ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

PAUL VINCENSINI

Sur les points focaux des congruences de cercles

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 3e série, tome 25 (1933), p. 115-142
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1933_3_25__115_0>

© Université Paul Sabatier, 1933, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (http://picard.ups-tlse.fr/~annales/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SUR LES POINTS FOCAUX DES CONGRUENCES DE CERCLES

Par M. Paul VINCENSINI.

INTRODUCTION

Dans les premières pages du tome 2 de la *Théorie des Surfaces*, G. Darboux a donné quelques indications rapides sur le problème général de la distribution des points focaux dans une congruence de courbes algébriques.

Depuis, ce problème, quoique intéressant, n'a pas été l'objet de beaucoup de travaux; du moins jusqu'à ces derniers temps.

Dans une Note des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (194; 1932, p. 578), M. Bertrand Gambier a étudié *la distribution des points de contact avec leur enveloppe d'une famille simplement infinie de courbes algébriques*; et, plus récemment (*Comptes rendus* du 21 novembre 1932; t. 195, p. 928), ce même géomètre est revenu sur la question en étudiant les différents cas qui peuvent se présenter, quant aux positions relatives des différents points focaux d'une congruence de cercles.

On sait que sur chaque cercle d'une congruence, il existe, en général, quatre points focaux à distance finie, en plus des deux points focaux situés sur le cercle de l'infini.

Ces deux derniers sont en général des points focaux *simples*. M. B. Gambier s'est proposé l'étude du cas où leur ordre de multiplicité s'élève. Il a, en particulier, donné l'élégant théorème que voici, qui jouera un rôle important dans tout le cours de ce Mémoire.

La condition pour que deux (au moins) des quatre points focaux situés à distance finie sur chaque cercle de la congruence, soient rejetés à l'infini, de façon que chacun des deux points cycliques du plan du cercle soit un point focal double (au moins), et qu'il n'existe par suite que deux points focaux (au plus) à distance finie, sur chaque cercle, est que la congruence des axes des cercles soit isotrope.

J'ai publié moi-même, aux *Comptes rendus* (195; 1932, p. 1359), une Note dans laquelle le résultat de M. Gambier se trouve complété par l'étude du cas où *tous les points focaux* portés par chaque cercle de la congruence sont rejetés à l'infini.

Le présent Mémoire développe cette dernière Note, où j'ai dû me borner à de très rapides indications.

Je commence par établir le théorème de M. Gambier qui vient d'être rappelé, et

j'applique les résultats du calcul à la détermination des congruences sans points focaux à distance finie. J'effectue l'intégration complète des équations du problème; j'arrive ainsi à des formules débarrassées de tout signe d'intégration, et j'indique, par la suite, divers exemples explicites.

Dans ma Note citée des *Comptes rendus*, j'avais fait allusion à quelques problèmes intéressants, se rattachant au cas où il y a seulement deux points focaux à distance finie sur chaque cercle de la congruence. J'étudie ici, avec quelques détails, le cas où les points focaux sont confondus ou diamétralement opposés.

Je termine par quelques remarques sur les congruences de coniques, formées de courbes assujetties à couper en deux points une conique fixe, et je donne une démonstration géométrique du théorème de M. Gambier qui est à la base de ce travail.

I. — Congruences de cercles n'admettant que deux points focaux à distance finie sur chaque cercle.

Je commence par exposer la méthode qui a conduit M. B. Gambier au résultat énoncé dans l'introduction, concernant les congruences de cercles n'admettant que deux points focaux, à distance finie, sur chaque cercle.

Donnons-nous le cercle générateur (C) de la congruence, comme l'intersection de la sphère (Σ) et du plan (π), définis, en coordonnées homogènes, par les équations

$$(1)\qquad \begin{cases} x^2+y^2+z^2-2x_1xt-2y_1yt-2z_1zt+(x_1^2+y_1^2+z_1^2)t^2-\rho_1^2t^2=0, \\ ux+vy+wz+ht=0; \end{cases}$$

$x_1, y_1, \ldots, \rho_1, \ldots, u, \ldots, h$, sont des fonctions des deux paramètres fixant chaque cercle de la congruence.

Les points focaux de (C) s'obtiennent en adjoignant au système (1), le nouveau système

$$(2)\qquad \begin{cases} xtdx_1+ytdy_1+ztdz_1-t^2(x_1dx_1+y_1dy_1+z_1dz_1)+t^2\rho_1d\rho_1=0, \\ xdu+ydv+zdw+tdh=0. \end{cases}$$

Il y a d'abord un cas évident dont on doit se débarrasser, celui où le plan de C reste parallèle à un plan fixe : dans ce cas le cercle C passe par les deux points à l'infini fixes où le plan du cercle coupe le cercle de l'infini et ces deux points comptent chacun pour deux foyers réunis en un seul. Cette circonstance est caractérisée soit par la constance de u, v, w soit par la nullité des trois expressions $vdw-wdv$, $wdu-udw$, $udv-vdu$. Nous continuons en écartant ce cas.

La première équation (2) est vérifiée pour $t = 0$. On obtient ainsi les points focaux à l'infini, qui sont déterminés par le système

$$(3)\qquad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 0, \\ ux + vy + wz = 0, \\ x\,du + y\,dv + z\,dw = 0, \\ t = 0. \end{cases}$$

Les deux premières équations (3) donnent les points cycliques du plan (π).

Pour avoir les valeurs de $(du : dv : dw)$ fournissant ces points focaux, éliminons x, y, z, entre les trois premières équations (3).

On a d'abord

$$\frac{x}{v\,dw - w\,dv} = \frac{y}{w\,du - u\,dw} = \frac{z}{u\,dv - v\,du},$$

les trois dénominateurs n'étant pas tous nuls, puis, en remplaçant dans la première équation x, y, z par des quantités proportionnelles

$$\mathrm{S}\,(v\,dw - w\,dv)^2 = 0.$$

Nous supposerons que u, v, w soient les cosinus directeurs de l'axe de (C), de sorte que

$$u^2 + v^2 + w^2 = 1.$$

On pourra alors écrire

$$\mathrm{S}\,u^2\,\mathrm{S}\,du^2 - \left(\mathrm{S}\,u\,du\right)^2 = 0,$$

d'où

$$(4)\qquad du^2 + dv^2 + dw^2 = 0.$$

On voit que les deux points focaux situés à l'infini sur (C), sont les intersections de (C) avec les cercles infiniment voisins dont les plans ont pour représentations sphériques les points déduits de (u, v, w) par déplacement sur l'une ou l'autre des génératrices isotropes de la sphère issues du point (u, v, w). La direction (x, y, z) est celle de (du, dv, dw).

Les points focaux à distance finie sur (C) sont définis par le système

$$(5)\qquad \begin{cases} x\,dx_1 + y\,dy_1 + z\,dz_1 + t\,d\sigma_1 = 0, \\ x\,du + y\,dv + z\,dw + t\,dh = 0, \\ xu + yv + zw + th = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2x_1xt - 2y_1yt - 2z_1zt - 2\sigma_1 t^2 = 0. \end{cases}$$

où l'on a posé

$$2\sigma_1 = \rho_1^2 - x_1^2 - y_1^2 - z_1^2.$$

Pour qu'un nouveau point focal soit rejeté à l'infini, il faut et il suffit que le système (5) admette une solution où $t = 0$.

En exprimant cette condition, (5) donne :

$$(6) \qquad \begin{cases} x\,dx_1 + y\,dy_1 + z\,dz_1 = 0, \\ x\,du + y\,dv + z\,dw = 0, \\ xu + yv + zw = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 0. \end{cases}$$

Les trois dernières équations de (6) sont celles du système (3). La première, si l'on se rappelle ce qu'on a dit plus haut sur la direction (x, y, z), peut s'écrire

$$du\,dx_1 + dv\,dy_1 + dw\,dz_1 = 0.$$

Cette dernière relation doit être, ou conséquence de $du^2 + dv^2 + dw^2 = 0$, ou vérifiée identiquement. Elle est équivalente à

$$\begin{vmatrix} dx_1 & dy_1 & dz_1 \\ du & dv & dw \\ u & v & w \end{vmatrix} = 0,$$

qui exprime que l'axe du cercle (C), engendre, dans le déplacement qui donne le nouveau point focal rejeté à l'infini, une surface développable. Cette développable est *isotrope*, car la direction isotrope $(du : dv : dw)$ est perpendiculaire à la génératrice (u, v, w) et au déplacement $(dx_1 : dy_1 : dz_1)$.

Ainsi, la condition pour que l'un des quatre points focaux situés à distance finie sur (C) soit rejeté à l'infini, est que l'une des familles de développables de la congruence des axes des cercles (C) soit constituée par des développables isotropes.

Pour que deux des quatre points focaux soient rejetés à l'infini, il faut et il suffit que les deux familles de développables de la congruence des axes soient isotropes, c'est-à-dire que la congruence des axes soit une congruence isotrope.

Ce résultat de M. B. Gambier est curieux en ce sens que l'on peut déplacer chaque cercle de la congruence perpendiculairement à son axe et le dilater arbitrairement, sans que la congruence cesse d'appartenir au type étudié.

Si l'on exprime u, v, w au moyen des paramètres α, β des génératrices isotropes de la sphère, on a

$$du^2 + dv^2 + dw^2 \equiv k\,d\alpha\,d\beta,$$
$$du\,dx_1 + dv\,dy_1 + dw\,dz_1 \equiv \mu\,d\alpha\,d\beta.$$

Envisageons alors le point (ξ, η, ζ) de l'axe du cercle (C) défini par les équations

$$\xi = x_1 + \rho u,$$
$$\eta = y_1 + \rho v,$$
$$\zeta = z_1 + \rho w.$$

Ce point peut être substitué ou point (x_1, y_1, z_1). On a alors

$$\mathrm{S}\, du\, d\xi \equiv \mathrm{S}\, du\, dx_1 + \rho\, \mathrm{S}\, du^2 \equiv (\mu + \rho k)\, d\alpha\, d\beta.$$

k n'étant pas nul, on voit qu'il y aura avantage à prendre

$$\rho = -\frac{\mu}{k},$$

d'où

$$\mathrm{S}\, du\, d\xi \equiv 0.$$

Nous supposerons le changement qui vient d'être indiqué fait au préalable, de sorte, qu'avec les notations du début, nous avons la nouvelle relation

$$\mathrm{S}\, du\, dx_1 = 0.$$

Au point de vue géométrique, la relation précédente exprime que la sphère $(u^2 + v^2 + w^2 = 1)$ et la surface (S) lieu des centres (x_1, y_1, z_1) de (Σ), se correspondent avec orthogonalité des éléments linéaires. (S) est donc la *surface moyenne* de la congruence isotrope formée par les axes des cercles (C).

Cette remarque permet d'écrire les formules connues suivantes, liant les coordonnées (x_1, y_1, z_1), (u, v, w) de deux surfaces se correspondant avec orthogonalité des éléments linéaires (*Voir* G. Darboux. *Théorie des Surfaces*, t. IV; p. 24).

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial x_1}{\partial \alpha} &= \lambda \frac{\partial u}{\partial \alpha} - \frac{\partial \lambda}{\partial \alpha} u, & \frac{\partial x_1}{\partial \beta} &= -\lambda \frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{\partial \lambda}{\partial \beta} u, \\ \frac{\partial y_1}{\partial \alpha} &= \lambda \frac{\partial v}{\partial \alpha} - \frac{\partial \lambda}{\partial \alpha} v, & \frac{\partial y_1}{\partial \beta} &= -\lambda \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{\partial \lambda}{\partial \beta} v, \\ \frac{\partial z_1}{\partial \alpha} &= \lambda \frac{\partial w}{\partial \alpha} - \frac{\partial \lambda}{\partial \alpha} w, & \frac{\partial z_1}{\partial \beta} &= -\lambda \frac{\partial w}{\partial \beta} + \frac{\partial \lambda}{\partial \beta} w, \end{aligned}\right.$$

u, v, w, λ sont solutions d'une même équation de Moutard

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \alpha\, \partial \beta} = \mathrm{M}\theta.$$

Ces formules nous seront utiles dans la suite.

II. — Congruences de cercles dont tous les points focaux sont à l'infini.

La méthode suivie au numéro précédent, conduit à une détermination simple des congruences (C) pour lesquelles les quatre points focaux portés par chaque cercle sont tous rejetés à l'infini (voir la Note des *Comptes rendus* déjà citée, 195; 1932, p. 1359).

Je développe, et complète ici les calculs, qui ne sont que brièvement indiqués dans cette Note.

Les cercles (C) d'une congruence n'admettant que deux points focaux (au plus) sur chaque cercle, et dont, par suite, la congruence des axes est isotrope, sont définis par les équations (1).

La surface (S) lieu des centres (x_1, y_1, z_1) des sphères (Σ) servant à définir les cercles (C), est la surface moyenne de la congruence isotrope des axes. (S) correspond avec orthogonalité des éléments linéaires à la sphère $(u^2 + v^2 + w^2 = 1)$, et l'on a par suite les formules (7).

Les points focaux situés sur (C), s'obtiennent en résolvant le système

$$\begin{cases} \Sigma = 0, & \dfrac{\partial \Sigma}{\partial \alpha} d\alpha + \dfrac{\partial \Sigma}{\partial \beta} d\beta = 0, \\ \pi = 0, & \dfrac{\partial \pi}{\partial \alpha} d\alpha + \dfrac{\partial \pi}{\partial \beta} d\beta = 0, \end{cases}$$

où Σ et π représentent les premiers membres des équations de la sphère (Σ) et du plan (π) qui servent à définir le cercle (C).

Le système précédent s'écrit, en coordonnées non homogènes :

$$(8) \quad \begin{cases} \left(x\dfrac{\partial x_1}{\partial \alpha} + y\dfrac{\partial y_1}{\partial \alpha} + z\dfrac{\partial z_1}{\partial \alpha} + \dfrac{\partial \sigma_1}{\partial \alpha}\right) d\alpha + \left(x\dfrac{\partial x_1}{\partial \beta} + y\dfrac{\partial y_1}{\partial \beta} + z\dfrac{\partial z_1}{\partial \beta} + \dfrac{\partial \sigma_1}{\partial \beta}\right) d\beta = 0, \\ \left(x\dfrac{\partial u}{\partial \alpha} + y\dfrac{\partial v}{\partial \alpha} + z\dfrac{\partial w}{\partial \alpha} + \dfrac{\partial h}{\partial \alpha}\right) d\alpha + \left(x\dfrac{\partial u}{\partial \beta} + y\dfrac{\partial v}{\partial \beta} + z\dfrac{\partial w}{\partial \beta} + \dfrac{\partial h}{\partial \beta}\right) d\beta = 0, \\ ux + vy + wz + h = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2x_1 x - 2y_1 y - 2z_1 z - 2\sigma_1 = 0. \end{cases}$$

L'élimination du rapport $\dfrac{d\alpha}{d\beta}$ entre les deux premières équations (8), conduit à l'équation d'*une quadrique*, dont les points d'intersection avec le cercle défini par les deux dernières sont précisément les points focaux.

L'équation de la quadrique est :

$$\frac{x\dfrac{\partial x_1}{\partial\alpha}+\ldots+\dfrac{\partial\sigma_1}{\partial\alpha}}{x\dfrac{\partial u}{\partial\alpha}+\ldots+\dfrac{\partial h}{\partial\alpha}}=\frac{x\dfrac{\partial x_1}{\partial\beta}+\ldots+\dfrac{\partial\sigma_1}{\partial\beta}}{x\dfrac{\partial u}{\partial\beta}+\ldots+\dfrac{\partial h}{\partial\beta}}.$$

En remplaçant $\dfrac{\partial x_1}{\partial\alpha}\ldots,\ \dfrac{\partial x_1}{\partial\beta}\ldots,\ \dfrac{\partial u}{\partial\alpha}\ldots,\ \dfrac{\partial u}{\partial\beta}\ldots,$ par leurs expressions (7), l'équation précédente peut s'écrire :

$$\left\{\begin{aligned}&\frac{\lambda\left(x\dfrac{\partial u}{\partial\alpha}+y\dfrac{\partial v}{\partial\alpha}+z\dfrac{\partial w}{\partial\alpha}\right)+\dfrac{\partial\sigma_1}{\partial\alpha}-\dfrac{\partial\lambda}{\partial\alpha}(ux+vy+wz)}{x\dfrac{\partial u}{\partial\alpha}+y\dfrac{\partial v}{\partial\alpha}+z\dfrac{\partial w}{\partial\alpha}+\dfrac{\partial h}{\partial\alpha}}\\ &=\frac{-\lambda\left(x\dfrac{\partial u}{\partial\beta}+y\dfrac{\partial v}{\partial\beta}+z\dfrac{\partial w}{\partial\beta}\right)+\dfrac{\partial\sigma_1}{\partial\beta}+\dfrac{\partial\lambda}{\partial\beta}(ux+vy+wz)}{x\dfrac{\partial u}{\partial\beta}+y\dfrac{\partial v}{\partial\beta}+z\dfrac{\partial w}{\partial\beta}+\dfrac{\partial h}{\partial\beta}},\end{aligned}\right.$$

ou encore, en tenant compte de ce que $ux+vy+wz=-h$

$$\Omega\equiv 2\lambda PQ+Q\varphi-P\psi=0,$$

avec

$$\begin{aligned}P&\equiv x\frac{\partial u}{\partial\alpha}+y\frac{\partial v}{\partial\alpha}+z\frac{\partial w}{\partial\alpha}+\frac{\partial h}{\partial\alpha},\\ Q&\equiv x\frac{\partial u}{\partial\beta}+y\frac{\partial v}{\partial\beta}+z\frac{\partial w}{\partial\beta}+\frac{\partial h}{\partial\beta},\\ \varphi&\equiv\frac{\partial\sigma_1}{\partial\alpha}-\lambda\frac{\partial h}{\partial\alpha}+h\frac{\partial\lambda}{\partial\alpha},\\ \Psi&\equiv\frac{\partial\sigma_1}{\partial\beta}+\lambda\frac{\partial h}{\partial\beta}-h\frac{\partial\lambda}{\partial\beta}.\end{aligned}$$

On voit que la quadrique (Ω) est un cylindre. Les plans P et Q qui figurent dans son équation sont isotropes, car, comme on l'a vu au numéro I, les directions $\dfrac{\partial u}{\partial\alpha}\ldots,\ \dfrac{\partial u}{\partial\beta}\ldots,$ sont isotropes. Il en résulte que (Ω) est un *cylindre de révolution*. L'axe de ce cylindre, perpendiculaire aux deux directions $\left(\dfrac{\partial u}{\partial\alpha},\ldots\right)$ $\left(\dfrac{\partial u}{\partial\beta},\ldots\right)$ de la sphère $(u^2+v^2+w^2=1)$, est parallèle à la direction $(u,\ v,\ w)$, c'est-à-dire à l'axe du cercle (C).

La trace de (Ω) sur le plan (π) du cercle (C), est un cercle, coupant (C) aux deux points focaux à distance finie.

Ces deux points focaux seront rejetés à l'infini si les axes de (C) et de (Ω) coïncident. Donc si le point (x_1, y_1, z_1) centre de la sphère (Σ), est sur l'axe de (Ω), d'équations :

$$\begin{cases} 2\lambda Q - \Psi = 0, \\ 2\lambda P + \varphi = 0. \end{cases}$$

En exprimant cette condition, on obtient :

$$\begin{cases} 2\lambda\left(x_1\dfrac{\partial u}{\partial\beta} + y_1\dfrac{\partial v}{\partial\beta} + z_1\dfrac{\partial w}{\partial\beta} + \dfrac{\partial h}{\partial\beta}\right) - \dfrac{\partial\sigma_1}{\partial\beta} - \lambda\dfrac{\partial h}{\partial\beta} + h\dfrac{\partial\lambda}{\partial\beta} = 0, \\ 2\lambda\left(x_1\dfrac{\partial u}{\partial\alpha} + y_1\dfrac{\partial v}{\partial\alpha} + z_1\dfrac{\partial w}{\partial\alpha} + \dfrac{\partial h}{\partial\alpha}\right) + \dfrac{\partial\sigma_1}{\partial\alpha} - \lambda\dfrac{\partial h}{\partial\alpha} + h\dfrac{\partial\lambda}{\partial\alpha} = 0; \end{cases}$$

ce que l'on peut encore écrire

$$\begin{cases} 2\lambda\left(x_1\dfrac{\partial u}{\partial\beta} + y_1\dfrac{\partial v}{\partial\beta} + z_1\dfrac{\partial w}{\partial\beta}\right) - \dfrac{\partial\sigma_1}{\partial\beta} + \dfrac{\partial}{\partial\beta}(h\lambda) = 0, \\ 2\lambda\left(x_1\dfrac{\partial u}{\partial\alpha} + y_1\dfrac{\partial v}{\partial\alpha} + z_1\dfrac{\partial w}{\partial\alpha}\right) + \dfrac{\partial\sigma_1}{\partial\alpha} + \dfrac{\partial}{\partial\alpha}(h\lambda) = 0. \end{cases}$$

On déduit de là les expressions suivantes des deux inconnues σ_1 et h, dont la connaissance achève de déterminer les congruences de cercles dont tous les points focaux sont rejetés à l'infini

$$(9)\qquad \begin{cases} \sigma_1 + h\lambda = -2\displaystyle\int_{\alpha_0}^{\alpha}\lambda\left(x_1\dfrac{\partial u}{\partial\alpha} + y_1\dfrac{\partial v}{\partial\alpha} + z_1\dfrac{\partial w}{\partial\alpha}\right)d\alpha + B, \\ \sigma_1 - h\lambda = 2\displaystyle\int_{\beta_0}^{\beta}\lambda\left(x_1\dfrac{\partial u}{\partial\beta} + y_1\dfrac{\partial v}{\partial\beta} + z_1\dfrac{\partial w}{\partial\beta}\right)d\beta + A; \end{cases}$$

A et B sont des fonctions arbitraires de α et β, respectivement.

Les équations (9) conduisent immédiatement à la remarque suivante.

Si l'on ajoute une même constante à B et à A, on ne modifie pas h [c'est-à-dire la position du plan (π) du cercle (C)], et σ_1 est augmenté d'une constante.

Si l'on se rappelle que

$$2\sigma_1 = \xi_1^2 - x_1^2 - y_1^2 - z_1^2,$$

on voit, qu'ajouter une constante à σ_1, cela revient à en ajouter une au carré du rayon de (Σ), et par suite au carré du rayon du cercle (C) section de (Σ) par (π).

On peut donc dire

La connaissance d'une congruence de cercles (C) *pour laquelle tous les points focaux sont à l'infini, entraîne immédiatement la connaissance d'une infinité d'autres congruences du même type. Il suffit de remplacer chaque cercle* (C), *de rayon* r, *par le cercle coaxial et concentrique de rayon*

$$\rho = \sqrt{r^2 + k}$$

où k *est une constante arbitraire.*

Si l'on définit le point (u, v, w) de la sphère de rayon 1 par les formules

$$(10) \qquad u = \frac{\alpha + \beta}{1 + \alpha\beta}, \qquad v = i\frac{\beta - \alpha}{1 + \alpha\beta}, \qquad w = \frac{\alpha\beta - 1}{1 + \alpha\beta},$$

on peut [*voir*, G. Darboux. *Théorie des Surfaces*, t. IV, p. 17] prendre dans les équations (9)

$$(11) \qquad \begin{cases} x_1 = \dfrac{(\alpha + \beta)(f' + f'_1) - 2(f + f_1)}{1 + \alpha\beta}, \\ y_1 = i\dfrac{(\beta - \alpha)(f' + f'_1) - 2(f_1 - f)}{1 + \alpha\beta}, \\ z_1 = \dfrac{(\alpha\beta - 1)(f' + f'_1) - 2(\alpha f_1 + \beta f)}{1 + \alpha\beta}, \\ \lambda = f'_1 - f' + \dfrac{2(\beta f - \alpha f_1)}{1 + \alpha\beta}; \end{cases}$$

où f et f_1 sont des fonctions arbitraires des deux variables α et β respectivement.

Pour avoir des congruences de cercles réelles, il faudra effectuer les quadratures (9), en prenant λ imaginaire pure, α et β, α_0 et β_0 imaginaires conjuguées, A et B fonctions imaginaires conjuguées de α et β.

Nous allons faire le calcul d'intégration. Le résultat est intéressant : σ_1 et h *peuvent s'exprimer sans signes de quadratures.*

Calculons les deux expressions

$$x_1\frac{\partial u}{\partial \alpha} + y_1\frac{\partial v}{\partial \alpha} + z_1\frac{\partial w}{\partial \alpha}, \qquad x_1\frac{\partial u}{\partial \beta} + y_1\frac{\partial v}{\partial \beta} + z_1\frac{\partial w}{\partial \beta},$$

en prenant pour u, v, w; x_1, y_1, z_1, les expressions (10) et (11).

On a :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial \alpha} = \dfrac{1 - \beta^2}{(1 + \alpha\beta)^2}, \quad \dfrac{\partial v}{\partial \alpha} = -i\dfrac{1 + \beta^2}{(1 + \alpha\beta)^2}, \quad \dfrac{\partial w}{\partial \alpha} = \dfrac{2\beta}{(1 + \alpha\beta)^2}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \beta} = \dfrac{1 \quad \alpha^2}{(1 + \alpha\beta)^2}, \quad \dfrac{\partial v}{\partial \beta} = \quad i\dfrac{1 + \alpha^2}{(1 + \alpha\beta)^2}, \quad \dfrac{\partial w}{\partial \beta} = \dfrac{2\alpha}{(1 + \alpha\beta)^2}; \end{cases}$$

d'où, sans difficulté

$$x_1 \frac{\partial u}{\partial \alpha} + y_1 \frac{\partial v}{\partial \alpha} + z_1 \frac{\partial w}{\partial \alpha} = -\frac{4f_1}{(1+\alpha\beta)^2},$$

$$x_1 \frac{\partial u}{\partial \beta} + y_1 \frac{\partial v}{\partial \beta} + z_1 \frac{\partial w}{\partial \beta} = -\frac{4f}{(1+\alpha\beta)^2}.$$

On a donc

$$\left\{\begin{aligned} \lambda\left(x_1 \frac{\partial u}{\partial \alpha} + y_1 \frac{\partial v}{\partial \alpha} + z_1 \frac{\partial w}{\partial \alpha}\right) &= -\frac{4f_1 f'_1}{(1+\alpha\beta)^2} + \frac{8\alpha f_1^2}{(1+\alpha\beta)^3} \\ &\quad + 4f_1\left[\frac{f'}{(1+\alpha\beta)^2} - \frac{2\beta f}{(1+\alpha\beta)^3}\right], \\ \lambda\left(x_1 \frac{\partial u}{\partial \beta} + y_1 \frac{\partial v}{\partial \beta} + z_1 \frac{\partial w}{\partial \beta}\right) &= +\frac{4ff'}{(1+\alpha\beta)^2} - \frac{8\beta f^2}{(1+\alpha\beta)^3} \\ &\quad - 4f\left[\frac{f'_1}{(1+\alpha\beta)^2} - \frac{2\alpha f_1}{(1+\alpha\beta)^3}\right]. \end{aligned}\right.$$

Si l'on observe que

$$\frac{f'}{(1+\alpha\beta)^2} - \frac{2\beta f}{(1+\alpha\beta)^3} = \frac{\partial}{\partial \alpha}\left[\frac{f}{(1+\alpha\beta)^2}\right],$$

et de même

$$\frac{f'_1}{(1+\alpha\beta)^2} - \frac{2\alpha f_1}{(1+\alpha\beta)^3} = \frac{\partial}{\partial \beta}\left[\frac{f_1}{(1+\alpha\beta)^3}\right],$$

on constate immédiatement que :

$$\int \lambda\left(x_1 \frac{\partial u}{\partial \alpha} + y_1 \frac{\partial v}{\partial \alpha} + z_1 \frac{\partial w}{\partial \alpha}\right) d\alpha = \frac{4f_1}{\beta^2(1+\alpha\beta)^2}\left[f'_1\beta(1+\alpha\beta)\right.$$
$$\left. - f_1(1+2\alpha\beta) + f\beta^2\right] + B_1(\beta),$$

et de même

$$\int \lambda\left(x_1 \frac{\partial u}{\partial \beta} + y_1 \frac{\partial v}{\partial \beta} + z_1 \frac{\partial w}{\partial \beta}\right) d\beta = -\frac{4f}{\alpha^2(1+\alpha\beta)^2}\left[f'\alpha(1+\alpha\beta)\right.$$
$$\left. - f(1+2\alpha\beta) + f_1\alpha^2\right] + A_1(\alpha).$$

Finalement les équations (9) s'écrivent :

$$(9')\quad \left\{\begin{aligned} \sigma_1 + h\lambda &= -\frac{8f_1}{\alpha^2\beta^2(1+\alpha\beta)^2}\left[f'_1\beta\alpha^2(1+\alpha\beta) - f_1\alpha^2(1+2\alpha\beta) + f\alpha^2\beta^2\right] + 2B, \\ \sigma_1 - h\lambda &= -\frac{8f}{\alpha^2\beta^2(1+\alpha\beta)^2}\left[f'\alpha\beta^2(1+\alpha\beta) - f\beta^2(1+2\alpha\beta) + f_1\alpha^2\beta^2\right] + 2A, \end{aligned}\right.$$

d'où σ_1 et h par les formules suivantes dépourvues de quadratures

$$(12)\quad \begin{cases} \sigma_1 = \dfrac{-4}{\alpha^2\beta^2(1+\alpha\beta)^2}\left[\alpha\beta(1+\alpha\beta)(\alpha f_1 f'_1 + \beta f f') - (1+2\alpha\beta)(\alpha^2 f_1^2 + \beta^2 f^2) \right. \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \left. + 2\alpha^2\beta^2 f f_1\right] + B + A, \\ h\lambda = \dfrac{-4}{\alpha^2\beta^2(1+\alpha\beta)^2}\left[\alpha\beta(1+\alpha\beta)(\alpha f_1 f'_1 - \beta f f') \right. \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \left. - (1+2\alpha\beta)(\alpha^2 f_1^2 - \beta^2 f^2)\right] + B - A, \end{cases}$$

$$\left[\lambda = f'_1 - f' + 2\,\frac{\beta f - \alpha f_1}{1+\alpha\beta}\right];$$

A et B étant des fonctions arbitraires de α et β respectivement.

Le problème de la détermination des congruences de cercles pour lesquelles il n'existe, sur chaque cercle, aucun point focal à distance finie, est *complètement résolu* par les formules (12).

En choisissant les variables α et β imaginaires conjuguées, et en prenant A et B fonctions imaginaires conjuguées de α et β, de même que f et f_1 (afin que λ soit imaginaire pure), on peut maintenant donner autant d'exemples explicites que l'on veut de congruences réelles de cercles jouissant de la propriété qui fait l'objet de ce paragraphe.

III. — Détermination des points focaux d'une congruence de cercles à congruence des axes isotrope, et nouvelle étude du cas où tous les points focaux sont à l'infini.

La méthode, que nous avons suivie au numéro précédent, pour déterminer les congruences de cercles pour lesquelles tous les points focaux sont rejetés à l'infini sur chaque cercle, nous a permis de résoudre le problème de façon aussi élégante que complète.

Pour l'objet particulier que nous avions en vue, nous n'avons pas eu besoin de déterminer explicitement les positions des deux points focaux situés sur chaque cercle (C) de la congruence (à congruence des axes isotrope). Il nous a suffi de savoir, qu'ils étaient situés à l'intersection de (C) et d'un certain cylindre de révolution d'axe parallèle à celui de (C).

Si nous avions voulu déterminer ces points focaux, nous aurions été conduits à des calculs assez laborieux.

Nous nous proposons, dans ce paragraphe, en vue plus précisément de problèmes particuliers relatifs aux positions des deux points focaux portés par chaque cercle

(toujours dans le cas où la congruence des axes est isotrope), de reprendre la détermination des congruences étudiées au numéro précédent, par un procédé tout différent, où les deux points focaux joueront un rôle plus direct, et seront déterminés explicitement.

La méthode que nous allons suivre a été très succinctement indiquée dans notre Note citée des *Comptes rendus*, et repose sur la définition suivante de la congruence isotrope la plus générale [1] [*en négligeant une homothétie*].

Soit (S) une sphère de centre O (et de rayon 1 par exemple), sur laquelle est tracé un système orthogonal isotherme, donnant au carré de l'élément linéaire sphérique la forme

$$ds^2 = \lambda^2(du^2 + dv^2), \tag{13}$$

où λ vérifie l'équation

$$\frac{\partial^2 \log \lambda}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \log \lambda}{\partial v^2} + \lambda^2 = 0. \tag{14}$$

Sur la tangente à la courbe $v = \text{const.}$ (on pourrait dire $u = \text{const.}$), passant par un point quelconque P de (S), portons $\overline{PI} = \lambda$ (on peut toujours supposer

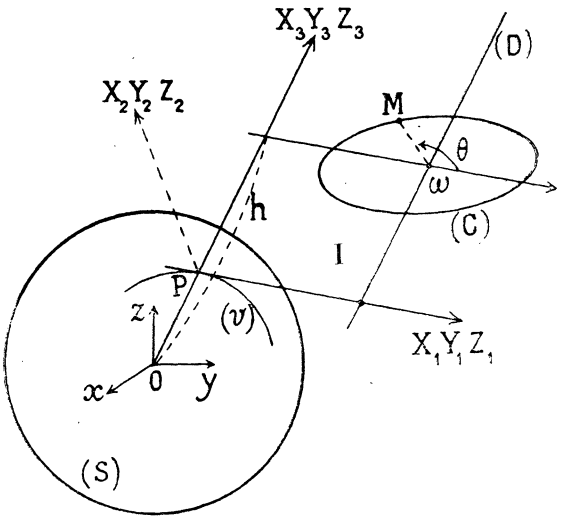

FIG. 1.

$\lambda > 0$). Menons par I la perpendiculaire au plan tangent en P à (S) (parallèle à OP); soit (D) cette droite. Les droites (D) correspondant aux différents points P de (S), constituent la congruence isotrope (Γ) la plus générale (*fig. 1*), bien entendu en négligeant une homothétie et un déplacement.

---

[1] *Voir*, M. Clapier; *Sur les Surfaces minima ou élassoïdes*; Thèse, Paris, 1919.

Nous définissons l'un des cercles (C) d'une congruence quelconqne admettant (Γ) pour congruence des axes, par la distance $h(u, v)$ de son plan à l'origine O des coordonnées, et par son rayon $r(u, v)$. h est comptée positivement suivant $\overline{OP}$.

Déterminons les deux points focaux situés sur (C).

Désignons par X_1, Y_1, Z_1 les cosinus directeurs de la tangente en P à la courbe $v = \text{const.}$ de la sphère (S); par X_2, Y_2, Z_2 ceux de la tangente à la courbe $u = \text{const.}$, et par X_3, Y_3, Z_3 ceux de la normale OP [ou du rayon (D) de la congruence (Γ)].

On sait que l'on a le groupe de formules suivantes [1]

$$(15)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial X_1}{\partial u} = -\dfrac{1}{\lambda}\dfrac{\partial \lambda}{\partial v} X_2 - \lambda X_3, & \dfrac{\partial X_2}{\partial u} = \dfrac{1}{\lambda}\dfrac{\partial \lambda}{\partial v} X_1, & \dfrac{\partial X_3}{\partial u} = \lambda X_1, \\ \dfrac{\partial X_1}{\partial v} = \dfrac{1}{\lambda}\dfrac{\partial \lambda}{\partial u} X_2, & \dfrac{\partial X_2}{\partial v} = -\dfrac{1}{\lambda}\dfrac{\partial \lambda}{\partial u} X_1 - \lambda X_3, & \dfrac{\partial X_3}{\partial v} = \lambda X_2. \end{cases}$$

Les coordonnées d'un point quelconque M du cercle $C(u, v)$, tel que le rayon aboutissant au point M fasse avec la direction (X_1, Y_1, Z_1) l'angle θ, sont

$$(\mathbf{M})\quad \begin{cases} \mathcal{X} = hX_3 + (\lambda + r\cos\theta)X_1 + r\sin\theta X_2, \\ \mathcal{Y} = hY_3 + (\lambda + r\cos\theta)Y_1 + r\sin\theta Y_2, \\ \mathcal{Z} = hZ_3 + (\lambda + r\cos\theta)Z_1 + r\sin\theta Z_2. \end{cases}$$

Évaluons les composantes du déplacement du point M pour les variations du, dv des variables u et v.

$$\begin{cases} d\mathcal{X} = h\,dX_3 + (\lambda + r\cos\theta)\,dX_1 + r\sin\theta\,dX_2 + X_3\,dh \\ \qquad\qquad + X_1(d\lambda + dr\cos\theta - r\sin\theta\,d\theta) + X_2(dr\sin\theta + r\cos\theta\,d\theta), \\ d\mathcal{Y} = h\,dY_3 + (\lambda + r\cos\theta)\,dY_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ d\mathcal{Z} = h\,dZ_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

M est un point focal si le déplacement précédent s'effectue suivant la direction de la tangente en M au cercle (C).

Les paramètres directeurs de cette tangente sont

$$\begin{cases} \xi = \sin\theta X_1 - \cos\theta X_2, \\ \eta = \sin\theta Y_1 - \cos\theta Y_2, \\ \zeta = \sin\theta Z_1 - \cos\theta Z_2. \end{cases}$$

Nous obtenons donc le système

$$\frac{d\mathcal{X}}{\xi} = \frac{d\mathcal{Y}}{\eta} = \frac{d\mathcal{Z}}{\zeta},$$

---

[1] Voir, par exemple, L. Bianchi. *Lezioni di géometria differenziale*; t. I, p. 181; 2e édition.

qui, développé, s'écrit

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{h\,dX_3 + (\lambda + r\cos\theta)\,dX_1 + r\sin\theta\,dX_2 + X_3\,dh + X_1(d\lambda + dr\cos\theta) + X_2\,dr\sin\theta}{\sin\theta X_1 - \cos\theta X_2} \\ &= \frac{h\,dY_3 + (\lambda + r\cos\theta)\,dX_1 + \ldots}{\sin\theta Y_1 - \cos\theta Y_2} = \frac{h\,dZ_3 + \ldots}{\sin\theta Z_1 - \cos\theta Z_2}. \end{aligned}\right.$$

Multiplions les deux termes de chaque rapport respectivement par X_3, Y_3, Z_3 et ajoutons terme à terme, nous obtenons l'équation :

$$(17)\qquad (\lambda + r\cos\theta)\,\mathrm{S}\,X_3\,dX_1 + r\sin\theta\,\mathrm{S}\,X_3\,dX_2 + dh = 0.$$

De même, en multipliant par $(\cos\theta X_1 + \sin\theta X_2)$, etc., et ajoutant, on obtient la nouvelle équation

$$(18)\quad h\cos\theta\,\mathrm{S}\,X_1\,dX_3 + h\sin\theta\,\mathrm{S}\,X_2\,dX_3 + \lambda\sin\theta\,\mathrm{S}\,X_2\,dX_1 + \cos\theta\,d\lambda + dr = 0.$$

L'élimination du rapport $\frac{du}{dv}$ entre les deux équations (17) et (18), conduira à une équation en θ définissant les points focaux sur (C).

Développons les équations (17) et (18), en utilisant les formules (15) ci-dessus rappelées.

Nous obtenons pour (17) :

$$(17')\qquad \left[\lambda(\lambda + r\cos\theta) - \frac{\partial h}{\partial u}\right]du + \left[\lambda r\sin\theta - \frac{\partial h}{\partial v}\right]dv = 0,$$

et pour (18) :

$$(18')\qquad \left[\frac{\partial r}{\partial u} + \cos\theta\frac{\partial\lambda}{\partial u} - \sin\theta\frac{\partial\lambda}{\partial v} + h\lambda\cos\theta\right]du + \left[\frac{\partial r}{\partial v} + \cos\theta\frac{\partial\lambda}{\partial v} + \sin\theta\frac{\partial\lambda}{\partial u} + h\lambda\sin\theta\right]dv = 0.$$

Éliminons le rapport $\frac{du}{dv}$; nous obtenons

$$\frac{\frac{\partial r}{\partial u} + \cos\theta\frac{\partial\lambda}{\partial u} - \sin\theta\frac{\partial\lambda}{\partial v} + \lambda h\cos\theta}{\lambda(\lambda + r\cos\theta) - \frac{\partial h}{\partial u}} = \frac{\frac{\partial r}{\partial v} + \cos\theta\frac{\partial\lambda}{\partial v} + \sin\theta\frac{\partial\lambda}{\partial u} + \lambda h\sin\theta}{\lambda r\sin\theta - \frac{\partial h}{\partial v}}:$$

d'où, finalement, l'équatiou aux θ des points focaux situés sur le cercle (C) ·

$$A \sin\theta + B\cos\theta + C = 0, \tag{19}$$

où l'on a posé pour simplifier l'écriture

$$\begin{cases} A \equiv \lambda \dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{r^2}{2}\right) + \dfrac{\partial h}{\partial v}\dfrac{\partial \lambda}{\partial v} + \dfrac{\partial h}{\partial u}\dfrac{\partial \lambda}{\partial u} - \lambda^2 \dfrac{\partial \lambda}{\partial u} + \lambda h \dfrac{\partial h}{\partial u} - \lambda^3 h, \\ B \equiv -\lambda \dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{r^2}{2}\right) - \dfrac{\partial h}{\partial v}\dfrac{\partial \lambda}{\partial u} + \dfrac{\partial h}{\partial u}\dfrac{\partial \lambda}{\partial v} - \lambda h \dfrac{\partial h}{\partial v} - \lambda^3 \dfrac{\partial \lambda}{\partial v}, \\ C \equiv \dfrac{\partial h}{\partial u}\dfrac{\partial r}{\partial v} - \dfrac{\partial h}{\partial v}\dfrac{\partial r}{\partial u} - \lambda^2 \dfrac{\partial r}{\partial v} - r\lambda \dfrac{\partial \lambda}{\partial v}. \end{cases}$$

(19) montre à nouveau, qu'en général, si la congruence des axes des cercles (C) est isotrope, il n'y a que deux points focaux à distance finie sur chaque cercle, et donne les deux valeurs de θ, θ_1 et θ_2 (définies à $2k\pi$ près) fournissant ces points focaux.

Les deux nappes focales de la congruence de cercles envisagée, s'obtiennent, en remplaçant successivement dans les équations (M), θ par θ_1 et θ_2.

Mais, de par sa forme même, l'équation (19) se prête à l'étude de diverses questions relatives aux positions des deux points focaux sur chaque cercle de la congruence, telles par exemple que les suivantes.

Que faut-il pour que les deux points focaux portés par chaque cercle (C) soient rejetés à l'infini, de sorte qu'il n'y ait plus sur (C) aucun point focal à distance finie (problème traité au numéro précédent).

Déterminer les congruences pour lesquelles les deux points focaux sont confondus sur chaque cercle; pour qu'ils soient diamétralement opposés, etc....

Reprenons par la méthode actuelle, le premier des problèmes qui viennent d'être signalés.

Il faut et il suffit, pour que les deux seuls points focaux portés par chaque cercle (C) soient eux-mêmes rejetés à l'infini, que l'on ait dans l'équation (19)

$$A \equiv 0, \qquad B \equiv 0.$$

La recherche des congruences du type envisagé, est donc ramenée à l'intégration du système (aux fonctions inconnues h et r) :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial(r^2)}{\partial u} = -\dfrac{\partial h}{\partial v}\dfrac{\partial \log(\lambda^2)}{\partial v} - \dfrac{\partial h}{\partial u}\dfrac{\partial \log(\lambda^2)}{\partial u} - \dfrac{\partial(h^2-\lambda^2)}{\partial u} + 2\lambda^2 h, \\ \dfrac{\partial(r^2)}{\partial v} = -\dfrac{\partial h}{\partial v}\dfrac{\partial \log(\lambda^2)}{\partial u} + \dfrac{\partial h}{\partial u}\dfrac{\partial \log(\lambda_2)}{\partial v} - \dfrac{\partial}{\partial v}(h^2+\lambda^2), \end{cases} \tag{20}$$

où λ est supposée vérifier l'équation

$$\frac{\partial^2 \log \lambda}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \log \lambda}{\partial v^2} + \lambda^2 = 0. \tag{14}$$

En égalant les expressions de $\frac{\partial^2 r}{\partial u \partial v}$ déduites des deux équations (20), on est conduit à une équation aux dérivées partielles (E), du second ordre en h.

Pour toute solution de cette équation, le système (20) est compatible en r^2, et fournit, par intégration, une infinité de congruences de cercles, que l'on peut déduire de l'une quelconque d'entre elles en conservant le plan et le centre de chaque cercle et en ajoutant une constante au carré de son rayon (remarque déjà faite au numéro II).

L'équation (E) s'obtient sans difficulté. On trouve

$$(\mathrm{E}) \equiv \mathrm{M}\left(\frac{\partial^2 h}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial v^2}\right) + \mathrm{N}\frac{\partial h}{\partial u} + \mathrm{P}\frac{\partial h}{\partial v} + \mathrm{Q}h + \mathrm{R} = 0,$$

après avoir posé

$$\mathrm{M} = \frac{\partial \log \lambda}{\partial v}, \qquad \mathrm{N} = \frac{\partial^2 \log(\lambda^2)}{\partial u \partial v}, \qquad \mathrm{P} = \frac{\partial^2 \log(\lambda^2)}{\partial v^2},$$

$$\mathrm{Q} = -\frac{\partial(\lambda^2)}{\partial v}, \qquad \mathrm{R} = -\frac{\partial^2(\lambda^2)}{\partial u \partial v}.$$

La substitution à u et v, des paramètres α, β des génératrices rectilignes de la sphère, faisant intervenir des fonctions complexes, faciliterait l'intégration du système $\mathrm{A} = 0$, $\mathrm{B} = 0$. Mais, le problème ayant été résolu aussi complètement que possible au numéro précédent, nous nous dispenserons d'effectuer ce changement. Nous avons surtout en vue maintenant l'obtention de solutions particulières, pour la détermination desquelles l'emploi des variables u et v est avantageux.

IV. — Recherche de quelques congruences particulières.

Les expressions des coefficients M, N, ... R de l'équation (E), montrent que (E) est identiquement vérifiée si λ est une fonction de la seule variable u.

Lorsqu'il en est ainsi, le système (20) peut être intégré quelle que soit la fonction h, ce qui revient à dire que l'on peut se donner *arbitrairement* l'enveloppe du plan du cercle (C) qui engendre la congruence.

Posons

$$\lambda^2 = U^2.$$

L'élément linéaire de la représentation sphérique est

$$ds^2 = U^2(du^2 + dv^2).$$

La sphère (S) est rapportée à un système de méridiens ($v =$ const.) et de parallèles ($u =$ const.).

Les axes de la congruence des cercles (C), s'obtiennent en portant sur la tan-

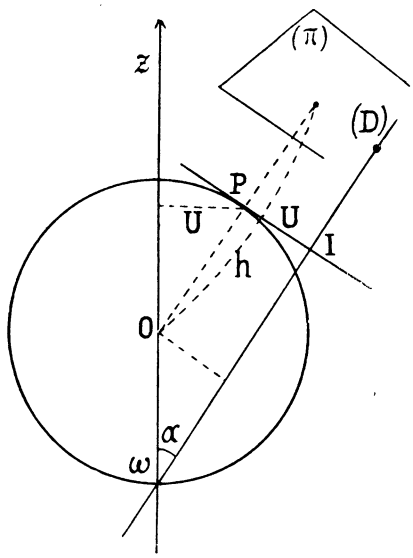

FIG. 2.

gente en chaque point P de (S) au méridien passant par ce point, à partir du point de contact, la longueur $\overline{PI} = U$, et en élevant en I la normale (D) au plan tangent correspondant à (S).

v représentant l'angle d'un méridien quelconque de (S) avec un méridien origine, U est la distance du point P au diamètre Oz de (S).

Si l'on désigne par ω (*fig.* 2) le point où (D) coupe Oz, on lit immédiatement sur la figure que ω est l'un des points où Oz coupe (S).

Ici, la congruence des axes des cercles (C) est formée par les droites issues d'un point fixe ω (congruence isotrope particulière).

Pour achever la détermination de la congruence, calculons r (h étant arbitrairement donnée),

Les équations du système (20) s'écrivent ici :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial(r^2)}{\partial u} = -\dfrac{\partial h}{\partial u}\dfrac{\partial \log(U^2)}{\partial u} - \dfrac{\partial}{\partial u}(h^2 - U^2) + 2U^2 h, \\ \dfrac{\partial(r^2)}{\partial v} = -\dfrac{\partial h}{\partial v}\dfrac{\partial \log(U^2)}{\partial u} - \dfrac{\partial h^2}{\partial v}. \end{cases}$$

L'intégration est immédiate, et donne

$$r^2 = U^2 - h\frac{\partial \log U^2}{\partial u} - h^2 + C, \tag{21}$$

où C est une constante arbitraire.

En désignant par α l'angle que fait (D) avec Oz (*fig.* 2), on a

$$d\alpha = U\,du = \sin\alpha\,du,$$

$$\frac{\partial \log U^2}{\partial u} = 2\frac{\partial \log \sin\alpha}{\partial \alpha}\frac{d\alpha}{du} = 2\cos\alpha,$$

et (21) peut s'écrire

$$r^2 = \sin^2\alpha - 2h\cos\alpha - h^2 + C,$$

ou, en introduisant la distance $p = h + \cos\alpha$ du point fixe ω au plan du cercle (C)

$$r^2 + p^2 = C.$$

Nous sommes finalement conduits au cas simple des congruences formées de cercles situés sur une sphère fixe [1].

L'intérêt du développement qui précède réside en ce qu'il montre qu'il n'est pas possible de placer les cercles d'une congruence dont l'ensemble des points focaux est rejeté à l'infini, dans les plans tangents à une surface *arbitraire*, autrement qu'en prenant les cercles d'intersection des divers plans tangents avec une sphère fixe.

Si l'on suppose que le point de concours ω, des axes des cercles (C) des congruences spéciales qui viennent d'être déterminées, s'éloigne à l'infini dans une direction déterminée, on a le problème suivant.

Quelles sont les congruences de cercles à axes parallèles (les cercles passent par deux points fixes du cercle de l'infini), sans points focaux à distance finie?

Une solution immédiate et banale résulte de l'inversion des congruences précé-

---

[1] On pourrait à la rigueur dire que, dans ce cas, tous les points de chaque cercle de la congruence sont des points focaux [l'équation (19) s'évanouit]; nous ne les considérerons pas comme tels.

demment déterminées (cercles sur une sphère fixe); on obtient alors une famille quelconque à deux paramètres, de cercles situés dans un plan fixe.

Pour avoir les autres solutions du problème, envisageons, d'une façon générale, une congruence de coniques passant par deux points fixes quelconques A et B.

Les points A et B tiennent lieu chacun de deux points focaux, de sorte que sur chaque conique de la congruence il n'y a que deux points focaux variables.

Pour que l'ordre de multiplicité des points focaux A et B s'élève, il faut et il suffit [*voir*, G. Darboux; *Théorie des Surfaces*, t. II, p. 10] que les tangentes menées en A et B aux coniques de la congruence, décrivent deux cônes quelconques de sommets respectifs A et B.

Une homographie transformant A et B en deux points cycliques fixes I et J, donne les congruences de cercles cherchées.

Les ∞^1 cercles de l'une de ces congruences, situés dans un même plan passant par I et J, admettent les mêmes tangentes aux points I et J. Ces cercles sont donc concentriques. Le lieu du centre commun, lorsque le plan se déplace parallèlement à lui-même, est une courbe *quelconque*, dépendant du choix que l'on a fait pour les cônes de sommets I, J.

On peut donc donner la définition suivante des congruences les plus générales cherchées :

Ce sont les congruences formées par l'ensemble des cercles obtenus en faisant décrire une courbe arbitraire au centre d'une famille de cercles coplanaires et concentriques, le plan des cercles restant parallèle à lui-même[1].

Congruences pour lesquelles les plans des cercles passent par un point fixe. — D'après ce qu'on a vu plus haut, on obtient des congruences particulières de cercles sans points focaux à distance finie, les plans des cercles passant par un point fixe O, en coupant une sphère fixe quelconque par les ∞^2 plans passant par O.

Nous nous proposons de déterminer *toutes* les congruences du type envisagé, formées de cercles situés dans les plans passant par un point fixe O de l'espace, que nous pouvons supposer être l'origine des coordonnées.

D'une façon générale, le problème de la détermination des congruences pour lesquelles les plans des cercles sont tangents à une surface (Σ) *donnée* [$h =$ fonction donnée de u et v], n'est possible que si l'équation (E) où h a l'expression donnée, et l'équation (14), admettent des solutions communes en λ, ce qui n'a généralement pas lieu.

---

[1] Ce résultat a été également signalé par M. Delens; d'après la remarque faite au début, le parallélisme des plans donne sur le cercle de l'infini deux foyers dont chacun est double; l'ordre de chacun s'élève d'une unité ici par suite de l'hypothèse complémentaire : dans chaque plan, les cercles sont concentriques.

Dans le cas actuel [(Σ) réduite au point O], le problème est possible, et λ a une forme remarquable.

Si $h = 0$, l'équation (E) se réduit à $R = 0$, soit

$$\frac{\partial^2 \lambda^2}{\partial u \partial v} = 0,$$

d'où

$$\lambda^2 = U + V$$

U et V étant des fonctions de u et de v respectivement.

Or, la forme

$$ds^2 = (U + V)(du^2 + dv^2),$$

est possible pour l'élément linéaire de la sphère; c'est la *forme de Liouville*.

Chaque système orthogonal isotherme donnant à l'élément linéaire de la sphère la forme de Liouville, fournit d'ailleurs, comme nous le savons, ∞^1 congruences du type actuellement envisagé [on peut ajouter une constante arbitraire au carré du rayon de chaque cercle].

Les rayons des cercles des congruences relatives à une mise déterminée de l'élément linéaire de la sphère sous la forme de Liouville, s'obtiennent sans difficulté.

Les équations (20) s'écrivent ici :

$$\frac{\partial r^2}{\partial u} = \frac{\partial \lambda^2}{\partial u} = U',$$

$$\frac{\partial r^2}{\partial v} = -\frac{\partial \lambda^2}{\partial v} = -V',$$

d'où

$$r^2 = U - V + C,$$

où C est une constante arbitraire.

V. — Points focaux doubles d'une congruence. Congruences de cercles n'ayant à distance finie qu'un point focal double.

Revenons au cas général où la congruence des axes des cercles est isotrope : portons notre attention sur le cas où les deux points focaux qui restent à distance finie sont confondus en un seul, c'est-à-dire sur le cas où les coefficients de l'équation (19) du numéro III vérifient la relation

$$A^2 + B^2 - C^2 = 0. \tag{22}$$

Pour une congruence isotrope des axes donnée (λ fonction connue de u, v), (22) est une équation aux dérivées partielles aux deux fonctions inconnues h, r dont une voie géométrique nous permet d'obtenir l'intégrale générale. Sous la forme présentée jusqu'ici, cette intégrale générale fait intervenir d'abord les deux fonctions d'une variable dont dépend λ, puis la fonction de deux variables h (ou r) que l'on peut choisir arbitrairement, de sorte que (22) devient une équation aux dérivées partielles du premier ordre par rapport à la fonction restante r (ou h), dont l'intégration fait intervenir une nouvelle fonction arbitraire d'un argument. Le raisonnement géométrique montrera qu'en réalité la solution générale du problème ne fait intervenir que la congruence rectiligne isotrope générale et la surface focale lieu du point focal unique, soit deux fonctions d'un argument (pour λ) et une fonction de deux variables pour la surface focale : mais le raisonnement fait plus haut prouve que pour une congruence isotrope donnée on peut se donner arbitrairement la surface enveloppe des plans des cercles et qu'alors on trouve une infinité de congruences de cercles, congruences dépendant d'une fonction arbitraire d'une variable.

Nous avons ici besoin d'une digression relative aux courbes d'une congruence *quelconque* et aux points focaux multiples : Darboux, au tome II de la *Théorie des Surfaces* (p. 1 et suiv.) s'est occupé de la question; nous y ajouterons quelques remarques géométriques.

Si la courbe générale (Γ) *d'une congruence reste simplement osculatrice à une surface fixe* (Σ), *le point d'osculation* F *est un foyer double.*

Si la courbe variable (Γ) rencontre une courbe fixe (C), par chaque point M de (C) passent exceptionnellement ∞^1 courbes (Γ) tandis que par un point *arbitraire* P de l'espace ne passent qu'un nombre fini de courbes (Γ) de la congruence; les tangentes en M aux diverses courbes (Γ) issues de M forment en général un cône et *le point* M *est foyer simple de chaque courbe qui y passe, à moins que les tangentes en* M *à ces courbes ne soient réparties dans un même plan contenant la tangente en* M *à* (C), c'est-à-dire à moins que les courbes (Γ) ne restent simplement tangentes à une certaine développable (Δ), issue de (C), tout le long de (C). *Plus généralement, si les courbes* (Γ) *ont un contact d'ordre* p *le long de* (C) *avec une surface* (S) *issue de* (C), *chaque point de* (C) *est point focal d'ordre* $p+1$.

Voyons comment, géométriquement, nous pouvons obtenir ces propositions. Imaginons une congruence de courbes dont chacune (Γ) rencontre deux courbes fixes (C), (C_1) : il y a sur chaque courbe (Γ) deux points focaux simples M, M_1 pris sur (C) et (C_1) respectivement, la donnée de M sur (C) laissant arbitraire la position de M_1 sur (C_1); nous pouvons imaginer que la définition de la congruence contient un paramètre variable ε choisi de façon que (C) soit indépendante de ε mais que (C_1) varie avec ε et tende vers (C) si ε tend vers zéro; (C_1) décrit alors une surface (Σ) déterminée; les équations de (C) sont $\Sigma = 0$, $\Sigma_1 = 0$ où Σ et Σ_1

sont indépendantes ds ε; celles de (C_1) sont $\Sigma = 0$, $\Sigma_1 + \varepsilon(\ldots) = 0$; faire tendre ε vers zéro fait bien tendre (C_1) vers (C) (dans son ensemble) sans rien préjuger pour la variation d'un point de (C_1), qui peut tendre vers *tout* point de (C). Imaginons donc que ε étant fixe et non nul nous choisissions ∞^1 courbes de la congruence (ce qui introduit une fonction *arbitraire* d'un argument) : nous obtenons ainsi une surface $S(\varepsilon)$, contenant les courbes $\Gamma(\varepsilon)$, $\Gamma'(\varepsilon)$, ...; la courbe $\Gamma(\varepsilon)$ coupe (C) en M, (C_1) en M_1, et si ε tend vers zéro, $\Gamma(\varepsilon)$ tend vers $\Gamma(0)$ que nous pouvons supposer issue encore de M, tandis que M_1 suit une route tracée sur (Σ) et aboutissant en M : donc la tangente en M à $\Gamma(0)$, limite de la droite MM_1, est située dans le plan tangent en M à la surface (Σ); cela est vrai quelle que soit la surface $S(\varepsilon)$, de sorte que *toutes* les courbes de la congruence $\Gamma(0)$, issues de M, ont leur tangente dans un plan fixe issu de la tangente en M à (C), et que le point M est un point focal double.

La même démonstration s'appliquerait avec de légers changements pour des courbes ayant un contact d'ordre p avec une surface fixe (S) en tous les points d'une courbe (C) tracée sur (S).

Si les courbes d'une congruence passent par un point fixe O, ce point est foyer d'ordre *deux* pour chaque courbe; les tangentes aux diverses courbes en O remplissent en général tout l'espace; si elles forment un cône, l'ordre du point focal O devient *trois* du moins dans le cas général et s'élève si le nombre de points communs au cône en jeu et à chaque courbe confondus avec le point O s'élève.

Cette digression terminée, revenons aux cercles dont la congruence des axes est isotrope; il y a deux points focaux à distance finie; ces deux points peuvent se confondre dans les trois cas distincts :

a) *le point focal double est fixe;*

b) *le point focal double engendre une courbe* (C);

c) *le point focal double engendre une surface* (S).

Dans chacun de ces cas supposons d'abord donnée la congruence rectiligne isotrope Θ des axes; le premier cas est évident : nous construisons les ∞^2 cercles issus de O obtenus en faisant tourner O successivement autour de chaque rayon de la congruence rectiligne.

Dans le second cas, donnons-nous outre Θ une courbe (C) *arbitraire*, puis une développable (Δ) *arbitraire* issue de (C); soit D la normale en un point M de (C) à la développable (Δ); il existe, pour chaque point μ de D, un (ou plusieurs rayons en nombre fini) de Θ issus de μ; la rotation de M autour d'un tel rayon donne un cercle tangent en M à (Δ); la variation de μ sur D, puis celle de M sur (C) donnent ∞^2 cercles et (C) comme courbe focale *double*.

Dans le troisième cas donnons-nous outre Θ une surface (S) *arbitraire*; en un point M arbitraire de (S), il y a ∞^2 cercles ayant en M trois points communs avec (S) confondus en un seul point M : pour chaque tangente (MT) en M à (S)

on trouve ∞^1 cercles dont le lieu est une sphère (σ) tangente à (S) au point M, l'une des deux branches de l'intersection de (S) et de cette sphère étant tangente à (MT)[1]; les axes de ces cercles décrivent le plan issu de ω centre de (σ) et perpendiculaire à (MT); (MT) variant on obtient ainsi ∞^2 cercles, ∞^2 axes; la congruence de ces axes, relatifs à M, admet avec Θ un nombre fini de rayons communs; adoptons-en un et suivons-le par continuité quand M décrit (S) : nous obtenons ainsi ∞^2 cercles osculateurs à (S) *réalisant manifestement le troisième cas*.

La solution géométrique ainsi obtenue pour le troisième cas semble en contradiction, pour le nombre des fonctions arbitraires, avec le début de ce paragraphe : une fois Θ choisie, on ne trouve plus qu'une fonction arbitraire $Z(u, v)$ de deux arguments u, v au lieu d'une fonction arbitraire $z(u, v)$ et d'une fonction $\varphi(a)$ d'un argument a. Cela tient à ce que la fonction $z(u, v)$ est liée à $Z(u, v)$ par une relation aisée à former

$$z = F\left(Z, \frac{\partial Z}{\partial u}, \frac{\partial Z}{\partial v}, u, v\right)$$

la donnée de Z donne z, mais la réciproque n'est plus vraie; si l'on se donne z, on trouve Z par l'intégration d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre.

VI. — Cas de deux points focaux diamétralement opposés.

Pour qu'il n'existe, sur chaque cercle de la congruence, que deux points focaux (simples), diamétralement opposés, il faut et il suffit que l'équation (19) du numéro III se réduise à

$$A \cos \theta + B \sin \theta = 0,$$

λ étant toujours solution de (14).

On obtiendra donc les congruences jouissant de la nouvelle propriété, en annulant C.

En multipliant C par $2r (r \neq 0)$, l'équation du problème peut s'écrire

$$\frac{\partial h}{\partial u}\frac{\partial (r^2)}{\partial v} - \frac{\partial h}{\partial v}\frac{\partial (r^2)}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial v}(\lambda^2 r^2) = 0. \tag{23}$$

---

[1] On remarquera que ceci est une façon *géométrique* de démontrer le théorème de Meusnier; car toute sphère (σ) tangente en M à (S) donne une intersection avec (S) ayant deux tangentes Mt, Mt' en M; la section de (σ) par un plan *quelconque* issu de Mt est un cercle ayant avec l'intersection (S, σ), courbe tracée sur (σ), trois points communs réunis en M; ces points sont d'ailleurs les points commus au cercle et à la section de (S) par le plan du cercle.

Le degré de généralité de la solution est le même que dans le cas où les deux points focaux sont confondus; mais ici, l'intégration est bien plus facile.

Pour une congruence isotrope des axes donnée, si l'on se donne arbitrairement le rayon du cercle ayant pour axe une droite de la congruence, $r = r(u, v)$, on a à intégrer l'équation aux dérivées partielles (23), linéaire et du premier ordre en h [λ^2 et r^2 connus].

L'intégration n'exige qu'une quadrature, et la solution générale est de la forme

$$h = \mathcal{F}(u, v) + \varphi(r^2),$$

$\mathcal{F}$ étant une fonction *connue* de u et v, et φ une fonction *arbitraire* de r^2.

On voit que la connaissance *a priori* d'une congruence du type envisagé, livre immédiatement une infinité d'autres congruences du même type : *il suffit de déplacer chaque cercle de la congruence, perpendiculairement à son axe d'une longueur fonction arbitraire du rayon.*

L'équation (23) montre d'ailleurs que l'on peut aussi *multiplier le rayon de chaque cercle par un nombre fixe quelconque.*

Pour obtenir des solutions simples, cherchons les congruences à points focaux diamétralement opposés, pour lesquelles, la distance du plan du cercle générateur au point fixe O, est uniquement fonction du rayon du cercle.

On a ici

$$h = f(r),$$

et l'équation (23) se réduit à

$$\frac{\partial}{\partial v}(\lambda^2 r^2) = 0,$$

d'où

$$r = \frac{\psi(u)}{\lambda},$$

$$\psi = \text{fonction arbitraire de } u.$$

Cherchons de même les congruences formées par des cercles de rayon constant ($r = c$).

L'équation (23) s'écrit alors

$$\frac{\partial \lambda^2}{\partial v} = 0,$$

d'où

$$\lambda^2 = U^2 \qquad (U = \text{fonction de } u \text{ seul}).$$

On retrouve comme congruence des axes des cercles, l'ensemble des droites issues d'un point fixe (voir n° IV).

Ainsi :

Les congruences de cercles de rayon constant, n'admettant que deux points focaux (simples), diamétralement opposés sur chaque cercle, sont celles pour lesquelles les axes des cercles passent par un point fixe (qui peut être rejeté à l'infini), et *celles-là seulement*.

D'une façon plus générale, on obtient des congruences à points focaux diamétralement opposés et à axes concourants, en coupant une surface quelconque (S) par une famille de sphères concentriques (ou de plans parallèles), et en prenant sur chaque sphère (Σ) ∞^4 cercles égaux admettant pour pôles (sphériques) les différents points où (Σ) coupe (S), le rayon des cercles de chaque famille étant une fonction arbitraire du rayon de la sphère (Σ) qui les porte.

On pourrait multiplier les exemples. Nous n'insistons pas davantage.

VII. — Congruences de coniques.

Le problème de la détermination des congruences de cercles n'admettant que deux points focaux à distance finie sur chaque cercle, étudié au numéro I, est transformé homographique du suivant.

Quelles sont les congruences de coniques s'appuyant sur une conique fixe (E), les deux points d'intersection de chaque conique avec (E) comptant chacun pour deux points focaux?

D'une façon plus générale, envisageons une congruence de coniques assujetties à couper deux courbes fixes (C_1) et (C_2) en deux points variables M_1 et M_2.

Pour que les points M_1, M_2 soient des points focaux doubles, il faut et il suffit, comme on l'a vu au numéro V, que les coniques de la congruence restent tangentes en M_1 et M_2 à deux développables fixes (Δ_1) et (Δ_2) issues des courbes (C_1) et (C_2).

Si l'on se donne arbitrairement l'enveloppe (Σ) du plan de la conique variable, la détermination de la congruence met en jeu [pour C_1, C_2, Δ_1, Δ_2 et Σ données] une fonction arbitraire des deux variables qui servent à définir les différentes courbes de la congruence [celle qui fixe, dans chaque plan tangent à (Σ), la conique tangente en M_1 et M_2 aux sections des développables Δ_1 et Δ_2 par le plan tangent envisagé].

Cette fonction étant choisie, les deux nappes focales (distinctes de C_1 et C_2) de la congruence se trouvent déterminées. Il est clair d'ailleurs que la donnée de ces nappes focales peut être substituée à celle de la surface (Σ) pour la définition de la congruence.

Supposons que (C_1 et C_2) se réduisent à une même conique fixe (E). On a alors le problème posé plus haut.

La solution s'obtient en envisageant deux développables distinctes (ou confon-

dues) (Δ_1), (Δ_2), passant par (E), en se donnant arbitrairement la surface enveloppe (Σ) du plan de la conique génératrice de la congruence, et en choisissant, d'après une loi arbitraire, dans chaque plan tangent à (Σ), une conique tangente aux deux développables (Δ_1) et (Δ_2) aux points M_1 et M_2 où le plan tangent considéré coupe (E).

Au lieu de se donner (Σ), on peut, comme on l'a observé plus haut, se donner les deux nappes focales distinctes de (E).

Une homographie transformant (E) en le cercle de l'infini nous ramène au problème qui fait l'objet du numéro I de ce Mémoire, et les considérations qui précèdent expliquent simplement, pourquoi, une solution de ce dernier problème étant connue, on en obtient une infinité d'autres en déplaçant chaque cercle perpendiculairement à son axe et en modifiant arbitrairement son rayon (ces deux opérations n'altèrent pas le contact du cercle avec les développables issues du cercle de l'infini).

J'indique ici, un autre mode de transformation des congruences de cercles n'admettant que deux points focaux à distance finie sur chaque cercle, un peu plus caché que le précédent, et se rattachant à un procédé de transformation des congruences isotropes, que j'ai établi dans une Note des *Comptes rendus*[1] et que je rappelle.

Soit Θ une congruence isotrope quelconque; O un point fixe quelconque de l'espace. Faisons tourner les différents rayons de Θ d'un angle fixe quelconque, dans un sens déterminé, autour de sa parallèle issue de O. Nous obtenons une nouvelle congruence *isotrope*.

Si donc on fait tourner chaque cercle d'une congruence du type considéré, autour de la perpendiculaire menée d'un point fixe O de l'espace à son plan, d'un angle constant, dans un sens déterminé, on obtient une autre congruence du même type.

En combinant ce procédé de transformation avec le précédent, on voit que l'on peut énoncer cet autre résultat :

On transforme une congruence du type envisagé en une autre congruence du même type, en soumettant chaque cercle à un déplacement hélicoïdal d'angle déterminé (le rayon pouvant varier d'une façon quelconque) et de pas arbitraire, autour de la perpendiculaire issue d'un point fixe quelconque de l'espace sur le plan du cercle.

Je montrerai pour terminer, comment, les considérations géométriques du paragraphe actuel, peuvent conduire simplement au théorème fondamental du numéro I, qui a été le point de départ de ce travail.

Reprenons la congruence de coniques la plus générale dont les courbes s'appuient en deux points variables M_1, M_2, sur une conique fixe (E), de telle sorte qu'il n'y ait que deux points focaux à distance finie sur chaque conique.

La conique génératrice (C) est tangente en M_1 et M_2 à deux développables fixes (Δ_1) et (Δ_2) issues de (E).

---

[1] *Sur une transformation des congruences isotropes : C. R.*, t. 193, p. 1144; 1931.

Soient α et β les pôles de la droite $(M_1 M_2)$ par rapport à (C) et à (E) [*fig.* 3].

La droite $(\alpha\beta)$ est à la fois dans les plans tangents en M_1 et M_2 à (Δ_1) et à (Δ_2).

Réciproquement d'ailleurs, il est évident que si la congruence des droites $(\alpha\beta)$ est formée par les tangentes communes à deux développables issues de (E), la congruence des coniques (C) jouit de la propriété de n'admettre que deux points

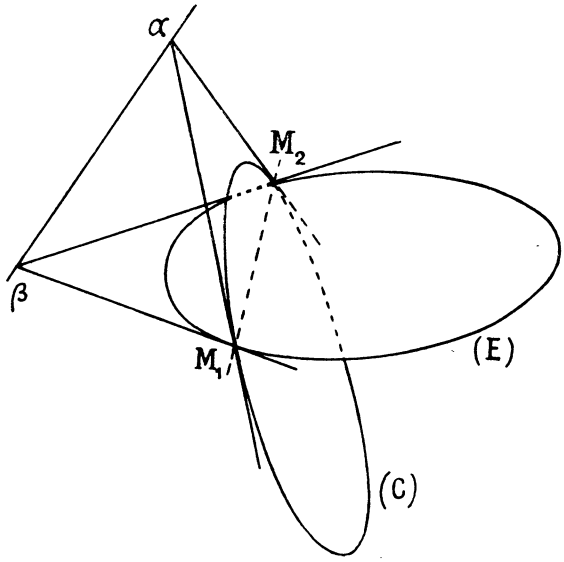

FIG. 3.

focaux au plus, à distance finie, sur chaque courbe [les coniques (C) sont alors tangentes aux deux développables aux points où elles coupent (E)].

Transformons homographiquement la figure, en substituant à (E) le cercle de l'infini.

On obtient alors la congruence des cercles la plus générale n'admettant que deux points focaux (au plus) à distance finie sur chaque cercle.

L'axe du cercle transformé de (C) est la droite tranformée de $(\alpha\beta)$, et est situé par suite dans les plans tangents aux deux développables transformées de (Δ_1) et (Δ_2).

Les deux développables transformées étant isotropes, on voit que les axes des cercles de la congruence, peuvent être définis comme les intersections de deux plans quelconques, tangents, respectivement, à deux développables isotropes.

La congruence de ces axes est par suite isotrope, et cette condition suffit pour que la congruence de cercles appartienne au type envisagé.

Eu égard aux congruences générales de coniques, il serait intéressant de chercher à réaliser les divers cas où l'ordre de multiplicité des points focaux s'élève.

En ce qui concerne la recherche des congruences de coniques réelles, rencon-

trant en deux points, comptant chacun pour deux, une conique fixe réelle, il est facile de voir que l'on peut utiliser les résultats du numéro II.

On peut poser

$$y_1 = i\overline{y_1}, \qquad v = i\overline{v},$$

en substituant à y_1 et v les nouvelles quantités

$$\overline{y_1} = \frac{(\beta - \alpha)(f' + f'_1) - 2(f_1 - f)}{1 + \alpha\beta},$$

$$\overline{v} = \frac{\beta - \alpha}{1 + \alpha\beta}.$$

Si alors on prend les variables α et β réelles, et si $f(\alpha)$ et $f_1(\beta)$ sont des fonctions réelles quelconques de α et β respectivement; on a une congruence de coniques, rencontrant toutes en deux points focaux *doubles* la conique fixe réelle (située dans le plan de l'infini)

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + z^2 = 0, \\ t = 0. \end{cases}$$

Les coniques de la congruence sont définies par le plan (π_1) et la quadrique (Σ_1), d'équations réelles

$$(\pi_1) \qquad ux + \overline{v}y + wz + ht = 0,$$

$$(\Sigma_1) \qquad x^2 - y^2 + z^2 - 2x_1xt + 2\overline{y_1}yt - 2z_1zt - 2\sigma_1t^2 = 0,$$

où x_1 et z_1 ont les expressions données au numéro II, $\overline{y_1}$ et $\overline{v}$ celles données ci-dessus; σ_1 et h étant toujours définies par les équations (12).

On peut, si l'on veut, ramener la conique fixe à distance finie, en effectuant la permutation circulaire $(x, y, z, t;\ y, z, t, x)$.

On obtient alors la nouvelle conique

$$\begin{cases} y^2 - z^2 + 1 = 0, \\ x = 0. \end{cases}$$