant que pour le point  $J t = \infty$ ,  $\frac{dz}{df} = \frac{1}{q_0}$ , on obtient le rapport

des vitesses sur les lignes de glissement et à l'infini

$$\frac{q_1}{q_0} = \frac{\sqrt{c^2 - a^2} + \sqrt{b^2 - a^2}}{\sqrt{c^2 - b^2}}.$$

Les formules (2) et (4) nous donnent, après l'intégration,  $z$  en fonction de  $t$ . Introduisons les paramètres :

$$(5) \quad k^2 = \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{c^2 - b^2}{c^2 - a^2}, \quad k_1^2 = \frac{a^2}{c^2 - a^2}, \quad k'^2 = 1 - k^2, \quad k_1'^2 = 1 - k_1^2$$

et faisons le changement des variables

$$t^2 = \frac{c^2 k_1^2 u^2}{1 + k_1^2 u^2}.$$

En désignant par  $F(u, k)$ ,  $E(u, k)$  et  $\Pi(u, k_1^2, k)$  les intégrales elliptiques de Legendre de première, deuxième et troisième espèce (13)

$$\begin{aligned} F(u, k) &= \int_0^u \frac{du}{\sqrt{(1 - u^2)(1 - k^2 u^2)}}, \\ E(u, k) &= \int_0^u \frac{(1 - k^2 u^2) du}{\sqrt{(1 - u^2)(1 - k^2 u^2)}}, \\ \Pi(u, k_1^2, k) &= \int_0^u \frac{du}{(1 + k_1^2 u^2) \sqrt{(1 - u^2)(1 - k^2 u^2)}} \end{aligned}$$

et par  $K$ ,  $E$ ,  $K'$  et  $E'$  les intégrales complètes et les intégrales complètes complémentaires :

$$K = F(1, k), \quad E = E(1, k), \quad K' = F(1, k'), \quad E' = E(1, k'),$$

on obtient

$$(6) \quad Z = \frac{Ac k_1}{k q_1} \left\{ \Pi(u, k_1^2, k) + \frac{k^2}{k_1^2} [\Pi(u, k_1^2, k) - F(u, k)] \right. \\ \left. + \frac{k'}{\sqrt{1+k_1^2}} \arcsin \frac{\sqrt{1+k_1^2} u}{\sqrt{1+k_1^2 u^2}} \right\}.$$

#### § 2.4. Détermination des paramètres. Équations des lignes de glissement.

En remarquant que pour le point A ( $z = d$ )  $u$  est égal à 1 et pour le point B ( $z = d + il$ )  $u$  est égal à  $\frac{1}{k}$  et que

$$F\left(\frac{1}{k}, k\right) = K + iK', \\ \Pi\left(\frac{1}{k}, k_1^2, k\right) = \Pi(1, k_1^2, k) + i \left[ K' - \frac{k_1^2}{1+k_1^2} \Pi\left(1, -\frac{k'^2}{1+k_1^2}, k'\right) \right], \\ \arcsin \frac{\sqrt{1+k_1^2}}{\sqrt{k^2+k_1^2}} = \frac{\pi}{2} + i \log \frac{k' + \sqrt{1+k_1^2}}{\sqrt{k^2+k_1^2}}$$

on obtient pour  $d$  et  $l$  les expressions

$$(7) \quad d = \frac{Ac k_1}{q_1 k} \left\{ \Pi(1, k_1^2, k) + \frac{k^2}{k_1^2} [\Pi(1, k_1^2, k) - K] + \frac{k'}{\sqrt{1+k_1^2}} \frac{\pi}{2} \right\}.$$

$$(8) \quad l = \frac{Ac k_1}{q_1 k} \left[ K' - \frac{k_1^2 + k^2}{1+k_1^2} \Pi\left(1, -\frac{k'^2}{1+k_1^2}, k'\right) + \frac{k'}{\sqrt{1+k_1^2}} \log \frac{k' + \sqrt{1+k_1^2}}{\sqrt{k^2+k_1^2}} \right].$$

En désignant par  $L$  l'ordonnée maxima de la ligne de glissement et par  $D$  l'abscisse correspondante, on a pour le point C ( $z = D + iL$ )  $u$  égal à l'infini, d'où, à cause des formules

$$F(\infty, k) = iK',$$

$$(9) \quad \Pi(\infty, k_1^2, k) = \Pi(1, k_1^2, k) - K + \Pi\left(1, \frac{k^2}{k_1^2}, k\right) + i \left[ K' - \frac{k_1^2}{1+k_1^2} \Pi\left(1, -\frac{k'^2}{1+k_1^2}, k'\right) \right],$$

on déduit

$$(10) \quad D - d = \frac{\pi r}{n} - d = \frac{Ac k_1}{q_1 k} \left[ \frac{k^2 + k_1^2}{k_1^2} \Pi \left( 1, \frac{k^2}{k_1^2}, k \right) - K \right].$$

$$L - l = \frac{Ac k_1}{q_1 k} \cdot \frac{k'}{\sqrt{1 + k_1^2}} \log \frac{\sqrt{k^2 + k_1^2} (1 + \sqrt{1 + k_1^2})}{k_1 (k' + \sqrt{1 + k_1^2})}.$$

Les formules (7), (8) et (10) donnent trois relations entre les trois paramètres  $Ac$ ,  $k$  et  $k_1$ . Le problème est ainsi complètement déterminé.

Le long des lignes de glissement la vitesse  $q$  est constante et égale à  $q_1$ . On déduit facilement des formules (4) que

$$\cos^2 \theta = \frac{c^2 - a^2}{c^2 - b^2} \cdot \frac{l^2 - b^2}{l^2 - a^2} = \frac{1}{k^2} \frac{1 - k^2 u^2}{1 - u^2}.$$

En introduisant la nouvelle variable

$$\theta_1 = \frac{\pi}{2} - \theta$$

dans la formule (6) on calcule que

$$F(u, k) = K + iK' - F(\theta_1, k).$$

$$\Pi(u, k_1^2, k) = \Pi(1, k_1^2, k) + i \left[ K' - \frac{k_1^2}{1 + k_1^2} \Pi \left( 1, -\frac{k'^2}{1 + k_1^2}, k' \right) \right]$$

$$- \frac{1}{1 + k_1^2} F(\theta_1, k) + \frac{k_1^2 k'^2}{(1 + k_1^2)(k^2 + k_1^2)} \Pi \left( \theta_1, -k^2 \frac{1 + k_1^2}{k^2 + k_1^2}, k \right),$$

$$\text{arc. sin} \frac{\sqrt{1 + k_1^2} u}{\sqrt{1 + k_1^2 u^2}} = \frac{\pi}{2} + i \log \frac{k' + \sqrt{1 + k_1^2}}{\sqrt{k^2 + k_1^2}}$$

$$+ i \log \frac{\sqrt{k^2 + k_1^2} (k' + \sqrt{1 + k_1^2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta_1})}{(k' + \sqrt{1 + k_1^2}) \sqrt{(k^2 + k_1^2) - k^2 (1 + k_1^2) \sin^2 \theta_1}},$$

et l'on a la formule (6) sous la forme

$$Z = d + il + \frac{Ac k_1}{q_1 k} \left\{ \frac{k'^2}{1 + k_1^2} \left[ \Pi \left( \theta_1, -k^2 \frac{1 + k_1^2}{k^2 + k_1^2}, k \right) - F(\theta_1, k) \right] \right.$$

$$\left. + i \frac{k'}{\sqrt{1 + k_1^2}} \log \frac{\sqrt{k^2 + k_1^2} (k' + \sqrt{1 + k_1^2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta_1})}{(k' + \sqrt{1 + k_1^2}) \sqrt{(k^2 + k_1^2) - k^2 (1 + k_1^2) \sin^2 \theta_1}} \right\}.$$

La séparation des parties réelles et imaginaires ne présente pas de difficulté et l'on obtient les équations paramétriques des lignes de glissement (14) :

$$(11) \quad \begin{aligned} \frac{x-d}{l} &= \frac{Mk'^2}{1+k_1^2} \left[ \Pi\left(\theta_1, -k^2 \frac{1+k_1^2}{k^2+k_1^2}, k\right) - F(\theta_1, k) \right], \\ \frac{y-l}{l} &= \frac{Mk'}{\sqrt{1+k_1^2}} \log \frac{\sqrt{k^2+k_1^2} (k' + \sqrt{1+k_1^2} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta_1})}{(\sqrt{k'} + \sqrt{1+k_1^2}) \sqrt{(k^2+k_1^2) - k_1^2(1+k_1^2) \sin^2 \theta_1}} \end{aligned}$$

avec  $M$  défini par l'expression

$$\frac{1}{M} = K' - \frac{k^2+k_1^2}{1+k_1^2} \Pi\left(1, -\frac{k'^2}{1+k_1^2}, k'\right) + \frac{k'}{\sqrt{1+k_1^2}} \log \frac{k' + \sqrt{1+k_1^2}}{\sqrt{k^2+k_1^2}}.$$

Par  $F(\theta_1, k)$ ,  $E(\theta_1, k)$ ,  $\Pi(\theta_1, k_1^2, k)$  nous désignons comme d'habitude, le résultat de remplacement de la variable  $u$  par  $\sin \theta_1$  dans les intégrales elliptiques de Legendre  $F(u, k)$ ,  $E(u, k)$  et  $\Pi(u, k_1^2, k)$ .

### § 2.5. Cas limite du mouvement plan.

Pour passer au mouvement plan autour de deux segments de droites parallèles il suffit d'effectuer un passage à la limite en augmentant indéfiniment le rayon  $r$  du cylindre et en posant  $n=1$ . L'équation (10) montre que dans ce cas le paramètre  $c$  tend aussi vers l'infini et le plan  $f$  se confond avec le plan  $t$ ,  $f=At$ . En désignant par  $\varphi_A = Aa$  et  $\varphi_B = Ab$  les valeurs de  $f$  correspondantes aux points  $A$  et  $B$  sur le plan  $f$ , nous obtenons pour ce cas limite

$$(12) \quad k = \frac{\varphi_A}{\varphi_B}, \quad k_1 = 0, \quad q_1 = q_0, \quad u = \frac{f}{\varphi_A}, \quad \lim_{\substack{c \rightarrow \infty \\ k_1 \rightarrow 0}} (ck_1) = a.$$

En raison des formules

$$(13) \quad \begin{aligned} \lim_{k_1 \rightarrow 0} \Pi(u, k_1^2, k) &= F\left(\frac{f}{\varphi_A}, k\right), \\ \lim_{k_1 \rightarrow 0} \frac{k^2}{k_1^2} [\Pi(u, k_1^2, k) - F(u, k)] &= E\left(\frac{f}{\varphi_A}, k\right) - F\left(\frac{f}{\varphi_A}, k\right), \\ \lim_{k_1 \rightarrow 0} k^2 \Pi\left(1, -\frac{k'^2}{1+k_1^2}, k'\right) &= E', \end{aligned}$$

les expressions (4). (6). (7) et (8) prennent la forme :

$$(14) \quad \frac{dz}{df} = \frac{1}{q_0} \frac{\sqrt{f^2 - \varphi_B^2} + i \sqrt{\varphi_B^2 - \varphi_A^2}}{\sqrt{f^2 - \varphi_A^2}},$$

$$z = \frac{\varphi_B}{q_0} \left[ E\left(\frac{f}{\varphi_A}, k\right) + k' \operatorname{arc.} \sin \frac{f}{\varphi_A} \right],$$

$$(15) \quad \begin{cases} d = \frac{\varphi_B}{q_0} \left( E + k' \frac{\pi}{2} \right), \\ l = \frac{\varphi_B}{q_0} \left( K' - E' + \frac{k'}{2} \log \frac{1+k'}{1-k'} \right). \end{cases}$$

$$\frac{d}{l} = \frac{E + k' \frac{\pi}{2}}{K' - E' + \frac{k'}{2} \log \frac{1+k'}{1-k'}}.$$

Pour transformer les équations des lignes de glissement dans le cas du mouvement plan remarquons que l'intégrale elliptique de troisième espèce

$$\Pi\left(\theta_1, -k^2 \frac{1+k_1^2}{k^2+k_1^2}, k\right)$$

se réduit pour  $k_1 = 0$  à  $\Pi(\theta_1, -1, k)$  et peut être exprimé par les intégrales elliptiques des deux premières espèces. En raison de la formule récurrente (15) on obtient

$$k^2 \Pi(\theta_1, -1, k) = k^2 F(\theta_1, k) - E(\theta_1, k) + \operatorname{tang} \theta_1 \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta_1},$$

et les équations des lignes de glissement prennent la forme :

$$(16) \quad \frac{x-d}{l} = M_0 [\operatorname{tang} \theta_1 \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta_1} - E(\theta_1, k)],$$

$$\frac{y-l}{l} = M_0 k' \log \frac{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta_1} + k'}{(1+k') \operatorname{Cos} \theta_1},$$

où  $M_0$  désigne l'expression

$$\frac{1}{M_0} = K' - E' + \frac{k'}{2} \log \frac{1+k'}{1-k'},$$

et où l'angle  $\theta_1 = \frac{\pi}{2} - \theta$  est déterminé par la formule

$$\operatorname{Cos}^2 \theta = \frac{f^2 - \varphi_B^2}{f^2 - \varphi_A^2}.$$



Le paramètre  $k$  variant entre 0 et 1, les valeurs correspondantes du rapport  $\frac{d}{l}$  varient entre 0 et  $\infty$ . Le tableau ci-dessous donne quelques valeurs de ce rapport pour les valeurs différentes de  $k = \sin \alpha$  :

$\alpha$	$\frac{d}{l}$	$\alpha$	$\frac{d}{l}$
0° .....	0	50° .....	2.59
10° .....	0.69	60° .....	3.98
20° .....	1.00	70° .....	7.50
30° .....	1.36	80° .....	26.20
40° .....	1.84	90° .....	$\infty$

La figure 2 représente les lignes de glissement dans le cas où le paramètre  $k$  est égal à 0,866 et le rapport correspondant  $\frac{d}{l}$  égal à 3,98.

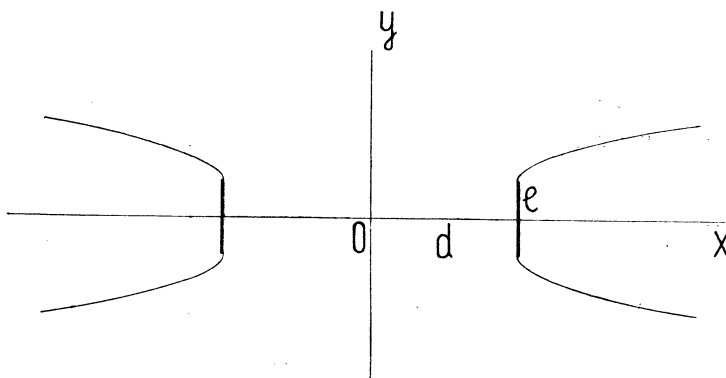


Fig. 2

#### § 2. 6. Dégénérescence des lignes de glissement.

Il est du plus grand intérêt d'analyser le mouvement correspondant aux valeurs limites du paramètre  $k$ . Pour  $k = 0$  le rapport  $\frac{d}{l}$  et aussi 0 et nous aurons deux cas distincts : 1° la distance mutuelle de deux segments de droites est 0, leurs lon-

guez restant finies, et 2° la distance  $d$  restant finie, la longueur  $l$  devient infiniment grande. Si le paramètre  $k$  est égal à 1 le rapport  $\frac{d}{l}$  devient infini et nous aurons les deux cas inverses : 1° la distance  $d$  croît indéfiniment, la longueur  $l$  restant finie, et 2° la distance  $d$  de deux segments de droites restant finie, leurs longueurs deviennent 0.

§ 2. 61. **Cas I : le paramètre  $k$  et la distance  $d$  de deux segments sont nuls.**

Puisqu'on peut écrire

$$\begin{aligned} \operatorname{arc.} \sin \frac{f}{\varphi_A} &= i \log \left( \frac{f}{\varphi_B} + \sqrt{\frac{f^2}{\varphi_B^2} - k^2} \right) + \frac{\pi}{2} - i \log k, \\ E \left( \frac{f}{\varphi_A}, k \right) &= i(K' - E') + E \left( \frac{\varphi_B}{f}, k \right) + \frac{1}{\varphi_B f} \sqrt{(f^2 - \varphi_B^2)(f^2 - \varphi_B^2 k^2)}, \end{aligned}$$

la formule (14) prend la forme

$$\begin{aligned} z - il &= \frac{\varphi_B}{q_0} \left[ E \left( \frac{\varphi_B}{f}, k \right) + \frac{1}{\varphi_B f} \sqrt{(f^2 - \varphi_B^2)(f^2 - \varphi_B^2 k^2)} \right. \\ &\quad \left. + ik' \log \left( \frac{f}{\varphi_B} + \sqrt{\frac{f^2}{\varphi_B^2} - k^2} \right) + k' \frac{\pi}{2} - i \log(1 + k') \right]. \end{aligned}$$

En considérant  $l$  comme fini, on obtient pour  $k = 0$

$$z - il = \frac{\varphi_B}{q_0} \left( \operatorname{arc.} \sin \frac{\varphi_B}{f} + \frac{1}{\varphi_B} \sqrt{f^2 - \varphi_B^2} + \frac{\pi}{2} + i \log \frac{f}{\varphi_B} \right).$$

Mais les formules (15) montrent que pour  $k = 0$   $l$  ne reste fini que si  $\varphi_B = 0$ . Pour  $\varphi_B = 0$  la formule précédente prend la forme

$$z = il + \frac{f}{q_0}, \quad x = \frac{\varphi}{q_0}, \quad y = l + \frac{\Psi}{q_0},$$

ce qui montre que dans ce cas limite les deux plans se rapprochent indéfiniment et les lignes de courant sont parallèles à l'axe des  $x$ . Le long des lignes de glissement  $y = \pm 1$  l'angle  $\theta$  est égal à 0, car d'après la formule (17) on a  $\cos \theta = 1$  pour  $\varphi_A = \varphi_B = 0$ .

§ 2. 62. Cas II : le paramètre  $k$  est égal à 0, la distance mutuelle de deux segments restant finie.

On constate facilement que dans ce cas  $\varphi_A = 0$ ,  $\varphi_B > 0$  et, la largeur des plans étant infiniment grande, les lignes de glissement sont rejetées à l'infini mais restent déterminées sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{x-d}{d} &= \frac{1}{\pi} (\tan \theta_1 - \theta_1), \\ \frac{y_1}{d} &= \frac{1}{\pi} \log \sec \theta_1, \end{aligned} \quad y = l + y_1,$$

l'angle  $\theta = \frac{\pi}{2} - \theta_1$  étant donné par la formule

$$\sin \theta = \frac{\varphi_B}{f}.$$

Ces lignes de glissement sont représentées sur la figure 3.

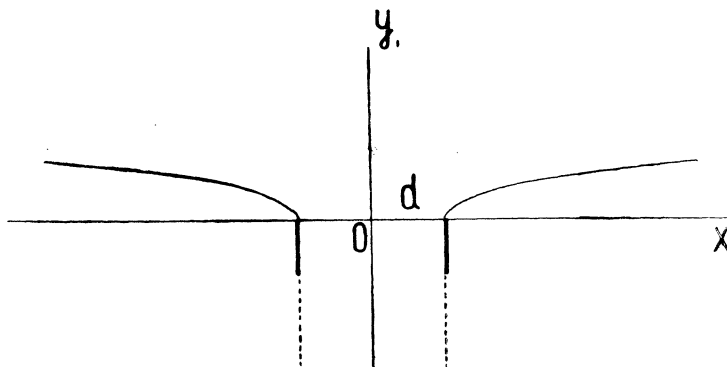


Fig. 3

§ 2. 63. Cas III : le paramètre  $k$  est égal à 1, la distance  $d$  croît indéfiniment.

Il s'ensuit des formules (12) et (15) que dans ce cas  $\varphi_A$  et  $\varphi_B$  tendent tous les deux vers l'infini, mais leur différence  $\varphi_B - \varphi_A = \varphi_0$  reste finie. Les deux plans conservant leur longueur finie, sont rejetés à l'infini et les lignes de glissement le sont

aussi. Pour les analyser il faut attribuer à  $\varphi$  des valeurs plus grandes que  $\varphi_A$  et à  $x$  des valeurs plus grandes que  $d$ . Si l'on pose  $f = \varphi_A + f_1$  et  $x = d + x_1$ , on constate que l'angle  $\theta$  reste fini pour  $\varphi_A$  et  $\varphi_B$  indéfiniment grands, car on peut écrire

$$\cos^2 \theta = \lim_{\substack{\varphi_A \rightarrow \infty \\ \varphi_B \rightarrow \infty}} \left[ \frac{f^2 - \varphi_B^2}{f^2 - \varphi_A^2} \right] = \lim_{\varphi_A \rightarrow \infty} \left[ \frac{(f_1 - \varphi_0)(f_1 - 2\varphi_A + \varphi_0)}{f_1(f_1 + 2\varphi_A)} \right] = \frac{f_1 - \varphi_0}{f_1}.$$

Les seconds membres des équations (16) deviennent indéterminés car

$$E(\theta_1, 1) = \sin \theta_1, \quad K'_{k=1} = E_{k=1} = \frac{\pi}{2}.$$

Pour lever cette indétermination il faut prendre les dérivées du numérateur et du dénominateur par rapport à  $k$  et poser  $k = 1$ . En raison des formules (16)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dk} [E(\theta_1, k)] &= -\frac{1}{k} [F(\theta_1, k) - E(\theta_1, k)], \\ \frac{dK'}{dk} &= \frac{1}{k k'^2} (k^2 K' - E'), \quad \frac{dE'}{dk} = \frac{k}{k'^2} (K' - E') \end{aligned}$$

on obtient les équations des lignes de glissement

$$\begin{aligned} \frac{x_1}{l} &= \frac{2}{\pi + 4} \left[ \tan \theta_1 \sec \theta_1 + \log \tan \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\theta_1}{2} \right) \right], \\ \frac{y - l}{l} &= \frac{4}{\pi + 4} (\sec \theta_1 - 1), \end{aligned}$$

qui coïncident évidemment avec celles de Kirchhoff obtenues pour un seul plan.

#### § 2. 64. Cas IV : le paramètre $k$ est égal à 1, la distance $d$ reste finie.

Dans ce cas

$$l = 0, \quad \varphi_A = \varphi_B > 0, \quad \cos \theta = 1$$

et la formule (14) nous donne immédiatement

$$z = \frac{f}{q_0}, \quad x = \frac{\varphi}{q_0}, \quad y = \frac{\psi}{q_0}.$$

Les lignes de courant sont parallèles à l'axe des  $x$  et les lignes de glissement se confondent avec cet axe.

## § 2. 7. Cas des sillages intérieurs fermés.

Dans le cas des sillages intérieurs fermés, la représentation conforme des plans  $\Omega = -\log q + i\theta$  et  $f = \varphi + i\Psi$  (fig. 4) sur le plan auxiliaire  $t$  donne

$$\frac{df}{dt} = \frac{Ac}{\sqrt{c^2 - t^2}},$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{B}{(b^2 - t^2)\sqrt{a^2 - t^2}},$$

d'où l'on déduit

$$f = Ac \arcsin \frac{t}{c},$$

$$(17) \quad \frac{1}{q} e^{i\theta} = \frac{dz}{df} = \frac{1}{q_1} \cdot \frac{b\sqrt{a^2 - t^2} - it\sqrt{b^2 - a^2}}{a\sqrt{b^2 - t^2}}.$$

En conservant les désignations du § 2. 3 on obtient après l'intégration

$$Z = \frac{Ack_1}{q_1} \left\{ \Pi(u, k_1^2, k) + \frac{1}{k_1^2} [\Pi(u, k_1^2, k) - F(u, k)] \right. \\ \left. + i \left[ \Pi\left(1, -\frac{k'^2}{1 + k_1^2}, k'\right) - K' + \frac{k'}{k_1\sqrt{k^2 + k_1^2}} \log \frac{\sqrt{k^2 + k_1^2} + k_1\sqrt{1 + k^2 u^2}}{k\sqrt{1 + k_1^2 u^2}} \right] \right\},$$

la constante d'intégration étant déterminée d'après les conditions suivantes : pour le point O ( $t = 0$ ,  $u = 0$ ) la partie réelle de  $z$  devient 0 et pour le point C ( $t = c$ ,  $u = \infty$ ) la partie imaginaire de  $z$  s'annule.

Pour obtenir les relations nécessaires entre les paramètres introduits nous remarquons que pour les points A ( $z = d + il$ ), B ( $z = d$ ) et C ( $z = D = \frac{\pi r}{n}$ ) les valeurs correspondantes de  $u$  sont 1,  $\frac{1}{k}$  et  $\infty$ . L'application des formules du § 2. 4. donne :

$$d = \frac{Ack_1}{q_1} \left\{ \Pi(1, k_1^2, k) + \frac{1}{k_1^2} [\Pi(1, k_1^2, k) - K] \right\},$$

$$l = \frac{Ack_1}{q_1} \left[ \Pi\left(1, -\frac{k'^2}{1 + k_1^2}, k'\right) - K' + \frac{k'}{k_1\sqrt{k^2 + k_1^2}} \log \frac{\sqrt{k^2 + k_1^2} + k_1 k'}{k\sqrt{1 + k_1^2}} \right],$$

$$(18) \quad D = \frac{\pi r}{n} = \frac{Ack_1}{q_1} \left\{ \frac{1 + k_1^2}{k_1^2} \left[ \Pi(1, k_1^2, k) - K + \Pi\left(1, \frac{k^2}{k_1^2}, k\right) \right] - \frac{k'}{k_1\sqrt{k^2 + k_1^2}} \frac{\pi}{2} \right\}.$$

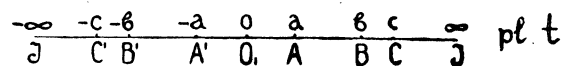
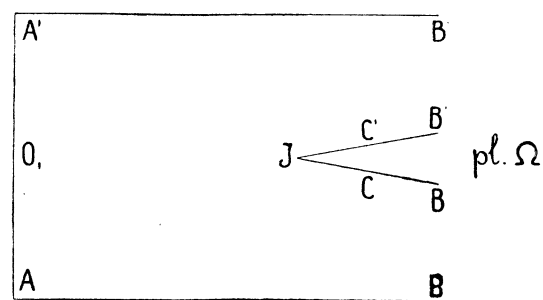
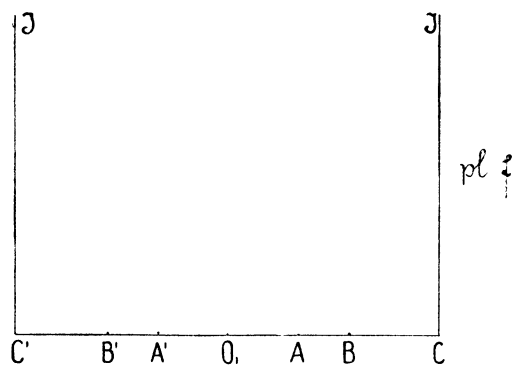
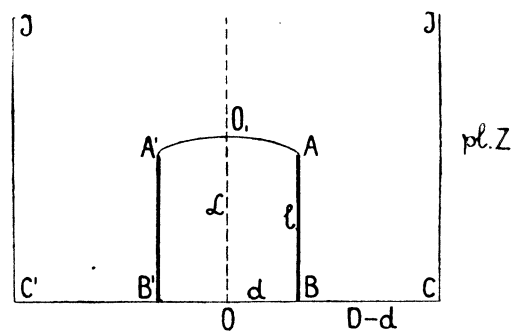


Fig. 4

Le rapport des vitesses sur les lignes de glissement et à l'infini aura l'expression

$$\frac{q_1}{q_0} = \frac{b + \sqrt{b^2 - a^2}}{a} = \frac{k' + \sqrt{1 + k_1^2}}{\sqrt{k^2 + k_1^2}},$$

et l'ordonnée maxima  $L$  des lignes de glissement sera donnée par la formule

$$L - l = \frac{Ac k'}{q_1 \sqrt{k^2 + k_1^2}} \log \frac{\sqrt{1 + k_1^2} (\sqrt{k^2 + k_1^2} + k_1)}{\sqrt{k^2 + k_1^2} + k' k_1}.$$

Le long des lignes de glissement la vitesse est constante et égale à  $q_1$ . On déduit facilement de la formule (17) que

$$\cos^2 \theta = \frac{b^2}{a^2} \frac{a^2 - l^2}{b^2 - l^2} = \frac{1 - u^2}{1 - k^2 u^2},$$

d'où, en considérant le domaine des  $x$  positifs et en introduisant l'angle  $\theta_1$  par la formule  $\theta_1 = \frac{\pi}{2} + \theta$ , on obtient les équations paramétriques des lignes de glissement sous la forme :

$$(19) \begin{cases} \frac{d-x}{l} = M \frac{k'^2}{k^2 + k_1^2} \left[ \Pi \left( \theta_1, -\frac{k^2 + k_1^2}{1 + k_1^2}, k \right) - F(\theta_1, k) \right], \\ \frac{y-l}{l} = M \frac{k'}{\sqrt{k^2 + k_1^2}} \log \frac{\sqrt{1 + k_1^2} [k' k_1 + \sqrt{(k^2 + k_1^2)(1 - k^2 \sin^2 \theta_1)}]}{(k' k_1 + \sqrt{k^2 + k_1^2}) \sqrt{(1 + k_1^2) - (k^2 + k_1^2) \sin^2 \theta_1}}, \\ M^{-1} = \Pi \left( 1, -\frac{k'^2}{1 + k_1^2}, k' \right) - K' + \frac{k'}{k_1 \sqrt{k^2 + k_1^2}} \log \frac{\sqrt{k^2 + k_1^2} + k' k_1}{k \sqrt{1 + k_1^2}}. \end{cases}$$

## § 2. 8. Problème de D. Riabouchinsky.

Pour passer au mouvement plan autour de deux segments de droites parallèles, réunies par des lignes de glissement, problème analysé en tous ses détails par D. Riabouchinsky (17), il suffit d'effectuer un passage à la limite en augmentant indéfiniment le rayon  $r$  du cylindre et en posant  $n = 1$ . L'équation (18) montre que dans ce cas le paramètre  $c$  tend aussi vers l'infini et  $k_1$  vers zéro. En appliquant les formules (13) et en remarquant que

$$\lim_{\substack{c \rightarrow \infty \\ k_1 \rightarrow 0}} c k_1 = a, \quad \lim_{c \rightarrow \infty} u = \frac{l}{a}, \quad \lim_{c \rightarrow \infty} k = \frac{a}{b},$$

$$\lim_{k_1 \rightarrow 0} \frac{1}{k_1} \frac{\sqrt{k^2 + k_1^2} + k_1 \sqrt{1 - k^2 u^2}}{k \sqrt{1 + k_1^2 u^2}} = \frac{1}{k} \sqrt{1 + k^2 u^2},$$

on obtient

$$Z = \frac{Aa}{q_1 k^2} [E(u, k) - k'^2 F(u, k) + i(E' - k^2 K' + k' \sqrt{1 + k^2 u^2})],$$

$$d = \frac{Aa}{q_1 k^2} (E - k'^2 K),$$

$$l = \frac{Aa}{q_1 k^2} (E' - k^2 K' + k'^2),$$

$$L - l = \frac{Aa}{q_1} \cdot \frac{k'}{1 + k'}.$$

Pour transformer les équations (19) des lignes de glissement remarquons que l'expression de l'angle  $\theta$  reste non changée pour  $c = \infty$  et que le rapport des vitesses  $\frac{q_1}{q_0}$  prend la forme

$$\frac{q_1}{q_0} = \sqrt{\frac{1 + k'}{1 - k'}}.$$

On obtient ainsi les équations des lignes de glissement identiques à celles trouvées par D. Riabouchinsky :

$$(20) \quad \begin{cases} \frac{d-x}{l} = M_0 \left[ E(\theta_1, k) - k'^2 F(\theta_1, k) - k^2 \frac{\sin \theta_1 \cos \theta_1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta_1}} \right], \\ \frac{y-l}{l} = M_0 k'^2 \frac{1 - \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta_1}}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta_1}}, \\ M_0^{-1} = E' - k^2 K' + k'^2. \end{cases}$$

En supposant que la longueur  $l$  reste finie, on obtient pour les valeurs limites  $k = 0$  et  $k = 1$  du paramètre  $k$  les cas limites du mouvement, qui correspondent à une distance  $d$  nulle ou infinie. Il est facile de démontrer, comme l'a fait D. Riabouchinsky, que, dans le premier cas, les seconds membres des équations (20) sont nuls et, dans le second cas, ces équations dégénèrent en celles de Kirchhoff.



### CHAPITRE III

#### Problème d'Oseen.

Selon la théorie d'Oseen les sillages entre les obstacles présentent une zone tourbillonnaire et les vitesses aux parois ont la direction du courant à l'infini. Il n'existe pas dans ce cas de lignes de courant sur lesquelles la vitesse soit constante, et, selon la théorie exposée dans le chapitre I, un tel problème, résolu dans le plan, reste valable pour chaque autre surface. Il suffit de remplacer les coordonnées  $x$  et  $y$  du plan par les coordonnées isothermes  $u$  et  $v$  de la surface; bien entendu que les vitesses seront dans le rapport  $1 : \lambda$ .

#### § 3. 1. Fonctions $f$ , $\frac{dz}{df}$ et $z$ .

Considérons de nouveau un courant fluide uniforme d'épaisseur infiniment petite, contournant deux segments de droites sur la surface d'un cylindre, parallèles

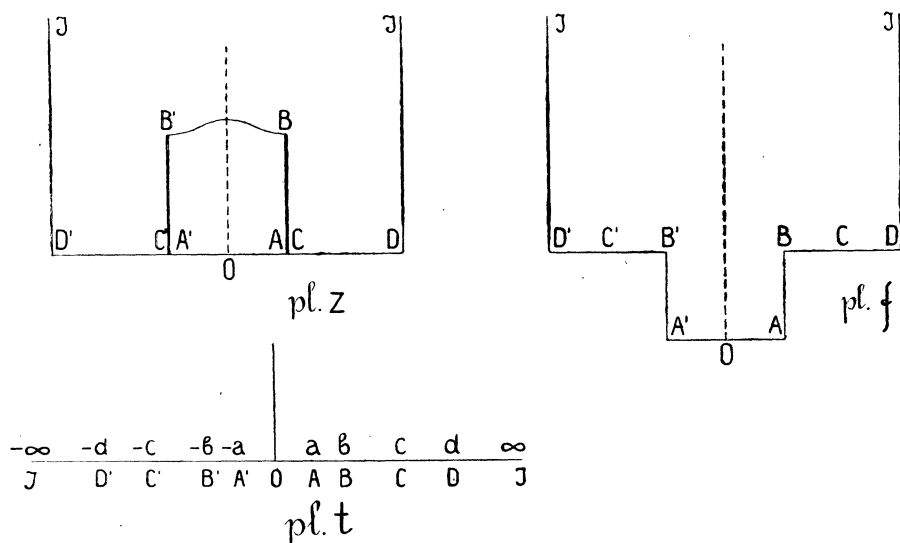


Fig. 5

à sa génératrice. Les plans  $z = x + iy$ ,  $f = \varphi + i\psi$  et le plan auxiliaire  $t$  sont reproduits par les figures 5 et 6, dont la première correspond au cas des sillages intérieurs fermés et la seconde au cas des sillages extérieurs ouverts.

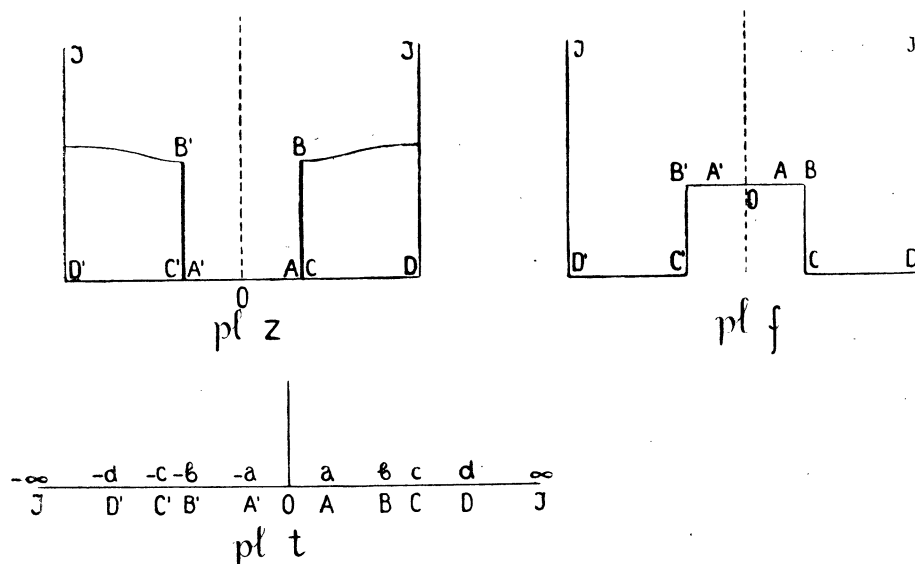


Fig 6

La représentation conforme du plan  $z$  sur le plan  $t$  donne dans les deux cas la même expression

$$\frac{dz}{dt} = \frac{Ad(b^2 - t^2)}{\sqrt{(a^2 - t^2)(c^2 - t^2)(d^2 - t^2)}},$$

et pour le plan  $f$  on obtient dans le premier cas

$$\frac{df}{dt} = \frac{Bd(b^2 - t^2)}{\sqrt{(a^2 - t^2)(b^2 - t^2)(d^2 - t^2)}},$$

et dans le second

$$\frac{d\tilde{f}}{dt} = \frac{Bd(b^2 - t^2)}{\sqrt{(b^2 - t^2)(c^2 - t^2)(d^2 - t^2)}}.$$

Pour la fonction  $\frac{dz}{df} = \frac{1}{q} e^{i\theta}$  on obtient

$$\begin{aligned} \frac{dz}{df} &= \frac{1}{q} e^{i\theta} = \frac{A}{B} \cdot \frac{b^2 - t^2}{\sqrt{(b^2 - t^2)(c^2 - t^2)}}, \\ \frac{dz}{d\tilde{f}} &= \frac{1}{q} e^{i\theta} = \frac{A}{B} \cdot \frac{b^2 - t^2}{\sqrt{(a^2 - t^2)(b^2 - t^2)}}, \end{aligned}$$

d'où l'on tire, en considérant le point  $t = \infty$ ,  $b = 0$ ,  $q = q_0$ ,

$$\frac{1}{q_0} = \frac{A}{B}.$$

En faisant le changement des variables

$$t^2 = \frac{d^2 k_1^2 u^2}{1 + k_1^2 u^2}$$

et en introduisant les paramètres

$$\begin{aligned} k^2 &= \frac{a^2}{c^2} \cdot \frac{d^2 - c^2}{d^2 - a^2}, & k_1^2 &= \frac{a^2}{d^2 - a^2}, & k_2^2 &= \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{d^2 - b^2}{d^2 - a^2}, \\ k'^2 &= 1 - k^2, & k_1'^2 &= 1 - k_1^2, & k_2'^2 &= 1 - k^2, \end{aligned}$$

on obtient après l'intégration

$$\begin{aligned} (1) \quad Z &= \frac{A b^2 d k_1}{ac} \left\{ \Pi(u, k_1^2, k) + \frac{k_2^2}{k_1^2} [\Pi(u, k_1^2, k) - F(u, k)] \right\}, \\ (2) \quad f &= \frac{B b d k_1}{a} \left\{ \Pi(u, k_1^2, k_2) + \frac{k_2^2}{k_1^2} [\Pi(u, k_1^2, k_2) - F(u, k_2)] \right\}, \\ (2') \quad \bar{f} &= \frac{B b d k_1}{c k_2} \left\{ \Pi\left(k_2 u, \frac{k_1^2}{k_2^2}, \frac{k}{k_2}\right) + \frac{k_2^2}{k_1^2} \left[ \Pi\left(k_2 u, \frac{k_1^2}{k_2^2}, \frac{k}{k_2}\right) - F\left(k_2 u, \frac{k}{k_2}\right) \right] \right\}. \end{aligned}$$

où nous avons conservé pour les intégrales elliptiques les désignations du § 2.3.

### § 3.2. Détermination des paramètres.

Il est facile de déterminer le paramètre  $k_2$ ; aux points  $A(t = a, u = 1)$  et  $C(t = c, u = \frac{1}{k})$  les valeurs de  $z$  sont égales. En raison des formules et des relations :

$$\begin{aligned} \Pi\left(\frac{1}{k}, k_1^2, k\right) &= \Pi(1, k_1^2, k) + i \left[ K' - \frac{k_1'^2}{1 + k_1^2} \Pi\left(1, -\frac{k'^2}{1 + k_1^2}, k'\right) \right], \\ F\left(\frac{1}{k}, k\right) &= K + i K' \end{aligned}$$

on obtient l'équation

$$K' - \frac{k_1^2 + k_2^2}{1 + k_1^2} \Pi\left(1, -\frac{k'^2}{1 + k_1^2}, k'\right) = 0$$

d'où l'on tire

$$(3) \quad k_2^2 = \frac{(1 + k_1^2) K' - k_1^2 \Pi\left(1, -\frac{k'^2}{1 + k_1^2}, k'\right)}{\Pi\left(1, -\frac{k'^2}{1 + k_1^2}, k'\right)}.$$

En remplaçant  $k_2$  dans la formule (1) par son expression (3) on obtient

$$(1') \quad Z = \frac{A b^2 dk_1}{ac \Pi\left(1, -\frac{k'^2}{1 + k_1^2}, k'\right)} \left\{ \Pi\left(1, -\frac{k'^2}{1 + k_1^2}, k'\right) F(u, k) + \frac{1 + k_1^2}{k_1^2} K' [\Pi(u, k_1^2, k) - F(u, k)] \right\}.$$

d'où, en considérant le point A ( $z = d$ ,  $t = a$ ,  $u = 1$ ), on obtient pour la distance  $d$  de deux segments l'expression

$$(4) \quad d = \frac{A b^2 dk_1}{ac \Pi\left(1, -\frac{k'^2}{1 + k_1^2}, k'\right)} \left\{ \Pi\left(1, -\frac{k'^2}{1 + k_1^2}, k'\right) K + \frac{1 + k_1^2}{k_1^2} K' [\Pi(1, k_1^2, k) - K] \right\}.$$

Pour déterminer la longueur  $l$  il suffit de remarquer que pour le point B  $z$  est égal à  $d + il$  et  $u$  à  $\frac{1}{k_2}$ . En raison des formules :

$$F\left(\frac{1}{k_2}, k\right) = K + iF\left(\frac{k'_2}{k'}, k'\right),$$

$$\begin{aligned} \Pi\left(\frac{1}{k_2}, k_1^2, k\right) &= \Pi(1, k_1^2, k) \\ &+ i \left[ F\left(\frac{k'_2}{k'}, k'\right) - \frac{k_1^2}{1 + k_1^2} \Pi\left(\frac{k'_2}{k'}, -\frac{k'^2}{1 + k_1^2}, k'\right) \right] \end{aligned}$$

la longueur  $l$  sera donnée par l'expression

$$(5) \quad l = \frac{A b^2 dk_1}{ac \Pi\left(1, -\frac{k'^2}{1 + k_1^2}, k'\right)} \left[ \Pi\left(1, -\frac{k'^2}{1 + k_1^2}, k'\right) F\left(\frac{k'_2}{k'}, k'\right) - K' \Pi\left(\frac{k'_2}{k'}, -\frac{k'^2}{1 + k_1^2}, k'\right) \right].$$

Pour obtenir la relation entre le rayon  $r$  du cylindre et les paramètres introduits, nous considérons le point  $D(z = \frac{\pi r}{n}, t = d, u = \infty)$  et nous obtenons à l'aide des formules (9) du paragraphe 2.4

$$(6) \quad \frac{\pi r}{n} - d = \frac{A b^2 dk_1}{ac \Pi\left(1, -\frac{k'^2}{1+k_1^2}, k'\right)} \left[ \frac{1+k_1^2}{k_1^2} K' \Pi\left(1, \frac{k^2}{k_1^2}, k\right) - K \Pi\left(1, -\frac{k'^2}{1+k_1^2}, k'\right) \right].$$

Les équations (3), (4), (5) et (6), donnant quatre relations entre les paramètres  $\frac{A b^2}{ac}$ ,  $k$ ,  $k_1$  et  $k_2$ , rendent le problème complètement déterminé.

### § 3.3. Cas limite du mouvement plan.

Pour passer au problème du mouvement plan autour de deux segments de droites parallèles il suffit de poser  $n = 1$  et d'effectuer un passage à la limite en augmentant indéfiniment le rayon  $r$  du cylindre. On déduit de l'équation (6) que les paramètres  $d$  et  $r$  tendent simultanément vers l'infini et dans le cas limite nous avons

$$(7) \quad \begin{aligned} k &= \frac{a}{c}, & k_1 &= 0, & k_2 &= \frac{a}{b}, \\ t &= au, & \lim_{\substack{d \rightarrow \infty \\ k_1 \rightarrow 0}} (dk_1) &= a. \end{aligned}$$

En raison des formules (13) du § 2.5 les expressions (1'), (2), (2') et (3) prennent la forme :

$$(8) \quad Z = \frac{Ac}{K'} [E'F(u, k) + K'E(u, k) - K'F(u, k)],$$

$$(9) \quad f = Aq_0 b E(u, k_2),$$

$$(9') \quad \bar{f} = \frac{Aq_0 c}{K'} \left[ E'F\left(k_2 u, \frac{k}{k_2}\right) + K'E\left(k_2 u, \frac{k}{k_2}\right) - K'F\left(k_2 u, \frac{k}{k_2}\right) \right],$$

$$(10) \quad k_2^2 = k^2 \frac{K'}{E'}.$$

Pour déterminer la distance  $d$  et la longueur  $l$  des segments des droites nous rappelons que

$$E'K + K'E - KK' = \frac{\pi}{2}$$

et que la formule récurrente (19)

$$k^2 \Pi(u, -k'^2, k') = E(u, k') - k'^2 \frac{u \sqrt{1-u^2}}{\sqrt{1-k'^2 u^2}}$$

donne dans notre cas

$$k^2 \Pi\left(\frac{k'_2}{k'}, -\frac{k'^2}{1+k_1^2}, k'\right)_{k_1=0} = E\left(\frac{k'_2}{k'}, k'\right) - \sqrt{\frac{(K' - E')(E' - k^2 K')}{K' E'}},$$

car

$$k_2^2 = k^2 \frac{K'}{E'}.$$

On obtient ainsi

$$(11) \quad \begin{cases} d = \frac{Ac}{K'} \frac{\pi}{2}, \\ l = \frac{Ac}{K'} \left[ E' F\left(\frac{k'_2}{k'}, k'\right) - K' E\left(\frac{k'_2}{k'}, k'\right) + \sqrt{\frac{K'}{E'}} \sqrt{(K' - E')(E' - k^2 K')} \right], \\ \frac{d}{l} = \frac{2}{\pi} \left[ E' F\left(\frac{k'_2}{k'}, k'\right) - K' E\left(\frac{k'_2}{k'}, k'\right) + \sqrt{\frac{K'}{E'}} \sqrt{(K' - E')(E' - k^2 K')} \right]. \end{cases}$$

Le paramètre  $k$  variant de 0 à 1,  $k_2$  varie entre les mêmes limites 0 et 1 et les valeurs correspondantes du rapport  $\frac{l}{d}$  de l'infini à 0. Le tableau ci-dessous donne les valeurs de  $k_2$  et de  $\frac{l}{d}$  pour quelques valeurs du paramètre  $k = \sin \alpha$  :

$\alpha$	$k$	$k_2$	$\frac{l}{d}$
0°.....	0	0	$\infty$
10°.....	0.17	0.30	0.89
20°.....	0.34	0.51	0.54
30°.....	0.50	0.67	0.35
40°.....	0.64	0.78	0.22
50°.....	0.77	0.87	0.13
60°.....	0.87	0.93	0.07
70°.....	0.94	0.97	0.03
80°.....	0.98	0.99	0.01
90°.....	1	1	0

§ 3.4. Valeurs limites du paramètre  $k$ .

Il est du plus grand intérêt d'analyser le mouvement pour les valeurs limites du paramètre  $k$ . En supposant que la longueur  $l$  reste finie nous pouvons distinguer trois cas différents : 1°  $k = 0$ ,  $d = 0$ ; 2°  $k = 1$ ,  $d = \infty$ ; 3°  $k = 1$ ,  $l = 0$ .

§ 3.41. Cas I : le paramètre  $k$  et la distance  $d$  sont nuls.

Dans ce cas nous avons

$$K = E = \frac{\pi}{2}, \quad K' = \infty, \quad E' = 1.$$

Il est facile de voir que

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{K - E}{k^2} = \frac{\pi}{4}$$

et à l'aide de la relation de Legendre

$$K'E + E'K - K'K = \frac{\pi}{2}$$

on obtient facilement que

$$\lim_{k \rightarrow 0} k^2 K' = 0.$$

Les expressions (7) et (11) montrent que les paramètres  $a$ ,  $b$  et  $k$  sont 0, mais  $c \neq 0$  car  $\frac{l}{Ac}$  reste fini et  $\frac{k^2}{b^2} = \frac{c^2}{b^2} = \frac{K'}{E'}$  devient indéfiniment grand.

Les formules (8), (9) et (9') pour  $z$ ,  $f$  et  $\bar{f}$  deviennent indéterminées car  $u = \frac{t}{a} = \frac{t}{ck}$  devient indéfiniment grand pour  $k = 0$ . En prenant les dérivées du numérateur et du dénominateur de l'expression (8) par rapport à  $k$  à l'aide des formules : (20)

$$\begin{aligned} \frac{dK'}{dk} &= \frac{1}{k'^2} \left( kK' - \frac{1}{k} E' \right), \\ \frac{dE'}{du} &= \frac{k}{k'^2} (K' - E'), \\ \frac{d}{dk} F(u, k) &= -\frac{1}{k} F(u, k) + \frac{1}{kk'} E(u, k) - \frac{k}{k'^2} \cdot \frac{u \sqrt{1-u^2}}{\sqrt{1-k^2 u^2}} \\ &\quad - \frac{1}{k} \frac{u}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2 u^2)}}, \\ \frac{d}{dk} E(u, k) &= -\frac{1}{k} \left[ F(u, k) - E(u, k) + \frac{u(1-k^2 u^2)}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2 u^2)}} \right] \end{aligned}$$

on obtient après quelques simplifications

$$z = \frac{AcE'}{k'^2} \cdot \frac{u(1-k^2u^2)}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}_{k=0}^{u=\infty}$$

En posant

$$u = \frac{t}{ck}$$

on passe à la limite en faisant  $k = 0$  et l'on obtient

$$z = \Lambda \sqrt{t^2 - c^2}.$$

Une transformation analogue peut être effectuée sans difficultés pour obtenir la fonction  $\bar{f}$  dans le cas limite considéré. On obtient ainsi

$$\bar{f} = \Lambda q_0 \sqrt{t^2 - c^2};$$

il en résulte que

$$z = \frac{f}{q_0}, \quad x = \frac{\varphi}{q_0}, \quad y = \frac{\psi}{q_0}.$$

Quant à la fonction  $f$  il est évident que le plan  $f$  se confond à la limite avec le plan auxiliaire  $t$ , et nous aurons

$$f = \Lambda q_0 t.$$

En remarquant que la longueur  $l$  des segments est dans ce cas égale à  $\Lambda c$ , on obtient

$$z = \frac{l}{c} \sqrt{t^2 - c^2} = \sqrt{\frac{f^2}{q_0^2} - l^2}.$$

Ces cas limites de mouvement correspondent aux seuls cas possibles de mouvement autour d'un seul obstacle.

§ 3. 42. Cas II : le paramètre  $k$  est égal à 1 et la distance  $d$  croît indéfiniment.

Dans ce cas nous avons

$$k = 1, \quad k_1 = 1, \quad K' = E' = \frac{\pi}{2}.$$



Il résulte des formules (7) que

$$a = \infty, \quad b = \infty, \quad c = \infty,$$

mais les différences

$$c - a = m, \quad c - b = n, \quad b - a = m - n$$

restent finies. Calculons le rapport

$$\frac{k_2'^2}{k'^2} = \frac{K'}{E'} - \frac{K' - E'}{k'^2 E'}.$$

L'expression  $\frac{K' - E'}{k'^2 E'}$  devient indéterminée pour  $k' = 0$ , mais après la différentiation du numérateur et du dénominateur par rapport à  $k'$  à l'aide des formules (20)

$$\frac{dK'}{dk'} = \frac{1}{k'^2 k'} (E' - k'^2 K'),$$

$$\frac{dE'}{dk'} = \frac{1}{k'} (E' - K'),$$

on obtient pour  $k' = 0$

$$\lim_{k' \rightarrow 0} \frac{K' - E'}{k'^2 E'} = \frac{1}{2}$$

et

$$\lim_{k' \rightarrow 0} \frac{k_2'^2}{k'^2} = \frac{1}{2}.$$

D'autre part

$$\frac{k_2'^2}{k'^2} = \frac{c^2(m-n)(2c-m-n)}{m(2c-m)(c-n)^2}.$$

ce que donne pour  $c = \infty$

$$\lim_{k' \rightarrow 0} \frac{k_2'^2}{k'^2} = \frac{m-n}{m}.$$

Il résulte de ces deux formules que

$$m = 2n.$$

Il est évident que dans l'intervalle fini le mouvement est donné par les formules

$$z = At, \quad f = Aq_0 t, \quad \bar{f} = Aq_0 t,$$

mais nos formules nous permettent d'analyser aussi le mouvement près des plans rejetés à l'infini. Si l'on pose

$$z_i = z - d, \quad t_i = t - a$$

où  $z_i$  et  $t_i$  restent finis quand  $k$  tend vers 1, et si l'on fait le changement de variables

$$u^2 = \frac{1}{1 - k'^2 u_1^2},$$

on obtient pour  $z_i$ , en raison des formules suivantes :

$$\begin{aligned} F(u, k) &= K + iF(u_1, k'), \\ E(u, k) &= E + i \left[ F(u_1, k') - E(u_1, k') + k'^2 \frac{u_1 \sqrt{1 - u_1^2}}{\sqrt{1 - k'^2 u_1^2}} \right], \end{aligned}$$

l'expression

$$z_i = i \frac{Ac k'^2}{K'} \left[ \frac{E' F(u_1, k') - K' E(u_1, k')}{k'^2} + K' \frac{u_1 \sqrt{1 - u_1^2}}{\sqrt{1 - k'^2 u_1^2}} \right].$$

Pour passer à la limite nous remarquons que

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{k' \rightarrow 0 \\ c \rightarrow \infty}} c k'^2 &= 2m, & \lim_{k' \rightarrow 0} u_1^2 &= \frac{t_1}{m}, \\ \lim_{k' \rightarrow 0} \frac{1}{k'^2} [E' F(u_1, k') - K' E(u_1, k')] &= -\frac{\pi}{4} u_1 \sqrt{1 - u_1^2}, \end{aligned}$$

et nous obtenons

$$z_i = An \sqrt{\frac{t_1}{n} \left( \frac{t_1}{n} - 2 \right)},$$

On transforme facilement la fonction  $f$  par un procédé analogue. En remarquant que pour le point A

$$f_A = Aq_0 b E(1, k_2),$$

on voit que  $f_A$  tend vers l'infini quand  $k_2$  tend vers 1 et  $b$  vers infini. En posant

$$f_i = f - f_A,$$

où  $f_1$  reste fini quand  $f_\lambda$  tend vers infini, et en faisant le changement de variables

$$u^2 = \frac{1}{1 - k_2'^2 u_2^2}$$

on obtient pour  $f_1$  l'expression

$$f_1 = i A q_0 b k_2'^2 \left[ \frac{F(u_2, k_2') - E(u_2, k_2')}{k_2'^2} + \frac{u_2 \sqrt{1 - u_2^2}}{\sqrt{1 - k_2'^2 u_2^2}} \right].$$

En remarquant que

$$\lim_{\substack{b \rightarrow \infty \\ k_2 \rightarrow 0}} b k_2'^2 = 2n, \quad \lim_{k' \rightarrow 0} u_2^2 = \frac{t_1}{n},$$

$$\lim_{k_2' \rightarrow 0} \frac{1}{k_2'^2} [F(u_2, k_2') - E(u_2, k_2')] = \frac{1}{2} (\text{arc sin } u_2 - u_2 \sqrt{1 - u_2^2}),$$

nous passons à la limite en posant  $k' = 0$  et nous obtenons

$$f = A q_0 n \left[ \sqrt{\frac{t_1}{n} \left( \frac{t_1}{n} - 1 \right)} + i \text{arc sin } \sqrt{\frac{t_1}{n}} \right].$$

Pour transformer la fonction  $\bar{f}$  nous remarquons que pour le point B

$$\bar{f}_b = \frac{A q_0 c}{K'} \left[ E' F \left( 1, \frac{k}{k_2} \right) + K' E \left( 1, \frac{k}{k_2} \right) - K' F \left( 1, \frac{k}{k_2} \right) \right].$$

En posant  $\bar{f}_1 = \bar{f} - \bar{f}_b$ , où  $\bar{f}_1$  reste fini quand  $\bar{f}_b$  tend avec  $c$  à l'infini, et en faisant le changement de variables

$$k_2^2 u^2 = \frac{1}{1 - \left( 1 - \frac{k^2}{k_2^2} \right) u_3^2},$$

on obtient pour  $\bar{f}_1$  l'expression

$$\bar{f}_1 = i \frac{A q_0 c}{K'} \left[ E' F \left( u_3, \sqrt{1 - \frac{k^2}{k_2^2}} \right) - K' E \left( u_3, \sqrt{1 - \frac{k^2}{k_2^2}} \right) + \frac{\left( 1 - \frac{k^2}{k_2^2} \right) u_3 \sqrt{1 - u_3^2}}{\sqrt{1 - \left( 1 - \frac{k^2}{k_2^2} \right) u_3^2}} \right],$$

ce que l'on peut écrire, en tenant compte de la formule (10),

$$\bar{f}_1 = i A q_0 c \left( 1 - \frac{k^2}{k_1^2} \right) \left[ -F \left( u_3, \sqrt{1 - \frac{k^2}{k_2^2}} \right) + \frac{F \left( u_3, \sqrt{1 - \frac{k^2}{k_2^2}} \right) - E \left( u_3, \sqrt{1 - \frac{k^2}{k_2^2}} \right)}{1 - \frac{k^2}{k_2^2}} + \frac{u_3 \sqrt{1 - u_3^2}}{\sqrt{1 - \left( 1 - \frac{k^2}{k_2^2} \right) u_3^2}} \right].$$

Pour passer à la limite nous remarquons que

$$\lim_{\substack{c \rightarrow \infty \\ \frac{k}{k_2} \rightarrow 1}} c \left( 1 - \frac{k^2}{k_2^2} \right) = 2n, \quad \lim_{k' \rightarrow 0} u_3^2 = \frac{l_1}{n} - 1,$$

$$\lim_{\frac{k}{k_2} \rightarrow 1} \frac{F\left(u_3, \sqrt{1 - \frac{k^2}{k_2^2}}\right) - E\left(u_3, \sqrt{1 - \frac{k^2}{k_2^2}}\right)}{1 - \frac{k^2}{k_2^2}} = \frac{1}{2} (\arcsin u_3 - u_3 \sqrt{1 - u_3^2})$$

et nous obtenons

$$\bar{f}_1 = A q_0 n \left[ \sqrt{\left(\frac{l_1}{n} - 1\right) \left(\frac{l_1}{n} - 2\right)} - i \arcsin \sqrt{\frac{l_1}{n} - 1} \right].$$

Si l'on tient compte de la position du point zéro sur les plans  $z_1$ ,  $f_1$ ,  $\bar{f}_1$  et  $t_1$ , on reconnaît facilement, que les formules obtenues dans ce cas limite coïncident avec celles d'Oseen trouvées pour un seul plan.

### § 3. 43. Cas III : La longueur $l$ des segments est égale à 0.

Dans le cas où le paramètre  $k$  est égal à 1 et la distance  $d$  de deux segments de droites reste finie nous aurons  $l = 0$ ,  $a = b = c$ ,  $k_2 = 1$  et le mouvement est donné par les formules

$$z = \frac{f}{q_0}, \quad x = \frac{\varphi}{q_0}, \quad y = \frac{\psi}{q_0}.$$

### § 3. 5. Résumé.

En résumant les résultats obtenus dans les deux derniers chapitres on voit qu'on peut passer d'une façon continue du cas, où la distance mutuelle de deux segments de droites sur un cylindre est égale à 0, au cas, où cette distance est égale à  $2\pi r$ . Ces deux cas limites sont les seuls où les deux segments se confondent et où le mouvement devient un mouvement autour d'un seul segment. On voit par les formules obtenues que les solutions de ces deux cas sont triviales. Si la distance mutuelle de deux segments est égale à 0 le mouvement est le mouvement bien connu d'un fluide

contournant un segment de droite. Si cette distance est égale à  $2\pi r$ , les lignes limitant le sillage décrivent deux cercles parallèles sur la surface du cylindre. Ce dernier cas est particulièrement intéressant, car on sait que les lignes de courant doivent être, en général, tangentes aux sommets des obstacles considérés.

Les problèmes étudiés par Kirchhoff et par Oseen ne correspondent pas au problème du mouvement autour d'un seul obstacle, mais supposent implicitement un deuxième obstacle, symétrique au premier, sur lequel se referment les lignes limitant le sillage. Cet obstacle, restant dans notre problème sur la surface du cylindre à une distance finie, s'éloigne à l'infini dans le cas de mouvement plan, quand le rayon du cylindre croît indéfiniment. Remarquons encore que nos formules générales permettent d'analyser aussi le mouvement autour des obstacles rejetés à l'infini. L'interprétation du mouvement, ainsi présentée sur la surface du cylindre, échappe évidemment aux difficultés et contradictions des théories analysées dans le § 2.1 du chapitre précédent.

---

## CHAPITRE IV

### Problème des sillages sur des surfaces courbes.

#### § 4. 1. Mouvement discontinu sur des surfaces courbes et mouvement plan correspondant.

Supposons l'élément linéaire d'une surface quelconque  $S$  donné dans les coordonnées isothermes  $u$  et  $v$  sous la forme

$$ds^2 = \lambda^2 (du^2 + dv^2),$$

$\lambda$  étant une fonction connue de  $u$  et de  $v$ . Pour représenter conformément la surface  $S$  sur le plan il suffit d'envisager deux fonctions complexes  $Z = u + iv$  et  $z = x + iy$  sur la surface  $S$  et dans le plan et de poser  $Z = z$ . On ramène ainsi l'analyse d'un mouvement quelconque sur la surface courbe à l'analyse du mouvement plan correspondant. Nous avons démontré, dans le Chapitre I, que, si l'on trouve les fonctions  $\varphi(x, y)$  et  $\Psi(x, y)$  du mouvement plan, on obtient les fonctions cherchées  $\varphi(u, v)$  et  $\Psi(u, v)$  par un simple changement des variables  $x$  et  $y$  en  $u$  et  $v$ . Dans ce cas les lignes de courant et les lignes équipotentiellles conserveront les mêmes équations, mais les vitesses ne seront plus les mêmes dans les deux mouvements; elles seront dans le rapport  $1 : \lambda$ .

L'équation de Bernouilli conservant la même forme

$$p - \frac{1}{2}q^2 = p_0 - \frac{1}{2}q_0^2$$

dans le cas du mouvement sur une surface courbe, on voit qu'en principe rien ne s'oppose à la possibilité d'un mouvement avec des sillages sur une surface quelconque. Mais la méthode générale, indiquée plus haut, ne peut plus être appliquée à la recherche d'un tel mouvement, car la vitesse, qui restait constante le long des lignes de glissement dans le mouvement plan, serait multipliée par  $\lambda$  et deviendrait ainsi une fonction de  $u$  et de  $v$ .

Pour échapper à ces difficultés changeons un peu les données du problème plan. Supposons que deux ou plusieurs corps se trouvent placés dans un courant fluide uniforme à l'infini et que le long des lignes de glissement, qui réunissent ces corps,

la vitesse n'est plus constante mais proportionnelle à  $\lambda(x, y)$ . Il est manifeste qu'un tel mouvement ne correspond plus à une zone d'eau morte derrière les obstacles considérés; cette zone doit être nécessairement tourbillonnaire. Nous ne nous arrêtons pas sur les propriétés d'un tel mouvement, car il joue un rôle secondaire dans notre problème. C'est un mouvement fictif, qui sert seulement à l'étude du mouvement réel sur une surface courbe.

Il est évident que si l'on trouve les fonctions  $\varphi(x, y)$  et  $\Psi(x, y)$ , solutions du problème ainsi posé, on obtiendra les fonctions  $\varphi(u, v)$  et  $\Psi(u, v)$  du mouvement correspondant sur la surface en remplaçant simplement  $x$  et  $y$  par  $u$  et  $v$ . Les vitesses de deux mouvements étant en rapport  $1 : \lambda$  on aura la vitesse constante le long des lignes de glissement réunissant les obstacles sur la surface courbe.

#### § 4. 2. Problème mixte-inverse.

Nous sommes conduits ainsi au problème suivant. Deux ou plusieurs obstacles, dont les formes sont connues, sont immergés dans un courant fluide uniforme à l'infini. On connaît 1° la fonction  $\Psi$  sur les parties des obstacles qui restent en contact avec le liquide en mouvement ( $\Psi$  reste constant sur ces parties des obstacles), 2° les fonctions  $\Psi$  et  $\frac{d\Psi}{dn} = q$  sur les lignes de glissement ( $\Psi$  est constant sur ces lignes et  $\frac{d\Psi}{dn}$  est proportionnel à  $\lambda$ , fonction connue de  $x$  et de  $y$ ). Le problème consiste en la détermination des lignes de glissement d'après ces conditions. C'est là un problème inverse à ceux de Dirichlet et de Neumann. Il a été formulé récemment par Riabouchinsky (21).

Introduisons la fonction

$$\Omega = \log \frac{dz}{df} = -\log q + i\theta,$$

où  $f = \varphi + i\Psi$  est le potentiel complexe,  $q$  la vitesse et  $\theta$  l'angle que fait la vitesse avec l'axe des  $x$ . On connaît la partie réelle de cette fonction sur les lignes de glissement et sa partie imaginaire sur les autres parties de la frontière. Une fois  $\Omega$  connue, on obtient la fonction  $z$  par une simple intégration

$$z = \int e^{\frac{\Omega}{2}} df.$$

On est amené ainsi au problème mixte direct. Pour traiter ce problème nous suivrons la méthode qui fut indiquée par Volterra (22) et développée par Signorini (23) et Demtchenko (24).

La méthode Signorini-Demtchenko est la suivante. On multiplie la fonction  $\Omega$  par une fonction auxiliaire analytique  $T$ , qui prend des valeurs réelles sur les lignes de glissement et des valeurs imaginaires pures sur les autres parties de la frontière. La partie réelle du produit  $\Omega T$  étant égale à  $-T \log q$  sur les lignes de glissement et  $\theta T$  sur les autres parties de la frontière, le problème mixte direct se trouve réduit au problème de Dirichlet pour le domaine  $\Omega$ . Nous ne nous arrêtons pas sur les conditions nécessaires et suffisantes d'existence de la solution et renvoyons pour ce sujet au Mémoire de Demtchenko, *Problèmes mixtes harmoniques en Hydrodynamique des fluides parfaits*, cité plus haut (24).

La formule générale, donnant la fonction holomorphe  $F(t)$  dans le demi-plan supérieur  $t = t' + it''$  d'après les valeurs  $F'(t')$  de sa partie réelle sur l'axe réel, peut être mise sous la forme

$$(1) \quad F(t) = \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F'(t') dt'}{t - t'} + i\beta_0.$$

On obtient cette formule en se servant de la formule donnant la fonction holomorphe à l'intérieur du cercle unitaire  $|r| = 1$  d'après les valeurs  $F'(\varepsilon)$  de la partie réelle sur le cercle [voir Villat (25)].

$$F(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F'(\varepsilon) \frac{1 + re^{-i\varepsilon}}{1 - re^{-i\varepsilon}} d\varepsilon + i\beta'_0.$$

Il suffit d'utiliser la formule

$$z = \frac{i - t}{i + t}$$

qui effectue la représentation conforme du domaine circulaire sur le demi-plan supérieur  $t$ .

On peut aussi obtenir la formule (1) en appliquant le théorème de Cauchy à l'aire limitée par le demi-cercle de rayon  $R$  et en augmentant ensuite infiniment le rayon  $R$ .

Il est facile de construire la fonction auxiliaire  $T(t)$ , analytique, s'annulant à l'infini, prenant sur les lignes de glissement les valeurs réelles et sur les autres parties de la frontière les valeurs imaginaires pures. Désignons par  $\alpha_\sigma$  et  $\beta_\sigma$  ( $\sigma = 1, 2, 3, \dots, n$ ) les extrémités des segments  $\omega_\sigma$  qui correspondent sur l'axe réel  $t'$  aux lignes de glissement. La fonction

$$T(t) = \frac{iP(t)}{\prod_{\sigma=1}^n \sqrt{(t - \alpha_\sigma)(t - \beta_\sigma)}}$$



où  $P(t)$  est un polynôme à coefficients réels dont le degré est plus petit que  $n$ , satisfait bien à toutes ces conditions.

En appliquant la formule (1) au produit  $\Omega(t)T(t)$  on obtient

$$\Omega(t) = \frac{i}{\pi} \cdot \frac{1}{T(t)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{c(t') T(t') dt'}{t - t'},$$

où

$$c(t') = -\log q(t')$$

sur les segments  $\omega_\sigma$  et

$$c(t') = i\theta(t')$$

sur les autres parties de l'axe  $t'$ .

#### § 4. 3. L'équation intégral-différentielle du problème.

Désignons par  $q_\sigma \lambda(x, y)$  les vitesses sur les lignes de glissement et soit  $\Omega_\sigma(t)$  la fonction  $-\log q + i\theta$  dans le cas où les vitesses sur les lignes de glissement restent constantes et égales à  $q_\sigma$ . Il est manifeste que la fonction  $\Omega(t)$ , résolvant le problème considéré, peut être mise sous la forme

$$(2) \quad \Omega(t) = \Omega_0(t) - \frac{i}{\pi} \frac{1}{T(t)} \sum_{\sigma=1}^n \int_{\omega_\sigma} \frac{\log \lambda_\sigma \cdot T(t')}{t - t'} dt'.$$

En remarquant que

$$\Omega(t) = \log \frac{dz}{df}$$

et que la fonction  $f = \varphi + i\Psi$  peut être déterminée par la méthode de Schwartz-Christoffel et conserve la même forme quelle que soit la vitesse sur les lignes de glissement, on obtient l'équation intégral-différentielle, résolvant le problème, sous la forme

$$\log \frac{dz}{dt} = \log \frac{df}{dt} + \Omega_0(t) + \frac{i}{\pi} \frac{1}{T(t)} \sum_{\sigma=1}^n \int_{\omega_\sigma} \frac{\log \lambda_\sigma \cdot T(t')}{t - t'} dt'.$$

Cette équation ne peut être résolue par des méthodes habituelles, car la fonction  $\lambda_\sigma$ , qui intervient sous le signe de l'intégrale, est connue comme fonction de  $x$  et de  $y$  mais non de  $t'$  et  $t''$ . L'analyse d'une telle équation présente beaucoup de diffi-

cultés et nous nous bornerons, dans ce qui suit, à l'étude des cas où la fonction  $\lambda$  est voisine de l'unité, ce qui correspond au mouvement sur des surfaces peu distinctes d'une surface développable.

#### § 4. 4. Solutions approximatives dans le cas où la surface courbe diffère peu d'une surface développable.

Les difficultés indiquées plus haut peuvent être surmontées dans le cas où le mouvement fluide se produit sur une surface  $S$  peu distincte d'une surface développable. En effet, le coefficient  $\lambda$  qui intervient dans l'expression de l'élément linéaire d'une telle surface

$$ds^2 = \lambda^2(du^2 + dv^2)$$

a, dans ce cas, une valeur voisine de l'unité et peut être mis sous la forme

$$\lambda = 1 + \varepsilon \lambda_1,$$

où  $\lambda_1$  est une fonction connue de  $u$  et de  $v$  et  $\varepsilon$  est une constante de valeur très petite dont nous négligeons les carrés et les puissances plus hautes. Effectuons la représentation conforme de la surface  $S$  sur le plan  $z = x + iy$  et introduisons le demi-plan auxiliaire  $t = t' + it''$ ;  $\lambda_1$  devient une fonction connue de  $x$  et de  $y$ . Aux lignes de glissement sur la surface  $S$  correspondent d'une part dans le plan  $t$  les segments  $\omega_\sigma$  ( $\sigma = 1, 2, 3, \dots, n$ ) sur l'axe réel  $t'$  et d'autre part, dans le plan  $z$ , les lignes le long desquelles les vitesses sont

$$q_\sigma \lambda = q_\sigma (1 + \varepsilon \lambda_1),$$

$q_\sigma$  ( $\sigma = 1, 2, 3, \dots, n$ ) étant des constantes.

La représentation conforme du plan  $f = \varphi + i\Psi$  sur le demi-plan  $t$  ne présente aucune difficulté car  $\lambda$  n'intervient pas dans les formules. Quant à la fonction  $\Omega(t)$ , la formule (2) nous donne

$$(3) \quad \Omega(t) = \Omega_0(t) - \frac{i}{\pi} \frac{1}{T(t)} \sum_{\sigma=1}^n \int_{\omega_\sigma}^{\omega_\sigma} \frac{\log(1 + \varepsilon \lambda_1) T(t')}{t - t'} dt',$$

où  $\Omega_0(t)$  est une fonction bien déterminée de  $t$  qui correspond à la fonction  $\Omega$  dans le cas où les vitesses le long des lignes de glissement restent constantes et égales à  $q_\sigma$ . En remarquant que

$$\log(1 + \varepsilon \lambda_1) = \varepsilon \lambda_1 - \varepsilon^2 \frac{\lambda_1^2}{2} + \dots$$

et en se contentant d'une approximation de premier ordre par rapport à  $\varepsilon$ , on ramène l'équation (3) à la forme

$$(3') \quad \Omega(t) = \Omega_0(t) + \varepsilon \Omega_1(t),$$

où  $\Omega_1(t)$  désigne l'expression

$$(4) \quad \Omega_1(t) = \frac{i}{\pi} \frac{1}{T(t)} \sum_{\sigma=1}^n \int_{\gamma_\sigma}^{\alpha_\sigma} \frac{\lambda_1(x, y) T(t')}{t - t'} dt'.$$

Le second terme de l'expression (3'), ayant  $\varepsilon$  comme facteur, est de premier ordre par rapport au terme  $\Omega_0(t)$  et reste pour le moment inconnu, car l'on ne connaît pas  $\lambda_1$  en fonction de  $t'$ .

La fonction  $z$ , déterminée par la formule

$$z = \int e^{\Omega} \frac{df}{dt} dt = \int e^{\Omega_0 + \varepsilon \Omega_1} \frac{df}{dt} dt$$

peut être mise sous la forme suivante :

$$(5) \quad z = z_0 + \varepsilon z_1,$$

car la même approximation qu'auparavant nous donne

$$e^{\varepsilon \Omega_1} = 1 + \varepsilon \Omega_1 + \dots$$

La fonction

$$z_0 = \int e^{\Omega_0} \frac{df}{dt} dt$$

peut être calculée directement et coïncide évidemment avec celle déterminant le mouvement principal, où les vitesses restent constantes le long des lignes de glissement. La fonction

$$(6) \quad z_1 = \int \Omega_1 e^{\Omega_0} \frac{df}{dt} dt$$

reste inconnue, mais étant multipliée par  $\varepsilon$  rend le second terme de l'expression (5) très petit par rapport au premier.

Si l'on sépare les parties réelles et imaginaires de l'équation (5), on obtient

$$x = x_0 + \varepsilon x_1,$$

$$y = y_0 + \varepsilon y_1,$$

où  $x_0, y_0, x_1, y_1$  sont des fonctions de  $t'$  et  $t''$ . La fonction  $\lambda_1(x, y)$  peut donc être mise sous la forme

$$\lambda_1(x, y) = \lambda_1(x_0 + \varepsilon x_1, y_0 + \varepsilon y_1) = \lambda_1(x_0, y_0) + \varepsilon \left( x_1 \frac{\partial \lambda_1}{\partial x} + y_1 \frac{\partial \lambda_1}{\partial y} \right) + \dots$$

Il suffit de ne garder que le premier membre de ce développement, car dans l'expression (3') de  $\Omega$  la fonction  $\lambda_1$  est multipliée elle-même par  $\varepsilon$ .

On arrive donc au résultat suivant.

La déformation des lignes de glissement, due au fait que les vitesses le long de ces lignes, restant voisines des valeurs constantes  $q_\sigma$ , deviennent fonctions connues de  $x$  et de  $y$  de la forme

$$q_\sigma [1 + \varepsilon \lambda_1(x, y)],$$

peut être calculée, avec une approximation de premier ordre par rapport à  $\varepsilon$ , en remplaçant  $x$  et  $y$  dans l'expression de  $\lambda_1$  par des valeurs  $x_0$  et  $y_0$ , qui correspondent au mouvement principal, où les vitesses le long des lignes de glissement restent constantes.

Il résulte de ce qui précède que, dès que l'on connaît les équations paramétriques des lignes de glissement

$$x_0 = x_0(t')$$

$$y_0 = y_0(t')$$

dans le cas du mouvement sur une surface développable, la fonction  $\lambda_1(x, y)$ , qui caractérise une surface voisine quelconque, devient, avec une approximation suffisante, une fonction connue de  $t'$ . D'après les formules (4) et (6) on calcule les fonctions  $\Omega_1$  et ensuite  $z_1 = x_1 + iy_1$ . Les équations paramétriques des lignes de glissement sur la surface considérée auront la forme

$$u = x = x_0(t') + \varepsilon x_1(t'),$$

$$v = y = y_0(t') + \varepsilon y_1(t').$$

Il est manifeste que la méthode exposée peut être facilement généralisée en ce qui concerne l'ordre de l'approximation par rapport à  $\varepsilon$ . En effet, soit

$$\log \lambda = \varepsilon \lambda_1 + \varepsilon^2 \lambda_2 + \varepsilon^3 \lambda_3 + \dots$$

le développement de  $\log \lambda$  suivant les puissances croissantes de  $\varepsilon$ . Il est évident que les fonctions  $\Omega$  et  $z$  peuvent être ramenées à la forme

$$\Omega(t) = \Omega_0(t) + \varepsilon \Omega_1(t) + \varepsilon^2 \Omega_2(t) + \dots$$

$$z(t) = z_0(t) + \varepsilon z_1(t) + \varepsilon^2 z_2(t) + \dots$$

Connaissant  $\Omega_0$  et  $z_0$  on calcule  $\lambda_1$  et ensuite  $\Omega_1$  et  $z_1$ ; connaissant ces dernières fonctions, on détermine  $\lambda_2$  et ensuite  $\Omega_2$  et  $z_2$ ; et ainsi de suite. On obtient donc les équations paramétriques des lignes de glissement sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} x &= x_0(t') + \varepsilon x_1(t') + \varepsilon^2 x_2(t') + \dots \\ y &= y_0(t') + \varepsilon y_1(t') + \varepsilon^2 y_2(t') + \dots \end{aligned}$$

Dans l'exemple qui suit, nous ne nous arrêterons que sur le calcul des deux premiers termes de ces séries.

#### § 4. 5. Exemple. Surface de révolution voisine d'un cylindre circulaire.

Effectuons une application de la méthode exposée dans le paragraphe précédent. Arrêtons-nous sur le cas des surfaces de révolution et considérons une surface voisine d'un cylindre circulaire. Son équation peut être mise, dans les coordonnées cylindriques  $r, \Theta, \omega$  sous la forme

$$r = R + \varepsilon R \lambda_1(\omega).$$

En se contentant d'approximation de premier ordre par rapport au nombre  $\varepsilon$  on obtient

$$ds^2 = \lambda^2(du^2 + dv^2)$$

avec

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{r}{R} = 1 + \varepsilon \lambda_1(\omega), & u &= R\Theta, \\ (7) \quad v &= \int \frac{d\omega}{1 + \varepsilon \lambda_1(\omega)} = \omega + \alpha - \varepsilon \int \lambda_1(\omega) d\omega + \dots \end{aligned}$$

Réolvons l'équation déterminant  $\omega$ ; on trouve  $\omega$  en fonction de  $v$  et de  $\varepsilon$  sous la forme

$$\omega = v - \alpha + \varepsilon(\text{fonct. de } v) + \dots$$

La fonction  $\lambda_1$  devient aussi une fonction de  $v$  et de  $\varepsilon$ , mais il suffit de prendre dans le développement

$$\lambda_1[v - \alpha + \varepsilon(\text{fonct. de } v)] = \lambda_1(v - \alpha) + \varepsilon \left( \frac{\partial \lambda_1}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} + \dots$$

le premier terme seulement, car dans l'expression de  $\lambda$  la fonction  $\lambda_1$  n'intervient que multipliée par  $\varepsilon$ . On obtient ainsi

$$\lambda = 1 + \varepsilon \lambda_1(v - \alpha).$$

Supposons, pour fixer les idées, que les obstacles sur la surface considérée se réduisent à deux arcs égaux, symétriques par rapport à une des parallèles et placés le long de deux méridiens différents. Soit

$$(8) \quad r = R + \varepsilon R \tanh^2 \frac{\omega}{m}$$

l'équation de la surface et

$$ds^2 = \lambda^2 (du^2 + dv^2)$$

l'expression de son élément linéaire. D'après les formules (7) on obtient

$$(9) \quad \begin{aligned} \lambda &= 1 + \varepsilon \tanh^2 \left( \frac{v}{m} + \alpha \right), & u &= R\Theta, \\ v &= \omega - \alpha m + \varepsilon \left( m \tanh \frac{\omega}{m} - \omega \right). \end{aligned}$$

La forme de cette surface est reproduite sur la figure (7). Pour  $\omega = 0$  on a  $r = R$  et quand  $\omega$  tend vers l'infini  $r$  tend vers  $R + \varepsilon R$ .

Le mouvement plan correspondant se produira autour de deux segments de droites parallèles, orthogonaux au courant et liés par des lignes de glissement. Pour que la vitesse soit constante le long des lignes de glissement sur la surface (8), elle doit être proportionnelle à  $\lambda$  dans le mouvement plan. En raison des formules (9) la fonction  $\lambda_1$ , introduite dans le paragraphe 5. 4, a dans ce cas la forme

$$\lambda_1 = \tanh^2 \left( \frac{y}{m} + \alpha \right).$$

La méthode générale, exposée dans ce paragraphe, peut donc être appliquée.

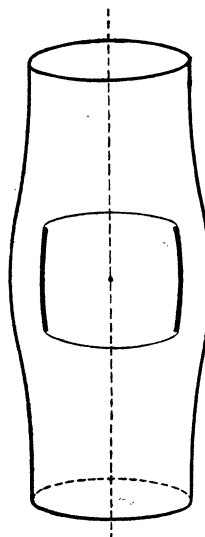


Fig. 7

#### § 4. 51. Fonctions $\Omega_0$ , $z_0$ et $f_0$ .

En se contentant d'une approximation de premier ordre par rapport à  $\varepsilon$  on peut mettre les fonctions  $\Omega$  et  $z$  sous la forme

$$\begin{aligned} \Omega &= \Omega_0 + \varepsilon \Omega_1, \\ z &= z_0 + \varepsilon z_1. \end{aligned}$$

La forme des fonctions  $\Omega_0(t)$  et  $z_0(t)$  est la même que dans le cas du mouvement principal, aux vitesses constantes sur les lignes de glissement.

Nous avons résolu ce problème dans le Chapitre III et nous reproduisons ici quelques formules principales du paragraphe 3. 7, en changeant un peu les notations.

$$\begin{aligned}\Omega_0 &= \log \frac{1}{q_1} \cdot \frac{b \sqrt{a^2 - t^2} - it \sqrt{b^2 - a^2}}{a \sqrt{b^2 - t^2}}, \\ f_0 &= A \cdot \arcsin \frac{t}{c}, \\ z_0 &= \frac{Ak_1}{q_1} \left\{ \Pi(u, k_1^2, k) + \frac{1}{k_1^2} [\Pi(u, k_1^2, k) - F(u, k)] \right. \\ &\quad \left. + i \left[ \Pi \left( 1, -\frac{k'^2}{1 + k_1^2}, k' \right) - K' + \frac{k'}{k_1 \sqrt{k^2 + k_1^2}} \log \frac{\sqrt{k^2 + k_1^2} + k_1 \sqrt{1 - k^2 u^2}}{k \sqrt{1 + k_1^2 u^2}} \right] \right\}, \\ k^2 &= \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{c^2 - b^2}{c^2 - a^2}, \quad k_1^2 = \frac{a^2}{c^2 - a^2}, \quad t^2 = \frac{c^2 k_1^2 u^2}{1 + k_1^2 u^2}.\end{aligned}$$

La distance  $2d_0$  entre les segments, leur longueur  $2l_0$  et la longueur  $2D_0 = 2\pi R$ , qui correspond à la circonférence limitant la section normale du cylindre et qui sert à déterminer le coefficient de la proportionnalité  $\frac{A}{q_1}$ , sont données par les formules suivantes :

$$\begin{aligned}d_0 &= \frac{Ak_1}{q_1} \left\{ \Pi(1, k_1^2, k) + \frac{1}{k_1^2} [\Pi(1, k_1^2, k) - K] \right\}, \\ l_0 &= \frac{Ak_1}{q_1} \left[ \Pi \left( 1, -\frac{k'^2}{1 + k_1^2}, k' \right) - K' + \frac{k'}{k_1 \sqrt{k^2 + k_1^2}} \log \frac{\sqrt{k^2 + k_1^2} + k_1 k'}{k \sqrt{1 + k_1^2}} \right], \\ D_0 &= \pi R = \frac{Ak_1}{q_1} \left[ \frac{1 + k_1^2}{k_1^2} \Pi(1, k_1^2, k) - K + \Pi \left( 1, \frac{k^2}{k_1^2}, k \right) - \frac{k'}{k_1 \sqrt{k^2 + k_1^2}} \frac{\pi}{2} \right].\end{aligned}$$

Le problème est ainsi complètement déterminé.

#### § 4. 52. Fonctions $\Omega_1$ et $z_1$ .

Appliquons, pour déterminer les fonctions  $\Omega_1$  et  $z_1$ , les formules (4) et (6) déduites dans le paragraphe 5. 4.

Prenons dans l'expression (10) de  $\lambda_1$  pour les coefficients  $m$  et  $z$  des valeurs spéciales :

$$\begin{aligned}m &= \frac{Ak'}{q_1 \sqrt{k^2 + k_1^2}}, \\ z &= \frac{k_1 \sqrt{k^2 + k_1^2}}{k'} \left[ K' - \Pi \left( 1, -\frac{k'^2}{1 + k_1^2}, k' \right) \right].\end{aligned}$$

Le problème ne manquera pas de généralité dans ce cas, car  $\alpha$  est une constante d'intégration et  $m$  ne caractérise que les dimensions de la partie du plan  $z$  occupée par le fluide en mouvement.

Pour trouver la fonction  $\Omega_1$ , remarquons d'abord que la fonction  $T(t)$  a, dans notre cas, la forme

$$T(t) = \frac{1}{\sqrt{a^2 - t^2}}.$$

La fonction

$$\lambda_1(y) = \operatorname{tanh}^2\left(\frac{y}{m} + \alpha\right)$$

est une fonction connue de  $t'$  et  $t''$ , car, comme nous l'avons démontré dans le paragraphe 5.4, il suffit de remplacer  $y$  par  $y_0$ , partie imaginaire de la fonction connue  $z$ . Le long des lignes de glissement  $t''$  est égal à 0 et  $y_0$  a la forme suivante :

$$y_0 = \frac{Ak_1}{q_1} \left[ \Pi\left(1, -\frac{k'^2}{1+k_1^2}, k'\right) - K' + \frac{k'}{k_1 \sqrt{k^2 + k_1^2}} \log \frac{\sqrt{k^2 + k_1^2} + k_1 \sqrt{1 - k^2 u^2}}{k \sqrt{1 + k_1^2 u^2}} \right].$$

Il est facile de calculer que sur ces lignes

$$\lambda_1(y_0) = \operatorname{tanh}^2\left(\frac{y_0}{m} + \alpha\right) = \frac{b^2 - t'^2}{c^2 - t'^2}$$

et la fonction  $\Omega_1$  prend la forme

$$\Omega_1 = \frac{i}{\pi} \sqrt{a^2 - t^2} \int_{-a}^{+a} \frac{b^2 - t'^2}{c^2 - t'^2} \cdot \frac{dt'}{(t - t') \sqrt{a^2 - t'^2}}.$$

En effectuant l'intégration on obtient

$$\Omega_1 = -\frac{b^2 - t^2}{c^2 - t^2} - i \frac{c^2 - b^2}{c \sqrt{c^2 - a^2}} \cdot \frac{t \sqrt{a^2 - t^2}}{c^2 - t^2}.$$

Cette formule montre que  $\Omega_1$  reste réel sur toute la frontière sauf sur les lignes de glissement, où

$$-a < t' < a.$$

Dans cet intervalle la partie imaginaire de  $\Omega_1$  s'annule pour  $t' = 0$  et  $t' = \pm a$ , c'est-à-dire pour les extrémités des segments et pour le maximum de l'ordonnée. Dans ces points, l'angle de la vitesse reste donc le même que dans le mouvement principal.



La fonction  $\Omega_1$  ne devient pas infinie pour  $t' = \pm c$ , car, en tenant compte du signe de la racine  $\sqrt{a^2 - t'^2}$ , on trouve facilement

$$\lim_{t \rightarrow c} \Omega_1 = - \frac{c^2(b^2 - a^2) + b^2(c^2 - a^2)}{2c^2(c^2 - a^2)}.$$

Pour déterminer la fonction  $z_1$  appliquons la formule approximative (6)

$$z_1 = \int e^{\Omega_0} \Omega_1 \frac{df}{dt} dt.$$

La fonction  $f$  gardant la même forme qu'auparavant, on trouve

$$z_1 = \frac{\Lambda}{q_1 ac \sqrt{c^2 - a^2}} \int \frac{(b\sqrt{a^2 - t^2} - it\sqrt{b^2 - a^2}) [c\sqrt{c^2 - a^2}(b^2 - t^2) + i(c^2 - b^2)t\sqrt{a^2 - t^2}]}{(c^2 - t^2)\sqrt{(b^2 - t^2)(c^2 - t^2)}} dt.$$

Introduisons la variable  $u$  et intégrons. Après avoir déterminé les constantes on obtient

$$(11) \quad z_1 = - \frac{\Lambda}{q_1} \cdot \frac{1}{k_1^2 + k_1'^2} \left\{ [a_1 \Pi(u, k_1^2, k_1) - a_2 E(u, k_1) - a_3 F(u, k_1)] \right. \\ \left. + i \left[ a_4 \sqrt{1 - k_1^2 u^2} + a_4 \log \frac{\sqrt{k_1^2 + k_1'^2} + k_1 \sqrt{1 - k_1^2 u^2}}{k_1 \sqrt{1 + k_1'^2 u^2}} + a_5 \right] \right\}$$

avec les valeurs suivantes des coefficients  $a_1, a_2 \dots a_n$  :

$$a_1 = \frac{1}{k_1} (1 + k_1^2) [k_1^2 + k_1^2 (1 - k_1')],$$

$$a_2 = k_1 (1 - k_1').$$

$$a_3 = \frac{1}{k_1} [k_1^2 + (k_1^2 - k_1^2 + k_1^2 k_1'^2) (1 - k_1')],$$

$$a_4 = \frac{1}{\sqrt{k_1^2 + k_1'^2}} [k_1^2 k_1'^2 - (k_1^2 + k_1'^2) (1 - k_1')],$$

$$a_5 = k_1 [k_1^2 + k_1^2 (1 - k_1')] \Pi \left( 1, - \frac{k_1'^2}{1 + k_1'^2}, k_1' \right) - \frac{k_1}{1 + k_1'} E' - k_1^2 K'.$$

Il ne reste qu'à déterminer les paramètres introduits.

## § 4. 53. Détermination des paramètres. Lignes de glissement.

Le nombre des paramètres restant le même qu'auparavant, le problème est complètement déterminé. Pour établir les relations déterminant  $k$ ,  $k_1$  et  $\frac{A}{q_1}$ , il faudrait désigner la distance entre les segments par  $d = d_0 + \varepsilon d_1$ , leur longueur par  $l = l_0 + \varepsilon l_1$  et la distance  $D$  par  $D = D_0 + \varepsilon D_1$ .

On obtient facilement que

$$\begin{aligned} d_1 &= -\frac{A}{q_1} \cdot \frac{1}{k^2 + k_1^2} [a_1 \Pi(1, k_1^2, k) - a_2 E - a_3 K], \\ l_1 &= -\frac{A}{q_1} \cdot \frac{1}{k^2 + k_1^2} \left[ a_2 k' + a_4 \log \frac{\sqrt{k^2 + k_1^2} + k_1 k'}{k \sqrt{1 + k_1^2}} + a_5 \right], \\ D_1 &= -\frac{A}{q_1} \cdot \frac{a_1}{k^2 + k_1^2} \left[ \Pi(1, k_1^2, k) - K + \Pi\left(1, \frac{k^2}{k_1^2}, k\right) + \frac{a_4}{a_1} \frac{\pi}{2} \right]. \end{aligned}$$

En désignant l'ordonnée maxima des lignes de glissement par  $L = L_0 + \varepsilon L_1$  on calcule :

$$L_1 = -\frac{A}{q_1} \cdot \frac{1}{k^2 + k_1^2} \left( a_2 + a_4 \log \frac{\sqrt{k^2 + k_1^2} + k_1}{k} + a_5 \right).$$

Les équations des lignes de glissement étant de la forme

$$\begin{aligned} x &= x_0(t') + \varepsilon x_1(t'), \\ y &= y_0(t') + \varepsilon y_1(t'), \end{aligned}$$

on obtient en séparant les parties réelles et imaginaires de la formule (11)

$$\begin{aligned} x &= \frac{A}{q_1} \left\{ \frac{1}{k_1} [(1 + k_1^2) \Pi(u, k_1^2, k) - F(u, k)] \right. \\ &\quad \left. - \varepsilon \frac{1}{k^2 + k_1^2} [a_1 \Pi(u, k_1^2, k) - a_2 E(u, k) - a_3 F(u, k)] \right\}, \\ y &= \frac{A}{q_1} \left[ k_1 \Pi\left(1, -\frac{k'^2}{1 + k_1^2}, k'\right) - k_1 K' + \frac{k'}{\sqrt{k^2 + k_1^2}} \log \frac{\sqrt{k^2 + k_1^2} + k_1 \sqrt{1 - k^2 u^2}}{k \sqrt{1 + k_1^2 u^2}} \right. \\ &\quad \left. - \varepsilon \frac{1}{k^2 + k_1^2} \left( a_2 \sqrt{1 - k^2 u^2} + a_4 \log \frac{\sqrt{k^2 + k_1^2} + k_1 \sqrt{1 - k^2 u^2}}{k \sqrt{1 + k_1^2 u^2}} + a_5 \right) \right]. \end{aligned}$$

Pour passer au mouvement correspondant sur la surface (8),

$$r = R + \varepsilon R \tanh^2 \frac{\omega}{m}.$$

il suffit de remplacer  $x$  et  $y$  par  $u$  et  $v$  et de se servir des formules (9).

#### § 4. 6. Autres applications de la méthode exposée.

La méthode exposée dans les paragraphes précédents peut être appliquée aussi à quelques problèmes qui ne nous semblent pas sans intérêt. Un de ces problèmes, que nous examinerons brièvement ici, consiste en la détermination des variations des lignes de glissement dues à de petites déformations des corps immergés.

On sait que l'étude du mouvement discontinu autour des corps obliques présente de grandes difficultés et c'est seulement dans le cas des obstacles polygonaux que le problème peut être résolu complètement. Supposons que la tangente le long des parties de la frontière, qui restent en contact avec le liquide en mouvement, fait avec l'axe réel l'angle  $\theta$ , qui est une fonction de  $x$  et de  $y$  voisine d'une valeur constante  $\theta_0$ .

$$\theta = \theta_0 + \varepsilon \theta_1(x, y).$$

Les raisonnements du paragraphe 5. 4 peuvent être appliqués aussi bien dans le cas considéré.

Il est manifeste que la fonction  $\Omega(t)$  peut être partagée en deux parties,  $\Omega_0$  et  $\varepsilon \Omega_1$ ,

$$\Omega = \Omega_0 + \varepsilon \Omega_1,$$

dont la première est bien déterminée et coïncide avec celle trouvée dans le cas où l'angle  $\theta$  est constant et égal à  $\theta_0$ .

On trouve pour la fonction  $z$  l'expression

$$z = z_0 + \varepsilon z_1,$$

d'où il s'ensuit que la fonction  $\theta_1(x, y)$  peut être développée en série de la forme

$$\theta_1(x, y) = \theta_1(x_0, y_0) + \varepsilon \left( x_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial x} + y_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial y} \right) + \dots$$

On en déduit facilement qu'en se contentant d'une approximation de premier ordre par rapport à  $\varepsilon$ , il suffit de considérer à la place de la fonction  $\theta_1(x, y)$  la

fonction  $\eta_1(x_0, y_0)$ . Cette fonction est connue, car  $x_0$  et  $y_0$  coïncident avec les solutions du problème relatif aux obstacles polygonaux.

On détermine ainsi la fonction  $\Omega_1$  et ensuite  $z_1$  en se servant de la formule approximative

$$z_1 = \int e^{i\Omega_1} \frac{df}{dt} dt,$$

identique à celle du paragraphe 4. 4.

#### § 4. 7. Déformation d'un plan orthogonal au courant. Variations des lignes de glissement.

Considérons un segment de droite, de longueur  $l_0$ , orthogonal à la vitesse du courant à l'infini. C'est le problème bien connu de Kirchhoff (26).

En raison de la symétrie, nous nous bornerons à l'étude du mouvement dans le domaine des  $y$  positifs. Le plan  $f$  se confond dans ce cas avec le plan  $t$  et, en désignant par  $\varphi_A$  la valeur du potentiel sur l'extrémité A du segment OA on obtient

$$\begin{aligned} \Omega_0 &= \log \frac{i}{q_1} \frac{\sqrt{\varphi_A - f} + \sqrt{f}}{\sqrt{f}} \\ (12) \quad z_0 &= i \frac{\varphi_A}{q_1} \left[ 2 \sqrt{\frac{f}{\varphi_A}} + \sqrt{\frac{f}{\varphi_A} \left( 1 - \frac{f}{\varphi_A} \right)} + \arcsin \sqrt{\frac{f}{\varphi_A}} \right], \\ l_0 &= \frac{\varphi_A}{q_1} \left( 2 + \frac{\pi}{2} \right). \end{aligned}$$

Le long de segment OA l'angle  $\theta$  est égal à  $\frac{\pi}{2}$ . Supposons que ce segment se déforme infiniment peu et que la forme de l'arc ainsi obtenu soit déterminée par l'équation

$$(13) \quad x = \varepsilon \lambda_1(y).$$

Il est évident que l'on peut exprimer l'angle  $\theta$  que fait la tangente à cet arc avec l'axe des  $x$  par la formule

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \varepsilon \frac{d\lambda_1}{dy},$$

où nous avons négligé les carrés et les puissances plus hautes de  $\varepsilon$ .

Soit, par exemple, OA l'arc d'un cercle dont le rayon R est assez grand pour que l'on puisse négliger  $R^{-2}$ . Les formules (13) et (14) donnent dans ce cas

$$x = \frac{y^2}{2}, \quad \theta = \frac{\pi}{2} - \varepsilon \frac{y}{m},$$

où  $m$  a la dimension d'une longueur et  $\varepsilon = \frac{m}{R}$  est un nombre très petit sans dimension.

Posons

$$\Omega(f) = \Omega_0(f) + \varepsilon \Omega_1(f).$$

La fonction  $T(f)$  étant de la forme

$$T(f) = \frac{1}{\sqrt{f - \varphi_A}},$$

on trouve pour la fonction  $\Omega_1$  l'expression suivante :

$$\Omega_1 = \frac{1}{\pi m} \sqrt{f - \varphi_A} \int_0^{\varphi_A} \frac{y d\varphi}{(f - \varphi) \sqrt{\varphi - \varphi_A}}.$$

Remplaçons  $y$  par  $y_0$  tiré de la formule (12)

$$y_0 = \frac{\varphi_A}{q_1} \left[ 2 \sqrt{\frac{\varphi}{\varphi_A}} + \sqrt{\frac{\varphi}{\varphi_A} \left( 1 - \frac{\varphi}{\varphi_A} \right)} + \arcsin \sqrt{\frac{\varphi}{\varphi_A}} \right],$$

et intégrons de 0 à  $\varphi_A$ . En posant pour abréger

$$\sqrt{\frac{\varphi}{\varphi_A}} = \sigma_0, \quad \sqrt{\frac{f}{\varphi_A}} = \sigma,$$

on obtient pour la fonction  $\Omega_1$  l'expression suivante :

$$\Omega_1 = i \frac{2 \varphi_A}{q_1 \pi m} \left[ \sqrt{\sigma^2 - 1} + \pi (\sqrt{\sigma^2 - 1} - \sigma) - \sigma \sqrt{\sigma^2 - 1} \log \frac{\sigma + 1}{\sqrt{\sigma^2 - 1}} - \Phi(\sigma) \right].$$

où  $\Phi(\sigma)$  désigne l'intégrale

$$\Phi(\sigma) = \int_0^1 \arccotg \frac{\sqrt{\sigma^2 - 1}}{\sqrt{1 - \sigma_0^2}} \cdot \frac{d\sigma_0}{\sqrt{1 - \sigma^2}}.$$

Cette fonction reste réelle dans l'intervalle

$$1 \leq \sigma \leq \infty$$

qui correspond aux lignes de glissement, et peut être calculée par développement en série. La fonction  $\Omega_1$  est donc purement imaginaire sur les lignes de glissement, ce qui correspond à la condition de vitesse constante sur ces lignes.

Appliquons pour trouver la fonction  $z_1$ , la formule approximative

$$z_1 = \int e^{u_0} \Omega_1 df.$$

En séparant les parties réelles et imaginaires, on obtient les déformations des lignes de glissement sous la forme suivante

$$x_1 = \frac{4\varphi_1^2}{q_1^2 \pi m} \int \left[ \pi(\sigma - \sqrt{\sigma^2 - 1}) - \sqrt{\sigma^2 - 1} + \sigma \sqrt{\sigma^2 - 1} \log \frac{\sigma + 1}{\sqrt{\sigma^2 - 1}} + \Phi(\sigma) \right] d\sigma,$$

$$y_1 = \frac{4\varphi_1^2}{q_1^2 \pi m} \int \left[ \sigma^2 - 1 + \pi(\sigma^2 - 1 - \sigma \sqrt{\sigma^2 - 1}) - \sigma(\sigma^2 - 1) \log \frac{\sigma + 1}{\sqrt{\sigma^2 - 1}} - \sqrt{\sigma^2 - 1} \Phi(\sigma) \right] d\sigma.$$

Ces intégrales peuvent être aussi calculées par développement en séries et les équations des lignes de glissement déformées auront la forme

$$x = x_0 + \varepsilon x_1, \quad y = y_0 + \varepsilon y_1.$$


---

## BIBLIOGRAPHIE

---

1. G. DARBOUX. Leçons sur la théorie générale des surfaces. Prem. partie, 1914, p. 206.
  2. G. DARBOUX. Leçons sur la théorie générale des surfaces. Prem. partie, 1914, p. 209.
  3. BELTRAMI. Delle variabile complesse sopra una superficie qualunque. *Ann. di Mathem.*, 2<sup>e</sup> série, I, 1867, p. 329.
  4. F. KLEIN. Ueber Riemann's Theorie der algebraischen Functionen und ihrer Integrale. Leipzig, 1882.
  5. C. WORONETZ. Sur les théories de la résistance des fluides ayant recours à des sillages indéfinis. *Bull. des Sciences Math.*, 2<sup>e</sup> série, t. LVII, janvier 1933.
  6. E. PICARD. *Comptes rendus de l'Ac. des Sc.*, t. 159, 1914, p. 638.
  7. H. VILLAT. *Ann. de l'Éc. Norm.*, 1914, p. 455.
  8. D. RIABOUCHINSKY. *Comptes rend. du III<sup>e</sup> Congrès international de Méc. Appl.*, Stockholm, t. I, 1930, p. 141.
  9. *Vorträge aus dem Gebiete der Hydro-und Aerodynamik*. Innsbruck, 1922, p. 132.
  10. WITOSZYNSKY. Congrès de Méc., Delft, 1924.
  11. ARGEANICOFF. *Comptes rendus de l'Ac. des Sc.*, t. 190, 1930, p. 727.
  12. RIABOUCHINSKY. *Congrès internat. Zürich*, 1926, p. 512; — *Stockholm*, 1930, t. I, p. 141.
  13. APPELL et LACOUR. Principes de la théorie des Fonctions elliptiques et applications. Paris, 1897, p. 238.
  14. C. WORONETZ. *Comptes rendus de l'Ac. des Sc.*, t. 193, 1931, p. 989.
  15. APPELL et LACOUR. Principes de la théorie des Fonctions elliptiques et applications. Paris, 1897, p. 239.
  16. W. LASKA. Sammlung von Formeln der Mathematik. Braunschweig, 1894, p. 329.
  17. D. RIABOUCHINSKY. *Proc. of the London Math. Soc.*, 2<sup>e</sup> série, t. 19, Part. 3, 1920, p. 206.
  18. LEGENDRE. Exercices de calcul intégral, t. I. Paris. 1811, p. 61.
  19. APPELL et LACOUR. Principes de la théorie des Fonctions elliptiques et applications. Paris, 1897, p. 239.
  20. JAHNKE und EMDE. *Funktionentafeln*. Leipzig, 1928, p. 78.
  21. D. RIABOUCHINSKY. Sur la détermination d'une surface d'après les données qu'elle porte. *Comptes rendus de l'Ac. des Sc.*, t. 189, 1929, p. 629. — Sur quelques problèmes relatifs au potentiel. *Bull. des Sc. Math.*, 2<sup>e</sup> série, t. LIII, septembre-octobre 1929.
  22. VOLTERRA. Sopra alcune condizioni caratteristiche per le funzioni di variabile complessa. *An. di Mat.*, 2<sup>e</sup> série, t. 11, p. 1.
  23. SIGNORINI. Sopra un problema al contorno nella teoria delle funzioni di variabile complessa. *An. di Mat.*, 3<sup>e</sup> série, t. 25, p. 253-257.
  24. DEMTCHENKO. Problèmes mixtes harmoniques en Hydrodynamique des fluides parfaits. Paris, 1933.
  25. VILLAT. Sur le problème de Dirichlet dans une aire circulaire. *Bull. de la Soc. math. de France*, t. 39, 1911, p. 443-456.
  26. KIRCHHOFF. Zur Theorie freier Flüssigkeitsstrahlen. *Crelles Journal*, 70, 1869.
  27. BOLTZMANN. *Wiener Sitzungsberichte*, 52, 1865, p. 214.
  28. KIRCHHOFF. *Berliner Monatsberichte*, 19 juillet 1875.
-

## TABLE DES MATIÈRES DE CE MÉMOIRE

	Pages.
PRÉFACE.....	I

### CHAPITRE I

#### Sur les analogies entre les mouvements plans des fluides et les mouvements sur des surfaces courbes.

§ 1. 1. Généralités.....	4
§ 1. 2. Coordonnées isothermes.....	6
§ 1. 21. Exemple.....	8
§ 1. 3. Application des coordonnées isothermes à l'étude des mouvements fluides sur des surfaces.....	9
§ 1. 4. Variable complexe sur une surface quelconque.....	10
§ 1. 5. Sur les analogies entre les mouvements plans des fluides et les mouvements sur une surface quelconque.....	12

### CHAPITRE II

#### Mouvement discontinu des fluides sur la surface d'un cylindre circulaire. Problème de Helmholtz.

§ 2. 1. Sur les difficultés qui apparaissent dans l'analyse de mouvement d'une masse fluide indéfinie.....	15
§ 2. 2. Mouvement des fluides dans le cas où le courant forme un circuit fermé....	16
§ 2. 3. Fonctions $f$ , $\Omega$ , $\frac{dz}{df}$ et $z$ .....	17
§ 2. 4. Détermination des paramètres. Équations des lignes de glissement.....	20
§ 2. 5. Cas limite du mouvement plan.....	22
§ 2. 6. Dégénérescence des lignes de glissement.....	24
§ 2. 61. Cas I : le paramètre $k$ et la distance $d$ de deux segments sont nuls.....	25
§ 2. 62. Cas II : le paramètre $k$ est égal à 0, la distance mutuelle de deux segments restant finie.....	26
§ 2. 63. Cas III : le paramètre $k$ est égal à 1, la distance $d$ croît indéfiniment.....	26
§ 2. 64. Cas IV : le paramètre $k$ est égal à 1, la distance $d$ reste finie.....	27
§ 2. 7. Cas des sillages intérieurs fermés.....	28
§ 2. 8. Problème de D. Riabouchinsky.....	30



## CHAPITRE III

## Problème d'Oseen.

§ 3. 1. Fonctions $f, \frac{dz}{df}$ et $z$ .....	32
§ 3. 2. Détermination des paramètres .....	34
§ 3. 3. Cas limite du mouvement plan .....	36
§ 3. 4. Valeurs limites du paramètre $k$ .....	38
§ 3. 41. Cas I : le paramètre $k$ et la distance $d$ sont nuls .....	38
§ 3. 42. Cas II : le paramètre $k$ est égal à 1, la distance $d$ croît indéfiniment .....	39
§ 3. 43. Cas III : la longueur $l$ des segments est égale à 0 .....	43
§ 3. 5. Résumé .....	43

## CHAPITRE IV

## Problème des sillages sur des surfaces courbes.

§ 4. 1. Mouvement discontinu sur des surfaces courbes et mouvement plan correspondant .....	45
§ 4. 2. Problème mixte-inverse .....	46
§ 4. 3. L'équation intégrodifférentielle du problème .....	48
§ 4. 4. Solutions approximatives dans le cas où la surface courbe diffère peu d'une surface développable .....	49
§ 4. 5. Exemple. Surface de révolution voisine d'un cylindre circulaire .....	52
§ 4. 51. Fonctions $\Omega_0, z_0$ et $f_0$ .....	53
§ 4. 52. Fonctions $\Omega_1$ et $z_1$ .....	54
§ 4. 53. Détermination des paramètres. Lignes de glissement .....	57
§ 4. 6. Autres applications de la méthode exposée .....	58
§ 4. 7. Déformation d'un plan orthogonal au courant. Variations des lignes de glissement .....	59
BIBLIOGRAPHIE .....	62
TABLE DES MATIÈRES .....	63