P. VINCENSINI

Aires courbes en perspective. Surfaces et volumes hélicoïdaux

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 3e série, tome 23 (1931), p. 61-89
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1931_3_23__61_0>

AIRES COURBES EN PERSPECTIVE

SURFACES ET VOLUMES HÉLICOIDAUX

PAR M. P. VINCENSINI.

Dans ses travaux sur la formule de Stokes(1), M. A. BUHL a été amené à traiter un grand nombre de problèmes de géométrie se ramenant à l'étude d'intégrales doubles de la forme :

$$\int\int_S (\alpha F + \beta G + \gamma H)\, d\sigma,$$

la condition :

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = 0$$

étant supposée remplie.

S est une cloison tracée sur une surface, au point (x, y, z) de laquelle les cosinus directeurs de la normale sont (α, β, γ), et $d\sigma$ l'élément d'aire entourant le point (x, y, z).

Les intégrales de la forme ci-dessus, ne dépendent que du contour C de S et peuvent être réduites à des intégrales de ligne étendues à ce contour. Ce sont des invariants intégraux, qui conservent leur valeur lorsqu'on déforme S arbitrairement sans modifier C.

Parmi les questions que M. A. Buhl a rattachées à la formule de Stokes, certaines, telles que l'étude des volumes tournants et celle des projections coniques des surfaces conduisent à des énoncés géométriques particulièrement simples et élégants.

Dans le fascicule cité « *Géométrie et Analyse des intégrales doubles* », M. A. Buhl, après avoir donné un aperçu de ses méthodes, insiste sur l'intérêt qu'il y aurait à développer ce genre d'études.

---

(1) *Annales de la Faculté des sciences de Toulouse* (1910-1920). — *Géométrie et Analyse des intégrales doubles.* Collection Scientia, n° 36 (Gauthier-Villars et Cie, éditeurs). — *Nouvelles Annales de Mathématiques,* octobre 1923, juin et juillet 1924.

Les quelques résultats qui suivent, se rattachent directement aux questions ci-dessus indiquées.

La première partie de cet exposé, traite des surfaces sur lesquelles des cônes de sommet O détachent des aires égales.

Dans la deuxième partie, j'étudie les *aires hélicoïdales* (engendrées par le mouvement hélicoïdal d'une courbe), et les *volumes hélicoïdaux* (engendrés par le mouvement hélicoïdal d'une surface).

Ces deux problèmes généralisent immédiatement les problèmes des aires et des volumes *tournants*.

Le cas des aires hélicoïdales proportionnelles aux arcs, ou des volumes hélicoïdaux proportionnels aux surfaces, est particulièrement intéressant.

Les deux problèmes se lient de la façon la plus étroite par l'intermédiaire des géodésiques des surfaces hélicoïdes les plus générales.

PREMIÈRE PARTIE

1. — Aires courbes en perspective.

Soient (S) et (S') deux surfaces quelconques rapportées à un système de trois axes de coordonnées rectangulaires (O, x, y, z); $M(x, y, z)$ et $M'(x', y', z')$ deux points sur (S) et (S') alignés avec O.

Désignons par $d\sigma$ et $d\sigma'$ les éléments d'aire entourant M et M' qu'un cône infiniment petit d'axe OMM' détermine sur les deux surfaces, et par (α, β, γ), $(\alpha', \beta', \gamma')$ les cosinus directeurs des normales à ces surfaces en M et M'.

Si dV et dV' sont les volumes des cônes de sommet O et de bases $d\sigma$ et $d\sigma'$, on a :

$$\frac{dV'}{dV} = \frac{h'.d\sigma'}{h.d\sigma},$$

h et h' étant les distances de O aux plans tangents à (S) et à (S') en M et M'.

On peut écrire aussi :

$$\frac{dV'}{dV} = \frac{\rho'^3}{\rho^3},$$

ρ et ρ' désignant les rayons vecteurs OM et OM'.

On a donc la relation :

$$\frac{d\sigma'}{d\sigma} = \frac{h\rho'^3}{h'\rho^3}, \tag{1}$$

qui présente sous une forme géométrique très simple le rapport de deux éléments d'aire homologues.

2. — Perspective d'une surface courbe sur un plan.

(S) étant une surface quelconque d'équation $z = f(x, y)$, supposons que (S') soit un plan P.

h' est alors une constante, que nous désignerons par a, le plan P ayant pour équation $z - a = 0$.

On a :

(2) $$\frac{\rho}{\rho'} = \frac{z}{a} \; [z = \text{cote du point } M(x, y, z) \text{ de } (S)].$$

La relation (1) donne :

(3) $$d\sigma' = \frac{a^2 h}{z^3} d\sigma = \frac{a^2(\alpha x + \beta y + \gamma z)}{z^3} . d\sigma,$$

α, β, γ étant, comme nous l'avons dit plus haut, les cosinus directeurs de la normale en M à (S).

Si l'on considère sur (S) une cloison S de contour C, la perspective de S sur P, faite du point de vue O, a une aire σ' donnée par :

(4) $$\sigma' = a^2 \int\int_S \frac{(\alpha x + \beta y + \gamma z)}{z^3} . d\sigma .$$

σ' ne dépend que de C; l'intégrale double du deuxième membre a la même valeur pour toutes les cloisons S limitées au même contour C, et peut être transformée en une intégrale de ligne attachée à C.

En remplaçant α, β, γ, par :

$$\frac{-p}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \quad \frac{-q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \quad \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}},$$

p et q étant les dérivées de z par rapport à x et y (4), s'écrit :

(5) $$\sigma' = a^2 \int\int_S \frac{(-px - qy + z)}{z^3} . dx\, dy .$$

3. — Sur certaines correspondances par aires constantes entre deux plans.

Si nous prenons pour (S) une surface intégrale de l'équation aux dérivées partielles :

(6) $$\frac{-px - qy + z}{z^3} = \frac{1}{a^2},$$

le second membre de (5) représente l'aire σ de la projection de la cloison S de (S) sur le plan Oxy, et l'on a :

$$\sigma' = \sigma .$$

Si donc on projette une cloison quelconque S *de* (S), *coniquement sur le plan* $P(z = a)$, *et orthogonalement sur le plan* Oxy, *les deux projections sont équivalentes.*

La projection orthogonale de σ' sur Oxy étant égale à σ', on voit qu'il est possible, par l'intermédiaire des surfaces intégrales (S) de (6), d'établir un procédé de transformation du plan Oxy en lui-même avec conservation des aires, les points homologues étant alignés avec O.

Pour avoir deux points homologues (m, m') *dans une telle transformation, il suffit de mener par* O *une droite quelconque coupant* (S) *en* M *et* P *en* M', *puis de projeter orthogonalement* M *et* M' *en* m *et* m' *sur* Oxy [*fig. 1*].

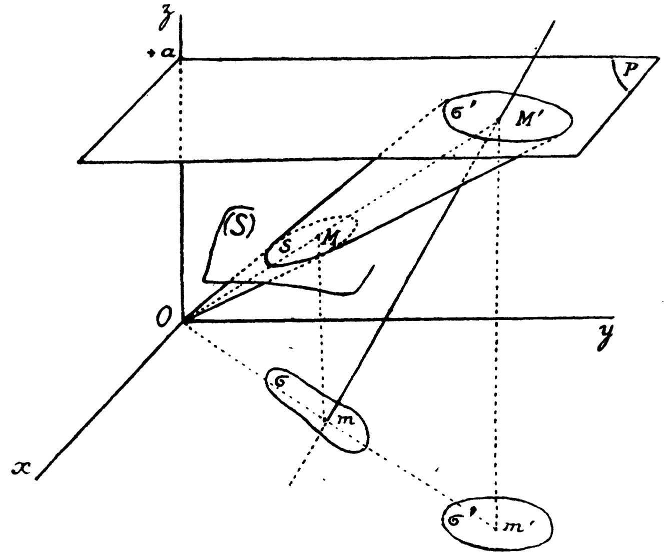

FIG. 1.

En envisageant toutes les surfaces intégrales de (6), on obtient, par le procédé indiqué, toutes les correspondances par aires constantes du plan Oxy, dans lesquelles deux points homologues sont alignés avec O.

L'intégration de (6) s'effectue sans difficulté.

Le système différentiel associé est :

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{a^2 dz}{a^2 z - z^3}.$$

On a immédiatement les deux intégrales distinctes :

$$\frac{y}{x} = c, \qquad \frac{z^2}{x^2(z^2 - a^2)} = c',$$

d'où l'intégrale générale :

$$\frac{z^2}{z^2 - a^2} = x^2 f\left(\frac{y}{x}\right), \qquad (f = \text{fonction arbitraire}). \tag{7}$$

Parmi les surfaces (7), figurent des surfaces de révolution autour de Oz. On les obtient avec :

$$f = \frac{1}{\varepsilon k^2}\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right), \qquad k^2 = \text{constante}, \quad \varepsilon = \pm 1 .$$

Leur équation en coordonnées semi-polaires est :

$$\frac{z^2}{z^2 - a^2} = \pm \frac{\rho^2}{k^2}, \qquad \text{soit :} \qquad \frac{a^2}{z^2} \pm \frac{k^2}{\rho^2} = 1 .$$

Par l'intermédiaire de ces surfaces, et au moyen de la construction indiquée ci-dessus, on obtient toutes les correspondances par aires constantes du plan Oxy, de révolution autour de O.

En nous plaçant dans le cas général, comparons les sens dans lesquels les deux points m et m' de la figure (1) décrivent deux contours infiniment petits homologues.

Il suffit à cet effet de comparer les variations des longueurs On et Om', lorsque $\frac{y}{x}$ reste constant $\left(\frac{y}{x} = c\right)$; ou encore les variations des projections de ces longueurs sur Ox.

Les carrés de ces projections sont :

$$x^2 \quad \text{et} \quad \frac{a^2 x^2}{z^2} .$$

Leur différence :

$$\frac{x^2(z^2 - a^2)}{z^2},$$

est constante $\left(\text{égale à } \frac{1}{f(c)}\right)$, d'après (7).

Il résulte de là que Om et Om' varient dans le même sens sur toute droite issue de O, et que par suite :

Sur deux contours infiniment petits homologues quelconques, m et m' tournent dans le même sens.

Envisageons alors (*fig. 1*) la congruence des droites (mM') joignant deux points homologues dans les deux plans parallèles Oxy et P.

Il est clair que les contours déterminés sur ces deux plans, par un pinceau infiniment délié de la congruence (qui ont même aire), sont décrits dans le même sens autour du rayon moyen. Cela prouve[1] que la congruence (mM') est une congruence à surface moyenne plane, le plan moyen étant le plan équidistant de Oxy et de P.

---

[1] Voir *Annales de la Faculté des sciences de Toulouse*, 1927. Sur trois types de congruences rectilignes, n° 4.

Tous les rayons de cette congruence rencontrent Oz, qui constitue l'une des nappes focales.

Il est manifeste qu'en faisant varier la surface (S) définie par l'équation (7), dans la construction traduite par la figure (1), on obtient *toutes les congruences à surface moyenne plane admettant pour 1^re^ nappe focale et pour plan moyen, une droite et un plan perpendiculaires.*

Une homographie conservant le plan de l'infini, donne toutes les congruences à surface moyenne plane dont l'une des nappes focales est une droite. Il suffit, pour avoir ces dernières, de supposer que $Oxyz$ est le système oblique le plus général, et de reprendre la construction précédemment indiquée, avec les surfaces définies en coordonnées obliques par l'équation (7). La focale rectiligne est encore Oz, et le plan moyen le plan $z = \frac{a}{2}$.

Les surfaces (7) sont des surfaces de JAMET. Les projections sur xOy des sections d'une surface (7) par les plans $z = \text{const.}$, constituent une famille homothétique (centre O). Les projections sur xOy des projections coniques des sections précédentes sur le plan $P(z = a)$, constituent évidemment la même famille homothétique.

On déduit immédiatement de là, cette propriété [qu'un calcul direct donne très simplement], des correspondances planes directes par aires constantes à points homologues alignés avec un point fixe O :

Il existe une famille de courbes homothétiques par rapport à O, se correspondant à elle-même, les courbes de la famille se changeant les unes dans les autres.

On peut évidemment déterminer $f\left(\frac{y}{x}\right)$ dans (7) pour que cette famille de courbes homothétiques soit une famille arbitrairement donnée, deux courbes homologues étant arbitrairement choisies.

Si l'on envisage toutes les surfaces correspondant aux différentes formes de la fonction f dans (7), et si on les coupe par un cône quelconque de sommet O, les projections sur le plan xOy des différentes cloisons obtenues, ont même aire.

La famille (7) n'est pas la seule famille de surfaces sur lesquelles des cônes arbitraires de sommet O découpent des cloisons se projetant orthogonalement sur un plan fixe suivant des aires équivalentes.

Pour avoir toutes les surfaces répondant à la question, il suffit d'exprimer que le coefficient de $dx\,dy$, dans (5), ne dépend que de $\frac{x}{z}$ et $\frac{y}{z}$. On obtient ainsi l'équation aux dérivées partielles :

$$px + qy - z = \frac{z^3}{a^2} f\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right),$$

où f est une fonction arbitraire.

A chaque forme de f, correspond une famille (dépendant d'une fonction arbitraire) de surfaces, jouissant de la propriété indiquée. Les surfaces (7) correspondent à $f = -1$.

Pour $f = \frac{x^2}{z^2}$ et $\frac{x^3}{z^3}$, on obtient sans difficulté les familles :

$$z = x e^{\frac{x^2}{2a^2}} \varphi\left(\frac{y}{x}\right), \qquad z = \frac{x^3}{2a^2} + x\varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

La deuxième de ces deux familles est susceptible d'une construction simple :

On se donne un cône ARBITRAIRE *de sommet* O, *et on augmente les cotes de ses différents points de quantités proportionnelles aux cubes de leurs abscisses.*

4. — Surfaces sur lesquelles des cônes de sommet O détachent des aires égales.

Pour avoir ces surfaces, il suffit d'exprimer que le rapport $\frac{d\sigma'}{d\sigma}$, donné par (3), ne dépend que de la direction du rayon vecteur OM, et pour cela, que c'est une fonction arbitraire de $\frac{x}{z}$ et de $\frac{y}{z}$.

On obtient l'équation aux dérivées partielles :

$$\text{(8)} \qquad \frac{-px - qy + z}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} = z^3 f\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right),$$

où f est une fonction arbitraire.

Chaque forme de la fonction f donne une famille de surfaces sur lesquelles les cônes de sommet O déterminent des aires égales.

Déterminons, par exemple, l'équation (8), pour que parmi les surfaces intégrales figure le plan $z = a$.

On peut, soit exprimer que le plan vérifie l'équation, soit utiliser directement l'équation (1).

Pour une surface quelconque, projetable coniquement de O sur $P(z = a)$ avec égalité des aires, on aura dans (1) :

$$\frac{d\sigma'}{d\sigma} = 1, \qquad h' = a, \qquad \frac{\rho'}{\rho} = \frac{a}{z};$$

d'où :

$$\text{(9)} \qquad \frac{h}{z^3} = \frac{1}{a^2}.$$

L'équation (8) correspondant au cas actuel en résulte; c'est :

$$a^2\frac{(-px-qy+z)}{\sqrt{1+p^2+q^2}}=z^3.$$

(9) conduit à l'énoncé que voici :

Sur toutes les surfaces telles que les cubes des cotes de leurs différents points soient proportionnels aux distances de l'origine aux plans tangents (surfaces parmi lesquelles figure un plan), les droites issues de l'origine déterminent (pour une valeur donnée du coefficient de proportionnalité) des correspondances avec égalité des aires homologues.

Ces surfaces sont les seules qu'une perspective plane transforme avec conservation des aires.

Déterminons de même l'équation aux dérivées partielles des surfaces qu'une perspective *sphérique* (Sur une sphère de centre O et de rayon a), transforme avec conservation des aires.

Ici, il faudra faire dans (1) :

$$\frac{d\sigma'}{d\sigma}=1, \qquad h'=\rho'=a.$$

Il vient :

$$\frac{h}{\rho^3}=\frac{1}{a^2}. \tag{10}$$

Les surfaces en question les plus générales sont caractérisées géométriquement par ce fait qu'il y a proportionnalité entre la distance du point de vue O au plan tangent et le cube du rayon vecteur.

L'équation aux dérivées partielles cherchée, se déduit immédiatement de (10); c'est :

$$a^2\frac{(-px-qy+z)}{\sqrt{1+p^2+q^2}}=(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}. \tag{11}$$

(11) est susceptible d'une intégration complète.

Supposons connue une surface particulière (Σ) solution de (11). (10) montre que si l'on imprime à (Σ) un mouvement quelconque à un paramètre autour de O, l'enveloppe de la famille obtenue constitue une nouvelle solution de l'équation (11) (*intégrale générale*).

L'enveloppe (*sphère*) obtenue en imprimant à (Σ) un mouvement à deux paramètres autour de O est l'intégrale *singulière*.

Tout revient donc à déterminer (Σ).

Cherchons à cet effet les surfaces (Σ) *de révolution* autour de Oz.

La méridienne d'une quelconque de ces surfaces, située dans le plan Oxz ($Ox =$ axe polaire, $\omega =$ angle polaire), s'obtient sans difficulté au moyen de la relation (10).

On a :

$$h = \rho \sin V = \frac{\rho^2}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}},$$

($V =$ angle du rayon vecteur avec la tangente).

D'où l'équation différentielle :

$$\rho\sqrt{\rho^2 + \rho'^2} = a^2.$$

L'intégration est immédiate et conduit à l'équation :

$$\rho^2 = a^2 \sin 2(\theta - \theta_0),$$

qui représente une famille de *lemniscates de Bernoulli* déduites de l'une d'elles par rotation autour de l'origène.

Sur toutes les surfaces engendrées par la rotation des lemniscates précédentes autour de Oz, *des cônes de sommet* O *détachent des aires, égales entre elles et égales à celle déterminée sur la sphère de centre* O *et de rayon* a.

Ce résultat a été établi par M. A. Buhl dans les Mémoires cités des *Annales de Toulouse*.

Conformément à ce qui a été dit plus haut, envisageons l'une quelconque (Σ) des surfaces de révolution ci-dessus, et imprimons-lui un mouvement à un paramètre autour du point O. L'enveloppe (Ω) de la famille obtenue sera l'intégrale générale de (11).

Une sphère quelconque de centre O et de rayon ρ, coupe (Ω) sous un angle α tel que :

$$\cos\alpha = \frac{h}{\rho}.$$

Cet angle est constant d'après (10). Il en résulte que les différentes sphères de centre O coupent (Ω) suivant une famille de lignes de courbure. (Ω) est une *surface de Monge* engendrée par une courbe plane invariable dont le plan roule sur un cône fixe de sommet O.

Cette courbe (caractéristique de (Σ)) est visiblement une lemniscate de centre O.

On peut énoncer ce résultat :

La famille des surfaces sur lesquelles les différents cônes de sommet O *détachent des aires égales et égales à celles déterminées sur une sphère de centre* O *et de rayon* a, *est constituée par l'ensemble des surfaces de Monge engendrées par une lemniscate de Bernoulli de centre* O *et de demi-axe* a, *dont le plan roule sur un cône quelconque de sommet* O[1].

5. — Familles de surfaces de révolution en perspective avec égalité des aires.

Envisageons une famille de surfaces de révolution autour de Oz, sur lesquelles les cônes de sommet O déterminent des aires égales.

Pour toutes ces surfaces, le rapport $\frac{h}{\rho^3}$ a la même valeur en tous les points d'une même droite issue de l'origine [voir l'équation (1) du n° 1].

Les méridiennes de ces surfaces, dans le plan Oxz, présentent la même propriété. [h est alors la distance de l'origine à la tangente, ρ le rayon vecteur].

L'axe polaire étant Ox et l'angle polaire ω, les méridiennes de l'une des familles de surfaces envisagées, sont définies par une équation de la forme ;

$$\frac{h}{\rho^3} = f(\omega), \qquad (f = \text{fonction arbitraire});$$

soit, en désignant par V l'angle du rayon vecteur avec la tangente :

$$\frac{\sin V}{\rho^2} = f(\omega).$$

En remplaçant sin V par son expression $\frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}}$, on constate que l'équation différentielle des méridiennes est :

$$\rho^2(\rho^2 + \rho'^2) = f(\omega) \qquad (f = \text{nouvelle fonction arbitraire}),$$

En posant $\rho^2 = u$, on peut donner à l'équation précédente la forme :

$$4u^2 + u'^2 = f(\omega).$$

Si l'on substitue à la variable ω, la nouvelle variable $\theta = 2\omega$, l'équation s'écrit :

$$u^2 + u'^2 = f(\theta). \tag{12}$$

L'équation (12) a été particulièrement étudiée par G. Darboux[2]. Elle se présente dans un grand nombre de questions parmi lesquelles nous citerons :

---

(1) Voir les résultats de M. A. Buhl, relatifs à diverses intégrales doubles invariantes sur toutes les surfaces appartenant à un même système d'ondes; *C. R.*, t. 191, p. 545 et 693.

(2) G. Darboux. *Leçons sur la théorie des surfaces*, T. IV, Note vi. — *Ibid.*, T. I, p. 147; et T. III, p. 303.

Le problème de la déformation d'une surface réglée de façon que l'une de ses courbes donnée à l'avance devienne plane.

La détermination des surfaces spirales de Maurice LÉVY par la forme :

$$ds^2 = U^2 e^{2\theta}(du^2 + d\theta^2) \qquad [U = \text{fonction de } u],$$

de leur élément linéaire.

La détermination de toutes les géodésiques des surfaces d'élément linéaire :

$$ds^2 = f(\theta)\left[du^2 + \left(u + \varphi(\theta)\right) d\theta^2\right] \qquad (\varphi = \text{fonction arbitraire de } \theta).$$

Nous renverrons à l'ouvrage cité de G. DARBOUX, pour ce qui concerne l'intégration de (12).

Cette intégration est possible pour une suite illimitée de fonctions $f(\theta)$. Au point de vue du problème qui nous occupe, chacune des fonctions de cette suite, fait connaître une famille ∞^1 de surfaces de révolution, sur lesquelles, des cônes de sommet O détachent des aires égales.

Un cas d'intégration complète simple, est fourni par les fonctions $f(\theta)$ de la forme $e^{m\theta}$. On obtient alors, toutes les surfaces de révolution autour de Oz, qui se projettent avec conservation des aires, sur la surface de révolution admettant pour méridienne une spirale logarithmique de pôle O.

On peut observer que si l'on n'impose pas de forme déterminée au second membre de l'équation $4u^2 + u'^2 = f(\omega)$, le problème de la recherche des différentes familles de ∞^1 surfaces de révolution autour de Oz, sur lesquelles les cônes de sommet O déterminent des aires égales, se présente ainsi :

Déterminer la fonction u la plus générale des deux variables ω, α, telle que $4u^2 + u'^2$ ne dépende pas de α.

Posé sous cette forme, le problème se ramène à l'intégration d'une équation aux dérivées partielles du deuxième ordre d'un type simple complètement intégrable.

Exprimons que l'expression $4u^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial \omega}\right)^2$ ne dépend pas de α. Nous obtenons :

$$2u\frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\partial u}{\partial \omega}\frac{\partial^2 u}{\partial \omega \partial \alpha} = 0;$$

soit, en introduisant les notations habituelles :

$$s = -\frac{2qz}{p},$$

$$\left[u = z, \quad \frac{\partial u}{\partial \omega} = p, \quad \frac{\partial u}{\partial \alpha} = q, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \omega \partial \alpha} = s\right].$$

L'intégration de cette équation donne, par leurs méridiennes, toutes les familles [au paramètre α], de surfaces sur lesquelles les différents cônes de sommet O déterminent des aires égales.

$u(\omega, \alpha)$ étant une solution quelconque, la famille correspondante est définie par l'équation :

$$\rho^2 = u(\omega, \alpha).$$

6. — Détermination de certains couples de surfaces sur lesquelles des cônes de sommet O déterminent des aires égales.

Reprenons l'équation définissant les familles de surfaces de révolution autour de Oz, sur lesquelles les cônes de sommet O détachent des aires égales, établie au numéro précédent, sous la forme :

$$4u^2 + u'^2 = f(\omega) \qquad (u = \rho^2).$$

Supposons que la fonction arbitraire $f(\omega)$ affecte la forme :

$$4f^2 + f'^2 \qquad (f = \text{fonction de } \omega).$$

L'équation sera :

$$4u^2 + u'^2 = 4f^2 + f'^2. \tag{13}$$

Nous pouvons écrire (13) :

$$\frac{u' + f'}{2(u+f)} \cdot \frac{u' - f'}{2(u-f)} = -1;$$

soit en posant :

$$\left\{\begin{array}{l} u + f = \mathrm{U}, \\ u - f = \mathrm{V}, \end{array}\right. \tag{14}$$

U et V étant deux fonctions de ω :

$$\frac{\mathrm{U}'}{2\mathrm{U}} \cdot \frac{\mathrm{V}'}{2\mathrm{V}} = -1,$$

ou encore :

$$\frac{\partial}{\partial\omega} \cdot \log\sqrt{\mathrm{U}} \cdot \frac{\partial}{\partial\omega} \log\sqrt{\mathrm{V}} = -1.$$

Posons :

$$\log\sqrt{\mathrm{U}} = \lambda(\omega) \qquad (\lambda = \text{fonction arbitraire de } \omega).$$

Alors

$$\log\sqrt{\mathrm{V}} = -\int \frac{d\omega}{\lambda'(\omega)} + c \qquad (c = \text{constante}),$$

et l'on obtient pour U et V les expressions :

$$\mathrm{U} = e^{2\lambda(\omega)},$$

$$\mathrm{V} = e^{-2\int \frac{d\omega}{\lambda'(\omega)} + c} = \mathrm{K}e^{-2\int \frac{d\omega}{\lambda'(\omega)}} \qquad [\mathrm{K} = \text{constante}].$$

En tenant compte de (14), on voit qu'on peut écrire les expressions de u et de f :

$$u = \frac{1}{2}\left[e^{2\lambda(\omega)} - \mathrm{K}e^{-2\int \frac{d\omega}{\lambda'(\omega)}}\right],$$

$$f = \frac{1}{2}\left[e^{2\lambda(\omega)} + \mathrm{K}e^{-2\int \frac{d\omega}{\lambda'(\omega)}}\right].$$

Il est clair que la fonction u ainsi déterminée, vérifie l'équation (13) dans laquelle f a l'expression ci-dessus.

Comme, de par sa formation, l'équation (13) admet aussi la solution f, on voit que les expressions ci-dessus de u et de f, fournissent deux solutions *distinctes* d'une même équation de la forme (13).

Conformément à ce qui précède, *les courbes du plan* Oxy *d'équations polaires :*

$$(\alpha)\quad \begin{cases} \rho^2 = e^{2\lambda(\omega)} - \mathrm{K}e^{-2\int \frac{d\omega}{\lambda'(\omega)}}, \\ \rho^2 = e^{2\lambda(\omega)} + \mathrm{K}e^{-2\int \frac{d\omega}{\lambda'(\omega)}}, \end{cases}$$

engendrent, en tournant autour de Oz, ***deux surfaces de révolution telles que la perspective de l'une quelconque des deux, sur l'autre, faite à partir de*** O, ***conserve les aires.***

La solution obtenue, présente, on le voit, un assez grand degré de généralité, K étant une constante arbitraire, et $\lambda(\omega)$ une *fonction arbitraire* de ω.

Pour donner un exemple simple, prenons :

$$\lambda(\omega) = \omega; \qquad \mathrm{K} = 1.$$

Nous obtenons alors, à une homothétie près, les deux courbes :

$$\rho^2 = sh\, 2\omega, \qquad \rho^2 = ch\, 2\omega.$$

Sur les surfaces de révolution engendrées par ces deux courbes, en tournant autour de la perpendiculaire Oz à l'axe polaire, les cônes de sommet O déterminent des aires égales.

7. — Sur les correspondances par aires constantes entre cylindres à génératrices parallèles.

La question de la détermination des familles de surfaces de révolution d'axe Oz, sur lesquelles les différents cônes de sommet O détachent des aires égales, est à rapprocher de celle de la détermination des familles de cylindres de génératrices parallèles à Oz, sur lesquels les différents conoïdes droits d'axe Oz, détachent des aires égales.

Les sections droites des cylindres de l'une de ces familles constituent, comme on s'en rend compte immédiatement, une famille de courbes telle, que les droites issues de O déterminent sur ces courbes des correspondances par égalité d'arcs. Le problème de la détermination des familles de cylindres ci-dessus, se ramène au suivant :

Déterminer les familles de courbes ($\mathcal{C}$) du plan xOy, telles qu'un angle quelconque de sommet O *détermine des arcs égaux sur toutes les courbes d'une même famille.*

Nous nous proposons de rattacher ce dernier problème, qui est loin d'être nouveau, à celui dont il a été question au n° V.

Envisageons une famille de courbes ($\mathcal{C}$) du plan xOy. Soit Ou une droite quelconque issue de O, faisant l'angle ω avec Ox et coupant l'une quelconque des courbes ($\mathcal{C}$) en M ($OM = \rho$). Si θ est l'angle de OM avec la normale en M à $\mathcal{C}$, $\dfrac{\rho}{\cos\theta}$ ne varie pas le long de Ou quand on passe de $\mathcal{C}$ à toutes les courbes de la même famille, et l'on a :

$$(15) \qquad \frac{\rho}{\cos\theta} = f(\omega),$$

f étant une fonction de ω, particularisant la famille ($\mathcal{C}$).

$\dfrac{\rho}{\cos\theta}$ est la normale polaire de $\mathcal{C}$ en M. On peut donc dire : *Le long d'une droite* Ou *toutes les courbes* ($\mathcal{C}$) *ont même normale polaire.*

Ou encore :

Les normales aux différentes courbes ($\mathcal{C}$) *aux points où elles sont coupées par une même droite* Ou *enveloppent une hypocycloïde à quatre rebroussements.*

Pour toutes les courbes $\mathcal{C}$ d'une même famille, les cercles passant par O et tangents aux courbes aux points où elles sont coupées par Ou sont *égaux*. On peut donc définir ainsi les courbes d'une même famille ($\mathcal{C}$) :

Ce sont les enveloppes de ∞^1 familles de cercles issus de O, telles que les cercles touchant les ∞^1 courbes ($\mathcal{C}$) sur une même droite issue de O soient égaux.

Ou encore, comme on s'en rend compte immédiatement :

Ce sont les podaires (relatives à O) d'une famille ∞^1 de courbes, telles qu'aux points équidistants de O les tangentes soient parallèles.

Cette définition n'exclut que le cas (singulier) des familles de cercles égaux passant par un même point.

Ayant égard à cette dernière définition, on voit que l'équation du problème de la recherche des familles de courbes ($\mathcal{C}$), peut se ramener à la suivante .

$$y' = f(x^2 + y^2), \tag{16}$$

où f est une fonction arbitraire particularisant la famille.

Les courbes ($\mathcal{C}$) sont les podaires, relatives à O, des courbes intégrales de (16).

L'une ou l'autre des équations (15), (16), peut servir à la recherche des familles ($\mathcal{C}$).

(15) s'écrit :

$$\rho^2 + \rho'^2 = f(\omega). \tag{17}$$

Cette équation est l'équation 12 du n° V qui définit (par leurs méridiennes) les familles de surfaces de révolution autour de Oz sur lesquelles les cônes de sommet O déterminent des aires égales, à ceci près que dans (12) θ est le *double* de l'angle polaire ω et u le *carré* du rayon vecteur.

Le problème actuel et le problème du n° V sont donc au fond identiques, et l'on peut énoncer la proposition suivante :

Soit Oxyz un système de trois axes rectangulaires. Si l'on transforme les méridiennes (Γ) situées dans le plan xOz, d'une famille quelconque de surfaces de révolution sur lesquelles les différents cônes de sommet O détachent des aires égales, en doublant les angles polaires (Ox = axe polaire) et en remplaçant les rayons vecteurs par leurs carrés, on obtient les sections droites ($\mathcal{C}$) de la famille la plus générale de cylindres sur lesquels les différents conoïdes droits d'axe Oy détachent des aires égales.

La construction inverse donne toutes les familles (Γ) à partir des différentes familles ($\mathcal{C}$).

Tout ce qui a été dit aux numéros V et VI à propos des courbes (Γ) se répète pour les courbes ($\mathcal{C}$) actuelles.

En particulier, il suffit de remplacer ρ^2 par ρ, et ω par $\frac{\omega}{2}$ dans les équations (α), pour avoir une infinité de couples [dépendant d'une fonction et d'une constante arbitraires] de courbes, sur lesquelles les droites issues de O déterminent des correspondances par arcs égaux.

Les équations polaires de l'un de ces couples sont :

$$\rho = f(\omega) \mp \mathrm{K} e^{-\int \frac{f(\omega)}{f'(\omega)} d\omega}. \tag{18}$$

On a posé dans les équations transformées de (α), $e^{\lambda(\omega)} = f(\omega)$.

Les équations (18) mettent en évidence le résultat suivant :

Si à partir des différents points d'une courbe arbitraire d'équation polaire $\rho = f(\omega)$, *on porte, dans les deux sens, sur les rayons vecteurs, des longueurs proportionnelles à* $e^{-\int \frac{f(\omega)}{f'(\omega)} d\omega}$, *les deux points obtenus décrivent des courbes* (A), (B), *se correspondant avec égalité des arcs.*

On obtient des vérifications immédiates du résultat précédent en prenant pour courbe de départ une droite, ou un cercle passant par O. (A) et (B) sont alors deux hyperboles équilatères ou deux cercles égaux passant par O.

Les courbes (A), (B), associées à la courbe $\rho = \frac{1}{2} e^{\omega}$, ont pour équations :

$$\text{(A)} \qquad \rho = \frac{1}{2} e^{\omega} - \mathrm{K} e^{-\omega}; \qquad\qquad \text{(B)} \qquad \rho = \frac{1}{2} e^{\omega} + \mathrm{K} e^{-\omega}.$$

Avec $\mathrm{K} = \frac{1}{2}$, on obtient :

$$\rho = sh\,\omega, \qquad \rho = ch\,\omega.$$

Observons qu'au moyen des formules (18), on peut obtenir une infinité de solutions du problème suivant :

Déterminer les mouvements de deux points M, M', *dans un plan, de façon qu'à chaque instant* M *et* M' *soient équidistants d'un point fixe* O *du plan et aient leurs vitesses parallèles.*

Il suffit, conformément à une remarque faite plus haut, d'envisager deux courbes quelconques (A) et (B) définies par les équations (18) et de construire leurs *antipodaires*. Les points de ces antipodaires correspondant à la même valeur de ω, fournissent une solution du problème.

Ainsi par exemple, le couple de courbes (A), (B) défini par les deux équations :

$$\rho = sh\,\omega. \qquad \rho = ch\,\omega.$$

donne les deux mouvements :

$$\mathrm{M}\begin{cases} x = sht\cos t + cht\sin t, \\ y = sht\sin t - cht\cos t; \end{cases}$$

$$\mathrm{M}'\begin{cases} x = cht\cos t + sht\sin t, \\ y = cht\sin t - sht\cos t. \end{cases}$$

Eu égard aux différentes familles ∞^1 de mouvements plans tels qu'à chaque instant les ∞^1 points mobiles soient équidistants d'un point fixe O, nous ferons la remarque suivante :

La courbure de la trajectoire décrite par l'un quelconque M des ∞^1 points associés, au point où se trouve M à un instant déterminé, est une fonction *sinusoïdale* de l'angle de position de M sur le cercle qui contient les ∞^1 mobiles à l'instant envisagé.

On déduit immédiatement de là que :

Les projections des rayons de courbure des trajectoires des différents points M, sur les normales aux rayons vecteurs, sont égales à chaque instant.

Ces deux propriétés résultent simplement de l'équation (16).

Suivant la terminologie de MASSAU, les équations de la forme (16) définissent les familles de courbes à *isoclines circulaires concentriques*.

Pour une étude géométrique des courbes isoclines, nous renvoyons au *Cours de géométrie de l'École Polytechnique* de M. D'OCAGNE (2e partie). Notons que dans le cas actuel, on peut tracer un réseau d'isoclines aussi dense que l'on veut, et construire avec une grande approximation les courbes intégrales de (16). Les podaires de ces courbes relatives à O, fournissent une famille de courbes sur lesquelles les droites issues de O déterminent des correspondances avec égalité des arcs.

On peut ainsi construire très approximativement les familles de courbes correspondant avec égalité des arcs à des courbes [droites, cercles, etc.] dont les antipodaires ont une définition géométrique simple.

La solution du problème de la recherche des différentes familles de courbes planes, telles qu'aux points d'intersection des courbes d'une même famille avec une circonférence quelconque ayant pour centre un point donné O du plan, les tangentes soient parallèles, fournit aisément une infinité de familles à un paramètre, de solutions du problème analogue de l'espace :

Déterminer les familles de surfaces telles que sur les surfaces d'une même famille, les points en lesquels les plans tangents sont parallèles [même représentation sphérique], soient à la même distance d'un point fixe O *de l'espace.*

Définissons, en axes rectangulaires, une surface quelconque par les formules connues de Weingarten :

$$x = \Delta(M, X) + MX,$$
$$y = \Delta(M, Y) + MY,$$
$$z = \Delta(M, Z) + MZ;$$

X, Y, Z étant les cosinus directeurs de la normale au point (u, v), M la distance algébrique de l'origine O au plan tangent correspondant, et Δ représentant le paramètre différentiel mixte relatif au ds^2 de la représentation sphérique.

Exprimons que la distance du point de représentation sphérique (u, v), au point O, ne dépend que de u et v; nous obtenons simplement, pour l'équation aux dérivées partielles d'une famille quelconque de surfaces jouissant de la propriété indiquée :

$$\Delta_1 M + M^2 = f(u, v);$$

f est une fonction arbitraire particularisant la famille.

Si l'on se reporte à ce qui précède, on constate aisément qu'on peut obtenir une infinité de familles ∞^1 de surfaces jouissant de la propriété requise, par la construction géométrique suivante :

Envisageons un cône quelconque (C) de sommet O, et, dans l'un de ses plans tangents P, une famille quelconque ∞^1 de courbes telles qu'en leurs points d'intersection avec une même circonférence de centre O les tangentes soient parallèles. Les ∞^1 surfaces de Monge engendrées par le roulement du plan P sur le cône (C), constituent l'une des familles en question.

En faisant rouler sur (C) les couples de courbes définies par les équations (18), on obtient une infinité de *couples* de surfaces [dépendant de deux fonctions et d'une constante arbitraires] se correspondant comme il a été expliqué.

DEUXIÈME PARTIE

I. — Aires hélicoïdales.

1. — Aire engendrée par un arc de courbe animé d'un mouvement hélicoïdal.

Soient $x, y, z,$ les coordonnées, exprimées en fonction de l'arc u, d'un point quelconque de la courbe $(\mathcal{C})$ rapportée à un système d'axes rectangulaires $o(x, y, z)$.

Désignons par $O(X, Y, Z)$ un système *fixe*, et supposons $o(x, y, z)$ animé d'un mouvement hélicoïdal d'axe OZ(oz glisse sur OZ).

Si h est le pas réduit des hélices décrites par les différents points du système mobile, et si v désigne l'angle (ox, OX), les équations de la courbe $(\mathcal{C})$ par rapport aux axes fixes, pour une position déterminée du système mobile (v donné) sont :

$$(1) \qquad \begin{cases} X = x\cos v - y\sin v, \\ Y = x\sin v + y\cos v, \\ Z = z + hv. \end{cases}$$

Lorsque v varie, $(\mathcal{C})$ engendre une surface hélicoïde définie paramétriquement par les équations (1).

Le ds^2 de cette surface s'obtient sans difficulté; on trouve :

$$(2) \qquad ds^2 = du^2 + 2[xy' - yx' + z'h]\,du\,dv + [x^2 + y^2 + h^2]\,dv^2,$$

les accents indiquent des dérivations par rapport à u.

L'élément d'aire décrit par l'arc du de $(\mathcal{C})$ pendant la rotation dv autour de OZ, a pour expression :

$$d\sigma = \sqrt{(x^2 + y^2 + h^2) - [xy' - yx' + z'h]^2}\,du\,dv.$$

L'aire hélicoïdale engendrée par un arc fini $(u_0 u_1)$ pendant la rotation v est :

$$\sigma = v\int_{u_0}^{u_1}\sqrt{(x^2 + y^2 + h^2) - [xy' - yx' + z'h]^2}\,du.$$

2. — Courbes $(\mathcal{C})$ décrivant des aires hélicoïdales proportionnelles aux arcs.

Il revient au même de dire que des arcs de même longueur pris sur l'une de ces courbes, décrivent des aires égales pour une même rotation autour de l'axe du mouvement.

On obtient les courbes en question en écrivant que :

$$\frac{d\sigma}{du} = a \cdot v \qquad (a = \text{constante}).$$

On obtient, après élévation au carré, pour déterminer ces courbes, l'équation :

$$(3) \qquad (x^2 + y^2 + h^2) - [xy' - yx' + z'h]^2 = a^2.$$

On pourrait, au moyen de l'équation (3), chercher à déterminer des courbes $(\mathcal{C})$ situées sur des surfaces connues (cylindres, surfaces de révolution, conoïdes, etc...). On aurait à intégrer des équations différentielles plus ou moins compliquées. Mais, il est possible de donner à ces courbes, décrivant des espaces hélicoïdaux à deux dimensions, une définition géométrique intéressante, susceptible comme nous le verrons plus loin d'une généralisation immédiate dans l'espace euclidien à trois dimensions.

On sait que sur une surface quelconque, d'élément linéaire :

$$ds^2 = \mathrm{E}du^2 + 2\mathrm{F}du\,dv + \mathrm{G}dv^2,$$

les trajectoires orthogonales d'une famille ∞^1 de géodésiques, ont pour équation :

$$\theta = \text{constante},$$

θ étant une solution quelconque de :

$$\Delta\theta = \mathrm{K}(\text{const.}).$$

$\Delta\theta$ est le paramètre différentiel du premier ordre de θ, relatif au ds^2 de la surface envisagée :

$$\Delta\theta = \frac{\mathrm{E}\left(\frac{\partial\theta}{\partial v}\right)^2 - 2\mathrm{F}\frac{\partial\theta}{\partial u}\frac{\partial\theta}{\partial v} + \mathrm{G}\left(\frac{\partial\theta}{\partial u}\right)^2}{\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2}.$$

Pour l'hélicoïde engendré par $(\mathcal{C})$, d'élément linéaire (2), on a :

$$\Delta v = \frac{1}{(x^2 + y^2 + h^2) - (xy' - yx' + z'h)^2},$$

soit d'après (3)

$$\Delta v = \frac{1}{a^2} = \text{const.}$$

Il résulte de là que sur l'hélicoïde considéré, *les courbes* $(\mathcal{C})$ *jouissant de la propriété de proportionnalité énoncée plus haut, sont des trajectoires orthogonales d'une famille* ∞^1 *de géodésiques* (*courbes parallèles*).

Il est clair que ces ∞^1 géodésiques, orthogonales à ∞^1 courbes $(\mathcal{C})$ déduites de l'une d'entre elles par un mouvement hélicoïdal, se déduisent elles-mêmes de l'une quelconque d'entre elles par le même mouvement hélicoïdal.

On peut donc donner cette définition des courbes $(\mathcal{C})$ qui nous occupent :

Les courbes $(\mathcal{C})$ *qui par un mouvement hélicoïdal quelconque de pas* h *autour d'un axe* OZ, *donnent des aires proportionnelles aux arcs, sont les trajectoires orthogonales de toutes les familles de géodésiques dérivées d'une géodésique arbitraire, sur une surface hélicoïdale arbitraire d'axe* OZ, *de pas* h.

3. — Cas particulier des aires tournantes.

Si, dans ce qui précède, on suppose $h = 0$, on obtient les courbes qui, par rotation autour de OZ, engendrent des aires proportionnelles aux arcs.

Ces courbes, que j'ai signalées dans un Mémoire antérieur[1], *sont les trajectoires orthogonales des géodésiques correspondant à la même valeur de la constante de* CLAIRAUT, *des différentes surfaces de révolution autour de* OZ.

Celles qui sont situées sur une surface de révolution déterminée (Σ), peuvent être définies par la relation :

$$\rho \sin \varphi = K (\text{const.}),$$

entre la distance ρ d'un point à l'axe de révolution, et l'angle φ que fait la tangente en ce point à la courbe avec le parallèle du point.

L'étude des courbes $(\mathcal{C})$ donnant par rotation autour de OZ des aires proportionnelles aux arcs, présenterait quelque intérêt. Nous nous bornerons à signaler deux résultats, les concernant, qu'il serait aisé de démontrer.

---

[1] *Annales de la Faculté des sciences de Toulouse*, 1927. Sur trois types de congruences rectilignes, § 18.

Le premier est relatif aux courbes $(\mathcal{C})$, relatives à un axe OZ, conservant leur propriété de proportionnalité si on les projette sur un plan perpendiculaire à OZ.

On obtient toutes les courbes $(\mathcal{C})$ relatives à OZ, se projetant sur le plan OXY normal à OZ suivant des courbes de la même famille, en envisageant une développante (Δ) d'un cercle quelconque du plan OXY de centre O et de rayon m, et en coupant le cylindre droit de base (Δ) par la famille d'hyperboloïdes :

$$(a^2 - m^2)(x^2 + y^2 - a^2) - z^2 m^2 = 0, \qquad (m < a),$$

où a est un paramètre variable.

Le deuxième résultat annoncé est relatif aux courbes $(\mathcal{C})$ portées par des cônes de révolution d'axe OZ et de sommet O :

Les inverses des courbes $(\mathcal{C})$, dans des inversions de pôle O, sont des TRACTRICES CONIQUES, *c'est-à-dire des courbes telles que la tangente à l'une d'elles, limitée au point de contact et au plan perpendiculaire en O à OZ, ait une longueur constante.*

Si l'on envisage le plan comme un cône de révolution d'angle au sommet π, on arrive à ce résultat que les inverses des développantes des cercles de centre O, dans des inversions de pôle O, sont des courbes à *tangente polaire constante*(¹).

II. — Volumes hélicoïdaux.

L'étude des *volumes hélicoïdaux*, et en particulier de la recherche des surfaces sur lesquelles on peut détacher des cloisons d'aire S, engendrant, dans un mouvement hélicoïdal, des volumes $V = KS$ ($K =$ const.), est à rapprocher de l'étude des *aires hélicoïdales*.

Ici, au lieu des géodésiques des espaces hélicoïdaux à deux dimensions, ce sont les géodésiques (droites) de l'espace euclidien à trois dimensions, qui interviennent.

1. — Volume engendré par une cloison animée d'un mouvement hélicoïdal.

Envisageons sur une surface quelconque (S), rapportée à un système de trois axes de coordonnées rectangulaires, un élément superficiel $d\sigma$ entourant le point $M(x, y, z)$, en lequel les cosinus directeurs de la normale sont (α, β, γ).

(¹) Voir R. DELTHEIL. *Les roulettes planes et l'intégration de certaines équations différentielles.* N. A., juin 1927.

Supposons que (S) soit animée d'un mouvement hélicoïdal d'axe Oz. Les différents points de (S) décrivent des hélices de même pas réduit h.

Soient l, m, n, les cosinus directeurs de la tangente en M, à l'hélice décrite par le point M.

On trouve sans difficulté :

$$l = \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2+h^2}},$$

$$m = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+h^2}},$$

$$n = \frac{h}{\sqrt{x^2+y^2+h^2}}.$$

L'élément de volume dV, engendré par $d\sigma$ pendant la rotation ω autour de Oz, est le même que celui engendré par sa projection orthogonale $d\varepsilon$, sur le plan normal à l'hélice décrite par M.

On a :

$$d\varepsilon = (\alpha l + \beta m + \gamma n)\, d\sigma,$$

ou encore :

$$d\varepsilon = \frac{(\beta x - \alpha y + \gamma h)}{\sqrt{x^2+y^2+h^2}}\, d\sigma.$$

Pour avoir dV, multiplions $d\varepsilon$ par la longueur de l'arc d'hélice décrit par M pendant la rotation ω, qui a pour expression :

$$\sqrt{x^2+y^2+h^2}\,.\,\omega.$$

Nous obtenons :

$$dV = \omega\,.\,(\beta x - \alpha y + \gamma h)\, d\sigma.$$

Prenons, une fois pour toutes, $\omega = 1$. Alors :

$$dV = (\beta x - \alpha y + \gamma h)\, d\sigma.$$

Le volume hélicoïdal engendré par la cloison S de (S), est donné par l'intégrale double :

(1) $$V = \int\int_S (\beta x - \alpha y + \gamma h)\, d\sigma.$$

Ou encore, en introduisant les dérivées du z de la surface par rapport à x et y :

(2) $$V = \int\int_S (py - qx + h)\, dx\, dy.$$

Les formules (1), (2), généralisent immédiatement celles obtenues par M. A. Buhl, pour les volumes tournants d'axe Oz (1).

On obtient les formules de M. A. Buhl, en faisant $h = 0$,

On entrevoit la possibilité de faire une théorie des volumes hélicoïdaux, calquée sur celle des volumes tournants que M. A. Buhl a montrée si riche en résultats géométriques.

Ici, bien entendu, l'élégance sera moindre, les volumes hélicoïdaux étant un peu plus complexes que les volumes tournants. Malgré cela, certains des résultats de M. A. Buhl, ne subissent que de très légères modifications.

2. — Étude de la formule (1) ou (2).

L'intégrale double (1) ou (2), donnant V, est, de par sa nature géométrique, un invariant intégral dont la valeur ne dépend que du contour qui limite l'aire S, transformable par suite en intégrale de ligne.

Si la cloison S, ou plus simplement son contour C, fait partie d'un hélicoïde de pas réduit h, V est nul, et réciproquement.

En annulant le coefficient de $dx\,dy$, sous le signe $\int\int$, dans (2), on obtient donc l'équation, d'ailleurs bien connue, des hélicoïdes les plus généraux.

Écrivons (2) sous la forme :

$$V = \int\int_S (py - qx)\,dx\,dy + h\int\int_S dx\,dy;$$

La première intégrale double du deuxième membre, représente le volume V_1 engendré par la rotation (de l'angle unité) de la cloison S autour de Oz.

Ce volume V_1 est affecté d'un signe, qu'il convient de préciser.

Cela se fait simplement, en introduisant la normale *positive* à la cloison S en l'élément $d\sigma$, de cosinus directeurs :

$$\frac{-p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad \frac{-q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

Si cette normale positive est de sens *direct* (défini par le trièdre de coordonnées) par rapport à Oz, l'élément de volume $(py - qx)\,dx\,dy$ est *positif*; l'élément de volume est *négatif* dans le cas contraire.

(1) Voir, plus particulièrement, les Notes des *Nouvelles Annales* déjà citées. Octobre 1923, juin et juillet 1924.

La deuxième intégrale du deuxième membre, n'est autre chose que le volume V_2, engendré par la cloison S, au cours de la translation h parallèle à Oz.

Ce volume V_2, a le signe du pas du mouvement hélicoïdal imprimé à la cloison.

On peut donc écrire, V, V_1 et V_2 ayant les significations géométriques ci-dessus indiquées, la propriété intéressante :

$$V = V_1 + V_2. \tag{3}$$

Si S (ou son contour C) est situé sur une surface de révolution autour de Oz, $V_1 = 0$, et (3) montre que :

Le volume hélicoïdal engendré par une cloison portée par une surface de révolution d'axe Oz, *est égal au volume cylindrique engendré par la cloison, dans la translation parallèle à l'axe, correspondant au mouvement hélicoïdal envisagé.*

Si S (ou son contour) est située sur un hélicoïde de pas réduit h et d'axe Oz, V est nul, et l'on a :

$$V_1 + V_2 = 0.$$

Les volumes engendrés par S, *dans la rotation et la translation qui correspondent à un mouvement hélicoïdal déterminé de pas* h *autour de* Oz, *sont égaux* (*en valeur absolue*).

Si S est située sur un hélicoïde d'axe Oz et de pas m, la formule (2) du n° 1, donne :

$$V = \int\int_S (h - m)\, dx\, dy = (h - m)\,\sigma,$$

σ étant l'aire de la projection de S sur le plan Oxy.

On peut donc dire :

Le volume engendré par une cloison hélicoïdale d'axe Oz *dans un mouvement hélicoïdal de même axe dont le pas est différent de celui de la cloison, est proportionnel à l'aire de la projection de la cloison sur un plan perpendiculaire à l'axe. Pour une rotation* UNITÉ, *le coefficient de proportionnalité est la différence des pas.*

Soumettons une cloison déterminée S à des mouvements hélicoïdaux, de même axe et de pas *opposés*.

On a, d'après (3), avec les notations ci-dessus, et en désignant par V et $\mathcal{V}$ les volumes engendrés dans les deux mouvements (pour la même rotation) :

$$V = V_1 + V_2,$$
$$\mathcal{V} = V_1 - V_2.$$

On voit que :

$$V + \mathcal{V} = 2V_1.$$

La somme des volumes hélicoïdaux obtenus avec une même cloison, pour une rotation donnée, les pas des mouvements étant opposés, est égale au double du volume engendré par la rotation de la cloison correspondant aux mouvements envisagés.

Écrivons la formule (2) :

$$V - V_2 = \int\int_S (py - qx)\, dx\, dy.$$

Au second membre figure l'intégrale double étudiée par M. A. Buhl[1].

D'une façon générale, si dans chacun des énoncés relatifs aux volumes tournants, on remplace le volume tournant par la différence entre le volume hélicoïdal et le volume cylindrique correspondant, on obtient de nouveaux énoncés, à peine distincts, concernant la théorie des volumes hélicoïdaux.

Ainsi, par exemple, les cloisons S choisies sur les surfaces (considérées par M. A. Buhl) définies par l'équation aux dérivées partielles :

$$py - qx = Kx, \qquad (K = \text{const.})$$

dont l'intégrale générale est :

$$z + Ky = f(x^2 + y^2),$$

donnent des volumes hélicoïdaux V tels que, si V_2 est le volume cylindrique attaché à V, on ait :

$$V - V_2 = K \int\int_S x\, dx\, dy.$$

$V - V_2$ *est proportionnelle au volume tournant d'axe* Oy, *dû à la projection de* S *sur* Oxy, *l'angle de la rotation autour de* Oy *étant celui du mouvement hélicoïdal.*

3. — Surfaces portant des cloisons, donnant des volumes hélicoïdaux proportionnels à leurs aires.

Les surfaces telles qu'une cloison quelconque, d'aire S, portée par l'une d'elles, engendre au cours d'un mouvement hélicoïdal, un volume proportionnel à S($V = KS$), sont données, d'après la formule (1) par l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{py - qx + h}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} = K(\text{constante}). \tag{4}$$

---

(1) Voir plus particulièrement les Notes des *Nouvelles Annales* d'octobre 1923 et de juin-juillet 1924.

Nous allons montrer que ces surfaces, sont susceptibles d'une définition géométrique, analogue à celle que nous avons déjà donnée pour les courbes, engendrant dans un mouvement hélicoïdal quelconque, des aires proportionnelles aux arcs.

Rappelons d'abord comment on obtient toutes les surfaces qui, au cours d'un mouvement hélicoïdal, engendrent l'une des familles d'un système triple orthogonal (familles de *Lamé*).

Soit $z = z(x, y)$ une telle surface.

Les équations de la famille engendrée par la surface précédente, dans un mouvement hélicoïdal d'axe Oz, sont :

$$\left\{\begin{array}{l} X = x \cos \omega - y \sin \omega, \\ Y = x \sin \omega + y \cos \omega, \\ Z = z + h\omega; \end{array}\right.$$

ω, représente la rotation autour de Oz, et h est le pas réduit des hélices décrites par les différents points de la surface envisagée.

La famille est une famille de Lamé si :

$$\psi = \frac{py - qx + h}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}},$$

est solution de l'équation de *Lévy*(¹) :

$$\text{(5)} \qquad \{ pqt - (1 + q^2)s \} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \{ (1 + q^2)r - (1 + p^2)t \} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + \{ (1 + p^2)s - pqr \} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0.$$

Pour les surfaces jouissant de la propriété $V = KS$, qui nous intéressent, ψ est une constante, et l'équation de Lévy est vérifiée.

Ainsi :

Les différentes surfaces portant des cloisons S, *qui, dans un mouvement hélicoïdal, engendrent des volumes* $V = KS$, *sont telles que l'ensemble de leurs positions, au cours du mouvement hélicoïdal, constitue une famille de Lamé.*

On connaît la signification géométrique de la fonction ψ, dans (5). C'est, à un facteur constant infiniment petit près, la portion de normale à la surface génératrice de la famille de Lamé, comprise entre cette surface et la surface infiniment voisine.

Dans le cas qui nous occupe, ψ étant une constante, les surfaces de la famille sont *parallèles*.

(¹) Voir G. Darboux. *Systèmes orthogonaux*, p. 8.

La congruence des normales à l'une quelconque des surfaces (S) que nous étudions, ne cesse pas de coïncider avec elle-même, si on la soumet à un mouvement hélicoïdal de pas h.

C'est une congruence normale hélicoïdale.

Nous pouvons donc énoncer ce résultat :

Les surfaces (S) *qui portent des cloisons engendrant des volumes proportionnels à leurs aires, au cours d'un mouvement hélicoïdal quelconque de pas réduit h, sont les surfaces orthogonales aux rayons des différentes congruences normales hélicoïdales de pas h.*

Comme nous l'avions annoncé, il y a lieu de noter le rapprochement suivant :

Dans le problème analogue au problème actuel, relatif aux aires engendrées par des arcs de courbe dans un mouvement hélicoïdal, la propriété de proportionnalité entre les aires et les arcs, était réalisée pour les courbes trajectoires orthogonales des géodésiques des espaces hélicoïdaux à deux dimensions déduites d'une géodésique donnée par le déplacement hélicoïdal faisant glisser l'espace sur lui-même.

Les surfaces solutions du problème actuel, sont les surfaces normales aux différentes familles de ∞^2 géodésiques de l'espace euclidien à trois dimensions, constituant des congruences normales hélicoïdales.

Si l'on observe qu'on obtient la congruence normale hélicoïdale la plus générale, en prenant les tangentes aux différentes familles de géodésiques (déduites de l'une d'elles par déplacement hélicoïdal) de l'hélicoïde le plus général, on peut donner la définition suivante des surfaces dont il est question dans ce numéro [solutions de l'équation (4)], qui permet, dans une certaine mesure, de se représenter certaines de ces surfaces :

Les surfaces susdites sont les développantes, suivant une famille de géodésiques (déduites de l'une d'elles par déplacement hélicoïdal), des hélicoïdes généraux.

Si $h = 0$, le mouvement hélicoïdal se réduit à une rotation, et l'on retrouve ce résultat, que j'ai indiqué dans un autre Mémoire(¹) :

Les surfaces qui, par rotation autour d'un axe, donnent des volumes proportionnels aux cloisons qui les engendrent, sont les développantes des surfaces de révolution, suivant une famille de géodésiques correspondant à la même valeur de la constante de Clairaut.

(¹) *Sur trois types de congruences rectilignes.* Annales de Toulouse, 1927, § 21.