

PIERRE PAPILLON

Sur certaines équivalences (Aires et volumes)

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 3^e série, tome 24 (1932), p. 89-127

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1932_3_24__89_0>

© Université Paul Sabatier, 1932, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR CERTAINES ÉQUIVALENCES

(AIRES ET VOLUMES)

Par PIERRE PAPILLON

Professeur agrégé au Lycée de Mulhouse.



CHAPITRE PREMIER

Les problèmes d'équivalences.

§ 1. — Formule générale de Stokes. — A l'identité fondamentale

$$\int \int_{\sigma} d\xi \cdot d\eta \equiv \int_{\gamma} \xi d\eta$$

se substitue, par un changement de variables suivi de combinaisons linéaires, celle de Stokes

$$\int \int_s \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} ds \equiv \int_c P dx + Q dy + R dz \quad (1)$$

dont les membres s'étendent à la cloison s d'une surface d'équation

$$e(x, y, z) = 0$$

et à son contour c ; l'élément superficiel ds possède une normale de cosinus directeurs α, β, γ . Les déformations de s qui n'altèrent point c ne portent à l'intégrale double aucune atteinte : c'est un *invariant intégral*, une *fonction de ligne* au sens de M. Vito Volterra.

Inversement, une intégrale

$$\int \int_s (\alpha A + \beta B + \gamma C) ds, \quad (2)$$

dans laquelle A, B, C sont trois fonctions uniformes des variables x, y, z , et dont le champ est une cloison déterminée, ne constitue un tel invariant que sous la condition nécessaire et suffisante

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = 0$$

puisqu'alors l'élément différentiel de (2) s'identifie à l'élément correspondant de (1); les fonctions P, Q, R s'obtiennent par quadratures(*).

§ 2. — **Formes particulières.** — Il est clair que, très particulièrement,

$$\int \int_s \frac{\partial \mathcal{F}(x, y)}{\partial x} \gamma ds \equiv \int_c \mathcal{F} \cdot dy; \quad (3)$$

si le contour c est jeté sur la surface (S) d'équation

$$\mathcal{F}(x, y) = hz$$

l'invariant s'exprime par $h \cdot s_x$: il peut mesurer la projection s_x de la cloison s sur le plan yOz quand h égale 1, sinon, le volume cylindrique droit de base s_x et de hauteur h .

On conclut encore aisément aux relations

$$\int \int_s \frac{\partial \mathcal{F}(x, y, z)}{\partial z} (\alpha x + \beta y + \gamma z) ds \equiv \int_c \mathcal{F} \cdot (\gamma dx - x dy), \quad (4)$$

$$\int \int_s \frac{\partial \mathcal{F}(x, y, z)}{\partial z} (\alpha x + \beta y) ds \equiv \int_c \mathcal{F} (\gamma dx - x dy), \quad (5)$$

la fonction $\mathcal{F}(x, y, z)$ étant homogène et de degré -2 pour les ensembles respectifs xyz et xy ; observant que

$$\frac{1}{2}(\gamma dx - x dy) = \frac{1}{2}r^2 d\theta$$

mesure la projection s_x de s sur le plan xOy , si le contour est jeté sur la surface (S) d'équation

$$\mathcal{F}(x, y, z) = -\frac{h}{2}$$

(*) A. Buhl : *Géométrie et Analyse des Intégrales doubles*, Ch. 1, §§ 2 et 3.

l'invariant s'exprime par $h \cdot s_z$: de là les deux interprétations analogues aux précédentes, mais concernant s_z .

Enfin, si s intéresse la surface (\mathfrak{S}) que fournit la substitution de z à h dans la précédente équation, l'invariant mesure le volume cylindrique inclus entre s et s_z .

§ 3. — **Problèmes d'équivalences.** — Soit une intégrale double

$$\mathfrak{J} = \int \int_S \Delta(X, Y, Z) dS$$

affectant la cloison d'une surface (S) d'équation

$$E(X, Y, Z) = 0;$$

s'il correspond à tout point $M(X, Y, Z)$ de (S) un point $m(x, y, z)$ d'une surface (s) , d'équation

$$e(x, y, z) = 0$$

et sans lien nécessaire avec la première, \mathfrak{J} peut s'exprimer par une nouvelle intégrale affectant la cloison s ainsi déduite de S :

$$\int \int_s \delta(x, y, z) ds.$$

Toutes les fois que $\delta(x, y, \bar{z})$ prend une même forme $\kappa(x, y)$, \mathfrak{J} possède une même valeur pour un champ déterminé : la résolution de l'équation

$$\delta(x, y, z) = \kappa(x, y)$$

associe les surfaces (S) qui jouissent d'une même propriété, l'invariance de \mathfrak{J} pour les transformées d'une cloison s . D'autre part, le contour c de s intervient seul dans la détermination effective de \mathfrak{J} ; un choix convenable de (s) permettra des interprétations simples de cet invariant, dont fait mention le paragraphe 2 : nous dirons que (s) est *attachée* à la surface (S) ou, plus généralement, à l'ensemble des *associées* (S) .

Au cours de ses *Mémoires sur les Transformations et Extensions de la Formule de Stokes*, M. A. Buhl a fait usage de ces remarques sur des correspondances cylindriques et, plus souvent, coniques(*). Leur emploi systématique m'a conduit à de nombreux développements; ce travail signale les plus importants et les plus esthétiques,

(*) Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 3^e série, t. 2 et 7.

à caractère géométrique ou mécanique, relatifs aux transformations cylindriques, coniques ou conoïdales univoques(*); d'intérêts fort divers, les plus heureux semblent s'attacher à l'équivalence des cloisons, liant ainsi le problème géographique de la conservation des aires à de plus amples questions.

§ 4. — **Transformations de J.** — 1. *Transformation cylindrique.* — Supposons la correspondance telle que la droite Mm ait une direction fixe, celle de l'axe $z'z$ du système coordonné normal; les conditions de transformation

$$\begin{aligned} X &= x, & Y &= y, & Z &= \rho z, \\ E(x, y, \rho z) &= 0, \end{aligned}$$

et l'expression de dS en fonction de ds nous conduisent à

$$J = \int \int_s \Delta(X, Y, Z) \frac{\sqrt{E_x'^2 + E_y'^2 + E_z'^2}}{E_z'} \gamma ds$$

avec

$$X = x, \quad Y = y, \quad Z = \rho z, \quad E(x, y, \rho z) = 0,$$

α, β, γ désignant ici les cosinus directeurs de la normale à l'élément ds .

L'hypothèse d'univocité — un cylindre de direction $z'z$ ne découpe sur (S) qu'une cloison — impose

$$E(X, Y, Z) \equiv Z - F(X, Y)$$

de sorte que, calculs effectués,

$$J = \int \int_s \Delta(x, y, F) \sqrt{1 + F_x'^2 + F_y'^2} \gamma ds.$$

Suivant les notations d'usage

$$J = \int \int_s \Delta(x, y, z) \sqrt{1 + p^2 + q^2} \gamma ds, \quad (6)$$

le cylindre, que dirige le contour de s , perforant la surface (S) d'équation

$$z = F(x, y).$$

(*) Pour quelques résultats touchant les correspondances plurivoques, voir : *Sur certains volumes algébriques*; Enseignement mathém., 1931, p. 206 et sqq. Ils doivent logiquement suivre ceux-ci.

2. *Transformation conique.* — Supposons, en deuxième lieu, la correspondance telle que la droite Mm passe en un point fixe, l'origine O des coordonnées :

$$\mathfrak{J} = \int \int_s \Delta(X, Y, Z) \rho^3 \frac{\sqrt{E'_x{}^2 + E'_y{}^2 + E'_z{}^2}}{XE'_x + YE'_y + ZE'_z} (\alpha x + \beta y + \gamma z) ds,$$

avec

$$X = \rho x, \quad Y = \rho y, \quad Z = \rho z, \quad E(\rho x, \rho y, \rho z) = 0.$$

L'univocité — un cône de sommet O ne découpe sur (S) qu'une cloison — impose

$$E(X, Y, Z) \equiv F(X, Y, Z) - 1,$$

F étant homogène et de degré m pour l'ensemble XYZ , en sorte que

$$\mathfrak{J} = \frac{1}{m} \int \int_s \Delta \left(x F^{-\frac{1}{m}}, y F^{-\frac{1}{m}}, z F^{-\frac{1}{m}} \right) F^{-\frac{2}{m}-1} \sqrt{F'_x{}^2 + F'_y{}^2 + F'_z{}^2} (\alpha x + \beta y + \gamma z) ds. \quad (7)$$

3. *Transformation conoïdale.* — Supposons enfin la droite Mm perpendiculaire à une droite fixe, l'axe $z'z$ du système coordonné :

$$\mathfrak{J} = \int \int_s \Delta(X, Y, Z) \rho^2 \frac{\sqrt{E'_x{}^2 + E'_y{}^2 + E'_z{}^2}}{XE'_x + YE'_y} (\alpha x + \beta y) ds$$

avec

$$X = \rho x, \quad Y = \rho y, \quad Z = z, \quad E(\rho x, \rho y, z) = 0.$$

L'univocité — un conoïde droit d'axe $z'z$ ne découpe sur (S) qu'une cloison — impose

$$E(X, Y, Z) \equiv F(X, Y, Z) - 1,$$

F étant homogène et de degré m pour l'ensemble XY , en sorte que

$$\mathfrak{J} = \frac{1}{m} \int \int_s \Delta \left(x F^{-\frac{1}{m}}, y F^{-\frac{1}{m}}, z \right) F^{-\frac{1}{m}-1} \sqrt{F'_x{}^2 + F'_y{}^2 + F'^2_z} (\alpha x + \beta y) ds. \quad (8)$$

CHAPITRE II

L'équivalence des cloisons.

§ 5. — **Expressions des aires.** — \mathfrak{J} égale S lorsque

$$\Delta(X, Y, Z) \equiv 1$$

et, les notations du paragraphe 4 étant maintenues,

$$S = \begin{cases} \int \int_s \sqrt{1 + p^2 + q^2} \gamma ds & (9) \\ \frac{1}{m} \int \int_s F^{-\frac{2}{m}-1} \sqrt{F_x'^2 + F_y'^2 + F_z'^2} (\alpha x + \beta y + \gamma z) ds & (10) \\ \frac{1}{m} \int \int_s F^{-\frac{1}{m}-1} \sqrt{F_x'^2 + F_y'^2 + F^2 F_z'^2} (\alpha x + \beta y) ds. & (11) \end{cases}$$

I. CORRESPONDANCES CYLINDRIQUES.

§ 6. — Appliquons à (9) l'identité (3) :

$$S = \int_c \mathfrak{F} dy$$

avec

$$\mathfrak{F} = \int \sqrt{1 + p^2 + q^2} dx + \Omega(y)$$

Ω étant une fonction uniforme arbitraire; ceci donne aux surfaces (S), telles que S égale s_x , l'équation générale

$$z = \int \sqrt{1 + p^2 + q^2} dx + \Omega(y)$$

et ces planificatrices sont les mêmes pour toutes les intégrales (S) de l'équation

$$p^2 + q^2 = W(x, y), \quad (12)$$

en particulier pour les associées d'une surface déterminée (S_0) — W se déduit alors d'une fonction connue $F_0(x, y)$ — : les problèmes d'attachement ne dépendent ainsi que d'une quadrature, ceux d'association d'une équation aux dérivées partielles premières non linéaire.

§ 7. — **Généralités sur l'équation d'association.** — Une solution du système intégral de (12) et cette équation même déterminent p et q , puis

$$dz = p dx + q dy$$

l'intégrale complète

$$\mathcal{C}(x, y, z, k_1, k_2) = 0;$$

les paramètres k_1 et k_2 étant liés arbitrairement, *l'intégrale générale* résulte de l'élimination du paramètre unique t entre

$$\mathcal{C}(x, y, z, k_1, k_2) = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial k_1} \cdot \frac{dk_1}{dt} + \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial k_2} \cdot \frac{dk_2}{dt} = 0;$$

enfin *l'intégrale singulière* s'acquiert en éliminant k_1 et k_2 entre

$$\mathcal{C} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial k_1} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial k_2} = 0.$$

Les surfaces associées comprennent, en résumé, la famille doublement infinie des surfaces (\mathcal{G}_{k_1, k_2}) , leur enveloppe (\mathcal{E}) et celles des familles simplement infinies (\mathcal{G}_t) qu'on déduit de la première.

Cas particulier. — Songeons à la conservation des formes $x^2 + y^2$ et $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$ à travers les substitutions qui traduisent tout déplacement hélicoïdal d'axe $z'z$; si donc, en (12), W est une fonction du seul ensemble $x^2 + y^2$, la présence d'une solution $F_0(x, y)$ — c'est le cas assuré si l'on cherche les associées d'une surface (S_0) — détermine, si F_0 ne dépend pas du même ensemble, l'intégrale complète

$$\mathcal{C} \equiv F_0(x \cos k_1 + y \sin k_1, -x \sin k_1 + y \cos k_1) - k_2 :$$

les surfaces (S) sont les déplacées hélicoïdales de (S_0) , le cylindre-enveloppe (\mathcal{E}) et les enveloppes obtenues en liant par une loi quelconque les composantes du déplacement.

§ 8. — **Surfaces associées et attachées au plan.** — L'exemple d'une surface (S_0) plane, dont l'équation peut toujours être

$$z = x \operatorname{tg} \varepsilon,$$

conduit à l'équation du type particulier

$$p^2 + q^2 = \operatorname{tg}^2 \varepsilon.$$

Les associées (S) sont constituées par les plans

$$z \cotg \varepsilon + k_2 = x \cos k_1 - y \sin k_1$$

et les développables enveloppées lorsqu'on relie k_2 à k_1 — surfaces qu'engendre la droite (G) de la figure 1 — ou si ce paramètre est constant; ce dernier cas définit les cônes d'axe $z'z$ et d'angle générateur $\frac{\pi}{2} - \varepsilon$, avec leurs plans tangents :

Sur tout cône de révolution et sur tout plan tangent un cylindre dirigé suivant l'axe découpe des cloisons équivalentes.

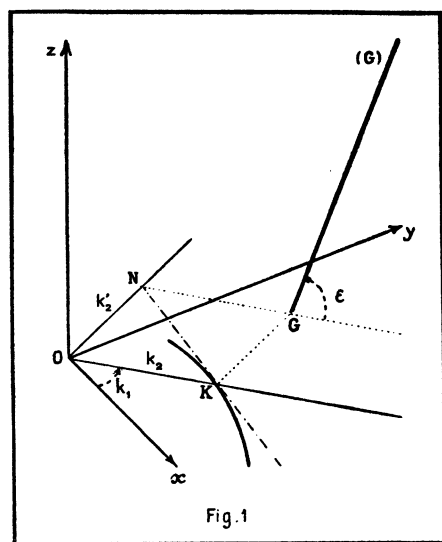


Fig. 1

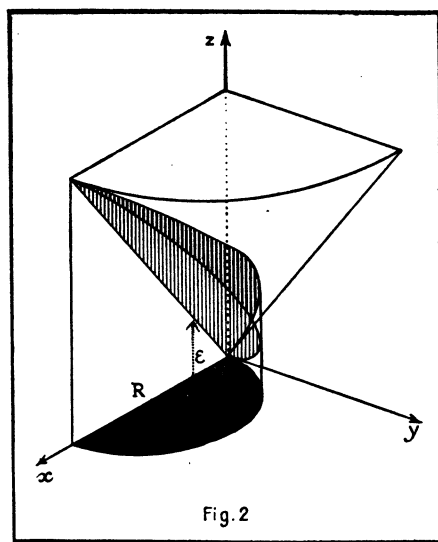


Fig. 2

C'est ainsi que l'intersection biquadratique bien connue (fig. 2)

$$z^2 = (x^2 + y^2) \operatorname{tg}^2 \varepsilon, \quad x^2 + y^2 = 2Rx,$$

limite une cloison conique dont l'aire $\frac{\pi R^2}{\cos \varepsilon}$ est celle de l'ellipse

$$z = x \operatorname{tg} \varepsilon, \quad x^2 + y^2 = 2Rx.$$

Les surfaces (S) sont les cylindres

$$C(y, z \cos \varepsilon - x) = 0,$$

au sein desquels les plans du faisceau

$$x + my - z \cos \varepsilon = 0.$$

Bien qu'élémentairement accessible par le jeu du théorème sur les surfaces planes projetées, ce dernier attachement n'en est pas moins curieux par les généralités dont il est déduit; et l'on voit encore comment ledit théorème s'étend à de certaines développables puisque, d'après (9),

$$S \cos \varepsilon = \int \int_s dx dy = s_z = S_z.$$

§ 9. — Surfaces associées à l'hélicoïde

$$z = a \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x}.$$

L'équation (12), ici

$$p^2 + q^2 = \frac{a^2}{x^2 + y^2},$$

lui associe, en particulier, la révolutive d'axe $z'z$

$$z = a \operatorname{Log} \sqrt{x^2 + y^2}$$

à méridienne exponentielle.

Or la transformation de Legendre conserve formellement l'équation, la polaire réciproque d'une solution (S) pour le paraboloïde

$$2z = x^2 + y^2$$

constituant une nouvelle solution : l'occasion nous est ainsi offerte de constater que l'hélicoïde est sa propre transformée et que celle de la révolutive s'en déduit par une translation parallèle à l'axe.

Le dernier résultat mérite assurément d'être vérifié sur les méridiennes; c'est aisé et, pourtant, les ouvrages classiques sont muets sur ce point.

Soient donc l'exponentielle

$$(E) \quad z = a \operatorname{Log} x$$

et la parabole, de paramètre quelconque,

$$(P) \quad z = \frac{x^2}{2p} :$$

Si l'on mène la tangente au point E de la première courbe, qui rencontre la seconde en P, et P', les tangentes en ces points se coupent en T et la distance TE' de cette intersection à l'exponentielle, évaluée parallèlement à l'axe parabolique, est constante.

Au point $E(x, a \operatorname{Log} x)$, la tangente exponentielle possède l'équation

$$y - a \operatorname{Log} x = \frac{a}{x} (x - z);$$

de là l'équation des coniques bitangentes à (P) en P_1 et P_2 ,

$$2py - x^2 + \lambda \left[y - \frac{a}{x} x + a - a \operatorname{Log} x \right]^2 = 0,$$

et les coordonnées de T

$$x_T = \frac{a}{x} p, \quad y_T = a - a \operatorname{Log} x,$$

en exprimant l'existence d'un point double.

Comme alors

$$y_{E'} = a \operatorname{Log} \frac{a}{x} p,$$

par soustraction d'ordonnées,

$$\overline{TE'} = a(\operatorname{Log} ap - 1).$$

§ 10. — Surfaces associées au paraboloïde équilatère

$$z = \frac{x^2 - y^2}{2a}.$$

Ce sont les intégrales de l'équation

$$p^2 + q^2 = \frac{x^2 + y^2}{a^2},$$

que conserve toute inversion cylindrique d'axe $z'z$: aux solutions paraboloidales (S_0) et (S_1), celle-ci d'équation

$$z = \frac{x^2 + y^2}{2a},$$

correspondent ainsi les deux solutions

$$z = b^3 \frac{x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad z = \frac{b^3}{x^2 + y^2},$$

engendrées par les lemniscates de Bernouilli coplanaires à xOy , centrées sur $z'z$ et dont les sommets reposent sur la cubique

$$y = 0, \quad z = \frac{b^3}{x^3},$$

et par la révolution de cette cubique autour de $z'z$ (fig. 3). Ainsi :

Sur un parabolôïde équilatère, sur le parabolôïde qu'engendre la révolution d'une section principale autour de l'axe et les inverses cylindriques coaxiales, les cloisons que découpe un cylindre dirigé suivant cet axe sont équivalentes.

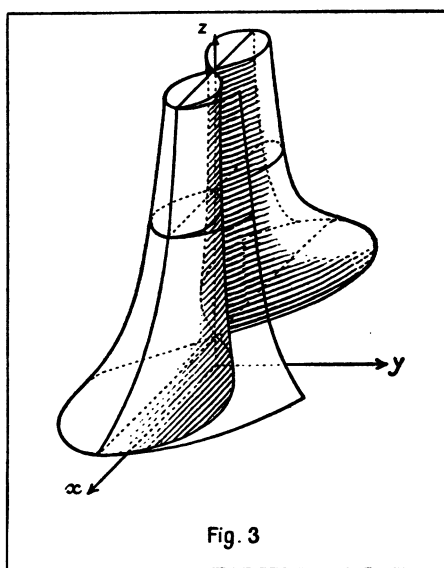


Fig. 3

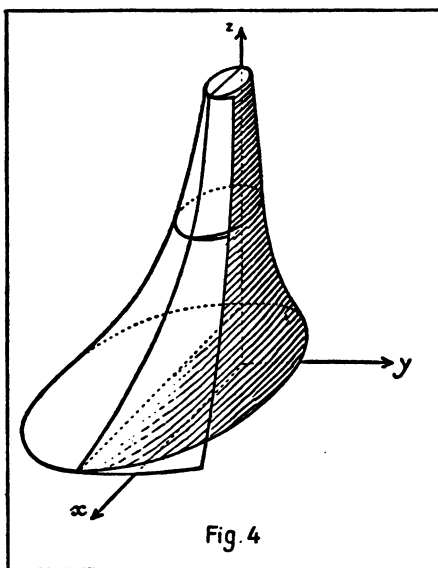


Fig. 4

§ 11. — **Associations restreintes.** — En particulierisant à priori la forme de la fonction $F(x, y)$, s'obtiennent d'élégantes associations ; et les équations, alors différentielles, qui surgissent de ce fait conviendront ultérieurement à des problèmes très variés.

Bornons-nous à supposer F homogène et de degré m , de sorte qu'il est loisible de poser

$$F(x, y) = r^m \varphi(\theta)$$

en introduisant les coordonnées cylindriques ; (12) devient

$$m\varphi'' + \varphi'^2 = \Psi(\theta) \quad (13)$$

dont le second membre est donné ou déduit d'une fonction $\varphi_0(\theta)$.

Si Ψ est nul, le premier se scinde en deux facteurs d'intégrales $Ce^{im\theta}$ et $C'e^{-im\theta}$; il correspond, par suite, à la fonction

$$\begin{aligned}\varphi(\theta) &\equiv Ce^{im\theta} + C'e^{-im\theta}, \\ &\equiv R^{1-m} \cos m(\theta - \alpha),\end{aligned}$$

une équation (13) dont sont connues cette intégrale générale et l'intégrale singulière

$$\Phi(\theta) \equiv R^{1-m}.$$

Les associées sont les surfaces

$$(\mathcal{G}_\alpha) \quad z = R^{1-m} r^m \cos m(\theta - \alpha),$$

que la rotation $\mathcal{R}(z'z, \alpha)$ déduit de

$$(\mathcal{G}_0) \quad z = R^{1-m} r^m \cos m\theta,$$

et leur enveloppe révolutive

$$z = R^{1-m} \cdot r^m.$$

(\mathcal{G}_0) se définit à l'aide de ses sections coplanaires à xOy , qui prennent appui sur la méridienne de (8) :

lemniscates et méridienne cubique du paragraphe 10 quand $m = -2$,

circonférences et méridienne hyperbolique quand $m = -1$ (*fig. 4*),

cardioides et méridienne cubique quand $m = -\frac{1}{2}$,

parabole et méridienne parabolique quand $m = \frac{1}{2}$ (*fig. 5*),

circonférences donnant les cônes du paragraphe 8 quand $m = 1$,

génératrices des paraboloides du paragraphe 10 quand $m = 2$.

Une étude générale de ces sections, inverses quand elles répondent à des valeurs opposées de m , a été faite par M. Haton de la Goupillière dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (1876, p. 97 et sqq.) et par Gaston Darboux dans ses *Leçons sur la théorie générale des surfaces*. Quant aux surfaces mêmes, elles sont du type de V. Jamet dont les asymptotiques s'obtiennent par quadrature — les projections de ces courbes sur xOy ont ici l'espèce des sections génératrices, dans l'ensemble —; quelques propriétés volumiques ont été examinées par M. Buhl et moi-même(*).

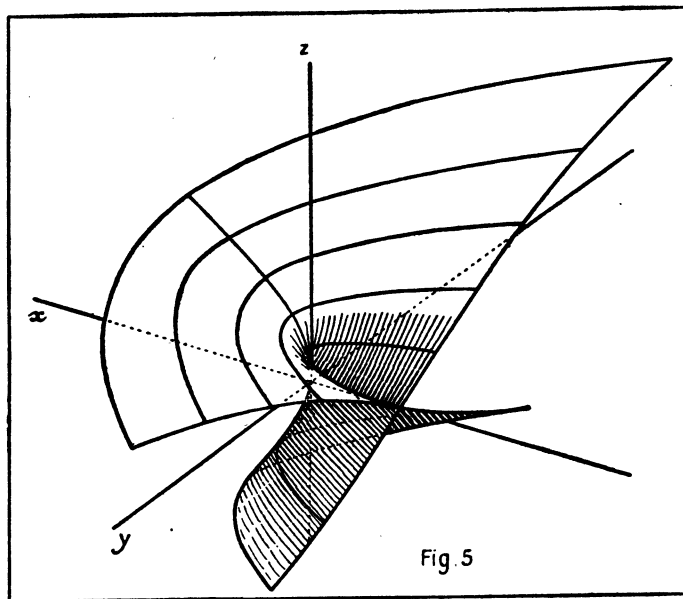
(*) A. BUHL : 1^{er} Mémoire.

P. PAPILLON : Sur les volumes conoïdaux, Enseignement Mathématique, 1924-25, p. 245 et sqq.

§ 12. — Signalons aussi la planification possible des cloisons sphériques, centrées en O, par l'intermédiaire de la surface

$$z = R \arcsin \frac{x}{\sqrt{R^2 - y^2}};$$

des vérifications partielles sont élémentaires.



2. CORRESPONDANCES CONIQUES.

§ 13. — En observant qu'au second membre de (10)

$$F^{-\frac{2}{m}-1} F' \equiv -\frac{m}{2} \frac{\partial F^{-\frac{2}{m}}}{\partial \dots}$$

l'expression de l'aire devient

$$S = -\frac{1}{2} \iint_s \sqrt{\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial z}\right)^2} (\alpha x + \beta y + \gamma z) ds$$

avec

$$H(x, y, z) \equiv F^{-\frac{2}{m}},$$

K étant homogène et de degré -2 pour xyz et (S) ayant l'équation

$$H(x, y, z) = 1.$$

Le terme irrationnel est actuellement homogène et de degré -3 pour xyz ; l'identité (4) s'applique donc avec

$$\mathcal{F} \equiv -\frac{1}{2} \int \sqrt{\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial z}\right)^2} dz - \frac{1}{2} \Omega(x, y),$$

Ω étant nul ou homogène et de degré -2 .

Les surfaces (S), planifiant S sur xOy , ont alors l'équation générale

$$\int \sqrt{\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial z}\right)^2} dz + \Omega(x, y) = 1,$$

et elles s'attachent à toutes les surfaces (S) issues des intégrales de

$$\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial z}\right)^2 = W(x, y, z) \quad (14)$$

— W est homogène et de degré -6 pour xyz —.

Mais l'homogénéité de H permet de poser

$$\begin{cases} H(x, y, z) \equiv x^{-2} \varphi(u, v) \\ u = \frac{y}{x}, \quad v = \frac{z}{x}, \end{cases}$$

et de donner ainsi à (14) la forme définitive

$$(2\varphi + u\varphi'_u + v\varphi'_v)^2 + \varphi'^2_u + \varphi'^2_v = \Psi(u, v) : \quad (15)$$

tel est, à la notation près, le résultat que signalait M. A. Buhl dans les *Comptes rendus* du 17 février 1930.

■

§ 14. — **Cylindres associés et surfaces attachées.** — Choisissons l'axe $z'z$ parallèle aux génératrices des cylindres; (15) se rend indépendante de v . Mais il est plus simple encore de recourir aux coordonnées cylindriques, de transformer H en $r^{-2}\varphi(\theta)$ et (14) en

$$4\varphi^2 + \varphi'^2 = \Psi(\theta), \quad (16)$$

car la résolution est celle de (13) quand m égale -2 ; nous décelons ainsi les cylindres

$$r^2 = R^2 \cos 2(\theta - \alpha)$$

et leur enveloppe

$$r = R :$$

Une circonférence et les lemniscates de Bernoulli inscrites et concentriques sont les sections droites de cylindres associés sur lesquels tout cône, ayant au centre son sommet, découpe des cloisons équivalentes.

Les planificatrices (S) ont ici l'équation générale

$$\frac{2 R^2 z}{(x^2 + y^2)^{3/2}} + \Omega(x, y) = 1 ;$$

les plus simples sont dûes à la révolution de cubiques élémentaires autour de $z'z$.

Aussi aisée, certes plus féconde, s'avère la même opération sur les plans menés par l'axe des cylindres; en prenant cet axe pour celui des ordonnées, et en planifiant toujours sur xOy , les (S) ont pour équation

$$\frac{2 R^2 z}{x^2 \sqrt{x^2 + z^2}} + \Omega(x, y) = 1 .$$

1° $\Omega \equiv \pm k^2 x^{-2}$. — Nous parvenons à des cylindres parallèles aux associés, dont les sections droites

$$\rho^2 = 2 R^2 \frac{\sin \omega}{\cos^2 \omega} \pm k^2$$

sont des sextiques circulaires, déductibles de celle qui répond à la nullité de k et dont on trouvera une construction géométrique dans le 3^e *Mémoire* précité (p. 99), et, singulièrement, la *trisécante* avec laquelle P. Delange résolvait le problème de la trisection angulaire en 1783.

2° $\Omega \equiv \pm k^2 y^{-2}$. — Les surfaces (S) se déduisent des révolutives cruciformes

$$\frac{2 R^2}{\rho^2} \pm \frac{k^2}{y^2} = 1$$

en construisant les sextiques particulières nées de ses parallèles.

Le rôle de ces courbes n'est pas moins remarquable que leur élégance et leur facile obtention.

§ 15. — D'une façon générale, les courbes (C) d'équation polaire

$$\rho^2(\omega) = \rho_1^2(\omega) \pm \rho_2^2(\omega)$$

résultent des courbes (C_1) et (C_2) , et la relation

$$\rho \rho' = \rho_1 \rho'_1 \pm \rho_2 \rho'_2$$

mise sous la forme

$$\overline{ON} = \frac{\overline{OM}_1}{\overline{OM}} \cdot \overline{ON}_1 \pm \frac{\overline{OM}_2}{\overline{OM}} \cdot \overline{ON}_2$$

avec d'évidentes notations, donne de la sous-normale polaire, donc de la tangente, une construction relevant du seul théorème de Thalés; cette relation, d'ailleurs, exprime une élégante propriété :

L'aire orientée du rectangle construit sur le rayon-vecteur d'un point de (C) et la sous-normale polaire est la somme algébrique des aires correspondantes pour (C₁) et (C₂).

Lorsque ρ_2 est une constante, les constructions se simplifient et la propriété générale fait place à celle-ci :

Les sous-normales polaires aux points correspondants de (C) et de (C₁) sont inversement proportionnelles aux rayons-vecteurs de ces points.

Ces résultats spéciaux s'adaptent aux podaires centrales d'ellipses et d'hyperboles, (C₁) et (C₂) étant les circonférences de diamètres OF et B'B; point n'est besoin de tracer la tangente à la conique, contrairement aux exigences habituelles.

§ 16. — **Surfaces de révolution associées et surfaces attachées.** — Si $z'z$ est l'axe de révolution, l'équation d'association devient, en passant aux coordonnées sphériques qui transforment H en $\rho^{-2}\varphi(\lambda)$,

$$4\varphi^2 + \varphi'^2 = \Psi(\lambda);$$

c'est, avec la variable λ , l'équation (16) :

Les mêmes courbes planes servent de sections droites à des cylindres parallèles associés et de sections méridiennes à des surfaces de révolution coaxiales associées.

Une proposition analogue concerne, par suite, les surfaces (S), cylindre parallèle et révolutive coaxiale, attachées à chaque ensemble : les mêmes courbes président à leur formation.

Au théorème du paragraphe précédent correspond donc celui-ci :

Une circonférence et les lemniscates de Bernouilli inscrites et concentriques engendrent, par rotation autour d'un diamètre de cette circonférence, une sphère et des surfaces sur lesquelles tout cône ayant au centre son sommet découpe des cloisons équivalentes.

Des planificatrices (S) d'axe $z'z$ sont engendrées par les sextiques définies au même endroit; un calcul complet et de partielles vérifications sont faits aux paragraphes 10 et 11 du 3^e Mémoire.

Observons enfin que l'équation (14) actuelle,

$$\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial z}\right)^2 = \frac{4R^4}{(x^2 + y^2 + z^2)^3}$$

se conserve dans toute substitution orthogonale homogène : la transformée d'une solution par une rotation $\mathcal{R}(O)$ est une nouvelle solution et, seule, l'association envisagée jouit de cette propriété, évidente sur la sphère.

§ 17. — **Autre cas d'intégrabilité.** — Une nouvelle intégrabilité se présente pour (15) en cherchant les solutions du système

$$\begin{cases} 2\varphi + u\varphi'_u + v\varphi'_v = 2a^2, \\ 4a^4 + \varphi'^2_u + \varphi'^2_v = \Psi(u, v). \end{cases}$$

C'est limiter d'une seconde manière les fonctions φ tout en utilisant des faits antérieurement acquis; nous allons en juger.

Grâce à l'intégrale générale de la première composante,

$$\varphi \equiv \frac{1}{2} \left[2a^2 - u^{-2} \psi \left(\frac{v}{u} \right) \right]$$

la suivante prend la forme (16),

$$\left(2\psi + \frac{v}{u} \psi' \right)^2 + \psi'^2 = 4u^6 (\Psi - 4a^4); \quad (17)$$

de sorte qu'en choisissant

$$\Psi \equiv 4 \left[a^4 + \frac{R^4}{(u^2 + v^2)^3} \right]$$

on obtient le cas annoncé; il associe les surfaces (\mathcal{G}_α) que la rotation $\mathcal{R}(z'z, \alpha)$ déduit de

$$(8) \quad \frac{a^2}{x^2} + \frac{R^2(y^2 - z^2)}{(y^2 + z^2)^2} = 1$$

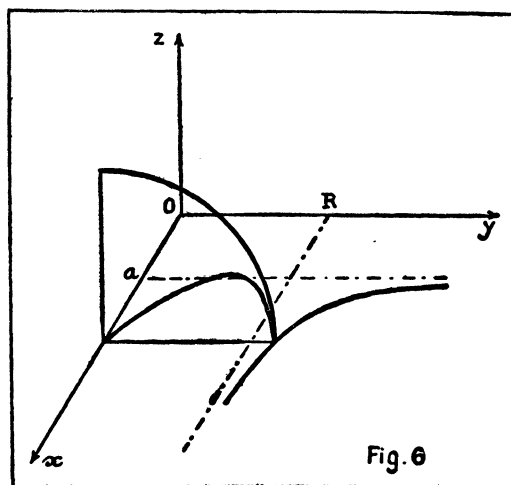
et leur enveloppe, révolutive d'axe $x'x$,

$$(8) \quad \frac{a^2}{x^2} + \frac{R^2}{y^2 + z^2} = 1.$$

La méridienne en est la Kreuzcurve issue de l'ellipse d'axes $2a$, $2R$ dirigés

suivant $x'x$ et $z z$, et (\mathcal{G}_0) naît des lemniscates coplanaires à yOz qui reposent par leurs sommets sur ladite méridienne (fig. 6).

Soient une Kreuzcurve et, dans les plans normaux à un axe de symétrie, les lemniscates de Bernouilli dont les sommets la décrivent; sur les surfaces centrées qu'engendrent les lemniscates et la révolution de la Kreuzcurve autour de l'axe, tout cône ayant au centre son sommet découpe des cloisons équivalentes.



Ce théorème doit apparaître comme une nouvelle extension des associations entre circonférences et lemniscates inscrites; en effet, les résultats invoqués, dont la découverte revient au Géomètre si souvent cité, répondent à la nullité de a qu'accompagnent les substitutions de r et z à x et y ; et l'élégance actuelle n'est pas moins surprenante en sa simplicité!

§ 18. — Si les associations effectives s'offrent en nombre restreint, la détermination des surfaces (S) attachées à (S_0) est d'une étonnante facilité : plan, sphère, ellipsoïde, paraboloides, conoïdes les plus généraux, se prêtent à d'abondantes correspondances. Les débuts du 3^e *Mémoire* — p. 92 à 114 —, auquel je renvoie, en établissent un grand nombre et des plus esthétiques.

3. CORRESPONDANCES CONOÏDALES.

§ 19. — En (11) cette fois

$$F^{-\frac{1}{m}-1} F' \equiv m \frac{\partial F^{-\frac{1}{m}}}{\partial \dots}$$

et

$$S = - \int \int_s \sqrt{\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)^2 + \left(H \frac{\partial H}{\partial z}\right)^2} (\alpha x + \beta y) ds$$

avec

$$H(x, y, z) \equiv F^{-\frac{1}{m}},$$

H étant homogène et de degré -1 pour xy .

La formule de Stokes intervient sous sa forme (5), avec

$$\mathcal{F} \equiv - \int \sqrt{\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)^2 + \left(H \frac{\partial H}{\partial z}\right)^2} dz - \Omega_{(-s)}(x, y).$$

Les planificatrices (S) ont alors l'équation générale

$$\int \sqrt{\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)^2 + \left(H \frac{\partial H}{\partial z}\right)^2} dz + \Omega(x, y) = \frac{1}{2}$$

et s'attachent aux surfaces (S) correspondant aux intégrales de

$$\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)^2 + \left(H \frac{\partial H}{\partial z}\right)^2 = W(x, y, z); \quad (18)$$

W est homogène et de degré -4 pour xy .

La nature de H permet de lui substituer la fonction $r^{-1}\varphi(\theta, z)$ en coordonnées cylindriques et de transformer (18) en

$$\varphi^2(1 + \varphi_z'^2) + \varphi_\theta'^2 = \Psi(\theta, z); \quad (19)$$

la simplification qu'entraînerait le choix de φ^2 comme fonction inconnue serait de pure forme et sans objet pratique.

§ 20. — **Cylindres associés et surfaces attachées.** — 1. Les hypothèses du paragraphe 14 conduisent à l'équation (19)

$$\varphi^2 + \varphi'^2 = \Psi(\theta),$$

du type (16) avec m égal à -1 puisqu'ici l'unique variable est θ ; de là la famille cylindrique

$$(\mathcal{G}_\alpha) \quad r = R \cos(\theta - \alpha)$$

qu'accompagne une enveloppe de même espèce

$$(8) \quad r = R.$$

Parmi les planificatrices (S), signalons le parabolôide

$$x^2 + y^2 = 2Rz.$$

2. Supposons ensuite les génératrices cylindriques orthogonales à l'axe conoïdal — dirigées, par exemple, suivant $y'y$ —, en sorte que

$$H(x, y, z) \equiv x^{-1} \varphi(z);$$

l'équation (18) devient alors

$$\varphi^2(1 + \varphi'^2) = \Psi(z). \quad (20)$$

L'intégration, pour Ψ constant, associe les cylindres circulaires

$$x^2 + (z - C)^2 = R^2$$

et les deux plans-enveloppes

$$x = \pm R.$$

Résultat éminemment simple, mais plus remarquable encore par l'extension suivante.

§ 21. — **Surfaces de révolution associées.** — L'association des révolutives d'axe $z'z$ s'opère en résolvant l'équation (16) indépendante de θ , donc, de la forme (20); la proposition générale du paragraphe 15 s'étend au cas actuel : les mêmes courbes planes servent de sections droites à des cylindres associés et de sections méridiennes à des surfaces de révolution coaxiales associées, mais les génératrices cylindriques sont orthogonales à l'axe de rotation.

En particulier, s'associent les sphères

$$x^2 + y^2 + (z - C)^2 = R^2$$

et leur cylindre-enveloppe

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

§ 22. — Propriété qui, jointe à celle du paragraphe 20, 1, exprime une seconde extension spatiale du théorème classique sur les angles inscrits :

Sur tout cylindre de révolution d'axe (Λ) , sur les sphères inscrites et les cylindres de révolution tangents dont (Λ) est une génératrice, tout conoïde droit coaxial découpe des cloisons équivalentes.

Le même paraboloïde d'axe (Δ), osculateur à une de ces sphères en son sommet, permet de planifier les cloisons après projection sur un parallèle : c'est ainsi que le contour sphéro-cylindroïdal

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \quad z = a \frac{y^2 - x^2}{y^2 + x^2},$$

délimite une cloison sphérique quarrable, car elle se planifie suivant les boucles de la lemniscate

$$(x^2 + y^2)^2 - 2aR(y^2 - x^2) = 0,$$

projection de l'intersection de la cylindroïde et du paraboloïde.

§ 23. — Aires ellipsoïdales et paraboloïdales. — Cette question, dont l'origine évoque le nom de G. Humbert, reçoit ici une solution tout aussi fructueuse que celle du paragraphe 18.

1. Avec l'ellipsoïde, dont $z'z$ supporte le plus grand axe,

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1, \quad (A \geq B \geq C)$$

la planification sur le plan principal xOy se fait au moyen des surfaces (S) d'équation⁽¹⁾

$$\left\{ (Ax^2 + By^2)^{-\frac{3}{2}} \left[\frac{A^2x^2 + B^2y^2}{\sqrt{AC(A-C)x^2 + BC(B-C)y^2}} \operatorname{Arc} \sin z \sqrt{\frac{AC(A-C)x^2 + BC(B-C)y^2}{A^2x^2 + B^2y^2}} \right. \right. \\ \left. \left. + z \sqrt{A^2x^2 + B^2y^2 - Cz^2 [A(A-C)x^2 + B(B-C)y^2]} \right] + \Omega_{(-1)}(x, y) = 1, \right.$$

réduites, si l'ellipsoïde est de révolution autour de $z'z$ et pour Ω nul, à la révolutive coaxiale

$$x^2 + y^2 = \frac{ac}{e} \operatorname{Arc} \sin \frac{ez}{c} + ez \sqrt{1 - \frac{e^2 z^2}{c^2}}.$$

Dans ce cas, l'intervention du conoïde que constituent deux plans de cotes données assure une immédiate évaluation de la zone ellipsoïdale allongée et, particulièrement, de la surface ellipsoïdale entière.

Enfin, la planificatrice devient le paraboloïde du paragraphe 22 si les trois axes s'égalisent, chaque terme du second membre tendant vers az .

(1) Un résultat analogue a été donné par M. A. Buhl dans les *Comptes rendus* du 9 février 1931 et reproduit, dans le présent volume, à la fin du *Mémoire Tourbillons, Coruscules, Ondes*.

En supposant le plus petit axe supporté par $z'z$ les calculs substituent à l'arc sinus un logarithme; la zone aplatie et la surface ellipsoïdale même peuvent être connues sans autre difficulté.

2. Avec le paraboloïde elliptique

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 2z,$$

toute transcendance s'évanouit, les planificatrices (S) ont l'équation

$$\frac{2}{3} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)^{-1} \left[1 + 2z \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) \left(\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} \right)^{-1} \right]^{\frac{3}{2}} + \Omega_{(-2)}(x, y) = 1;$$

elles comprennent, quand a et b s'égalent, la révolutive

$$(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{4}{9} a(a + 2z)^3.$$

Obtenir alors l'aire d'une zone ou d'une calotte est chose des plus immédiates, les transformées de ces cloisons étant de simples couronnes circulaires, et les expressions respectives s'écrivent

$$\begin{aligned} & \frac{2\pi\sqrt{a}}{3} \left[(a + 2z_2)^{\frac{3}{2}} - (a + 2z_1)^{\frac{3}{2}} \right], \\ & \frac{2\pi\sqrt{a}}{3} \left[(a + 2z)^{\frac{3}{2}} - a^{\frac{3}{2}} \right]. \end{aligned}$$

3. Le cas du paraboloïde hyperbolique se déduit du précédent par la substitution $-b$; au paraboloïde équilatère correspond la planificatrice

$$(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{4a^2}{9} \left[1 + 2 \frac{z}{a} \cdot \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2} \right]^3.$$

Le rôle d'un conoïde de Plücker est manifeste; les contours découpés sur (S) et (S) ont pour projections sur xOy les circonférences

$$x^2 + y^2 = R^2, \quad x^2 + y^2 = \frac{2}{3a} (a^2 + R^2)^{\frac{3}{2}},$$

et la cloison paraboloïdale pour aire

$$\frac{2\pi}{3a} \left[(a^2 + R^2)^{\frac{3}{2}} - a^3 \right].$$

Ici donc de nouveaux aperçus sur un sujet relativement récent.

CHAPITRE III

L'équivalence des volumes cylindriques.

§ 24. — Expressions des volumes cylindriques droits. — Soit

$$\lambda x + \mu y + \nu z - l = 0$$

l'équation normale du plan de base; l'évaluation du volume élémentaire compris entre ce plan et dS conduit à prendre, en (6), (7) et (8),

$$\Delta \equiv (\lambda X + \mu Y + \nu Z - l) \frac{\lambda E'_X + \mu E'_Y + \nu E'_Z}{\sqrt{E'^2_X + E'^2_Y + E'^2_Z}},$$

de sorte que ces intégrales deviennent :

$$V = \begin{cases} \int \int_s (\lambda x + \mu y + \nu z - l) (-\lambda p - \mu q + \nu) \gamma ds, & (21) \\ \frac{3}{m} \int \int_s \left(\lambda x + \mu y + \nu z - l F^{\frac{1}{m}} \right) (\lambda F'_x + \mu F'_y + \nu F'_z) F^{-\frac{3}{m}-1} d\rho, & (22) \\ \frac{2}{m} \int \int_s \left(\lambda x F^{-\frac{1}{m}} + \mu y F^{-\frac{1}{m}} + \nu z - l \right) \left(\lambda F^{\frac{1}{m}} F'_x + \mu F^{\frac{1}{m}} F'_y + \nu F'_z \right) F^{-\frac{2}{m}-1} d\tau. & (23) \end{cases}$$

Pour abréger l'écriture on a posé

$$3d\rho = (\alpha x + \beta y + \gamma z) ds, \quad 2d\tau = (\alpha x + \beta y) ds.$$

Ceci peut d'ailleurs s'interpréter : on voit immédiatement que $d\rho$ est le volume du cône élémentaire de sommet O et de base ds ; de même $d\tau$ est celui du conoïde élémentaire obtenu en projetant ds sur $z'z$.

Lorsqu'en particulier le plan de base passe en O , l est nul et V prend la valeur V_0 ;

$$V - V_0 = \begin{cases} l \int \int_s (\lambda p + \mu q - \nu) \gamma ds, & (24) \\ -\frac{3l}{m} \int \int_s (\lambda F'_x + \mu F'_y + \nu F'_z) F^{-\frac{2}{m}-1} d\rho, & (25) \\ -\frac{2l}{m} \int \int_s \left(\lambda F^{\frac{1}{m}} F'_x + \mu F^{\frac{1}{m}} F'_y + \nu F'_z \right) F^{-\frac{2}{m}-1} d\tau. & (26) \end{cases}$$

I. CORRESPONDANCES CYLINDRIQUES.

§ 25. — **Étude de $V - V_0$.** — Il est clair qu'en (24) l'intégrale mesure la projection de S sur la direction plane d'axe (λ, μ, ν) : les solutions de

$$\lambda p + \mu q - \nu = W(x, y)$$

déterminent les surfaces (S) sur lesquelles un cylindre de direction $z'z$ découpe des cloisons équivalentes en projection précitée.

Les associées d'une surface (S_0) , telles que

$$\lambda(p - p_0) + \mu(q - q_0) = 0, \quad (27)$$

ont l'équation générale

$$z = z_0 + \lambda b \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{y}{\mu} \right);$$

elles ne dépendent pas de ν , ainsi qu'il résulte du théorème des projections, et ce sont les transformées par la dilatation orthogonale $\mathcal{D}(xOy, 2)$ des lieux des milieux des segments, parallèles à $z'z$, assujettis à prendre appui sur (S_0) et sur un cylindre quelconque de direction $(\lambda, \mu, 0)$; quand xOy subit une translation, de même les dilatées. En résumé :

Soient $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ trois directions triplement orthogonales, (S_0) une surface quelconque; considérons celles qu'engendrent les milieux des segments, parallèles à δ_1 , dont les extrémités décrivent (S_0) et un cylindre dirigé suivant δ_2 , puis leurs dilatées de module 2 parallèlement à δ_1 ; sur ces dernières, tout cylindre de direction δ_2 découpe des cloisons équivalentes en projection sur tout plan parallèle à δ_3 .

Voici de ce théorème une application très simple : pour tout plan mené par $y'y$ s'associent les paraboloïdes et le cylindre parabolique d'équations

$$2z = \frac{x^2}{a} \pm \frac{y^2}{b}, \quad 2z = \frac{x^2}{a},$$

quel que soit b ; une vérification partielle empruntera les cloisons que limite, sur ces surfaces, l'onglet (*fig. 7*)

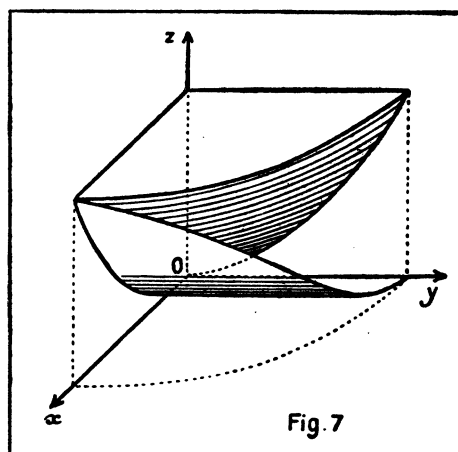
$$\frac{x^2}{a} \pm \frac{y^2}{b} = 2k. \quad (x \geq 0, \quad y \geq 0)$$

§ 26. — Appliquons à (21) l'identité (3); les surfaces (S) telles que V égale $h \cdot s_z$ ont l'équation générale

$$\int (\lambda x + \mu y + \nu z - l) (-\lambda p - \mu q + \nu) dx + \Omega(y) = hz$$

et elles s'attachent aux associées issues de

$$(\lambda x + \mu y + \nu z - l) (-\lambda p - \mu q + \nu) = W(x, y). \quad (28)$$



§ 27. — Surfaces associées relatives à un W constant. — Lorsqu'en (27), le second membre est une constante k ,

$$V = \iint_s k \gamma ds = k s_z = k S_z.$$

Disposant les axes de façon à donner au plan de base l'équation

$$x \cos \varepsilon + z \sin \varepsilon = 0,$$

nous obtenons pour (28)

$$(-p \cos \varepsilon + \sin \varepsilon) (x \cos \varepsilon + z \sin \varepsilon) = k;$$

après rotation $\mathcal{R}(y'y, \varepsilon)$ et translation $-l \cos \varepsilon$ parallèlement à $x'x$, les surfaces intégrales ont l'équation

$$\zeta = l \cos \varepsilon \operatorname{Log} \frac{\mathcal{A}b(\gamma)}{\xi},$$

parmi lesquelles le conoïde d'axe $z'z$ et de directrice exponentielle

$$\zeta = l \cos \varepsilon \operatorname{Log} \frac{\eta}{\xi}.$$

S'y attachent des cylindres et, singulièrement, des plans.

§ 28. — Si nous supposons la direction des volumes cylindriques orthogonale à celle de la correspondance, ce qui revient à annuler v dans (28), les associées de (S_0) satisfont précisément à (27); ce sont donc les surfaces du paragraphe 25 et nous complétons ainsi le théorème acquis en cet endroit :

Pour les surfaces définies au paragraphe 25 et leurs cloisons, il y a équivalence entre les volumes cylindriques droits que limitent ces cloisons et tout plan normal à δ_1 .

On pourra donc vérifier l'équivalence des volumes cylindriques compris entre le plan yOz et les deux cloisons de la figure 6, volumes que mesure directement

$$\int \int_s -\frac{x^2}{a} dx dy = \frac{\pi}{4} k^2 \sqrt{ab}.$$

Considérons enfin une sphère, qu'on peut toujours centrer sur Ox ; les associées

$$z = \sqrt{R^2 - (x - a)^2 - y^2} + \mathfrak{A}b(y)$$

comprennent, pour $\mathfrak{A}b$ linéaire, les ellipsoïdes

$$(x - a)^2 + y^2 - R^2 + (z - my - n)^2 = 0$$

qui contiennent la circonférence

$$y = 0, \quad (x - a)^2 + (z - n)^2 = 0,$$

et l'ellipse

$$z = my + n, \quad (x - a)^2 + y^2 = R^2,$$

le long de laquelle elles se raccordent au cylindre qui la détermine. Ainsi :

Soient un cylindre de révolution (C) qu'un plan variable (P) rencontre suivant une ellipse (e) et, dans le plan méridien que détermine son petit axe (b), la circonférence (γ) admettant cet axe pour diamètre. Sur tous les ellipsoïdes (E) contenant (γ) et tangents à (C) le long de (e) un cylindre parallèle au précédent découpe des cloisons donnant des volumes cylindriques, parallèles à (b), équivalents.

2. CORRESPONDANCES CONIQUES.

§ 29. — Étude de $V - V_0$. — Quelques calculs donnent

$$V - V_0 = \frac{l}{2} \int \int_s \left(\lambda \frac{\partial H}{\partial x} + \mu \frac{\partial H}{\partial y} + \nu \frac{\partial H}{\partial z} \right) (\alpha x + \beta y + \gamma z) ds,$$

avec

$$H(x, y, z) \equiv F^{-\frac{2}{m}},$$

H étant homogène et de degré -2 pour xyz ; cette égalité montre que

$$S_{\lambda, \mu, \nu} = \frac{l}{2} \int \int_s \left(\lambda \frac{\partial H}{\partial x} + \mu \frac{\partial H}{\partial y} + \nu \frac{\partial H}{\partial z} \right) (\alpha x + \beta y + \gamma z) ds$$

est l'aire de la projection de S sur la direction plane d'axe (λ, μ, ν) , aire dont l'invariance est assurée pour les surfaces extraites de l'équation linéaire

$$\lambda \frac{\partial H}{\partial x} + \mu \frac{\partial H}{\partial y} + \nu \frac{\partial H}{\partial z} = W(x, y, z).$$

Ces surfaces, si $z'z$ est parallèle aux génératrices des volumes cylindriques, ont l'équation

$$F_0^{-\frac{2}{m}}(x, y, z) + \mathbb{A}(x, y) = 1.$$

Voici quelques applications :

1. Sur les surfaces cruciformes (singulièrement y figure un plan)

$$\pm \frac{x^2}{x^2} \pm \frac{y^2}{y^2} + \frac{c^2}{z^2} = 1,$$

nées d'une congruence de quadriques concentriques avec axe transverse $z'z$ fixe, tout cône, ayant au centre son sommet, découpe des cloisons équivalentes en projection sur un plan normal à $z'z$.

2. Sur les révolutives concentriques d'axes $z'z$ et $x'x$ qu'engendrent les quartiques circulaires (singulièrement y figure une sphère) (fig. 8)

$$\rho^2 = R^2 \pm \frac{k^2}{\cos^2 \omega}$$

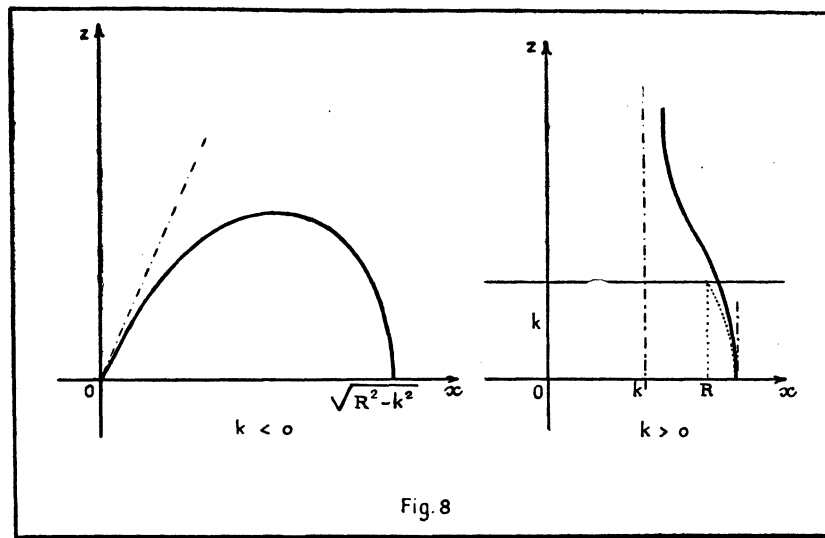
et sur les cylindres que ces courbes dirigent, tout cône ayant au centre son sommet découpe des cloisons équivalentes en projection sur un plan normal à $z'z$.

3. Un théorème analogue concerne les révolutives d'axe $z'z$ et les cylindres droits que dirigent les sextiques bicirculaires (fig. 9).

$$\rho^3 = 4R^3 \sin^3 \omega \pm \frac{k^3}{\cos^3 \omega}$$

Prenons l'exemple du cône

$$x^2(x^2 + y^2 + z^2) - (x^2 + y^2)^2 = 0$$



que dirige la *fenêtre de Viviani* : la cloison sphérique se projette suivant un cercle de diamètre R tandis que les cloisons révolutives offrent, en projection, l'aire

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} R^2 \cos^2 \theta d\theta = \frac{\pi R^2}{4}.$$

Remarque. — Les propositions des paragraphes 15 et 21 ont, ici encore, leur analogue, ainsi qu'il vient d'être vérifié sur un exemple particulier.

§ 30. — La relation générale (22) ne paraît pas recéler quelque précieuse union. Mais supposons le plan de base mené par le sommet du cône; prenons-le pour plan xOy , introduisons la fonction homogène et de degré -3 pour xyz

$$H(x, y, z) \equiv F^{-\frac{3}{m}}(x, y, z),$$

et voici des associées (S) d'équation

$$F_0^{-\frac{3}{m}}(x, y, z) + \mathcal{M}(x, y) = 1.$$

Et toujours l'association des cylindres

$$F_0^{-\frac{3}{m}}(x, z) + \frac{k^3}{x^3} = 1$$

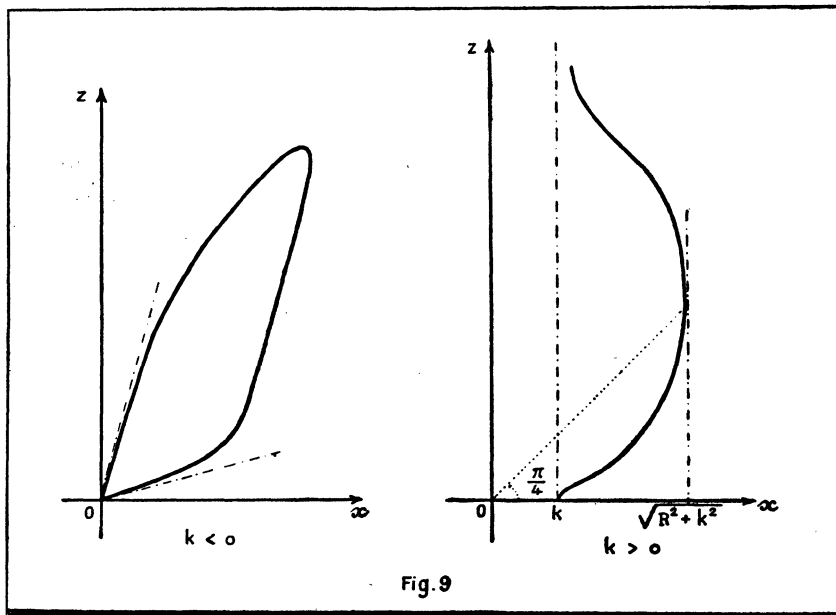


Fig.9

entraîne celle des surfaces de révolution

$$F_0^{-\frac{3}{m}}(r, z) + \frac{k^3}{r^3} = 1;$$

témoin l'exemple des courbes

$$\varphi^3 = R^3 + \frac{k^3}{\cos^3 \omega}$$

et

$$\varphi^3 = 8R^3 \sin^3 \omega + \frac{k^3}{\cos^3 \omega}$$

dont les formes évoquent conchoïdes de droites et cubiques circulaires, sans qu'il soit ici possible d'avoir à l'origine des tangentes rectangulaires, et auxquelles s'attachent de curieuses sections dirigeant des cylindres (S) ou (C).

3. CORRESPONDANCES CONOÏDALES.

§ 31. — Étude de $V - V_0$. — Actuellement

$$V - V_0 = l \int \int_s \left(\lambda \frac{\partial H}{\partial x} + \mu \frac{\partial H}{\partial y} + \nu H \frac{\partial H}{\partial z} \right) (\alpha x + \beta y) ds$$

avec

$$H(x, y, z) \equiv F^{-\frac{1}{m}},$$

H étant homogène et de degré -1 pour xy ; l'intégrale mesure toujours la projection $S_{\lambda, \mu, \nu}$, dont l'invariance est acquise pour les surfaces déduites de

$$\lambda(\varphi \cos \theta + \varphi'_\theta \sin \theta) - \nu \varphi \varphi'_z = \Psi(\theta, z),$$

quand on place les axes afin d'annuler μ et qu'on transforme H en $r^{-1} \varphi(\theta, z)$.

Quel que soit λ , s'unissent ainsi les cylindres

$$r = \varphi_0(\theta) + \frac{k}{\sin \theta}$$

de définition géométrique immédiate; les fonctions

$$\varphi_0 \equiv R, \quad \varphi_0 \equiv 2R \sin \theta$$

conduisent aux deux propositions suivantes :

1. Les conchoïdes de Nicomède, dont le pôle O et la direction asymptotique sont fixes et de module constant, sont sections droites de cylindres sur lesquels tout conoïde d'axe (O) découpe des cloisons équivalentes en projection sur un plan perpendiculaire au plan asymptotique commun.

2. De même, les cubiques unicursales droites dont le pôle O et la directrice circulaire sont fixes.

Enfin, si λ est nul s'unissent les surfaces

$$r = \sqrt{\varphi_0^2(\theta, z) + k^2}$$

et, spécialement, les révolutives

$$r = \sqrt{\varphi_0^2(z) \pm k^2};$$

la proposition suivante correspond à la donnée

$$\varphi_0^2 \equiv R^2 - z^2 :$$

Tout conoïde droit découpe sur les sphères centrées en un point de son axe des cloisons équivalentes en projection sur son plan directeur.

L'assertion s'étend aux *quadriques homothétiques et concentriques dont un axe principal est l'axe conoïdal.*

§ 32. — Dans l'étude du volume même, je me borne à supposer le plan de base normal à l'axe conoïdal; le prenant alors pour plan xOy ,

$$V = -\frac{1}{2} \int \int_s z \frac{\partial F^{\frac{-2}{m}}}{\partial z} (\alpha x + \beta y) ds$$

et les surfaces associées sont celles du paragraphe 31 en les mêmes hypothèses.

Le théorème final de ce paragraphe a donc sa réplique s'il s'agit de volumes cylindriques limités à un plan directeur du conoïde; si ce plan passe au centre commun des quadriques, les surfaces (\mathfrak{C}) comprennent le cône

$$Ax^2 + By^2 + \frac{2}{3}Cz^2 = 0.$$

Avec des sphères qui coupent une lame spatiale à faces parallèles, les propositions des deux paragraphes subissent des vérifications... capables d'inspirer quelque épreuve du Baccalauréat!

Moins simples sont les conclusions relatives à un plan de base mené par l'axe conoïdal et à l'intégrale

$$V = -\frac{1}{2} \int \int_s x \frac{\partial F^{\frac{2}{m}}}{\partial x} (\alpha x + \beta y) ds.$$

CHAPITRE IV

L'équivalence des volumes coniques.

§ 33. — **Expressions des volumes coniques.** — Soit $I(a, b, c)$ le sommet du cône; l'expression du volume conique élémentaire que limite dS conduit à prendre en (6), (7) et (8),

$$\Delta \equiv \frac{1}{3} \frac{(X-a)E'_X + (Y-b)E'_Y + (Z-c)E'_Z}{\sqrt{E'^2_X + E'^2_Y + E'^2_Z}}$$

de sorte que

$$V = \begin{cases} \frac{1}{3} \int \int_s [-(x-a)p - (y-b)q + (z-c)] \gamma ds, & (29) \\ \frac{1}{m} \int \int_s \left[\left(xF^{-\frac{1}{m}} - a \right) F'_x + \left(yF^{-\frac{1}{m}} - b \right) F'_y + \left(zF^{-\frac{1}{m}} - c \right) F'_z \right] F^{-\frac{2}{m}-1} d\rho, & (30) \\ \frac{2}{3m} \int \int_s \left[\left(xF^{-\frac{1}{m}} - a \right) F'_x + \left(yF^{-\frac{1}{m}} - b \right) F'_y + (z-c) F^{-\frac{1}{m}} F'_z \right] F^{-\frac{1}{m}-1} d\tau. & (31) \end{cases}$$

I. CORRESPONDANCES CYLINDRIQUES.

§ 34. — Notons tout d'abord V' le volume relatif au point $I'(a, b, 0)$:

$$V = V' - \frac{1}{3} c s_z,$$

les surfaces (S) sont associées, non pas à partir d'un sommet déterminé, mais d'une parallèle aux génératrices des cylindres projetants; et en effet, l'équation d'association

$$-(x-a)p - (y-b)q + (z-c) = W(x, y) \quad (32)$$

se trouve indépendante de c lorsque W se déduit d'une surface (S_0) , les associées admettant l'équation

$$z = z_0 + (x-a) \mathfrak{A} \left(\frac{y-b}{x-a} \right)$$

et s'engendrant d'une manière analogue à celle du paragraphe 25. En résumé : Soient i le pied d'une perpendiculaire (D) à un plan (P), (S_0) une surface quelconque; considérons celles qu'engendrent les milieux des segments, parallèles à (D), dont les extrémités décrivent (S_0) et un cône de sommet i , puis leurs dilatées de module 2 relativement à (P) : sur ces dernières, tout cylindre de direction (D) découpe des cloisons limitant des volumes coniques, de sommet quelconque sur (D), équivalents.

Répondent à cette proposition les cylindres paraboliques

$$z = \frac{x^2}{2a} + mx$$

et les quadriques

$$(x-a)^2 + y^2 - R^2 + (z-mx-ny)^2 = 0,$$

si les volumes coniques ont leur sommet sur $z'z$.

§ 35. — Lorsqu'en (32) W est une constante k ,

$$V = \frac{1}{3} \int \int_s k \gamma ds = \frac{k}{3} s_z;$$

I étant pris à l'origine des coordonnées, l'équation d'association

$$-px - qy + z = k$$

est celle des cônes de sommet $(0, 0, k)$.

2. CORRESPONDANCES CONIQUES.

§ 36. — Étude de $V - V_0$. — Le procédé habituel donne

$$V - V_0 = \frac{1}{6} \int \int_s \left(a \frac{\partial H}{\partial x} + b \frac{\partial H}{\partial y} + c \frac{\partial H}{\partial z} \right) (\alpha x + \beta y + \gamma z) ds,$$

avec

$$H(x, y, z) \equiv F^{-\frac{2}{m}},$$

H étant homogène et de degré -2 pour xyz ; par emploi de (4) et d'analogues,

$$V - V_0 = \frac{1}{6} \sum a \int_c H(z dy - y dz).$$

Si donc c court sur la surface (S) même,

$$3(V - V_0) = aS_x + bS_y + cS_z = \vec{OI} \cdot \vec{O\Sigma},$$

le dernier facteur du produit intérieur étant l'aréolaire de S : V reste invariant quand I décrit un plan perpendiculaire à ce vecteur.

Enfin, les égalités

$$V - V_0 = \frac{aS_x + bS_y + cS_z}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = OI \times S_{a,b,c}$$

montrent l'identité des associées par les invariances de $V - V_0$ et de $S_{a,b,c}$: cette question a été traitée au paragraphe 28.

§ 37. — L'application de (4) à (30) conduit aux associées issues de l'équation

$$a \frac{\partial H}{\partial x} + b \frac{\partial H}{\partial y} + c \frac{\partial H}{\partial z} + 2H^{\frac{3}{2}} = W(x, y, z) \quad (33)$$

— la coïncidence voulue de OI avec Oz permet d'y annuler a et b — auxquelles s'attachent les surfaces (S)

$$\int \left(a \frac{\partial H}{\partial x} + \dots + 2H^{\frac{3}{2}} \right) dz + \Omega(x, y) = -3h$$

et les (Σ)

$$\int (\dots) dz + \Omega(x, y) = -3z.$$

Des associations effectives n'apparaissent pas, mais la liaison théorique entre cylindres droits et révolutives coaxiales se poursuit : les génératrices cylindriques sont orthogonales à l'axe de révolution OI.

D'autre part, prenons un cylindre dirigé suivant $y'y$; le deuxième terme de (33) s'évanouit de sorte que l'union de tels cylindres se fait quel que soit b :

Des cylindres associés, à génératrices parallèles, le sont pour tous les volumes coniques de sommets posés sur une parallèle aux génératrices.

Des observations analogues s'adressent aux attachées.

Enfin si s appartient à la surface d'équation

$$a \frac{\partial H}{\partial x} + b \frac{\partial H}{\partial y} + c \frac{\partial H}{\partial z} + 2H^{\frac{3}{2}} = 2$$

le volume conique équivaut à celui de sommet O et de base s .

§ 38. — Surfaces attachées au plan. — Soit le plan (S₀)

$$z = l. \quad (l > 0)$$

Parmi les (S), nous retrouvons les cruciformes

$$\frac{\alpha^3}{x^2} + \frac{\beta^3}{y^2} + \frac{l^3(c-l)}{z^2} = -3h$$

et, plus spécialement, des révolutives, des cylindres et les plans

$$z = \pm l \sqrt{\frac{l-c}{3h}}.$$

En prenant égaux h et l , vient ceci :

Soient les surfaces cruciformes issues d'une congruence de quadriques concentriques avec axe transverse de longueur fixe $2c$, supporté par $z'Oz$, et les plans

$$z = l, \quad z = l - \frac{3c^2}{l},$$

enfin s et S les cloisons que découpe sur les cruciformes et le premier plan un cône de sommet O : les volumes coniques de base S et dont les sommets sont aux divers points du second plan équivalent aux volumes cylindriques compris entre s et xOy .

§ 39. — Soit le cylindre de révolution

$$x^2 + z^2 = R^2,$$

d'axe $y'y$; nous pouvons supposer I sur Oz et de cote c . Les plus simples des attachées (S) sont des cylindres parallèles dont les sections droites ont l'équation polaire

$$-3h\rho^2 = cR^2 + \frac{2R^2 \sin \theta + k^3}{\cos^2 \theta},$$

ou

$$-3h\rho^2 = \frac{(cR^2 + k^3) + 2R^2 \sin \theta - cR^2 \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta}.$$

Si k est nul, s'obtiennent les sextiques du paragraphe 14, dont les asymptotes ne dépendent pas de c , donc de I .

Sans insister sur d'autres choix simplificateurs, arrêtons-nous aux hypothèses

$$cR^2 + k^3 = -R^3 = -cR^2,$$

réalisées pour

$$k^3 = -2R^3, \quad c = R,$$

(I se trouve sur le cylindre) qui donnent la strophoïde droite

$$\varphi = R \sqrt{\frac{R}{3h}} \cot\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\omega}{2}\right)$$

dont le point double vient à son tour sur le cylindre quand $3h$ égale R .

Des assertions analogues concernent une sphère de centre O ; les cylindres (S) deviennent des révolutes d'axe $z'z$ engendrées par les précédentes courbes.

§ 40. — Soit encore le cylindre de révolution

$$x^2 + z^2 - 2Rz = 0,$$

passant en O , et supposons I sur Oz . Le calcul met en évidence les cylindres parallèles (S) d'équation

$$3hx^2(x^2 + z^2)^{\frac{3}{2}} = (4R^3 - k^3)x^4 + 2[2R^2(2R - c) - k^3]x^2z^2 - k^3z^4.$$

1° $k = 0$. Pour sections droites, les podaires centrales des coniques

$$\frac{3h}{R^3}x^2 + \frac{3h}{4R^2(2R - c)}z^2 = 1,$$

ellipses ou hyperboles selon que c est inférieur ou supérieur à $2R$, c'est-à-dire que I est intérieur ou extérieur au cylindre; lorsque c égale $2R$, I étant donc diamétralement opposé à O , la surface est le cylindre déduit du premier par la rotation

$\mathcal{R}\left(y'y, -\frac{\pi}{2}\right)$ si nous prenons en outre $3h = R$.

2° $k^3 = 2R^2(2R - c)$. Les sections sont les sextiques bicirculaires (*fig. 10*)

$$3hx^2(x^2 + z^2)^{\frac{3}{2}} = 2R^2[cx^4 - (2R - c)z^4]$$

réduites, quand c s'annule, à la cissoïde droite

$$x(x^2 + z^2) = 2R \sqrt{\frac{R}{3h}} z^2,$$

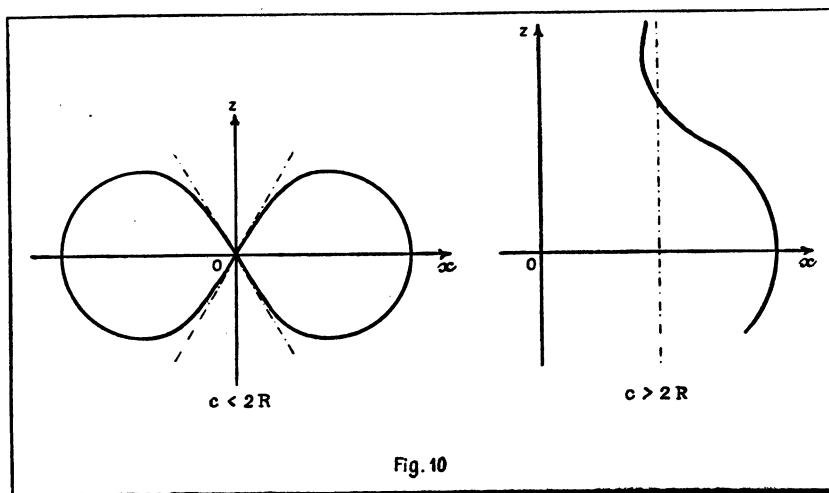


Fig. 10

rendue réelle par la substitution $-R$, et, quand c égale R , à la quartique

$$x^2(x^2 + z^2) = \frac{4R^3}{3h}(x^2 - z^2)$$

qu'on déduit aussitôt de la lemniscate de Bernouilli ayant les mêmes sommets.

3° $k^3 = 4R^3$. Nouvelles sextiques, réduites, lorsque c égale R , à la quartique

$$\rho = 2R \sqrt{\frac{R}{3h}} \operatorname{tg} \omega$$

que l'on construisait déjà au XVII^e siècle sous le nom de *galande* et c'est une des trois courbes auxquelles Isaac Barrow appliquait sa méthode du triangle différentiel (*fig. 11*).

4° Enfin, si k^3 annule le discriminant

$$k^3(4R^3 - k^3) - [2R^2(2R - c) - k^3]^2$$

l'équation de la section devient

$$\rho = 2R \cos \omega + \frac{c - 2R}{\cos \omega};$$

les directrices de cette cubique apparaissent. La directrice circulaire se déduit de la section cylindrique par la rotation $\mathcal{R}\left(y'y, -\frac{\pi}{2}\right)$.

Avec une sphère tangente en O à xOy s'obtiennent les révolutives que ces

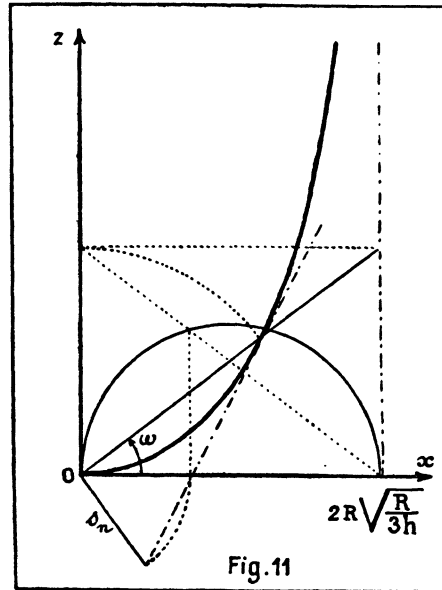


Fig. 11

courbes réalisent en tournant autour de $z'z$; on notera la présence d'un tore, généralisation du résultat que mentionne le paragraphe 12 du 4^e *Mémoire* où l'on trouvera une vérification partielle, et celle de la surface qu'engendre la galande, attachée déjà à certaines aires sphériques (*Ibid.*, § 13).

3. CORRESPONDANCES CONOÏDALES.

§ 41. — Il faut convenir que l'étude actuelle n'est pas au niveau des précédentes, quant à la richesse de ses conséquences; aussi serais-je bref et n'aurais-je en vue qu'une nouvelle propriété de quadriques centrées, provenant de ce que l'expression particulière

$$V = \frac{1}{6} \int \int_s \left({}_2F^{-\frac{2}{m}} - z \frac{\partial F^{-\frac{2}{m}}}{\partial z} \right) (\alpha x + \beta y) ds$$

du volume conique de sommet O associe les surfaces d'équation

$$F_0^{-\frac{2}{m}}(x, y, z) + z^2 \mathbb{A}(x, y) = 1.$$

Or, à cette forme se rattache l'équation générale

$$[Ax^2 + By^2 + C(z - z_0)^2 - 1] + \lambda z^2 = 0$$

des quadriques raccordées à celle d'équation

$$Ax^2 + By^2 + C(z - z_0)^2 = 1$$

le long de sa section par xOy ; ainsi :

Soit une quadrique (Q) de centre Q qu'un plan normal à l'un de ses axes coupe suivant une conique (O) de centre O; tout conoïde droit ayant pour axe celui de (Q) découpe sur le faisceau des quadriques raccordées à celle-ci le long de (O) des cloisons qui limitent des volumes coniques de sommet O équivalents.

Parmi les attachées (S) et pour $3h$ égal à z_0 , le cône asymptotique de (Q) ayant pour sommet, sur $z'z$, le point γ de cote

$$\overline{O\gamma} = z_0 - \frac{1}{Cz_0} \quad (z_0 \neq 0)$$

dont cette relation, sous la forme

$$\overline{O\gamma} \cdot \overline{OQ} = \overline{OS} \cdot \overline{OS'}$$

(S et S' désignent les sommets de Q sur ce même axe), indique une construction géométrique.

Si z_0 est nul, auquel cas le sommet des volumes est au centre de (Q), il est encore plus simple d'utiliser le paraboloïde (S) d'équation

$$Ax^2 + By^2 + \frac{2z}{3h} = 0,$$

indépendant de C.

Puis-je, en clôturant ce chapitre, formuler l'espoir qu'une vérification issue d'une sphère et d'une bande deux fois utilisée dirigera quelque épreuve d'examen secondaire? On s'écarterait, certes, des terrains habituellement explorés!

Juillet 1931.