ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

E. GOURSAT

Sur une généralisation du problème de Monge

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 3e série, tome 22 (1930), p. 249-295
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1930_3_22__249_0>

SUR UNE GÉNÉRALISATION DU PROBLÈME DE MONGE

PAR E. GOURSAT.

L'intégration d'une équation différentielle $f(x, y, z, y', z') = 0$, où figurent deux fonctions inconnues y et z, c'est-à-dire la détermination de tous les systèmes de deux fonctions $y(x)$, $z(x)$, satisfaisant à cette équation, a été ramenée par Monge[1] à l'intégration d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre

$$F(x, y, z, p, q) = 0, \tag{E}$$

dont la liaison avec la première équation s'exprime géométriquement d'une façon très simple.

Dans une note du tome IV de son grand ouvrage sur la *Théorie des Surfaces* (p. 432), G. Darboux recommande l'étude de l'équation plus générale

$$F(x, y, z, u, \ldots;\ y', z', u', \ldots;\ y'', z'', u'', \ldots) = 0$$

y', y'', ..., z', z'' ... désignant les dérivées successives de y, z, u, ... et pose la question suivante : Est-il possible d'exprimer x, y, z, ... au moyen d'un paramètre, de certaines fonctions arbitraires de ce paramètre, et de leurs dérivées (jusqu'à un ordre fini)? Si cette condition est vérifiée, je dirai pour abréger que l'équation est de *la première classe*. D'une façon générale, j'appellerai *équation de Monge* ou *système d'équations de Monge*, toute équation différentielle ou tout système d'équations différentielles, où le nombre des fonctions inconnues est supérieur au nombre des équations. Il est clair qu'un certain nombre de ces fonctions peuvent être choisies arbitrairement. On peut toujours supposer que, dans un pareil système d'équations, ne figurent que les dérivées premières des fonctions inconnues. On a surtout étudié jusqu'ici le cas le plus simple, d'un système de n équations différentielles à $n + 1$ inconnues. Le résultat le plus général est dû à M. E. Cartan[2], qui a montré com-

(1) Supplément, où l'on fait voir que les équations aux différences ordinaires pour lesquelles les conditions d'intégrabilité ne sont pas satisfaites sont susceptibles d'une véritable intégration. *Mémoires de l'Académie des Sciences*, 1784, p. 502.

(2) *Bulletin de la Société Mathématique*, t. 42, 1914, p. 12-48.

ment on pouvait reconnaître si un système de r équations différentielles à $r+1$ inconnues était de la première classe.

Les équations de Monge, ou les systèmes d'équations de Monge, où le nombre des variables indépendantes est supérieur à un, ne paraissent pas avoir été étudiées jusqu'à présent. Je dirai encore qu'un système de cette espèce, où le nombre des fonctions inconnues est plus grand que le nombre des équations, est de la première classe lorsqu'on peut obtenir toutes les intégrales par un ou plusieurs systèmes de formules où figurent les n variables indépendantes et les fonctions inconnues, n paramètres auxiliaires, et certaines fonctions arbitraires de ces paramètres et leurs dérivées partielles jusqu'à un ordre fini; on suppose de plus que ces équations peuvent être résolues par rapport aux n variables indépendantes et aux fonctions inconnues.

Pour aborder ce nouveau problème, dont la solution complète sera sans doute très difficile à obtenir, je remarque que l'on est conduit à l'équation de Monge $f(x, y, z, y', z') = 0$ en discutant le problème de Cauchy pour l'équation aux dérivées partielles associée (E). Afin d'étendre le résultat de Monge, il m'a paru tout indiqué de reprendre la discussion du problème de Cauchy pour une équation aux dérivées partielles, ou un système en involution d'équations aux dérivées partielles du premier ordre, à un nombre quelconque de variables indépendantes(1). On est ainsi conduit à définir certaines *multiplicités singulières*, pour lesquelles le problème de Cauchy n'admet pas en général de solution régulière. A ces multiplicités singulières on peut associer une équation de Monge de la première classe, dont l'intégration est immédiate, dès que l'on a intégré le système en involution qui lui a donné naissance. Le résultat est donc tout à fait analogue au résultat obtenu par Monge dans le cas le plus simple; mais, dès que le nombre des variables indépendantes est égal ou supérieur à 2, ces équations ne forment qu'une catégorie toute spéciale. Le premier membre d'une telle équation doit satisfaire à un certain nombre de conditions, formant un système d'équations aux dérivées partielles, dont l'intégration offre une application intéressante des méthodes de Sophus Lie, relatives aux systèmes *semi-linéaires*. On est ainsi conduit à un certain nombre de types bien définis d'équations de Monge de la première classe.

Ces résultats sont encore bien particuliers. J'espère cependant qu'ils pourront contribuer à appeler l'attention de quelque jeune mathématicien sur un sujet difficile et bien peu étudié (2).

---

(1) Dans un petit travail déjà ancien (*Bulletin de la Société Mathématique*, t. 33, 1905, p. 201-210), j'ai montré comment de tout système en évolution de $n-1$ équations à n variables indépendantes on pouvait déduire un système de Monge de la première classe de $n-1$ équations à n inconnues. Ce résultat sera complété et étendu dans un autre Mémoire.

(2) Les principaux résultats de ce Mémoire ont été résumés dans deux notes présentées à l'Académie des Sciences (*Comptes Rendus*, t. 186, 1928, p. 1469 et t. 190, 1930, p. 1029).

I

[**1**] Soit

$$q_{n+1} = F(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}, x_{n+2}, q_1, q_2, \dots, q_n) \tag{1}$$

une équation aux dérivées partielles du premier ordre, où x_1, x_2, ..., x_{n+1} sont les variables indépendantes, x_{n+2} une fonction de ces $n+1$ variables, et où on a posé

$$q_i = \frac{\partial x_{n+2}}{\partial x_i}, \qquad (i = 1, 2, \dots, n+1).$$

Une intégrale M_{n+1} de cette équation est en général déterminée si on l'assujettit à contenir une multiplicité M_n à n dimensions de l'espace à $n+2$ dimensions. Soient

$$x_{n+1} = \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \qquad x_{n+2} = \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \tag{2}$$

les équations de M_n; nous poserons

$$p_1^i = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i}, \qquad p_2^i = \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_i}, \qquad (i = 1, 2, \dots, n);$$

si M_n appartient à une intégrale M_{n+1} de l'équation (1), les valeurs de $q_1, q_2, \dots, q_{n+1}$ en un point de M_n doivent vérifier l'équation (1) et en outre les n relations

$$p_2^i = q_i + q_{n+1} p_1^i, \qquad (i = 1, 2, \dots, n) \tag{3}$$

qui se déduisent de l'équation générale

$$dx_{n+2} = q_1 dx_1 + \dots + q_{n+1} dx_{n+1}$$

en égalant les coefficients de dx_1, ..., dx_n dans les deux membres.

La valeur de q_{n+1} en un point de M_n est donnée par l'équation

$$q_{n+1} = F(x_1, \dots, x_{n+2};\ p_2^1 - q_{n+1} p_1^1, \dots, p_2^n - q_{n+1} p_1^n); \tag{4}$$

toute solution holomorphe de cette équation fournira une intégrale holomorphe renfermant M_n, car il suffit de remplacer x_{n+1} par $\varphi_1 + y$ pour être ramené au problème classique de Cauchy.

On peut aussi remplacer l'équation (4) par le système des n équations

$$(5)\qquad \left\{\begin{array}{l} q_1 + \mathrm{F}p_1^1 - p_2^1 = 0, \\ q_2 + \mathrm{F}p_1^2 - p_2^2 = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ q_n + \mathrm{F}p_1^n - p_2^n = 0, \end{array}\right.$$

à n inconnues $q_1, q_2, \ldots, q_n$. Toute solution holomorphe de ce système fournira encore une solution holomorphe de l'équation (1) renfermant M_n. Mais la conclusion est en défant pour les solutions qui présentent le caractère d'une solution multiple, c'est-à-dire qui annulent le jacobien des premiers membres des équations (5) par rapport à $q_1, \ldots, q_n$. Ce jacobien a pour expression

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial q_1} p_1^1, & \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial q_2} p_1^1, & \ldots, & \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial q_n} p_1^1 \\ \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial q_1} p_1^2, & 1 + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial q_2} p_1^2, & \ldots, & \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial q_n} p_1^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial q_1} p_1^n, & \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial q_2} p_1^n, & \ldots, & 1 + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial q_n} p_1^n \end{vmatrix}$$

L'élimination de $q_1, q_2, \ldots, q_n$ entre les n équations (5) et la nouvelle relation

$$(6)\qquad \Delta = 0$$

conduit à une équation où figurent $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}, x_{n+2}$ et les dérivées p_1^i, p_2^i de $x_{n+1} = \varphi_1$, $x_{n+2} = \varphi_2$,

$$(7)\qquad \Phi(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}, x_{n+2}, p_1^1, p_1^2, \ldots, p_2^n) = 0.$$

Nous dirons, pour abréger, que toute multiplicité M_n, représentée par les équations (2), où les fonctions φ_1 et φ_2 satisfont à la condition (7), est une *multiplicité singulière* de l'équation (1), et que l'équation (7) est l'*équation de Monge* de ces multiplicités. Il est clair que ces multiplicités dépendent d'une fonction arbitraire de n variables, puisqu'on peut choisir à volonté une des deux fonctions φ_1, φ_2.

Dans le cas particulier où $n = 1$, les multiplicités singulières sont identiques aux courbes intégrales de l'équation (1) à deux variables indépendantes. Nous allons montrer que, quel que soit n, l'équation (7) est de la première classe, et, pour obtenir l'intégrale générale sous forme explicite, il suffit encore d'intégrer l'équation (1).

[2] L'équation $\Delta = 0$ peut être remplacée par un système de n équations linéaires

$$(8)\quad \left\{\begin{array}{l} \lambda_1\left(1+\dfrac{\partial F}{\partial q_1}p_1^1\right)+\lambda_2\dfrac{\partial F}{\partial q_2}p_1^1+\ldots+\lambda_n\dfrac{\partial F}{\partial q_n}p_1^1=0,\\ \lambda_1\dfrac{\partial F}{\partial q_1}p_1^2+\lambda_2\left(1+\dfrac{\partial F}{\partial q_2}p_1^2\right)+\ldots+\lambda_n\dfrac{\partial F}{\partial q_n}p_1^2=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \lambda_1\dfrac{\partial F}{\partial q_1}p_1^n+\lambda_2\dfrac{\partial F}{\partial q_2}p_1^n+\ldots+\lambda_n\left(1+\dfrac{\partial F}{\partial q_n}p_1^n\right)=0, \end{array}\right.$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sont n inconnues auxiliaires, non toutes nulles. L'intégration de l'équation de Monge (7), c'est-à-dire la recherche de tous les systèmes de deux fonctions φ_1, φ_2 de n variables satisfaisant à cette équation, est évidemment équivalente à l'intégration du système des $2n$ équations (5) et (8), où $x_{n+1}, x_{n+2}, q_1, q_2, \ldots, q_n$, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sont des inconnues à déterminer. Ces $2n$ équations peuvent être remplacées par un système de deux équations de Pfaff. En effet, en multipliant les équations (5) par $dx_1, \ldots, dx_n$ respectivement et en ajoutant, on obtient l'équation de Pfaff

$$(9)\qquad \Omega = q_1 dx_1 + \ldots + q_n dx_n + F\,dx_{n+1} - dx_{n+2} = 0.$$

En opérant de même avec les équations (8), on obtient une autre équation de Pfaff

$$(10)\quad \Omega_1 = \lambda_1\left[dx_1+\frac{\partial F}{\partial q_1}dx_{n+1}\right]+\lambda_2\left[dx_2+\frac{\partial F}{\partial q_2}dx_{n+1}\right]+\ldots+\lambda_n\left[dx_n+\frac{\partial F}{\partial q_n}dx_{n+1}\right]=0.$$

L'intégration de l'équation de Monge (7) est donc équivalente à la détermination des multiplicités intégrales à n dimensions du système des deux équations de Pfaff (9) et (10), où figurent les $3n+1$ variables $x_i, q_i, \dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}, \ldots, \dfrac{\lambda_n}{\lambda_1}$. Il faut en outre que, sur cette multiplicité intégrale à n dimensions, $x_1, \ldots, x_n$ ne soient liées par aucune relation, de façon qu'on puisse les prendre pour variables indépendantes. Cette restriction sera toujours sous-entendue par la suite.

L'équation $\Omega = 0$ est identique à l'équation de Pfaff à laquelle se ramène l'intégration de l'équation (1). Cette équation est de classe $2n+1$ et peut être ramenée à la forme canonique

$$(11)\qquad dZ - P_1 dX_1, \ldots, P_n dX_n = 0,$$

$X_1, \ldots, X_n$, $P_1, \ldots, P_n$, Z étant $2n+1$ fonctions distinctes des variables x_i, q_k. Inversement les $2n+2$ variables x_i, q_k s'expriment au moyen des $2n+1$ *variables* *canoniques* X_i, P_k, Z et d'une dernière variable non canonique z. La réduction de l'équation (9) a une forme canonique et l'intégration de l'équation (1) constituent, comme l'on sait, deux problèmes équivalents.

L'équation $\Omega_1 = 0$ est un *prolongement* de la première. En d'autres termes, si on introduit les variables X_i, P_k, Z et z, *la différentielle dz ne figure pas dans* Ω_1. En effet, les équations

$$(12) \qquad dx_1 + \frac{\partial F}{\partial q_1} dx_{n+1} = 0, \ldots, dx_n + \frac{\partial F}{\partial q_n} dx_{n+1} = 0$$

font partie des équations différentielles des multiplicités caractéristiques[1] de l'équation $\Omega = 0$, qui peuvent aussi s'écrire

$$dX_i = 0, \qquad dP_i = 0, \qquad dZ = 0;$$

les premiers membres des équations (12) sont donc des combinaisons linéaires des différentielles dX_i, dP_i, dZ. La dernière variable z ne peut donc figurer que dans les coefficients. Cette variable z figure dans l'un au moins des premiers membres des équations (12). En effet, supposons par exemple que $dx_1 + \frac{\partial F}{\partial q_1} dx_{n+1}$ puisse s'exprimer uniquement au moyen des variables canoniques et de leurs différentielles. Alors le système formé par les deux équations de Pfaff

$$(13) \qquad \Omega = 0, \qquad dx_1 + \frac{\partial F}{\partial q_1} dx_{n+1} = 0$$

serait de classe $2n+1$. Or, parmi les équations différentielles qui déterminent la classe de ce système[2] figurent les n équations

$$\frac{\partial^2 F}{\partial q_1 \partial q_i} dx_{n+1} = 0. \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

L'équation $dx_{n+1} = 0$ sera donc une des équations différentielles des caractéristiques à moins que toutes les dérivées $\frac{\partial^2 F}{\partial q_1 \partial q_i}$ ne soient nulles. Les autres équations différentielles de ces caractéristiques donnent ensuite $dx_1 = 0, \ \ldots, \ dx_n = 0$, $dx_{n+2} = 0$, $dq_1 = 0$, $\ldots$, $dq_n = 0$, et par suite le système (13) est de classe $2n+2$. Pour que la variable z ne figure pas dans les coefficients de Ω_1 après le changement de variables, il faudrait donc que toutes les dérivées $\frac{\partial^2 F}{\partial q_i \partial q_k}$ soient nulles, c'est-à-dire que F soit une fonction linéaire de $q_1, \ldots, q_n$, hypothèse que nous avons écartée.

---

(1) *Leçons sur le problème de Pfaff*, chap. II, p. 73.
(2) *Leçons sur le problème de Pfaff*, pages 264 et suivantes.

[3] Toute solution de l'équation (9) s'obtient en établissant $(n+1)$ relations au moins entre les variables X_i, P_k, Z. Supposons d'abord que l'on établisse ce nombre minimum de relations; alors X_i, P_k, Z s'exprimeront au moyen de n variables indépendantes

$$(14) \qquad X_i = \varphi_i(t_1, \ldots, t_n), \quad P_i = \psi_i(t_1, \ldots, t_n), \quad Z = \pi(t_1, \ldots, t_n), \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

Ces relations permettent aussi d'exprimer $2n+1$ des variables x_i, q_k au moyen de la dernière et de $t_1, \ldots, t_n$, et par conséquent définissent une intégrale M_{n+1} de l'équation (1). En substituant dans l'équation (10), on aboutit à un résultat de la forme

$$\lambda_1[A_{11}dt_1 + \ldots + A_{1n}dt_n] + \lambda_2[A_{21}dt_1 + \ldots + A_{2n}dt_n] + \ldots \\ + \lambda_n[A_{n1}dt_1 + \ldots + A_{nn}dt_n] = 0,$$

les coefficients A_{ik} dépendant de $t_1, t_2, \ldots, t_n$ et en outre de la variable non canonique z. En égalant à zéro les coefficients de $dt_1, \ldots, dt_n$, on obtient n équations linéaires et homogènes en $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

$$A_{1i}\lambda_1 + A_{2i}\lambda_2 + \ldots + A_{ni}\lambda_n = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

et par suite l'inconnue z doit satisfaire à l'équation

$$(15) \qquad \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{n1} & A_{n2} & \ldots & A_{nn} \end{vmatrix} = 0;$$

l'ensemble des équations (14) et (15) représente une multiplicité singulière M_n située sur l'intégrale M_{n+1} de l'équation (1) représentée par les équations (14).

Quand on connaît une intégrale complète de l'équation (1)

$$V(x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}; \ a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}) = 0,$$

on sait que l'équation $\Omega = 0$ peut s'écrire sous forme canonique

$$\frac{\partial V}{\partial a_1} da_1 + \ldots + \frac{\partial V}{\partial a_n} da_n + \frac{\partial V}{\partial a_{n+1}} da_{n+1} = 0.$$

Considérons en particulier l'intégrale M_{n+1} définie par les relations

$$(16) \qquad \overline{V} = 0, \quad \frac{\partial \overline{V}}{\partial a_1} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial \overline{V}}{\partial a_n} = 0,$$

où l'on a posé

$$\overline{V} = V\big(x_1, \dots, x_{n+2};\ a_1, a_2, \dots, a_n,\ f(a_1, \dots, a_n)\big) = 0,$$

la fonction $f(a_1, a_2, \dots, a_n)$ pouvant être choisie arbitrairement.

Les équations (16) représentent aussi les caractéristiques situées sur M_{n+1}, quand on y regarde $a_1, a_2, \dots, a_n$ comme constants. Quand on se déplace sur une de ces caractéristiques, on a donc

$$\frac{\partial\overline{V}}{\partial x_1}dx_1 + \dots + \frac{\partial\overline{V}}{\partial x_{n+2}}dx_{n+2} = 0; \qquad \frac{\partial^2\overline{V}}{\partial a_i\partial x_1}dx_1 + \dots + \frac{\partial^2\overline{V}}{\partial a_i\partial x_{n+2}}dx_{n+2} = 0,$$
$$i = 1, 2, \dots, n.$$

Les expressions $dx_i + \dfrac{\partial F}{\partial q_i}dx_{n+1}$, qui sont nulles aussi pour un déplacement sur une caractéristique, sont donc des combinaisons linéaires des premiers membres des équations précédentes. Mais on a aussi identiquement, pour tout déplacement sur M_{n+1}, les relations

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial\overline{V}}{\partial a_1}da_1 + \dots + \frac{\partial\overline{V}}{\partial a_n}da_n + \frac{\partial\overline{V}}{\partial x_1}dx_1 + \dots + \frac{\partial\overline{V}}{\partial x_{n+2}}dx_{n+2} = 0,\\ &\frac{\partial^2\overline{V}}{\partial a_i\partial a_1}da_1 + \dots + \frac{\partial^2\overline{V}}{\partial a_i\partial a_n}da_n + \frac{\partial^2\overline{V}}{\partial a_i\partial x_1}dx_1 + \dots + \frac{\partial^2\overline{V}}{\partial a_i\partial x_{n+2}}dx_{n+2} = 0,\end{aligned}\right.$$
$$(i = 1, 2, \dots, n).$$

En tenant compte des équations (16) elles-mêmes, on voit donc que l'équation $\Omega_1 = 0$ peut s'écrire

$$\sum_{i=1}^{n}\mu_i\left[\frac{\partial^2\overline{V}}{\partial a_i\partial a_1}da_1 + \dots + \frac{\partial^2\overline{V}}{\partial a_i\partial a_n}da_n\right] = 0.$$

En égalant à zéro les coefficients de $da_1, da_2, \dots, da_n$, on obtient n équations linéaires et homogènes en $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$; le déterminant des coefficients devant être nul, on obtient une nouvelle équation

$$(18)\qquad H = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2\overline{V}}{\partial a_1^2}, & \dfrac{\partial^2\overline{V}}{\partial a_1\partial a_2}, & \dots, & \dfrac{\partial^2\overline{V}}{\partial a_1\partial a_n}\\ \dfrac{\partial^2\overline{V}}{\partial a_2\partial a_1}, & \dfrac{\partial^2\overline{V}}{\partial a_2^2}, & \dots, & \dfrac{\partial^2\overline{V}}{\partial a_2\partial a_n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \dfrac{\partial^2\overline{V}}{\partial a_n\partial a_1}, & \dfrac{\partial^2\overline{V}}{\partial a_n\partial a_2}, & \dots, & \dfrac{\partial^2\overline{V}}{\partial a_n^2}\end{vmatrix} = 0,$$

qui, jointe aux équations (16), définit une multiplicité singulière M_n, située sur M_{n+1} (1).

Exemple. — Nous allons appliquer la méthode générale à l'équation

$$q_3 = q_1 q_2.$$

Les équations (5) sont dans ce cas

$$q_1 + q_1 q_2 p_1^1 - p_2^1 = 0, \qquad q_2 + q_1 q_2 p_1^2 - p_2^2 = 0,$$

et l'équation $\Delta = 0$ devient

$$1 + q_1 p_1^2 + q_2 p_1^1 = 0.$$

En éliminant q_1 et q_2 entre ces trois équations, on obtient l'équation de Monge

$$1 + 2[p_1^2 p_2^1 + p_1^1 p_2^2] + [p_1^2 p_2^1 - p_1^1 p_2^2]^2 = 0.$$

D'après ce qui précède, l'intégration de cette équation se ramène à celle du système de Pfaff

$$\begin{aligned} dx_4 &= q_1 dx_1 + q_2 dx_2 + q_1 q_2 dx_3, \\ &\lambda_1[dx_1 + q_2 dx_3] + \lambda_2[dx_2 + q_1 dx_3] = 0. \end{aligned}$$

La première peut s'écrire

$$d(x_4 - q_1 x_1 - q_2 x_2 - q_1 q_2 x_3) + x_1 dq_1 + x_2 dq_2 + x_3(q_1 dq_2 + q_2 dq_1) = 0,$$

et, pour qu'elle soit mise sous forme canonique, il suffit de poser

$$\begin{gathered} X_1 = q_1, \quad X_2 = q_2, \quad P_1 = -x_1 - q_2 x_3, \quad P_2 = -x_2 - q_1 x_3; \\ Z = x_4 - q_1 x_1 - q_2 x_2 - q_1 q_2 x_3. \end{gathered}$$

---

(1) Cette multiplicité M_n peut aussi être considérée comme une focale des caractéristiques situées sur M_{n+1}. En effet, on peut satisfaire aux relations

$$\frac{\partial^2 \overline{V}}{\partial a_i \partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial^2 \overline{V}}{\partial a_i \partial x_{n+2}} dx_{n+2} = 0$$

qui définissent un déplacement sur la caractéristique issue d'un point de M_n en choisissant $da_1, \ldots, da_n$, de façon que l'on ait en ce point

$$\frac{\partial^2 \overline{V}}{\partial a_i \partial a_1} da_1 + \ldots + \frac{\partial^2 \overline{V}}{\partial a_i \partial a_n} da_n = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

et l'on peut toujours trouver pour $da_1, \ldots, da_n$ des valeurs non toutes nulles satisfaisant à ces n conditions, d'après la relation (18). Il existe donc en tout point de M_n une multiplicité à *une* dimension tangente à la caractéristique qui passe par ce point. C'est la généralisation de la propriété bien connue des courbes intégrales.

On a ensuite

$$dx_1 + q_2 dx_3 = d(x_1 + q_2 x_3) - x_3 dq_2 = -dP_1 - x_3\,dX_2,$$
$$dx_2 + q_1 dx_3 = d(x_2 + q_1 x_3) - x_3 dq_1 = -dP_2 - x_3\,dX_1,$$

et l'on vérifie bien que la seconde équation est le prolongement de la première, car elle s'écrit

$$\lambda_1[dP_1 + x_3 dX_2] + \lambda_2[dP_2 + x_3 dX_1] = 0.$$

Soit

$$Z = f(X_1, X_2), \qquad P_1 = \frac{\partial f}{\partial X_1}, \qquad P_2 = \frac{\partial f}{\partial X_2}$$

une intégrale de la première équation. En remplaçant P_1 et P_2 par $\frac{\partial f}{\partial X_1}, \frac{\partial f}{\partial X_2}$ dans la seconde équation, et égalant à zéro les coefficients de dX_1, dX_2, on obtient les deux relations

$$\lambda_1 \frac{\partial^2 f}{\partial X_1^2} + \lambda_2\left[\frac{\partial^2 f}{\partial X_1 \partial X_2} + x_3\right] = 0,$$
$$\lambda_1\left[\frac{\partial^2 f}{\partial X_1 \partial X_2} + x_3\right] + \lambda_2 \frac{\partial^2 f}{\partial X_2^2} = 0,$$

et x_3 est donné par l'équation

$$\left(x_3 + \frac{\partial^2 f}{\partial X_1 \partial X_2}\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial X_1^2}\frac{\partial^2 f}{\partial X_2^2} = 0.$$

Les équations précédentes donnent ensuite

$$q_1 = X_1, \qquad q_2 = X_2, \qquad x_1 = -X_2 x_3 - \frac{\partial f}{\partial X_1}, \qquad x_2 = -X_1 x_3 - \frac{\partial f}{\partial X_2},$$
$$x_4 = f + X_1 x_1 + X_2 x_2 + X_1 X_2 x_3.$$

On arrive plus rapidement aux mêmes formules pour représenter une multiplicité singulière en partant de l'intégrale complète

$$x_4 = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_1 a_2 x_3 + a_3,$$

et posant $a_3 = f(a_1, a_2)$.

[**4**] On peut aussi satisfaire à l'équation (9) en établissant plus de $n + 1$ relations entre les variables canoniques; mais, pour obtenir une multiplicité singulière à n dimensions, ou ne peut établir plus de $n + 2$ relations entre ces variables. En effet,

si on établit $n+3$ relations entre X_i, P_i, Z, il en résulte aussi $n+3$ relations entre $x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}, q_1, q_2, \ldots, q_n$. L'élimination de $q_1, \ldots, q_n$ conduira donc à 3 relations entre $x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}$, et par suite le point de coordonnées $(x_1, \ldots, x_{n+2})$ ne peut décrire une multiplicité à n dimensions.

Il reste donc seulement à examiner le cas où l'on établit $n+2$ relations entre X_i, P_i, Z, de façon à satisfaire à l'équation (11); on a alors pour X_i, P_i, Z des fonctions de $n-1$ variables indépendantes

$$(19)\qquad X_i = \varphi_i(t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}), \qquad P_i = \psi_i(t_1, \ldots, t_{n-1}), \qquad Z = \pi(t_1, \ldots, t_{n-1}).$$

De ces formules on peut déduire les expressions des $2n+2$ variables x_i, q_k au moyen des variables $t_1, \ldots, t_{n-1}$. et de la variable non canonique z. Les formules (19) représentent donc une multiplicité à n dimensions d'éléments de contact $\mathfrak{M}_n$, satisfaisant à l'équation (9), et formée de ∞^{n-1} multiplicités caractéristiques de l'équation (1), que l'on obtient en donnant des valeurs constantes aux $n-1$ paramètres $t_1, t_2, \ldots t_{n-1}$. Cette multiplicité $\mathfrak{M}_n$ est aussi une intégrale de l'équation (10), car après la substitution (19), le premier membre ne renferme que les différentielles $dt_1, dt_2, \ldots, dt_{n-1}$. En égalant les coefficients à zéro, on obtient un système de $n-1$ équations linéaires et homogènes en $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, qui admettent toujours un système de solutions différentes de zéro.

La multiplicité ponctuelle M_n, support ponctuel de $\mathfrak{M}_n$, peut donc être considérée comme une multiplicité singulière de l'équation (1). Ce résultat s'explique aisément, car le problème de Cauchy pour cette multiplicité M_n est évidemment indéterminé. Ainsi, pour $n=1$, les courbes caractéristiques satisfont à l'équation de Monge qui définit les courbes intégrales.

II

[5] Nous sommes donc amenés à examiner le problème suivant : Étant donnée une équation de Monge, telle que l'équation (7), entre n variables indépendantes, $x_1, \ldots, x_n$, deux fonctions inconnues x_{n+1}, x_{n+2} de ces n variables, et leurs dérivées partielles du premier ordre, à quelles conditions doit satisfaire la fonction Φ pour qu'elle définisse les multiplicités singulières d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre à $n+1$ variables indépendantes?

Nous supposons bien entendu $n>1$, et l'équation résolue par rapport à l'une des dérivées

$$(20)\qquad p_2^n = f(x_1, \ldots, x_{n+2};\ p_1^1, p_1^2, \ldots, p_2^{n-1}).$$

Nous pouvons dans les équations (5) et (6) regarder p_2^n, $q_1, \ldots, q_n$ comme fonctions de $p_1^1, p_1^2, \ldots, p_2^{n-1}$. On tire des équations (5), par différentiation[1],

$$\begin{aligned}
&\left(1+p_1^1\frac{\partial F}{\partial q_1}\right)dq_1+\frac{\partial F}{\partial q_2}p_1^1 dq_2+\ldots+\frac{\partial F}{\partial q_n}p_1^1 dq_n+F\,dp_1^1-dp_2^1=0,\\
&\frac{\partial F}{\partial q_1}p_1^2 dq_1+\left(1+\frac{\partial F}{\partial q_2}p_1^2\right)dq_2+\ldots+\frac{\partial F}{\partial q_n}p_1^2 dq_n+F\,dp_1^2-dp_2^2=0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{\partial F}{\partial q_1}p_1^n dq_1+\frac{\partial F}{\partial q_2}p_1^n dq_2+\ldots+\left(1+\frac{\partial F}{\partial q_n}p_1^n\right)dq_n+F\,dp_1^n-dp_2^n=0.
\end{aligned}$$

Le déterminant Δ étant nul, on peut trouver des multiplicateurs non tous nuls, $\mu_1, \ldots, \mu_n$, tels qu'en multipliant les équations précédentes par $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ respectivement, et les ajoutant, les coefficients de $dq_1, \ldots, dq_n$ soient tous nuls et il reste une relation de la forme

$$\mu_1[F\,dp_1^1-dp_2^1]+\mu_2[F\,dp_1^2-dp_2^2]+\ldots+\mu_n[F\,dp_1^n-dp_2^n]=0.$$

Si $p_1^1, \ldots, p_1^n, p_2^1, \ldots, p_2^{n-1}$ ne sont liés par aucune relation, comme nous le supposons, μ_n ne peut être nul. On peut donc supposer $\mu_n=1$, et écrire la relation précédente

$$dp_2^n=F\,dp_1^n+\sum_{i=1}^{n-1}\mu_i[F\,dp_1^i-dp_2^i];$$

on a donc

$$\frac{\partial p_2^n}{\partial p_1^n}=F,\qquad \frac{\partial p_2^n}{\partial p_1^i}=\mu_i F,\qquad \frac{\partial p_2^n}{\partial p_2^i}=-\mu_i,$$

et par suite la fonction $f=p_2^n$ des $2n-1$ variables $p_1^1, \ldots, p_1^n, p_2^1, \ldots, p_2^{n-1}$ vérifie les $n-1$ équations

$$(21)\qquad \frac{\partial p_2^n}{\partial p_1^i}+\frac{\partial p_2^n}{\partial p_1^n}\frac{\partial p_2^n}{\partial p_2^i}=0,\qquad (i=1,2,\ldots,n-1).$$

Les conditions (21) prennent une forme plus symétrique si l'équation de Monge $\Phi=0$ n'est pas résolue par rapport à une des dérivées qui y figurent; elles deviennent alors

$$(22)\qquad \frac{\dfrac{\partial\Phi}{\partial p_2^i}}{\dfrac{\partial\Phi}{\partial p_1^i}}=\frac{\dfrac{\partial\Phi}{\partial p_2^n}}{\dfrac{\partial\Phi}{\partial p_1^n}},\qquad (i=1,2,\ldots,n-1)$$

et il suffira qu'elles soient vérifiées en tenant compte de l'équation $\Phi=0$ elle-même.

---

(1) On n'a pas écrit, pour abréger, les termes en $dx_1, \ldots, dx_{n+2}$, qui ne jouenl aucun rôle dans la question.

[**6**] Les équations (21) forment un système en involution de $n-1$ équations à $2n-1$ variables $p_1^1, \ldots, p_2^{n-1}$, les variables x_i jouant le rôle de paramètres. Ce système est *semi-linéaire,* car il admet une intégrale complète au sens de Lie, représentée par un système de n équations

$$(23)\qquad \left\{\begin{array}{l} p_2^1 = ap_1^1 + a_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ p_2^{n-1} = ap_1^{n-1} + a_{n-1}, \\ p_2^n = ap_1^n + a_n, \end{array}\right.$$

$a, a_1, a_2, \ldots, a_n$ étant $n+1$ constantes arbitraires. Cherchons en effet à adjoindre aux relations (23) des relations entre $P_1^1, \ldots, P_1^n, P_2^1, \ldots, P_2^{n-1}$ de façon à vérifier la relation

$$(24)\qquad dp_2^n = P_1^1 dp_1^1 + \ldots + P_1^n dp_1^n + P_2^1 dp_2^1 + \ldots + P_2^{n-1} dp_2^{n-1}.$$

Des relations (23) on tire

$$dp_2^1 = adp_1^1, \quad \ldots, \quad dp_2^{n-1} = adp_1^{n-1}, \quad dp_2^n = adp_1^n,$$

et l'équation (24) devient

$$(24')\qquad adp_1^n = P_1^1 dp_1^1 + \ldots + P_1^n dp_1^n + a\left(P_2^1 dp_1^1 + \ldots + P_2^{n-1} dp_1^{n-1}\right).$$

Il suffira donc d'adjoindre aux relations (23) les n relations

$$(25)\qquad P_1^n = a, \qquad P_1^i + aP_2^i = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1)$$

pour définir une multiplicité d'éléments de contact $\mathcal{M}$ dans l'espace à $2n$ dimensions $(p_1^1, \ldots, p_2^n)$ ayant pour support ponctuel la multiplicité à n dimensions définie par les équations (23). Cette multiplicité $\mathcal{M}$ est à $2n-1$ dimensions, car $p_1^1, \ldots, p_1^n, P_2^1, \ldots, P_2^{n-1}$ ne sont liés par aucune relation. C'est une multiplicité intégrale du système (21), car on déduit immédiatement des équations (25) que l'on a aussi

$$P_1^i + P_1^n P_2^i = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1)$$

et il suffit d'y remplacer P_1^i, P_2^i, P_1^n par $\dfrac{\partial p_2^n}{\partial p_1^i}, \dfrac{\partial p_2^n}{\partial p_2^i}, \dfrac{\partial p_2^n}{\partial p_1^n}$ pour retrouver le système (21).

Pour déduire de cette intégrale complète toutes les autres intégrales du système (21), il suffit d'employer la méthode de la variation des constantes sous sa forme la plus générale, c'est-à-dire de chercher toutes les solutions des équations (23) et (25), où $a, a_1, \ldots, a_n$, sont de nouvelles inconnues. Quand on considère $a, a_1, a_2, \ldots, a_n$ comme variables, l'équation (24) devient, en tenant compte des équations (25),

$$\left[p_1^n - \sum_{i=1}^{n-1} P_2^i p_1^i\right] da + da_n - \sum_{i=1}^{n-1} P_2^i da_i = 0. \tag{26}$$

Il existe donc une relation au moins entre $a_1, a_2, \ldots, a_n, a$, où les variables x_i peuvent figurer comme paramètres.

Supposons d'abord qu'il existe une seule relation de cette espèce

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_{n+2};\ a_1, a_2, a_n, a) = 0; \tag{27}$$

l'équation (26) doit être identique à l'équation

$$\frac{\partial F}{\partial a_1} da_1 + \ldots + \frac{\partial F}{\partial a_n} da_n + \frac{\partial F}{\partial a} da = 0,$$

ce qui exige que l'on ait

$$\frac{\dfrac{\partial F}{\partial a}}{p_1^n - \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} P_2^i p_1^i} = \frac{\partial F}{\partial a_n} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial a_i}}{P_2^i},$$

et par suite $\dfrac{\partial F}{\partial a} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial a_i} p_1^i$. En remplaçant a_i par $p_2^i - a p_1^i$ dans F, on voit que l'intégrale correspondante du système (21) s'obtient en éliminant a entre les deux équations

$$\Phi(a) = F\left(x_1, \ldots, x_{n+2};\ p_2^1 - a p_1^1, \ldots, p_2^n - a p_1^n, a\right) = 0, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial a} = 0.$$

Il suffit de se reporter au n° 1 pour reconnaître que c'est précisément le calcul qui conduirait à l'équation de Monge des multiplicités singulières de l'équation aux dérivées partielles

$$F(x_1, \ldots, x_{n+2};\ q_1, q_2, \ldots, q_{n+1}) = 0.$$

Remarque. — Supposons que q_n figure dans l'équation aux dérivées partielles, et écrivons cette équation en résolvant par rapport à q_n,

$$q_n = F(x_1, \ldots, x_{n+2};\ q_1, \ldots, q_{n-1}, q_{n+1}).$$

On obtiendra l'équation de Monge correspondante, en éliminant a entre les deux relations

$$p_2^n - a p_1^n = \mathrm{F}(x_1, \ldots, x_{n+1};\ p_2^1 - a p_1^1, \ldots, p_2^{n-1} - a p_1^{n-1}, a)$$
$$p_1^n + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial a_1} p_1^1 + \ldots + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial a_{n-1}} p_1^{n-1} - \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial a} = 0.$$

On déduit immédiatement de ces relations

$$\frac{\partial p_2^n}{\partial p_1^n} = a,$$

et la dernière équation donne pour a une fonction qui dépend effectivement de p_1^n si l'équation aux dérivées partielles considérée n'est pas linéaire. On en conclut que l'équation de Monge correspondante donne pour p_2^n *une fonction non linéaire de* p_1^n.

[**7**] Supposons en second lieu qu'il existe deux relations distinctes entre a, $a_1, a_2 \ldots, a_n$, de sorte qu'on puisse les considérer comme des fonctions de $n-1$ paramètres $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$, dépendant en outre des variables x_i, qui jouent toujours le rôle de paramètres dans l'intégration du système (21). En éliminant ces $n-1$ paramètres entre les n équations (23) on obtient une relation

$$\mathrm{F}(x_1, \ldots, x_{n+2}, p_1^1, \ldots, p_1^n, p_2^1, \ldots, p_2^n) = 0$$

qui, si elle contient p_2^n, définit une intégrale des équations (21). Pour que la relation obtenue ne renferme pas p_2^n, il faudrait que l'on puisse éliminer $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$ entre les $n-1$ premières équations (21). Le résultat de l'élimination contient au moins une des dérivées p_2^i; si elle contient p_2^{n-1} par exemple, on remplacerait p_2^n par p_2^{n-1}, ce qui n'est qu'un changement de notation. Nous supposerons donc que l'élimination des paramètres u_i entre les équations (21) conduit à une seule relation

$$p_2^n = f(x_1, \ldots, x_{n+2};\ p_1^1, \ldots, p_2^{n-1}). \tag{28}$$

Il serait facile de vérifier que cette fonction f satisfait bien aux équations (23). Nous laissons de côté ce calcul élémentaire, mais nous ferons observer que $\frac{\partial p_2^n}{\partial p_1^n}$ est indépendant de p_1^n, car les $(n-1)$ premières équations résolues par rapport à u_1, $u_2, \ldots, u_{n-1}$ donnent pour ces paramètres des fonctions de p_1^i, p_2^i, où $i < n$; a est donc indépendant de p_1^n après la substitution. On a donc $\frac{\partial^2 p_2^n}{(\partial p_1^n)^2} = 0$, et p_2^n *est une fonction linéaire de* p_1^n. Nous avons observé plus haut que cela n'a jamais lieu dans le premier cas examiné.

Remarque. — Étant donné une relation de la forme

$$p_2^n = A p_1^n + B,$$

où A et B sont des fonctions de $p_1^i, p_2^i (i < n)$, pour que cette fonction soit une intégrale du système (21), les fonctions A et B doivent satisfaire aux relations suivantes

$$\frac{\partial A}{\partial p_1^i} + A \frac{\partial A}{\partial p_2^i} = 0, \quad \frac{\partial B}{\partial p_1^i} + A \frac{\partial B}{\partial p_2^i} = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1).$$

La fonction A est donc définie par une relation de la forme

$$F\left(A, p_2^1 - A p_1^1, \ldots, p_2^{n-1} - A p_1^{n-1}\right) = 0$$

tandis que B est donné par une formule

$$B = \Phi\left(p_2^1 - A p_1^1, \ldots, p_2^{n-1} - A p_1^{n-1}\right).$$

On obtient bien un résultat de cette nature en éliminant $n - 1$ paramètres entre les équations (23).

[**8**] Au lieu d'intégrer l'équation de Monge (28), il revient évidemment au même d'intégrer les n équations (23), où l'on considère $x_{n+1}, x_{n+2}, u_1, \ldots, u_{n-1}$ comme $n + 1$ fonctions inconnues de $x_1, x_2, \ldots, x_n$. L'intégration de ces équations simultanées se ramène elle-même à l'intégration de l'équation de Pfaff

$$a_1 dx_1 + \ldots + a_n dx_n + a\, dx_{n+1} - dx_{n+2} = 0, \tag{30}$$

ou, d'une façon plus précise, à la détermination des multiplicités intégrales à n dimensions, pour lesquelles $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ne sont liées par aucune relation. L'équation de Monge (28) est donc encore intégrable explicitement, puisque son intégration est ramenée à celle d'une équation de Pfaff.

Cette équation (30) peut être de classe $2n + 1$, ou $2n - 1$, (voir n° 13), le dernier cas devant être considéré comme exceptionnel. Il suffira toujours de ramener cette équation à une forme canonique pour en déduire toutes les multiplicités intégrales à n dimensions. Bien entendu, on ne conservera que les solutions pour lesquelles $x_1, \ldots, x_n$ ne sont liées par aucune relation.

Exemple. — Soit l'équation

$$p_2^3 = p_1^3 \frac{p_2^1 + x_3 p_2^2}{p_1^1 + x_3 p_1^2}; \tag{29}$$

p_2^3 est bien une fonction linéaire de p_1^3 et satisfait aux deux équations

$$\frac{\partial p_2^3}{\partial p_1^i} + \frac{\partial p_2^3}{\partial p_1^3}\frac{\partial p_2^3}{\partial p_2^i} = 0, \qquad (i = 1, 2).$$

En posant

$$\frac{\partial p_2^3}{\partial p_1^3} = a, \qquad p_2^1 - ap_1^1 = a_1, \qquad p_2^2 - ap_1^2 = a_2,$$

on trouve les valeurs suivantes de a_1, a_2,

$$a_1 = \frac{(p_2^1 p_1^2 - p_1^1 p_2^2)\,x_3}{p_1^1 + p_1^2 x_3}, \qquad a_2 = \frac{p_2^2 p_1^1 - p_1^2 p_2^1}{p_1^1 + p_1^2 x_3}, \qquad a_1 + a_2 x_3 = 0,$$

de sorte que l'équation (29) provient de l'élimination des paramètres a, a_2, entre les trois équations

$$p_2^3 = ap_1^3, \qquad p_2^1 = ap_1^1 - a_2 x_3, \qquad p_2^2 = ap_1^2 + a_2.$$

L'équation de Pfaff correspondante

$$dx_5 = a\,dx_4 + a_2\,dx_2 - a_2 x_3\,dx_1$$

est de forme canonique. S'il y a une seule relation entre x_1, x_2, x_4, x_5

$$F(x_1, x_2, x_4, x_5) = 0$$

on doit avoir

$$\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x_1}}{-a_2 x_3} = \frac{\dfrac{\partial F}{\partial x_2}}{a_2} = \frac{\dfrac{\partial F}{\partial x_4}}{a} = \frac{\dfrac{\partial F}{\partial x_5}}{-1},$$

et par suite

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} + x_3\frac{\partial F}{\partial x_2} = 0.$$

Il suffit de remplacer dans ces relations x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 par x, y, y', X, Y respectivement pour obtenir les deux relations

$$F(x, y, X, Y) = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}y' = 0$$

qui définissent une transformation de contact dans le plan.

Remarque. — Toute équation de Monge

$$p_2^n = f(x_1, \ldots, x_{n+2};\ p_2^1, \ldots, p_2^{n-1}), \tag{30'}$$

où ne figurent que les dérivées d'une des fonctions inconnues x_{n+2}, peut être considérée comme un cas particulier du type précédent obtenu en supposant $a = 0$ dans les formules (23). Si f contient x_{n+1}, on peut choisir x_{n+2} arbitrairement, et x_{n+1} s'en déduit par la relation précédente, Si f ne contient pas x_{n+1}, x_{n+2} doit être une intégrale de l'équation aux dérivées partielles (30'), tandis que x_{n+1} peut être choisi arbitrairement. C'est aussi le résultat auquel conduit l'application de la méthode générale. En effet, si $a = 0$, l'équation de Pfaff (30) devient

$$dx_{n+2} = a_1 dx_1 + \ldots + a_{n-1} dx_{n-1} + f(x_1, \ldots, x_{n+2};\ a_1, \ldots, a_{n-1})\, dx_n.$$

Si f contient x_{n+1}, l'équation est de classe $2n+1$ et mise sous forme canonique. Si f ne contient pas x_{n+1}, elle est de classe $2n-1$ et identique à l'équation de Pfaff à laquelle se ramène l'intégration de l'équation (30').

Le cas où a ne dépend que de $x_1, \ldots, x_{n+2}$, et ne contient aucun paramètre variable peut se ramener au précédent.

Soit en effet $V(x_1, \ldots, x_{n+2})$ une fonction satisfaisant à la condition

$$a \frac{\partial V}{\partial x_{n+2}} + \frac{\partial V}{\partial x_{n+1}} = 0.$$

Prenons pour inconnue $X = V(x_1, \ldots, x_{n+2})$ à la place de x_{n+2}.
On a

$$dX = \frac{\partial V}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial V}{\partial x_n} dx_n + \frac{\partial V}{\partial x_{n+2}} (dx_{n+2} - a\, dx_{n+1})$$

et l'équation de Pfaff (30) devient

$$dX = \frac{\partial V}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial V}{\partial x_n} dx_n + \frac{\partial V}{\partial x_{n+2}} (a_1 dx_1 + \ldots + a_n dx_n)$$

et ne renferme pas dx_{n+1}.

Il en serait évidemment de même si l'un des coefficients $a_1, \ldots, a_n$ ne dépendait que de $x_1, \ldots, x_{n+2}$.

Lorsqu'il existe plus de deux relations entre $a, a_1, a_2, \ldots, a_n$, l'élimination des paramètres entre les n équations (23) conduit à plusieurs équations distinctes entre les dérivées partielles des fonctions inconnues x_{n+1}, x_{n+2}. Ce cas sera étudié plus loin (n° 22).

III

[9] J'avais d'abord été conduit aux conditions (21) par une méthode un peu différente que j'indiquerai rapidement. L'intégration de l'équation de Monge (20) se ramène évidemment à la détermination des intégrales à n dimensions du système de deux équations de Pfaff

$$(\Sigma)\left\{\begin{aligned} &(31)\quad \omega_1 = dx_{n+1} - p_1^1 dx_1 \ldots - p_1^n dx_n = 0, \\ &(32)\quad \omega_2 = dx_{n+2} - p_2^1 dx_1 \ldots - p_2^{n-1} dx_{n-1} - f dx_n = 0, \end{aligned}\right.$$

telles que les variables $x_1, \ldots, x_n$ ne soient liées par aucune relation. Ce système est de classe $3n+1$, quelle que soit la fonction f. On a en effet

$$\omega_1' = \sum_i \left(dp_1^i \delta x_i - dx_i \delta p_1^i\right), \qquad (\text{mod. } \omega_1, \omega_2);$$

les relations $dx_i = 0$, $dp_1^i = 0$ font donc partie des équations différentielles qui déterminent les éléments caractéristiques. En tenant compte de ces conditions, la relation $\omega'_2 = 0$ devient

$$dp_2^1 \delta x_1 + \ldots + dp_2^{n-1} \delta x_{n-1} + \left(\frac{\partial f}{\partial p_2^1} dp_2^1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial p_2^{n-1}} dp_2^{n-1}\right) \delta x_n = 0.$$

On aura donc aussi pour les éléments caractéristiques $dp^i_2 = 0$ et par suite $dx_{n+1} = dx_{n+2} = 0$, ce qui donne en tout $3n+1$ équations distinctes. Il n'y a donc pas d'éléments caractéristiques pour le système (Σ).

Ce système (Σ) serait mis sous forme intégrable si on pouvait, par un changement de variables, le ramener à la forme

$$(\Sigma')\left\{\begin{aligned} &(33)\quad \Omega_1 = dZ - P_1 dX_1 - \ldots - P_n dX_n = 0, \\ &(34)\quad \Omega_2 = A_1 dP_1 + \ldots + A_n dP_n + B_1 dX_1 + \ldots + B_n dX_n = 0, \end{aligned}\right.$$

$A_1, \ldots, A_n$, $B_1, \ldots, B_n$ étant des fonctions de $Z, X_1, \ldots, X_n$, $P_1, \ldots, P_n$ et de n autres variables $U_1, \ldots, U_n$ indépendantes des premières, de telle sorte que la seconde équation $\Omega_2 = 0$ est le prolongement de la première.

Cherchons d'abord quelles sont les propriétés qui caractérisent un système de la forme (Σ'). Deux éléments linéaires intégraux du système

$$(dX_i, dP_i, dZ, dU_i), \qquad (\delta X_i, \delta P_i, \delta Z, \delta U_i)$$

sont en involution relativement à l'équation $\Omega_1 = 0$, si ces éléments vérifient la relation

$$\Omega'_1 = \sum_i (dP_i \delta X_i - dX_i \delta P_i) = 0.$$

Un élément linéaire intégral $(dX_i,\ dP_i,\ dZ)$ sera en involution avec tous les autres éléments linéaires intégraux du système, relativement à l'équation $\Omega_1 = 0$, si dX_i, dP_i, dZ vérifient les n relations

$$(35)\qquad \frac{dP_1}{A_1} = \ldots = \frac{dP_n}{A_n} = \frac{-dX_1}{B_1} = \ldots = \frac{-dX_n}{B_n} = \frac{-dZ}{B_1 P_1 + \ldots + B_n P_n}.$$

Il y a donc une infinité d'éléments linéaires intégraux, *dépendant de n paramètres arbitraires* $\dfrac{dU_1}{dZ}, \ldots, \dfrac{dU_n}{dZ}$ qui sont en involution avec tous les autres éléments linéaires intégraux, relativement à l'équation $\Omega_1 = 0$.

Lorsque l'équation $\Omega_1 = 0$ est de classe $2n + 1$, cette condition ne peut être satisfaite que si la seconde équation du système $\Omega_2 = 0$ ne renferme que les différentielles dX_i, dP_i, En effet, si Ω_2 contenait la différentielle dU_1 d'une variable ne figurant pas dans Ω_1, la condition $\Omega'_1 = 0$ ne pourrait être vérifiée par tous les éléments linéaires intégraux $(\delta X_i,\ \delta P_i,\ \delta U_i,\ \delta Z)$ que si l'on avait

$$dX_i = 0, \qquad dP_i = 0, \qquad dZ = 0, \qquad \Omega_2 = 0;$$

ces éléments singuliers ne dépendraient donc que de $n - 2$ rapports arbitraires

$$\frac{dU_3}{dU_2}, \ldots, \frac{dU_n}{dU_2}.$$

En résumé, pour que le système (Σ) puisse être, par un changement de variables, ramené à la forme (Σ'), il faut et il suffit que l'on puisse trouver deux facteurs λ, μ tels que l'équation

$$(36)\qquad \Omega = \lambda\omega_1 + \mu\omega_2 = 0$$

soit de classe $2n + 1$, et qu'il existe ∞^n éléments linéaires intégraux du système en involution avec tous les autres éléments linéaires intégraux relativement à l'équation $\Omega = 0$. Il est clair, en effet, que la propriété précédente est invariante relativement à tout changement de variables. L'équation $\Omega = 0$ est une équation *singulière*[1] du système (Σ).

---

[1] *Bulletin de la Société Mathématique*, t. 52, 1924, p. 38.

[**10**] De l'expression de Ω on déduit

$$\Omega' = \lambda\omega_1' + \mu\omega_2' \qquad (\text{mod. } \omega_1, \omega_2)$$

ou, en développant,

$$\Omega' = \lambda \sum_{i=1}^{n} \left(dp_1^i \delta x_i - dx_i \delta p_1^i\right) + \mu \sum_{1}^{n-1} \left[dp_2^k \delta x_k - dx_k \delta p_2^k\right]$$

$$+ \mu \left[\sum_{1}^{n-1} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} + p_1^i \frac{\partial f}{\partial x_{n+1}} + p_2^i \frac{\partial f}{\partial x_{n+2}} \right) dx_i + \sum_{1}^{n} \frac{\partial f}{\partial p_1^i} dp_1^i + \sum_{1}^{n-1} \frac{\partial f}{\partial p_2^i} dp_2^i \right] \delta x_n$$

$$- \mu \left[\sum_{1}^{n-1} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} + p_1^i \frac{\partial f}{\partial x_{n+1}} + p_2^i \frac{\partial f}{\partial x_{n+2}} \right) \delta x_i + \sum_{1}^{n} \frac{\partial f}{\partial p_1^i} \delta p_1^i + \sum_{1}^{n-1} \frac{\partial f}{\partial p_2^i} \delta p_2^i \right] dx_n .$$

La relation $\Omega' = 0$ devant être vérifiée, quels que soient δx_i, δp_1^i, δp_2^i, en égalant à zéro les coefficients de δp_1^i, δp_2^k, on a les $2n - 1$ équations

$$\lambda\, dx_i + \mu \frac{\partial f}{\partial p_1^i} dx_n = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n;$$

$$\mu\, dx_k + \mu \frac{\partial f}{\partial p_2^k} dx_n = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, n-1 .$$

On ne peut avoir $\mu = 0$, car l'équation $\omega_1 = 0$ n'est pas une équation singulière du système (Σ). On peut donc supposer $\mu = 1$, et les relations précédentes deviennent

$$\lambda\, dx_i + \frac{\partial f}{\partial p_1^i} dx_n = 0, \tag{37}$$

$$dx_k + \frac{\partial f}{\partial p_2^k} dx_n = 0. \tag{38}$$

En faisant $i = n$ dans la relation (37), on en tire $\lambda = -\dfrac{\partial f}{\partial p_1^n}$. Pour que les équations (37) et (38) soient compatibles, il faut donc que la fonction f vérifie les relations

$$\frac{\partial f}{\partial p_1^i} + \frac{\partial f}{\partial p_1^n} \frac{\partial f}{\partial p_2^i} = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n-1$$

identiques aux équations (21). Supposons ces conditions vérifiées. On tire alors des équations (37) et (38)

$$dx_i = -\frac{\partial f}{\partial p_2^i} dx_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1);$$

en égalant à zéro les coefficients de $\delta x_1, \ldots, \delta x_n$ dans Ω', on obtient n conditions nouvelles

$$(39)\quad dp_2^i = \frac{\partial f}{\partial p_1^n} dp_1^i + \left[\frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial x_{n+1}} p_1^i + \frac{\partial f}{\partial x_{n+2}} p_2^i\right] dx_n, \qquad i = 1, 2, \ldots, n-1$$

$$(40)\quad \sum_{i=1}^{n-1} \left[\frac{\partial f}{\partial p_1^i} dp_1^i + \frac{\partial f}{\partial p_2^i} dp_2^i + \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} + p_1^i \frac{\partial f}{\partial x_{n+1}} + p_2^i \frac{\partial f}{\partial x_{n+2}}\right) dx_i\right] = 0,$$

dont la dernière est une conséquence des précédentes, comme on le voit en ajoutant les $(n-1)$ premières après les avoir multipliées par $\frac{\partial f}{\partial p_2^1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial p_2^{n-1}}$ respectivement, et tenant compte des valeurs de $dx_1, dx_2, \ldots, dx_{n-1}$. En résumé, *tous les éléments linéaires intégraux qui satisfont aux relations* $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0$, *et aux équations* (38) *et* (39) *sont en involution avec tous les autres éléments linéaires intégraux du système relativement à l'équatian*

$$(41)\qquad \Omega = \omega_2 - \frac{\partial f}{\partial p_1^n} \omega_1 = 0,$$

si la fonction f est une intégrale du système (21).

Ces éléments singuliers dépendent bien de n paramètres arbitraires puisqu'on a en tout $2n$ relations entre $dx_1, \ldots, dx_{n+2}, dp_1^i, dp_2^i$.

[**11**] Il nous reste à examiner si cette équation est bien de classe $2n+1$. On a, en remplaçant ω_1, ω_2 par leurs expressions,

$$\Omega = \omega_2 - \frac{\partial f}{\partial p_1^n} \omega_2 = dx_{n+2} - \frac{\partial f}{\partial p_1^n} dx_{n+1} - \left(p_2^1 - p_1^1 \frac{\partial f}{\partial p_1^n}\right) dx_1 - \ldots$$
$$- \left(p_2^{n-1} - p_1^{n-1} \frac{\partial f}{\partial p_1^n}\right) dx_{n-1} - \left(f - p_1^n \frac{\partial f}{\partial p_1^n}\right) dx_n;$$

pour montrer que l'équation $\Omega = 0$ est de classe $2n+1$ au plus, il suffira de montrer que les coefficients de $dx_1, \ldots, dx_{n+1}$ considérés comme fonctions de $p_1^1, \ldots, p_1^n$, $p_2^1, \ldots, p_2^{n-1}$ se réduisent à n fonctions distinctes au plus, ou que tous les déterminants d'ordre $n+1$ obtenus en prenant $n+1$ colonnes du tableau (T) formé par les dérivées partielles de ces coefficients sont nuls identiquement.

$$
(\mathrm{T})\quad \left|\begin{array}{l}
\dfrac{\partial^2 f}{\partial p_1^1 \partial p_1^n},\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial p_1^2 \partial p_1^n},\ \ldots,\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial p_1^{n-1} \partial p_1^n},\ \dfrac{\partial^2 f}{(\partial p_1^n)^2},\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial p_2^1 \partial p_1^n},\ \ldots,\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial p_2^{n-1} \partial p_1^n} \\
-\dfrac{\partial f}{\partial p_1^n} - p_1^1 \dfrac{\partial^2 f}{\partial p_1^1 \partial p_1^n},\ -p_1^1 \dfrac{\partial^2 f}{\partial p_1^2 \partial p_1^n},\ \ldots,\ -p_1^1 \dfrac{\partial^2 f}{(\partial p_1^n)^2},\ 1 - p_1^1 \dfrac{\partial^2 f}{\partial p_2^1 \partial p_1^n},\ \ldots,\ -p_1^1 \dfrac{\partial^2 f}{\partial p_2^{n-1} \partial p_1^n} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\dfrac{\partial f}{\partial p_1^1} - p_1^n \dfrac{\partial^2 f}{\partial p_1^1 \partial p_1^n},\ \ldots,\ -p_1^n \dfrac{\partial^2 f}{(\partial p_1^n)^2},\ \dfrac{\partial f}{\partial p_2^1} - p_1^n \dfrac{\partial^2 f}{\partial p_2^1 \partial p_1^n},\ \ldots,\ \dfrac{\partial f}{\partial p_2^{n-1}} - p_1^n \dfrac{\partial^2 f}{\partial p_2^{n-1} \partial p_1^n}
\end{array}\right|.
$$

Nous pouvons évidemment remplacer ce tableau par le tableau obtenu en ajoutant aux éléments de la seconde ligne ceux de la première multipliés par p_1^1, ... aux éléments de la $(n+1)^{\text{ième}}$ ligne ceux de la première multipliés par p_1^n, ce qui donne le nouveau tableau

$$
(\mathrm{T}')\quad \left|\begin{array}{cccccccc}
\dfrac{\partial^2 f}{\partial p_1^1 \partial p_1^n}, & \dfrac{\partial^2 f}{\partial p_1^2 \partial p_1^n}, & \ldots, & \dfrac{\partial^2 f}{\partial p_1^{n-1} \partial p_1^n}, & \dfrac{\partial^2 f}{(\partial p_1^n)^2}, & \dfrac{\partial^2 f}{\partial p_2^1 \partial p_1^n}, & \ldots, & \dfrac{\partial^2 f}{\partial p_2^{n-1} \partial p_1^n} \\
-\dfrac{\partial f}{\partial p_1^n}, & 0, & \ldots, & 0, & 0, & 1, & 0, & \ldots,\ 0 \\
0, & -\dfrac{\partial f}{\partial p_1^n},\ 0,\ \ldots, & & 0, & 0, & 0, & 1,\ 0, & \ldots,\ 0 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\dfrac{\partial f}{\partial p_1^1}, & \dfrac{\partial f}{\partial p_1^2}, & \ldots, & \dfrac{\partial f}{\partial p_1^{n-1}}, & 0, & \dfrac{\partial f}{\partial p_2^1}, & \dfrac{\partial f}{\partial p_2^2}, & \ldots,\ \dfrac{\partial f}{\partial p_2^{n-1}}
\end{array}\right|.
$$

Si nous retranchons maintenant des éléments de la dernière ligne du tableau (T′) les éléments de la deuxième ligne multipliée par $\dfrac{\partial f}{\partial p_2^1}$, ceux de la troisième multipliés par $\dfrac{\partial f}{\partial p_2^2}$, ... et enfin ceux de l'avant-dernière ligne multipliés par $\dfrac{\partial f}{\partial p_2^{n-1}}$, tous les éléments de la dernière ligne du nouveau tableau seront nuls d'après les relations (21). Il est clair que les mêmes combinaisons de lignes appliquées aux déterminants d'ordre $n+1$ obtenus en prenant $n+1$ colonnes du tableau (T) conduiront à des déterminants dont tous les éléments de la dernière ligne seront nuls. La forme Ω s'exprime donc au moyen de $2n+2$ variables distinctes au plus et de leurs différentielles. *L'équation* $\Omega = 0$ *est donc de classe* $2n+1$ *au plus. Elle ne peut pas être de classe inférieure à* $2n-1$. Supposons en effet qu'elle soit de classe $2m-1$, m étant inférieur à n; cette équation réduite à une forme canonique s'écrira

$$\Omega = dZ - P_1 dX_1 \ldots P_{m-1} dX_{m-1} = 0,$$

et, en lui adjoignant l'équation $\omega_1 = 0$ on a un système équivalent au système (Σ). Or tous les éléments linéaires intégraux satisfaisant aux $2m$ relations

$$dX_1 = 0, \quad \ldots, \quad dX_{m-1} = 0, \quad dP_1 = 0, \quad \ldots, \quad dP_{m-1} = 0, \quad dZ = 0, \quad \omega_1 = 0$$

sont évidemment en involution avec tous les autres éléments linéaires intégraux relativement à l'équation $\Omega = 0$, et ces éléments linéaires singuliers dépendraient de plus de n paramètres arbitraires si m est inférieur à n. Or nous avons vu plus haut (n° 10) que ces éléments singuliers sont déterminés par $2n$ relations linéaires distinctes. Le même raisonnement prouve que le système (Σ) contient au plus une équation de classe $2n-1$, car une telle équation est nécessairement une équation singulière du système[1].

On a donc seulement deux cas à considérer, suivant que l'équation $\Omega = 0$ est de classe $2n+1$, ou de classe $2n-1$.

[12] Lorsque l'équation est de classe $2n+1$, le raisonnement s'achève comme au n°. 3. Si l'on sait effectuer les intégrations qui permettent de ramener cette équation à une forme canonique, le système (Σ) peut être ramené par un changement de variables à la forme (Σ'), les variables X_i, P_i, Z, U_i formant un système de $3n+1$ fonctions distinctes des variables primitives x_i, p_1^i, p_2^k.

D'après la théorie classique du problème de Pfaff, on sait déterminer sans aucune intégration toutes les multiplicités intégrales de l'équation canonique (33). Soient

$$X_i = f_i(t_1, \ldots, t_r), \quad P_i = g_i(t_1, t_2, \ldots, t_r), \quad Z = h(t_1, t_2, \ldots, t_r)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

---

(1) Il est aisé de vérifier que les deux méthodes ne sont pas essentiellement distinctes. En effet si l'on remplace dans les équations (23), p_2^n par f et a par $\dfrac{\partial f}{\partial p_1^n}$, on en déduit

$$a_1 = p_2^1 - p_1^1 \frac{\partial f}{\partial p_1^n}, \ldots, \qquad a_n = p_2^n - p_1^n \frac{\partial f}{\partial p_1^n},$$

et nous venons de vérifier directement que ces $n+1$ fonctions sont liées par une relation au moins lorsque la fonction f est une intégrale des équations (21).

D'autre part, l'équation $\Omega = 0$ peut s'écrire

$$\Omega = dx_{n+2} - a\,dx_{n+1} - a_1 dx_1 - \ldots - a_n dx_n = 0,$$

les coefficients $a, a_1, \ldots, a_n$ étant liés par une relation

$$a = F(a_1, \ldots, a_n;\ x_1, \ldots, x_{n+2});$$

elle ne diffère donc que par les notations de l'équation (9).

L'équation de Pfaff, dont l'intégration donne l'intégrale générale de l'équation de Monge, est donc la même dans les deux méthodes.

des formules définissant une intégrale à r dimensions $(r \leqslant n)$, $t_1, t_2, \ldots, t_r$ désignant r variables auxiliaires.

En substituant ces expressions de X_i, P_i, Z dans la seconde équation (34) on aboutit à une nouvelle équation de Pfaff

$$C_1 dt_1 + \ldots + C_r dt_r = 0,$$

où figurent $n + r$ variables $U_1, \ldots, U_n, t_1, t_2, \ldots, t_r$. Le nombre r étant au plus égal à n, on peut encore obtenir toutes les intégrales de cette équation par l'emploi de la méthode classique. Si on établit k relations arbitraires entre $t_1, t_2, \ldots, t_r$, il faudra ajouter $r - k$ relations où figurent $U_1, \ldots, U_n$, ce qui fait en tout r relations entre $t_1, t_2, \ldots, t_r, U_1, \ldots, U_n$. On pourra donc exprimer les t_i et les U_k au moyen de n paramètres variables indépendants, ce qui fournira bien une multiplicité intégrale à n dimensions des équations (33) et (34) et par suite du système (Σ). Observons encore qu'il ne faudra conserver que les intégrales sur lesquelles $x_1, \ldots, x_n$ sont des variables indépendantes.

Lorsque l'équation Ω est de classe $2n - 1$, elle peut être mise sous forme canonique

$$dZ - P_1 dX_1 - \ldots - P_{n-1} dX_{n-1} = 0,$$

on satisfait à cette équation en établissant n relation entre les $2n - 1$ fonctions X_i, P_i, Z, et par suite entre les $3n + 1$ variables x_i, p_1^i, p_2^k. D'autre part, on satisfait à l'équation $\omega_1 = 0$ en établissant $n + 1$ relations entre les mêmes variables. On aura donc en tout $2n + 1$ relations entre $3n + 1$ variables; ces relations définissent bien une multiplité à n dimensions.

Remarque. — Il existe d'autres équations de Monge de la première classe que celles qui viennent d'être étudiées.

Il en est ainsi par exemple de l'équation immédiatement intégrable $\dfrac{\partial z_1}{\partial x_2} = \dfrac{\partial z_2}{\partial x_1}$, et plus généralement de l'équation [1]

$$\frac{\partial z_1}{\partial x_2} = f(x_1, x_2) \frac{\partial z_2}{\partial x_1},$$

où $f(x_1, x_2)$ est une fonction quelconque de x_1, x_2.

---

[1] *Bulletin des Sciences Mathématiques*, t. 53, 2e série, 1929, p. 200.

IV

[**13**] Avant d'étendre la méthode aux systèmes en involution, nous établirons un lemme, qui sera utile dans la suite.

Lemme. — Soit $X_1 dx_1 + \ldots + X_{n+1} dx_{n+1} - dx_{n+2} = \Omega$ une forme de Pfaff, où les coefficients X_i dépendent de $x_1, \ldots, x_{n+2}$ et de r autres variables $y_1, y_2, \ldots, y_r$ dont les différentielles ne figurent pas dans Ω, de telle façon que tous les déterminants d'ordre r déduits du tableau des dérivées $\dfrac{\partial X_i}{\partial y_k}$ ne soient pas nuls à la fois. *L'équation* $\Omega = 0$ *est de classe* $2r+1$ *au moins.*

On peut en effet, par un simple changement dans la notation, écrire cette équation

$$\Omega = y_1 dx_1 + y_2 dx_2 + \ldots + \ldots + y_r dx_r + f_{r+1} dx_{r+1} + \ldots + f_{n+1} dx_{n+1} - dx_{n+2} = 0,$$

les $n+r+2$ variables x_i, y_k étant distinctes. Dans le covariant bilinéaire Ω', remplaçons dx_{n+2} et δx_{n+2} par leurs expressions au moyen des dx_i, δx_i (où $i < n+2$), il vient

$$\begin{aligned}
\Omega' = {} & dy_1 \delta x_1 - dx_1 \delta y_1 + \ldots + dy_r \delta x_r - dx_r \delta y_r \\
& + \left[\frac{df_{r+1}}{dx_1} dx_1 + \ldots + \frac{df_{r+1}}{dx_{n+1}} dx_{n+1} + \frac{\partial f_{r+1}}{\partial y_1} dy_1 + \ldots + \frac{\partial f_{r+1}}{\partial y_r} dy_r \right] \delta x_{r+1} \\
& - \left[\frac{df_{r+1}}{dx_1} \delta x_1 + \ldots + \frac{df_{r+1}}{dx_{n+1}} \delta x_{n+1} + \frac{\partial f_{r+1}}{\partial y_1} \delta y_1 + \ldots + \frac{\partial f_{r+1}}{\partial y_r} \delta y_r \right] dx_{r+1} \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

où l'on a posé

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dx_1} = \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_{n+2}} y_1, \quad \ldots, \quad \frac{d}{dx_r} = \frac{\partial}{\partial x_r} + \frac{\partial}{\partial x_{n+2}} y_r, \\
& \frac{d}{dx_{r+1}} = \frac{\partial}{\partial x_{r+1}} + \frac{\partial}{\partial x_{n+2}} f_{r+1}, \quad \ldots, \quad \frac{d}{dx_{n+1}} = \frac{\partial}{\partial x_{n+1}} + \frac{\partial}{\partial x_{n+2}} f_{n+1}.
\end{aligned}$$

En égalant à zéro les coefficients de $\delta x_1, \ldots, \delta x_r, \delta y_1, \ldots, \delta y_r$, on obtient un système de $2r$ équations distinctes

$$\left.\begin{aligned}
& dy_i - \frac{df_{r+1}}{dx_i} dx_{r+1} - \ldots - \frac{df_{n+1}}{dx_i} dx_{n+1} = 0, \\
& dx_i + \frac{\partial f_{r+1}}{\partial y_i} dx_{r+1} + \ldots + \frac{\partial f_{n+1}}{\partial y_i} dx_{n+1} = 0,
\end{aligned}\right\} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

qui, jointes à $\Omega = 0$, forment un système de $2r+1$ équations distinctes. L'équation $\Omega = 0$ est donc de classe $2r+1$ au moins. Les autres équations des caractéristiques s'obtiennent en égalant à zéro les coefficients de $\delta x_{r+1}, \ldots, \delta x_{n+1}$. Les conditions pour que l'équation soit de classe $2r+1$ sont bien connues.

Si l'on remplace $y_1, y_2, \ldots, y_r$ par $p_1, p_2, \ldots, p_r$, la relation $\Omega = 0$ devient

$$dx_{n+2} = p_1 dx_1 + \ldots + p_r dx_r + f_{r+1} dx_{r+1} + \ldots + f_{n+1} dx_{n+1};$$

C'est l'équation de Pfaff à laquelle on est conduit pour l'intégration du système d'équations simultanées du premier ordre

$$p_{r+1} = f_{r+1}(x_i;\, p_1, \ldots, p_r), \ldots, p_{n+1} = f_{n+1},$$

où $p_i = \dfrac{\partial x_{n+2}}{\partial x_i}$. Pour que l'équation $\Omega = 0$ soit de classe $2n+1$, il faut et il suffit que le système précédent soit en involution(¹).

Voici une autre application de ces formules. Posons

$$\frac{\partial \Omega}{\partial y_i} = dx_i + \frac{\partial f_{r+1}}{\partial y_i} dx_{r+1} + \ldots + \frac{\partial f_{n+1}}{\partial y_i} dx_{n+1}; \qquad (i = 1, 2 \ldots, r)$$

$\dfrac{\partial \Omega}{\partial y_i}$ est une combinaison linéaire des premiers membres des équations différentielles des caractéristiques de $\Omega = 0$, et par suite s'exprime au moyen des différentielles des variables canoniques dX_k, dP_k, dZ, si l'équation a été ramenée à une forme canonique. Cette propriété ayant lieu quel que soit l'indice $i \leqslant r$, on peut dire que *l'équation*

$$\lambda_1 \frac{\partial \Omega}{\partial y_1} + \lambda_2 \frac{\partial \Omega}{\partial y_2} + \ldots + \lambda_r \frac{\partial \Omega}{\partial y_r} = 0$$

est le prolongement de l'équation $\Omega = 0$, *quels que soient les multiplicateurs* λ_i.

[**14**] Soit (S) un système en involution (non linéaire) de $m-1$ équations aux dérivées partielles du premier ordre

$$(42) \qquad \left\{ \begin{array}{l} q_{n+1} = F_1(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}, q_1, q_2, \ldots, q_n), \\ q_{n+2} = F_2(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ q_{n+m-1} = F_{m-1}(x_1, \ldots, x_{n+m}, q_1, q_2, \ldots, q_n), \end{array} \right. \qquad m > 2$$

(¹) *Leçons sur le problème de Pfaff*, p. 77.

où $x_1, \ldots, x_{n+m-1}$ sont les variables indépendantes, x_{n+m} la fonction, et où $q_1, \ldots, q_{n+m-1}$ désignent ses dérivées partielles

$$q_i = \frac{\partial x_{n+m}}{\partial x_i}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n+m-1).$$

Une intégrale de ce système est en général déterminée si on l'assujettit à passer par une multiplicité M_n à n dimensions de l'espace à $m+n$ dimensions.

Soient en effet

$$(43) \qquad x_{n+1} = \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ \ldots, \ x_{n+m} = \varphi_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

les équations qui définissent cette multiplicité. Posons

$$p_k^i = \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}; \qquad \begin{array}{l} i = 1, 2, \ldots, n, \\ k = 1, 2, \ldots, m, \end{array}$$

les dérivées $q_1, q_2, \ldots, q_{n+m-1}$ de la fonction inconnue x_{n+m} vérifient toujours la relation

$$dx_{m+n} = q_1 dx_1 + q_2 dx_2 + \ldots + q_{m+n-1} dx_{m+n-1},$$

qui donne, en un point de M_n, les n relations

$$(44) \qquad \begin{cases} p_m^1 = q_1 + q_{n+1} p_1^1 + \ldots + q_{n+m-1} p_{m-1}^1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_m^n = q_n + q_{n+1} p_1^n + \ldots + q_{n+m-1} p_{m-1}^n. \end{cases}$$

Les $m+n-1$ équations (42) et (44) déterminent les valeurs des $m+n-1$ dérivées $q_1, q_2, \ldots, q_{n+m-1}$ en tout point de M_n. Si les fonctions ainsi obtenues sont des fonctions holomorphes de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dans le voisinage d'un point $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$, il résulte des théorèmes classiques d'existence que le système en involution (42) admet une intégrale holomorphe renfermant la multiplicité M_n.

La conclusion est en défaut si la solution considérée des équations (42) et (44) présente le caractère d'une solution multiple. Pour résoudre ce système d'équations, on peut conserver comme inconnues $q_{n+1}, \ldots, q_{n+m-1}$ en remplaçant, dans les équations (42), $q_1, q_2, \ldots, q_n$ par leurs valeurs tirées des formules (44). On peut au contraire conserver $q_1, q_2, \ldots, q_n$ comme inconnues en remplaçant, dans les équations (44), $q_{n+1}, \ldots, q_{n+m-1}$ par $F_1, F_2, \ldots, F_{m-1}$. On obtient ainsi le système de n équations

$$(45) \qquad \begin{cases} q_1 + F_1 p_1^1 + \ldots + F_{m-1} p_{m-1}^1 - p_m^1 = 0, \\ q_2 + F_1 p_1^2 + \ldots + F_{m-1} p_{m-1}^2 - p_m^2 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ q_n + F_1 p_1^n + \ldots + F_{m-1} p_{m-1}^n - p_m^n = 0, \end{cases}$$

qui déterminent $q_1, q_2, \ldots, q_n$. Une solution de ce système aura le caractère d'une solution multiple si elle annule le jacobien Δ des premiers membres, nous dirons alors que la multiplicité M_n est une *multiplicité singulière* du système (42).

Le jacobien Δ a pour expression

$$\begin{vmatrix} 1+\frac{\partial F_1}{\partial q_1}p_1^1+\ldots+\frac{\partial F_{m-1}}{\partial q_1}p_{m-1}^1, & \frac{\partial F_1}{\partial q_2}p_1^1+\ldots+\frac{\partial F_{m-1}}{\partial q_2}p_{m-1}^1, & \ldots, & \frac{\partial F_1}{\partial q_n}p_1^1+\ldots+\frac{\partial F_{m-1}}{\partial q_n}p_{m-1}^1 \\ \frac{\partial F_1}{\partial q_1}p_1^2+\ldots+\frac{\partial F_{m-1}}{\partial q_1}p_{m-1}^2, & 1+\frac{\partial F_1}{\partial q_2}p_1^2+\ldots+\frac{\partial F_{m-1}}{\partial q_2}p_{m-1}^2, & \ldots, & \frac{\partial F_1}{\partial q_n}p_1^2+\ldots+\frac{\partial F_{m-1}}{\partial q_n}p_{m-1}^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial F_1}{\partial q_1}p_1^n+\ldots+\frac{\partial F_{m-1}}{\partial q_1}p_{m-1}^n, & \frac{\partial F_1}{\partial q_2}p_1^n+\ldots+\frac{\partial F_{m-1}}{\partial q_2}p_{m-1}^n, & \ldots, & 1+\frac{\partial F_1}{\partial q_n}p_1^n+\ldots+\frac{\partial F_{m-1}}{\partial q_n}p_{m-1}^n \end{vmatrix}.$$

L'élimination de $q_1, q_2, \ldots, q_n$ entre les n équations (45) et l'équation $\Delta = 0$ conduit à une relation entre $x_1, \ldots, x_{n+m}$ et les dérivées partielles p_κ^i

$$\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_{n+m}, p_1^1, \ldots, p_m^n) = 0; \tag{46}$$

c'est *l'équation de Monge* des multiplicités singulières.

La solution générale dépend de $m-1$ fonctions arbitraires de n variables, puisqu'on peut choisir à volonté $m-1$ des fonctions $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$, et il reste une équation aux dérivées partielles du premier ordre pour déterminer la dernière. Nous allons montrer que l'on peut encore obtenir sous forme explicite tous les systèmes de solutions de cette équation, dès qu'on a intégré le système en involution (42).

[15] Si $\Delta = 0$, on peut trouver les coefficients $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, non tous nuls, tels que l'on ait

$$(47)\quad \left\{\begin{aligned} &\lambda_1\left[1+\frac{\partial F_1}{\partial q_1}p_1^1+\ldots+\frac{\partial F_{m-1}}{\partial q_1}p_{m-1}^1\right]+\lambda_2\left[\frac{\partial F_1}{\partial q_2}p_1^1+\ldots+\frac{\partial F_{m-1}}{\partial q_2}p_{m-1}^1\right]+\ldots \\ &\qquad\qquad +\lambda_n\left[\frac{\partial F_1}{\partial q_n}p_1^1+\ldots+\frac{\partial F_{m-1}}{\partial q_n}p_{m-1}^1\right]=0, \\ &\lambda_1\left[\frac{\partial F_1}{\partial q_1}p_1^2+\ldots+\frac{\partial F_{m-1}}{\partial q_1}p_{m-1}^2\right]+\lambda_2\left[1+\frac{\partial F_1}{\partial q_2}p_1^2+\ldots+\frac{\partial F_{m-1}}{\partial q_2}p_{m-1}^2\right]+\ldots \\ &\qquad\qquad +\lambda_n\left[\frac{\partial F_1}{\partial q_n}p_1^2+\ldots+\frac{\partial F_{m-1}}{\partial q_n}p_{m-1}^2\right]=0, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\lambda_1\left[\frac{\partial F_1}{\partial q_1}p_1^n+\ldots+\frac{\partial F_{m-1}}{\partial q_1}p_{m-1}^n\right]+\lambda_2\left[\frac{\partial F_1}{\partial q_2}p_1^n+\ldots+\frac{\partial F_{m-1}}{\partial q_2}p_{m-1}^n\right]+\ldots \\ &\qquad\qquad +\lambda_n\left[1+\frac{\partial F_1}{\partial q_n}p_1^n+\ldots+\frac{\partial F_{m-1}}{\partial q_n}p_{m-1}^n\right]=0, \end{aligned}\right.$$

et l'intégration de l'équation de Monge (46) se ramène à l'intégration du système des $2n$ équations (45) et (47), où $x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}$, $q_1, q_2, \ldots, q_n$, et les rapports $\frac{\lambda_i}{\lambda_k}$ sont autant de fonctions inconnues. On peut encore remplacer ces $2n$ équations par un système de deux équations de Pfaff en multipliant les équations (45) par $dx_1, \ldots, dx_n$ et ajoutant, et en opérant de même avec les équations (47). On obtient ainsi les deux équations de Pfaff

$$(48)\quad \Omega = q_1 dx_1 + \ldots + q_n dx_n + F_1 dx_{n+1} + \ldots + F_{m-1} dx_{m+n-1} - dx_{m+n} = 0,$$

$$(49)\quad \Omega_1 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left[dx_i + \frac{\partial F_1}{\partial q_i} dx_{n+1} + \ldots + \frac{\partial F_{m-1}}{\partial q_i} dx_{m+n-1} \right] = 0.$$

Tout système de solutions des équations (45) et (47) donne évidemment une multiplicité intégrale M_n à n dimensions du système $\Omega = \Omega_1 = 0$, et inversement toute multiplicité intégrale à n dimensions de ce système, sur laquelle $x_1, x_2, \ldots, x_n$ peuvent être prises pour variables indépendantes, fournit un système de solutions des équations (45) et (47).

L'intégration du système en involution (42) se ramène à l'intégration de l'équatiion de Pfaff $\Omega = 0$, qui est de classe $2n + 1$. Supposons que l'on ait intégré ce système, ou, ce qui revient au même, ramené l'équation $\Omega = 0$ à une forme canonique

$$(48')\qquad dZ - P_1 dX_1 - \ldots - P_n dX_n = 0;$$

les $2n + m$ variables x_i, q_k qui figurent dans Ω peuvent s'exprimer au moyen des $2n + 1$ variables canoniques X_i, P_i, Z, et de $m - 1$ autres variables $u_1, u_2, \ldots, u_{m-1}$ formant avec les variables canoniques un système de $2n + m$ fonctions distinctes des variables x_i, q_k. En substituant ces expressions des x_i et des q_k dans Ω_1, on arrive à une équation où ne figurent que les différentielles des variables canoniques dX_i, dP_i, dZ, car $\Omega_1 = 0$ est le prolongement de la première équation (n° 13). On démontrera comme plus haut (n° 2) que les coefficients de la nouvelle équation contiendront une au moins des variables non canoniques u_i, si le système en involution n'est pas linéaire.

[**16**] Toute solution de l'équation (48') s'obtiendra en établissant $n + 1$ relations au moins entre les variables canoniques.

Supposons d'abord que l'on établisse $n + 1$ relations seulement, de façon que X_i, P_i, Z soient des fonctions de n variables indépendantes. Soient

$$(50)\quad X_i = \varphi_i(t_1, t_2, \ldots, t_n), \qquad P_i = \psi_i(t_1, t_2, \ldots, t_n), \qquad Z = \pi(t_1, t_2, \ldots, t_n)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

des formules définissant une de ces intégrales. En remplaçant X_i, P_i, Z par leurs expressions dans les formules qui définissent $x_1, x_2, \ldots, x_{n+m}$ au moyen des variables canoniques et de $u_1, \ldots, u_{m-1}$, on voit que les x_i sont des fonctions de $m+n-1$ variables indépendantes $u_1, \ldots, u_{m-1}, t_1, \ldots, t_n$.

Les formules (50) définissent donc une intégrale du système en involution proposé. Le même raisonnement prouve qu'à une intégrale de l'équation (48') définie par $n+1+h (h>0)$ relations entre les variables canoniques ne peut correspondre une intégrale du système en involution ayant pour support une multiplité ponctuelle à $m+n-1$ dimensions.

En remplaçant dX_i, dP_i, dZ par $d\varphi_i$, $d\psi_i$, $d\pi$ dans l'équation $\Omega_1 = 0$, et en égalant à zéro les coefficients de $dt_1, dt_2, \ldots, dt_n$, on arrive à n relations de la forme

$$A_{i1}\lambda_1 + A_{i2}\lambda_2 + \ldots + A_{in}\lambda_n = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

les fonctions A_{ik} dépendant de $t_1, t_2, \ldots, t_n$ et des variables non canoniques $u_1, u_2, \ldots, u_{m-1}$. Il faudra donc que l'on ait

$$(51) \qquad \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & A_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{n1} & A_{n2} & A_{nn} \end{vmatrix} = 0;$$

dans cette relation (51) figure au moins l'une des variables non canoniques u_i; si u_1 par exemple figure dans cette équation, on pourra choisir arbitrairement les fonctions $u_2, \ldots, u_{m-1}$ de $t_1, t_2, \ldots, t_n$, et l'équation (51) fera connaître u_1.

Le raisonnement prouve que, sur toute intégrale M_{n+m-1} du système en involution, il existe une infinité de multiplicités singulières M_n dépendant de $m-2$ fonctions arbitraires de n variables.

Si l'on connaît une intégrale complète du système en involution

$$(52) \qquad V(x_1, x_2, \ldots, x_{n+m}; a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}) = 0$$

on peut reprendre les raisonnements du n° 3 qui s'appliquent sans modification essentielle, sauf que les caractéristiques à une dimension sont remplacées par des multiplicités caractéristiques à $m-1$ dimensions. Soit M_{m+n-1} l'intégrale du système en involution définie par les relations

$$(53) \qquad \overline{V} = 0, \quad \frac{\partial \overline{V}}{\partial a_1} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial \overline{V}}{\partial a_n} = 0,$$

où $\overline{V}$ représente la fonction obtenue en remplaçant dans V la constante a_{n+1} par $f(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Si l'on adjoint aux équations (53) la relation

$$(54) \qquad H = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \overline{V}}{\partial a_1^2}, & \frac{\partial^2 \overline{V}}{\partial a_1 \partial a_2}, & \ldots, & \frac{\partial^2 \overline{V}}{\partial a_1 \partial a_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial^2 \overline{V}}{\partial a_1 \partial a_n}, & \frac{\partial^2 \overline{V}}{\partial a_2 \partial a_n}, & \ldots, & \frac{\partial^2 \overline{V}}{\partial a_n^2} \end{vmatrix} = 0,$$

on définit une multiplicité M_{m+n-2} à $n+m-2$ dimensions. *Toute multiplicité* M_n *à n dimensions située sur* M_{m+n-2} *est une multiplicité singulière du système en involution* (42).

Exemple. — Prenons le système en involution

$$q_3 = q_1^2, \qquad q_4 = q_2^2;$$

on obtiendra l'équation de Monge des multiplicités singulières en éliminant q_1, q_2 entre les trois relations

$$p_3^1 = q_1 + (q_1)^2 p_1^1 + (q_2)^2 p_2^1, \qquad p_3^2 = q_2 + (q_1)^2 p_1^2 + (q_2)^2 p_2^2,$$

$$\begin{vmatrix} 1 + 2q_1 p_1^1, & 2q_2 p_2^1 \\ 2q_1 p_1^2, & 1 + 2q_2 p_2^2 \end{vmatrix} = 0.$$

On obtiendra ces multiplicités elles-mêmes par l'intégration du système des deux équations de Pfaff

$$\Omega = dx_5 - q_1 dx_1 - q_2 dx_2 - (q_1)^2 dx_3 - (q_2)^2 dx_4 = 0,$$
$$\Omega_1 = \lambda_1(dx_1 + 2q_1 dx_3) + \lambda_2(dx_2 + 2q_2 dx_4) = 0.$$

La première équation se met immédiatement sous forme canonique

$$dZ - P_1 dX_1 - P_2 dX_2 = 0,$$

en posant

$$X_1 = q_1, \quad X_2 = q_2, \quad P_1 = -(x_1 + 2q_1 x_3), \quad P_2 = -(x_2 + 2q_2 x_4),$$
$$Z = x_5 - q_1 x_1 - q_2 x_2 - (q_1)^2 x_3 - (q_2)^2 x_4,$$

et la seconde équation devient

$$\lambda_1[2x_3 dX_1 + dP_1] + \lambda_2[2x_4 dX_2 + dP_2] = 0.$$

Posons

$$Z = f(X_1, X_2), \qquad P_1 = \frac{\partial f}{\partial X_1}, \qquad P_2 = \frac{\partial f}{\partial X_2}; \tag{55}$$

la dernière équation donne, en éliminant le rapport $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$, la nouvelle relation

$$\begin{vmatrix} 2x_3 + \frac{\partial^2 f}{\partial X_1^2}, & \frac{\partial^2 f}{\partial X_1 \partial X_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial X_1 \partial X_2}, & 2x_3 + \frac{\partial^2 f}{\partial X_2^2} \end{vmatrix} = 0. \tag{56}$$

Les équations (55) et (56) définissent une multiplicité M_3, dont toute M_2 est une multiplicité singulière. On arrive plus rapidement à des formules équivalentes en partant de l'intégrale complète

$$x_5 = a_1 x_1 + a_2 x_2 + (a_1)^2 x_3 + (a_2)^2 x_4 + a_3.$$

[**17**] On peut aussi satisfaire à l'équation (48′) en établissant $n + 1 + h (h > 0)$ relations entre les variables canoniques. On obtient ainsi une multiplicité intégrale de cette équation représentée par des équations

$$X_i = \varphi_i(t_1, \ldots, t_{n-h}), \qquad Y_i = \psi_i(t_1, \ldots, t_{n-h}), \qquad Z = \pi(t_1, \ldots, t_{n-h}) \tag{57}$$

qui définissent X_i, Y_i, Z en fonction de $n-h$ paramètres seulement. Ces formules permettent aussi d'exprimer $x_1, \ldots, x_{n+m}$, $q_1, \ldots, q_m$ au moyen des $n-h$ paramètres t_i et des variables non canoniques $u_1, u_2, \ldots, u_{m-1}$; elles définissent donc une multiplicité intégrale du système (42) à $m+n-h-1$ dimensions. Elles ne représentent donc pas une intégrale proprement dite de ce système si h est positif. Mais si m est supérieur ou au moins égal à $h+1$, la multiplicité que nous venons de définir est au moins à n dimensions, et toute multiplicité à n dimensions située sur celle-là donne une solution de l'équation de Monge des multiplicités singulières. En effet, si on remplace X_i, P_i, Z par leurs expressions (57) dans la seconde équation $\Omega_1 = 0$, il ne reste que $n-h$ différ ntielles dt_i; on peut donc toujours satisfaire à cette équation par des valeurs de $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, non toutes nulles. On s'explique facilement ce résultat en observant que ces multiplicités M_n sont situées sur des multiplicités à moins de $m+n-1$ dimensions composées de caractéristiques. Le problème de Cauchy est donc indéterminé par ces multiplicités M_n, ce qui ne peut avoir lieu que si elles satisfont à l'équation de Monge des multiplicités singulières.

V

[**18**] Nous sommes maintenant amenés à examiner la question suivante. Étant donnée une équation de Monge

$$\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n,\ x_{n+1}, \ldots, x_{n+m};\ p_1^1, p_1^2, \ldots, p_m^n) = 0 \tag{58}$$

où figurent n variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_n$, m fonctions $x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}$ de ces variables et leurs dérivées partielles du premier ordre $p_k^{\,i}$, comment peut-on reconnaître si cette équation de Monge définit les multiplicités singulières d'un système en involution? Nous supposerons $n > 1$; le cas où $n = 1$ sera étudié dans un autre Mémoire.

La fonction Φ dépendant de l'une au moins des dérivées $p_k^{\,i}$, nous pouvons toujours, en modifiant au besoin les notations, supposer l'équation résolue par rapport à la dérivée $p_m^{\,n}$

$$p_m^n = f(x_1, \ldots, x_{n+m};\ p_1^1, p_1^2, \ldots, p_m^{n-1}). \tag{59}$$

Cette équation étant obtenue en éliminant $q_1, q_2, \ldots, q_n$ entre les n équations (45) et la relation $\Delta = 0$, on peut considérer ces $n+1$ équations comme définissant $q_1, q_2, \ldots, q_n$, $p_m^{\,n}$ en fonction des autres variables. Des équations (45) on déduit par différentiation

$$\begin{aligned} dp_m^i = {} & \mathrm{F}_1 dp_1^i + \mathrm{F}_2 dp_2^i + \ldots + \mathrm{F}_{m-1} dp_{m-1}^i + dq_i \\ & + \left(\frac{\partial \mathrm{F}_1}{\partial q_1} p_1^i + \frac{\partial \mathrm{F}_2}{\partial q_1} p_2^i + \ldots + \frac{\partial \mathrm{F}_{m-1}}{\partial q_1} p_{m-1}^i\right) dq_1 \\ & + \left(\frac{\partial \mathrm{F}_1}{\partial q_2} p_1^i + \frac{\partial \mathrm{F}_2}{\partial q_2} p_2^i + \ldots + \frac{\partial \mathrm{F}_{m-1}}{\partial q_2} p_{m-1}^i\right) dq_2 \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \left(\frac{\partial \mathrm{F}_1}{\partial q_n} p_1^i + \frac{\partial \mathrm{F}_2}{\partial q_n} p_2^i + \ldots + \frac{\partial \mathrm{F}_{m-1}}{\partial q_n} p_{m-1}^i\right) dq_n, \\ & \qquad\qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \end{aligned} \tag{60}$$

en n'écrivant pas les termes en $dx_1, dx_2, \ldots, dx_{m+n}$, que nous laisserons d'abord de côté, en considérant les variables x_i comme des paramètres. En tenant compte de $\Delta = 0$, on voit que l'on peut éliminer $dq_1, dq_2, \ldots, dq_n$ entre les n relations (60) ce qui donne pour $dp_m{}^n$ une expression de la forme

$$
\begin{aligned}
(61) \qquad dp^n_m = {} & F_1 dp^n_1 + \ldots + F_{m-1} dp^n_{m-1} \\
& + \mu_1 \left[dp^1 - F_1 dp^1_1 - F_2 dp^1_2 - \ldots - F_{m-1} dp^1_{m-1}\right] \\
& + \mu_2 \left[dp^2_m - F_1 dp^2_1 - F_2 dp^2_2 - \ldots - F_{m-1} dp^2_{m-1}\right] \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + \mu_{m-1} \left[dp^{n-1}_m - F_1 dp^{m-1}_1 - F_2 dp^{m-1}_2 - \ldots - F_{m-1} dp^{n-1}_{m-1}\right].
\end{aligned}
$$

On déduit de cette relation que l'on a

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial p^n_m}{\partial p^n_1} = F_1, \quad \frac{\partial p^n_m}{\partial p^n_2} = F_2, \quad \ldots, \quad \frac{\partial p^n_m}{\partial p^n_{m-1}} = F_{m-1}, \\
\frac{\partial p^n_m}{\partial p^i_m} = \mu_i, \quad \frac{\partial p^n_m}{\partial p^i_k} = -\mu_i F_k, \qquad \begin{matrix} (i = 1, 2, \ldots, n-1) \\ (k = 1, 2, \ldots, m-1). \end{matrix}
\end{gathered}
$$

La fonction f satisfait donc aux $(m-1)(n-1)$ relations

$$
(62) \qquad \frac{\partial p^n_m}{\partial p^i_k} + \frac{\partial p^n_m}{\partial p^i_m} \frac{\partial p^n_m}{\partial p^n_k} = 0.
$$

Il est à peu près évident que *ces conditions ne sont pas suffisantes*. En effet, le calcul s'applique, quelles que soient les fonctions $F_1, F_2, \ldots, F_{m-1}$, et le système (42) n'est en involution que si ces fonctions satisfont aux conditions d'intégrabilité.

Si l'on prend l'équation de Monge sous la forme la plus générale (58), les équations de condition (62) prennent la forme plus symétrique

$$
(63) \qquad \frac{\dfrac{\partial \Phi}{\partial p^i_m}}{\dfrac{\partial \Phi}{\partial p^n_m}} = \frac{\dfrac{\partial \Phi}{\partial p^i_k}}{\dfrac{\partial \Phi}{\partial p^n_k}}. \qquad \left\{ \begin{matrix} k = 1, 2, \ldots, m-1 \\ i = 1, 2, \ldots, n-1 \end{matrix} \right\}
$$

[**19**] Les équations (62) forment un système de $(m-1)(n-1)$ équations aux dérivées partielles du premier ordre entre $mn-1$ variables indépendantes et une fonction inconnue. Ces équations forment bien un système en involution puisque les dérivées de la fonction inconnue y figurent seules. Une intégrale complète doit donc dépendre de $mn - (m-1)(n-1) = m + n - 1$ constantes arbitraires. Or ce

système (62) est un système *semi-linéaire* qui admet une intégrale complète au sens de Lie représentée par le système suivant de n équations entre les variables

$$(64)\qquad \begin{cases} p_m^1 = a_1 p_1^1 + \ldots + a_{m-1} p_{m-1}^1 + b_1, \\ p_m^2 = a_1 p_1^2 + \ldots + a_{m-1} p_{m-1}^2 + b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_m^n = a_1 p_1^n + \ldots + a_{m-1} p_{m-1}^n + b_n, \end{cases}$$

où $a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}, b_1, \ldots, b_n$ sont des constantes arbitraires. Ces équations représentent dans l'espace à mn dimensions (p_k^i) une multiplicité ponctuelle $\mathfrak{L}$ à $(m-1)n$ dimensions. Cherchons à déterminer une multiplicité $\mathfrak{M}$ d'éléments de contact unis ayant pour support ponctuel la multiplicité $\mathfrak{L}$. En d'autres termes cherchons à déterminer $mn-1$ coefficients P_k^i $(P_m^n = -1)$, de façon à vérifier la relation

$$(65)\qquad \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} P_k^i\, dp_k^i = 0,$$

les variables p_k^i étant liées par les relations (64). On tire de ces relations

$$dp_m^i = a_1 dp_1^i + a_2 dp_2^i + \ldots + a_{m-1} dp_{m-1}^i,$$

et l'équation (65) devient

$$(66)\qquad \begin{aligned} \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m-1} P_k^i\, dp_k^i &+ P_m^1\left(a_1 dp_1^1 + \ldots + a_{m-1} dp_{m-1}^1\right) \\ &+ P_m^2\left(a_1 dp_1^2 + \ldots + a_{m-1} dp_{m-1}^2\right) \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ P_m^n\left(a_1 dp_1^n + \ldots + a_{m-1} dp_{m-1}^n\right) = 0. \end{aligned}$$

En égalant à zéro les coefficients des dp_k^i, on obtient les $(m-1)n$ relations

$$P_k^n + P_m^n a_k = 0, \qquad P_k^i + P_m^i a_k = 0; \qquad (i<n);$$

puisqu'on a pris $P_m^n = -1$, on tire de ces relations

$$(67)\qquad P_k^n = a_k, \qquad P_k^i = -P_m^i a_k,$$

et par suite

$$(68)\qquad P_k^i + P_m^i P_k^n = 0;$$

il suffit de remplacer P_k^i par $\frac{\partial p_m^n}{\partial p_k^i}$ pour retrouver le système (62). La multiplicité $\mathfrak{M}$ d'éléments de contact à $mn - 1$ dimensions représentée par les équations (64) et (67) est donc une intégrale complète au sens de Lie du système (62).

Les équations (62), ou (68), expriment que les équations (64) sont compatibles en $a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}$. Il revient donc au même d'intégrer le système (68) à une seule inconnue p_m^n, ou d'intégrer le système formé par les équations (64) et (67), où les inconnues sont $p_m^n, a_1, \ldots, a_{m-1}, b_1, b_2, \ldots, b_n$, ce qui revient au fond à employer la méthode de la variation des constantes.

La relation fondamentale (65) devient, en tenant compte des formules (64) et (67) elles-mêmes,

$$
\begin{aligned}
(69) \qquad & P_m^1\left[p_1^1 da_1 + \ldots + p_{m-1}^1 da_{m-1} + db_1\right] \\
& + P_m^2\left[p_1^2 da_1 + \ldots + p_{m-1}^2 da_{m-1} + db_2\right] \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + P_m^{n-1}\left[p_1^{n-1} da_1 + \ldots + p_{m-1}^{n-1} da_{m-1} + db_{n-1}\right] \\
& - \left[p_1^n da_1 + \ldots + p_{m-1}^n da_{m-1} + db_n\right] = 0,
\end{aligned}
$$

d'où l'on conclut qu'*il existe une relation au moins entre les fonctions inconnues*(¹) $a_1, \ldots, a_{m-1}, b_1, b_2, \ldots, b_n$, indépendante des variables p_k^i.

[20] Supposons, pour prendre le cas général, que $a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}, b_1, \ldots, b_n$ soient des fonctions de r paramètres variables distincts $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$, contenant d'ailleurs d'une façon quelconque les x_i, qui sont toujours traités comme des constantes dans ce calcul. En remplaçant $da_1, \ldots, da_{m-1}, db_1, \ldots, db_n$ par leurs expressions

---

(¹) On peut aussi arriver à ce résultat par la méthode employée au n° 11. Soit $p_m^n = f$ une intégrale du système (62); posons

$$
a_k = \frac{\partial f}{\partial p_k^n}, \qquad b_i = p_m^i - a_1 p_1^i - \ldots - a_{m-1} p_{m-1}^i,
$$
$$
k = 1, 2, \ldots, m-1; \qquad i = 1, 2, \ldots, n.
$$

On vérifie sans peine, en se servant des équations (62), que ces $m+n-1$ fonctions sont liées par une relation ou moins. Pour avoir le nombre des relations distinctes, il suffit de chercher l'ordre des premiers déterminants déduits du tableau des dérivées partielles de ces $m+n-1$ fonctions qui ne sont pas identiquement nuls.

développées dans la formule (69) et en égalant à zéro les coefficients de $d\alpha_1, \ldots, d\alpha_r$, on obtient r relations nouvelles

$$
\begin{aligned}
(70) \qquad & \mathrm{P}^1_m\left[p^1_1\frac{\partial a_1}{\partial\alpha_j}+\ldots+p^1_{m-1}\frac{\partial a_{m-1}}{\partial\alpha_j}+\frac{\partial b_1}{\partial\alpha_j}\right]\\
&+\mathrm{P}^2_m\left[p^2_1\frac{\partial a_1}{\partial\alpha_j}+\ldots+p^2_{m-1}\frac{\partial a_{m-1}}{\partial\alpha_j}+\frac{\partial b_2}{\partial\alpha_j}\right]\\
&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+\mathrm{P}^{n-1}_m\left[p^{n-1}_1\frac{\partial a_1}{\partial\alpha_j}+\ldots+p^{n-1}_{m-1}\frac{\partial a_{m-1}}{\partial\alpha_j}+\frac{\partial b_{n-1}}{\partial\alpha_j}\right]\\
&-\left[p^n_1\frac{\partial a_1}{\partial\alpha_j}+\ldots+p^n_{m-1}\frac{\partial a_{m-1}}{\partial\alpha_j}+\frac{\partial b_n}{\partial\alpha_j}\right]=0\\
&\qquad\qquad j=1,2,\ldots,r.
\end{aligned}
$$

L'intégrale correspondante du système (62) s'obtiendra en éliminant $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$, $\mathrm{P}^1_m, \ldots, \mathrm{P}^{n-1}_m$ entre les $n+r$ équations (64) et (70). Si $r<n$, il suffira d'éliminer $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ entre les n équations (62), ce qui conduira à plusieurs relations distinctes entre les p^i_k, si $r<n-1$, et par suite à une intégrale au sens de Lie des équations (60). Ce cas sera étudié plus loin.

Supposons $r\geqslant n$. L'élimination de $\mathrm{P}^1_m, \mathrm{P}^2_m, \ldots, \mathrm{P}^{n-1}_m$ entre les r équations (70) conduira à un système de $r-n+1$ équations distinctes que l'on obtiendra en égalant à zéro tous les déterminants d'ordre n déduits du tableau à n lignes et à r colonnes que l'on obtient en prenant les coefficients de $\mathrm{P}^1_m, \mathrm{P}^2_m, \ldots, \mathrm{P}^{n-1}_m$, $\mathrm{P}^n_m=-1$, dans les r équations (70). L'équation de Monge s'obtiendra encore en éliminant α_1, $\alpha_2, \ldots, \alpha_r$ entre les n équations (64) et les $r-n+1$ équations nouvelles.

Pour retrouver les équations (45) et (47), il suffit de supposer $r=n$, et de remplacer $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ par $q_1, q_2, \ldots, q_n$ respectivement, en prenant aussi $b_1=q_1, \ldots, b_n=q_n$, $a_1=\mathrm{F}_1, \ldots, a_{m-1}=\mathrm{F}_{m-1}$. D'une façon générale, si $r=n$, l'intégration de l'équation de Monge correspondante revient à l'intégration du système de deux équations de Pfaff

$$(71)\quad \Omega = dx_{m+n}-b_1dx_1-\ldots-b_ndx_n-a_1dx_{n+1}-\ldots-a_{m-1}dx_{m+n-1}=0,$$

$$(72)\qquad \Omega_1=\lambda_1\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha_1}+\lambda_2\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha_2}+\ldots+\lambda_n\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha_n}=0;$$

pour que l'équation de Monge définisse les multiplicités singulières d'un système de Pfaff, il faut en outre que l'équation $\Omega=0$ soit de classe $2n+1$. S'il en est ainsi, l'équation (71) est identique à l'équation de Pfaff à laquelle conduit l'intégration du système en involution obtenu par l'élimination de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ entre les $n+m-1$ équations

$$q_1=b_1,\quad \ldots,\quad q_n=b_n,\quad q_{n+1}=a_1,\quad \ldots,\quad q_{n+m-1}=a_{m-1}.$$

[21] Lorsque l'équation de Monge provient d'un système (64) où $a_1, \ldots, a_{m-1}$, $b_1, \ldots, b_n$ dépendent de $r > n$ paramètres, elle ne définit pas les multiplicités singulières d'un système en involution; cependant cette équation peut encore, sous certaines conditions, appartenir à la première classe.

Les équations (70) peuvent être remplacées par $r-n+1$ groupes de n équations

$$
(73)\quad
\begin{aligned}
&\lambda_{j1}\left(p_1^1\frac{\partial a_1}{\partial\alpha_1}+\ldots+\frac{\partial b_1}{\partial\alpha_1}\right)+\ldots+\lambda_{j,n-1}\left(p_1^1\frac{\partial a_1}{\partial\alpha_{n-1}}+\ldots+\frac{\partial b_1}{\partial\alpha_{n-1}}\right)\\
&\qquad\qquad+\lambda_j\left(p_1^1\frac{\partial a_1}{\partial\alpha_{n+j}}+\ldots+\frac{\partial b_1}{\partial\alpha_{n+j}}\right)=0,\\
&\lambda_{j1}\left(p_1^2\frac{\partial a_1}{\partial\alpha_1}+\ldots+\frac{\partial b_2}{\partial\alpha_1}\right)+\ldots+\lambda_{j,n-1}\left(p_1^2\frac{\partial a_1}{\partial\alpha_{n-1}}+\ldots+\frac{\partial b_2}{\partial\alpha_{n-1}}\right)\\
&\qquad\qquad+\lambda_j\left(p_1^2\frac{\partial a_1}{\partial\alpha_{n+j}}+\ldots+\frac{\partial b_2}{\partial\alpha_{n+j}}\right)=0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\lambda_{j1}\left(p_1^n\frac{\partial a_1}{\partial\alpha_1}+\ldots+\frac{\partial b_n}{\partial\alpha_1}\right)+\ldots+\lambda_{j,n-1}\left(p_1^{n-1}\frac{\partial a_1}{\partial\alpha_{n-1}}+\ldots+\frac{\partial b_n}{\partial\alpha_{n-1}}\right)\\
&\qquad\qquad+\lambda_j\left(p_1^n\frac{\partial a_1}{\partial\alpha_{n+j}}+\ldots+\frac{\partial b_n}{\partial\alpha_{n+j}}\right)=0,\\
&\qquad\qquad j=0,1,2,\ldots,r-n.
\end{aligned}
$$

En multipliant les équations (64) par $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$ respectivement, on obtient encore par addition l'équation (71). En opérant de même avec les équations (73), on obtient un système de $r-n+1$ équations de Pfaff

$$
(74)\quad
\begin{aligned}
&\lambda_{j1}\left[\frac{\partial a_1}{\partial\alpha_1}dx_{n+1}+\ldots+\frac{\partial a_{m-1}}{\partial\alpha_1}dx_{n+m-1}+\frac{\partial b_1}{\partial\alpha_1}dx_1+\ldots+\frac{\partial b_n}{\partial\alpha_1}dx_n\right]\\
&+\lambda_{j2}\left[\frac{\partial a_1}{\partial\alpha_2}dx_{n+1}+\ldots+\frac{\partial a_{m-1}}{\partial\alpha_2}dx_{n+m-1}+\frac{\partial b_1}{\partial\alpha_2}dx_1+\ldots+\frac{\partial b_n}{\partial\alpha_2}dx_n\right]\\
&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+\lambda_{j,n-1}\left[\frac{\partial a_1}{\partial\alpha_{n-1}}dx_{n+1}+\ldots+\frac{\partial a_{m-1}}{\partial\alpha_{n-1}}dx_{n+m-1}+\frac{\partial b_1}{\partial\alpha_{n-1}}dx_1+\ldots+\frac{\partial b_n}{\partial\alpha_{n-1}}dx_n\right]\\
&+\lambda_j\left[\frac{\partial a_1}{\partial\alpha_{n+j}}dx_{n+1}+\ldots+\frac{\partial a_{m-1}}{\partial\alpha_{n+j}}dx_{m+n-1}+\frac{\partial b_1}{\partial\alpha_{n+j}}dx_1+\ldots+\frac{\partial b_n}{\partial\alpha_{n+j}}dx_n\right]=0,\\
&\qquad\qquad j=0,1,2,\ldots,r-n,
\end{aligned}
$$

que l'on peut encore écrire sous forme abrégée

$$
(74')\qquad \lambda_{j1}\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha_1}+\ldots+\lambda_{j,n-1}\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha_{n-1}}+\lambda_j\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha_{n+j}}=0.
$$

En définitive, *l'intégration de l'équation de Monge se ramène à l'intégration d'un système de Pfaff* (Σ) *de* $r-n+2$ *équations formé de l'équation* $\Omega = 0$, *et de* $r-n+1$ *équations qui expriment que les* r *formes de Pfaff* $\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha_1}, \ldots, \frac{\partial\Omega}{\partial\alpha_r}$ *sont des combinaisons linéaires de* $n-1$ *d'entre elles.*

La classe $2\rho+1$ de l'équation $\Omega = 0$ est au plus égale à $n+m+r$ et au moins égale à $2r+1$ (n° 13). L'équation étant mise sous forme canonique

$$(75) \qquad dZ - P_1 dX_1 - \ldots - P_\rho dX_\rho = 0,$$

les variables x_i, α_k s'expriment au moyen des $2\rho+1$ variables canoniques X_i, P_i, Z, et de σ variables non canoniques, $u_1, u_2, \ldots, u_\sigma$, le nombre total $2\rho+\sigma+1$ de ces variables étant égal à $n+m+r$, de sorte que X_i, P_i, Z, u_h sont $n+m+r$ fonctions distinctes des variables x_i, α_k. Les $r+n-1$ équations (74') sont aussi des prolongements de l'équation $\Omega = 0$ (n° 13), de sorte qu'après l'introduction des variables canoniques les premiers membres ne renferment que les différentielles des variables canoniques dX_i, dP_i, dZ.

Soit $\mathfrak{M}_n$ une multiplicité intégrale à n dimensions du sytème de Pfaff (Σ); X_i, P_i, Z, u_h sont des fonctions de n variables indépendantes et, en particulier, les $2\rho+1$ fonctions X_i, P_i, Z dépendent au plus de n variables indépendantes, mais peuvent dépendre de moins de n variables. Supposons d'abord que X_i, P_i, Z soient des fonctions de n variables

$$(76) \qquad X_i = \varphi_i(t_1, \ldots, t_n), \qquad P_i = \psi_i(t_1, \ldots, t_n), \qquad Z = \pi(t_1, \ldots, t_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, \rho)$$

satisfaisant à l'équation (75). Comme ρ est supérieur à n, on peut trouver explicitement tous les systèmes de $2\rho+1$ fonctions de n variables satisfaisant à cette équation.

En faisant cette substitution dans $\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha_1}, \ldots, \frac{\partial\Omega}{\partial\alpha_r}$, nous aurons r formes de Pfaff en $dt_1, dt_2, \ldots, dt_n$, dont les coefficients dépendent de $t_1, t_2, \ldots, t_n$ et des σ variables non canoniques $u_1, u_2, \ldots, u_\sigma$. Pour que ces r formes de Pfaff soient des combinaisons linéaires de $n-1$ d'entre elles, les coefficients doivent satisfaire à $r-n+1$ équations de condition

$$(77) \qquad \prod_j (t_1, \ldots, t_n; u_1, \ldots, u_\sigma) = 0 \qquad j = 1, 2, \ldots, r-n+1.$$

Si les coefficients de la forme de Pfaff ne satisfont à aucune condition particulière, les équations précédentes sont compatibles en $u_1, u_2, \ldots, u_\sigma$, pourvu que le nombre σ soit au moins égal à $r-n+1$, ce qui exige que l'on ait

$$(78) \qquad 2\rho+1 \leqslant m+2n-1.$$

On peut aussi trouver explicitement toutes les intégrales de l'équation canonique (75), où X_i, P_i, Z sont fonctions de $n' < n$ variables

$$(79)\qquad X_i = \varphi_i(t_1, t_2, \ldots, t_{n'}),\quad P_i = \psi_i(t_1, t_2, \ldots, t_{n'}),\quad Z = \pi(t_1, t_2, \ldots, t_{n'});$$

en faisant la substitution dans $\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha_1}, \ldots, \frac{\partial \Omega}{\partial \alpha_r}$, on obtient r formes de Pfaff en dt_1, $dt_2, \ldots, dt_{n'}$. Le nombre n' étant inférieur à n, ces r formes se réduisent à moins de n formes linéairement distinctes. Les équations (79) représentent donc une intégrale du système (Σ) à $n' + \sigma$ dimensions, car $t_1, \ldots, t_{n'}, u_1, \ldots, u_\sigma$ sont des variables indépendantes. Pour pouvoir en déduire une intégrale à n dimensions, il suffit que $n' + \sigma$ soit égal ou supérieur à n. On pourra donc de cette façon obtenir des intégrales à n dimensions de (Σ) pourvu que le nombre σ des variables non caractéristiques ne soit pas nul.

En résumé, *on peut toujours obtenir sous forme explicite des intégrales à n dimensions du système* (Σ), *si le nombre* σ *n'est pas nul. Pour qu'on puisse obtenir l'intégrale générale, il suffit que ce nombre* σ *soit supérieur à* $r - n + 1$.

Supposons par exemple qu'il existe une seule relation entre $a_1, \ldots, a_{m-1}, b_1, \ldots, b_n$. On a dans ce cas $r = m + n - 2$; la forme Ω dépend de $2m + 2n - 2$ variables, la classe $2\rho + 1$ est égale à $2m + 2n - 3$, et l'on a $\sigma = 1$. On peut donc obtenir sous forme explicite des intégrales à n dimensions de (Σ) au moyen des intégrales à $(n - 1)$ dimensions de l'équation canonique (75).

VI

[22] Considérons maintenant le cas où, dans les formules (64), $a_1, \ldots, a_{m-1}$, $b_1, \ldots, b_n$ sont des fonctions de r paramètres $(r < n)$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$, et des $m + n$ variables x_i,

$$(64^{bis})\qquad p_m^i = a_1 p_1^i + \ldots + a_{m-1} p_{m-1}^i + b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

L'élimination de ces r paramètres conduira à un système de $n - r$ équations aux dérivées partielles du premier ordre entre n variables $x_1, \ldots, x_n$, m fonctions $x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}$ de ces variables et leurs dérivées partielles p_k^i. Le nombre des fonctions inconnues peut être supérieur, égal ou inférieur à celui des équations suivant que le nombre $m + r - n$ est positif, nul ou négatif. Dans tous les cas, l'intégration de ce système d'équations est équivalente à l'intégration du système (64^{bis}), où les inconnues sont $x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$. Il est clair que tout système de solutions de ces équations

$$(80) \quad \begin{cases} x_{n+1} = f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, x_{n+m} = f_m(x_1, \ldots, x_n), \\ \alpha_1 = \varphi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \quad \alpha_r = \varphi_r(x_1, \ldots, x_n) \end{cases}$$

représente une multiplicité M_n à n dimensions de l'équation de Pfaff

$$(81) \quad \Omega = a_1 dx_{n+1} + \ldots + a_{m-1} dx_{m+n-1} + b_1 dx_1 + \ldots + b_n dx_n - dx_{m+n} = 0,$$

où figurent les $m+n+r$ variables $x_1, \ldots, x_{m+n}, \alpha_1, \ldots, \alpha_r$. Inversement, toute multiplicité intégrale à n dimensions de l'équation $\Omega = 0$ fournira un système d'intégrales des équations (64^{bis}) pourvu que, sur cette multiplicité, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ne soient liées par aucune relation, et puissent être prises pour variables indépendantes. Cette restriction étant énoncée une fois pour toutes, nous sommes donc ramenés à la recherche des intégrales à n dimensions de l'équation (81), problème qui sera complètement résolu si l'on sait ramener l'équation à une forme canonique.

Soit $c = 2\rho + 1$ la classe de l'équation $\Omega = 0$; d'après ce qu'on a vu plus haut, le nombre ρ est au moins égal à r (n° 13) (Nous supposons, bien entendu, que le nombre r des paramètres α_i ne peut pas être diminué). D'autre part, la classe ne peut dépasser $m+n+r$; on a donc la double inégalité

$$(82) \quad 2r + 1 \leqslant 2\rho + 1 \leqslant m + n + r.$$

Pour avoir une intégrale de l'équation $\Omega = 0$, il faut établir un système de $\rho + 1$ relations au moins entre les variables qui figurent dans la forme canonique et par suite entre les $m+n+r$ variables x_i, α_j. Pour qu'il y ait des intégrales à n dimensions, il faut donc que $m+n+r$ soit supérieur ou au moins égal à $n+\rho+1$, c'est-à-dire que l'on ait

$$(83) \quad m + r \geqslant \rho + 1,$$

condition que l'on peut encore écrire

$$(83') \quad 2\rho + 1 \leqslant 2m + 2r - 1.$$

Cette dernière inégalité sera certainement vérifiée, en tenant compte des inégalités (82) si l'on a

$$2m + 2r - 1 \geqslant m + n + r,$$

ou

$$(84) \quad m + r \geqslant n + 1,$$

c'est-à-dire *si le nombre total des variables qui figurent dans* Ω *est au moins égal à* $2n+1$.

La condition (83) est vérifiée aussi si $m+r=n$. Dans ce cas en effet Ω contient $2n$ variables et l'équation $\Omega=0$ est de classe $2n-1$ au plus ($\rho \leqslant n-1$). On a donc bien $m+r \geqslant \rho+1$. Mais si $m+r$ est inférieur à n, la condition (83) n'est pas nécessairement vérifiée. Supposons par exemple $m+r=n-1$. La forme Ω renferme $2n-1$ variables, et si les fonctions a_i, b_k ne satisfont à aucune condition particulière, l'équation $\Omega=0$ est de classe $2n-1$ ($\rho=n-1$) et la condition (83) n'est pas vérifiée. Dans ce cas, le système obtenu par l'élimination des r paramètres se compose de $m+1$ équations à m inconnues, qui ne sont pas nécessairement compatibles.

En résumé, si $m+r<n$, l'équation $\Omega=0$ n'admet de multiplicités intégrales à n dimensions que si la classe de cette équation vérifie l'inégalité (83). On peut toujours reconnaître par des calculs réguliers si cette condition est satisfaite, sans effectuer aucune intégration. Dans le cas où ρ a sa valeur minimum r, les $m+n+r$ variables doivent satisfaire à $r+1$ conditions. On a donc des intégrales à n dimensions dépendant de $m-1$ fonctions arbitraires de n variables.

Lorsque $m+r$ est $\geqslant n$, ou lorsque, $m+r$ étant inférieur à n, les conditions subsidiaires sont satisfaites, le système obtenu par l'élimination des α_i entre les équations (64^{bis}) est de la première classe, que le nombre des inconnues soit supérieur, égal ou inférieur à celui des équations. En particulier, on pourra obtenir ainsi une infinité de systèmes d'équations de Monge appartenant à la première classe.

[**23**] Il nous reste encore à examiner comment on peut reconnaître si une équation de Monge (ou un système d'équations aux dérivées partielles), où figurent n variables indépendantes, m fonctions inconnues et leurs dérivées partielles du premier ordre, peut être obtenue par l'élimination de r paramètres entre n équations de la forme (64). Si $r=n-1$, on obtient une seule équation $\Phi=0$, qui contient au moins une dérivée des fonctions inconnues, soit p_m^n. Cette équation étant supposée résolue par rapport à p_m^n, nous savons déjà que la fonction $p_m^n=f$ doit vérifier les équations (62). De plus p_m^n *est une fonction linéaire de* $p_1^n, p_2^n, \ldots, p_{m-1}^n$. On peut en effet faire l'élimination des $n-1$ paramètres α_i entre les équations (64) en résolvant les $n-1$ premières équations par rapport à ces paramètres, et portant les valeurs obtenues dans la dernière équation. Ce calcul ne serait impossible que dans le cas où l'on pourrait déduire des $n-1$ premières équations une relation ne contenant pas les paramètres. Cette relation serait identique à l'équation de Monge $\Phi=0$ et ne contiendrait pas p_m^n contrairement à l'hypothèse.

L'équation de Monge est donc de la forme

$$p_m^n = A_1 p_1^n + A_2 p_2^n + \ldots + A_{m-1} p_{m-1}^n + B_n, \tag{85}$$

les fonctions $A_1, A_2, \ldots, A_{m-1}, B_n$ ne contenant aucune des dérivées p_k^n. Posons alors

$$a_1 = A_1, \ldots, a_{m-1} = A_{m-1}, \quad b_n = B_n, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1).$$
$$b_i = p_m^i - a_1 p_1^i - \ldots - a_{m-1} p_{m-1}^i,$$

En tenant compte des relations (62), on vérifie facilement que tous les détermi nants d'ordre n déduits du tableau des dérivées des coefficients a_i, b_j par rapport aux variables p_k^i sont nuls identiquement. Le calcul est tout pareil à celui du n° 11. Ces coefficients a_i, b_j peuvent donc s'exprimer au moyen des variables x_i et de $n-1$ paramètres. Il s'ensuit que l'équation (85) provient bien de l'élimination de $n-1$ paramètres entre n équations de la forme (64).

Prenons encore le cas où les fonctions a_i, b_j dépendent de $n-2$ paramètres, de façon que l'élimination conduise à un système de deux équations de Monge. Supposons, pour fixer les idées, que l'on puisse résoudre les $n-2$ premières équations par rapport à ces $n-2$ paramètres; en portant les valeurs ainsi obtenues dans les deux dernières équations du système, on obtient un système de deux équations de Monge de la forme

$$(86) \qquad \begin{cases} p_m^{n-1} = A_1 p_1^{n-1} + \ldots + A_{m-1} p_{m-1}^{n-1} + B_{n-1}, \\ p_m^n = A_1 p_1^n + \ldots + A_{m-1} p_{m-1}^n + B_n, \end{cases}$$

$A_1, A_2, \ldots, A_{m-1}, B_{n-1}, B_n$ ne renfermant aucune des dérivées p_k^{n-1}, p_k^n des fonctions inconnues.

Inversement, étant donné un système de deux équations de Monge de la forme (86), pour reconnaître s'il provient de l'élimination de $n-2$ paramètres entre n équations de la forme (64), on posera

$$a_1 = A_1, \ldots, a_{m-1} = A_{m-1}, \qquad b_{n-1} = B_{n-1}, \qquad b_n = B_n,$$
$$b_i = p_m^i - a_1 p_1^i - \ldots - a_{m-1} p_{m-1}^i, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-2).$$

Il faudra que ces $m+n-1$ fonctions a_i, b_j s'expriment au moyen de $n-2$ d'entre elles, et des variables $x_1, \ldots, x_{m+n}$.

La méthode serait évidemment la même, quel que soit le nombre des paramètres.

[**24**] La théorie précédente s'applique en particulier aux équations de Monge qui admettent une *intégrale complète*. Soit

$$(87) \qquad V(x_1, x_2, \ldots, x_{m+n}; \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}) = \alpha_n$$

une relation entre n variables indépendantes $x_1, \ldots, x_n$, m fonctions $x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}$ de ces variables et n constantes arbitraires $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Si l'on attribue à ces constantes des valeurs déterminées, l'équation (87) est vérifiée par une infinité de systèmes de m fonctions, puisqu'on peut prendre à volonté $m-1$ de ces fonctions. Tous ces systèmes de m fonctions satisfont évidemment à l'équation de Monge

$$\Phi\left(x_i;\, p_k^i\right) = 0 \tag{88}$$

obtenue en éliminant $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$ entre les n équations

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} + \frac{\partial V}{\partial x_{n+1}} p_1^i + \ldots + \frac{\partial V}{\partial x_{n+m}} p_m^i = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{89}$$

La méthode classique de la variation des constantes permet d'obtenir toutes les solutions de cette équation au moyen de l'intégrale complète. En effet, le système (89) est bien de la forme que nous venons d'étudier, et il revient au même d'intégrer l'équation de Monge (88) ou le système des n équations (89) à $m+n-1$ inconnues $x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$.

L'intégration de ce système se ramène elle-même à l'intégration de l'équation de Pfaff

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} dx_n + \frac{\partial V}{\partial x_{n+1}} dx_{n+1} + \ldots + \frac{\partial V}{\partial x_{n+m}} dx_{n+m} = 0, \tag{90}$$

qui est mise immédiatement sous forme canonique

$$d\alpha_n - \frac{\partial V}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 - \ldots - \frac{\partial V}{\partial \alpha_{n-1}} d\alpha_{n-1} = 0. \tag{91}$$

Pour qu'une équation de Monge (88) puisse être intégrée de cette façon, il faut d'abord que la fonction $p_m{}^n = f$ obtenue en résolvant cette équation vérifie les conditions du paragraphe précédent. S'il en est ainsi, l'intégration de cette équation se ramène bien à l'intégration d'une équation de Pfaff

$$\Omega = A_1 dx_1 + \ldots + A_n dx_n + A_{n+1} dx_{n+1} + \ldots + A_{n+m} dx_{m+n} = 0 \tag{92}$$

les coefficients a_i, b_k dépendant des variables x_i et de $n-1$ arguments $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$. Cette équation doit pouvoir être identifiée avec l'équation (90), ce qui exige que les équations

$$\frac{\dfrac{\partial V}{\partial x_1}}{A_1} = \frac{\dfrac{\partial V}{\partial x_2}}{A_2} = \ldots = \frac{\dfrac{\partial V}{\partial x_{n+m}}}{A_{n+m}}$$

soient compatibles, c'est-à-dire que l'équation $\Omega = 0$ soit complètement intégrable, quand on y considère $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ comme constants.

Tout ceci s'étend sans difficulté aux systèmes d'équations de Monge qui admettent une intégrale complète, c'est-à-dire aux systèmes obtenus en partant d'une équation

$$V(x_1, \ldots, x_{n+m}; \alpha_1, \ldots, \alpha_{h-1}) = \alpha_h$$

renfermant moins de n constantes arbitraires $(h < n)$.

L'élimination des $h-1$ paramètres $\alpha_1, \ldots, \alpha_{h-1}$ entre les n équations

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} + \frac{\partial V}{\partial x_{n+1}} p_1^i + \ldots + \frac{\partial V}{\partial x_{n+m}} p_m^i = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

conduira à un système de $n-h+1$ équations de Monge, dont l'intégration se ramène encore à l'intégration de l'équation de Pfaff

$$d\alpha_h = \frac{\partial V}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 + \ldots + \frac{\partial V}{\partial \alpha_{h-1}} d\alpha_{h-1},$$

qui est immédiate.

[25] On peut encore rattacher à cette théorie une équation de Monge que j'ai déjà signalée(¹) et dont l'intégration se ramène à celle d'une équation de Pfaff. Soient $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ n formes de Pfaff linéairement distinctes où figurent $n+m$ variables x_i et leurs différentielles.

L'équation

$$\Omega = \alpha_1 \omega_1 + \ldots + \alpha_n \omega_n = 0 \tag{93}$$

admet toujours des intégrales à n dimensions. Soient

$$x_{n+i} = f_i(x_1, \ldots, x_n), \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$
$$\alpha_k = \varphi_k(x_1, \ldots, x_n), \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

les formules définissant une de ces multiplicités. En égalant à zéro les coefficients de $dx_1, \ldots, dx_n$ dans Ω, on obtient évidemment n équations de la forme (64), linéaires et homogènes par rapport aux α_i. L'élimination de ces paramètres conduit à une équation de Monge dont le premier membre est un déterminant ayant pour éléments des fonctions linéaires des dérivées p_k^i. En multipliant par $dx_1, \ldots, dx_n$, cette équation peut s'écrire

$$\omega_1 \omega_2 \ldots \omega_n = 0, \tag{94}$$

(¹) *Leçons sur le problème de Pfaff*, p. 116.

$\omega_1 \omega_2 \ldots \omega_n$ désignant le produit symbolique de ces n formes linéaires. L'intégration de l'équation (94) est donc équivalente à l'intégration de l'équation de Pfaff (93), résultat que j'avais déjà obtenu.

Prenons encore le cas plus particulier où les équations $\omega_i = 0$ forment un système complètement intégrable.

L'équation (93) est de la forme

$$\alpha_1 d\varphi_1 + \alpha_2 d\varphi_2 + \ldots + \alpha_n d\varphi_n = 0,$$

tandis que l'équation (94) s'écrit symboliquement

$$d\varphi_1 . d\varphi_2, \ldots, d\varphi_n = 0.$$

Ce type d'équations a d'abord été étudié par Hamburger[1], qui a donné les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une équation de Monge où figurent m fonctions inconnues de n variables indépendantes puisse être ramenée à cette forme. Il serait facile de retrouver les conditions d'Hamburger au moyen de la méthode générale qui vient d'être exposée.

---

(1) *Journal de Crelle*, t. 100, 1887, p. 390-409.