

LOUIS ROY

## De la propagation des ondes sur les surfaces élastiques

*Annales de la faculté des sciences de Toulouse 3<sup>e</sup> série*, tome 22 (1930), p. 185-247

<[http://www.numdam.org/item?id=AFST\\_1930\\_3\\_22\\_\\_185\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AFST_1930_3_22__185_0)>

© Université Paul Sabatier, 1930, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

---

# DE LA PROPAGATION DES ONDES

## SUR LES SURFACES ÉLASTIQUES

Par M. LOUIS ROY.

---

### INTRODUCTION

Dans deux publications récentes<sup>(1)</sup>, nous avons développé la théorie de la surface élastique, considérée géométriquement du point de vue de MM. E. et F. Cosserat, d'après la méthode énergétique appliquée avec tant de succès par Duhem aux fluides et aux corps élastiques à trois dimensions. Suivant une distinction analogue à celle que nous avons déjà faite dans nos recherches antérieures sur la ligne élastique<sup>(2)</sup>, nous avons été conduits à considérer tout d'abord la *surface à six paramètres*, en chaque point de laquelle l'orientation du trièdre mobile est laissée arbitraire; puis la *surface à trois paramètres*, en chaque point de laquelle la connaissance de la surface moyenne détermine complètement l'orientation de ce trièdre. Nous nous proposons, dans ce qui suit, d'étudier les lois de la propagation des ondes, au sens d'Hugoniot, sur de telles surfaces.

Comme cette étude utilise nécessairement un certain nombre des résultats antérieurement obtenus, nous avons cru bon de les rappeler dans un chapitre préliminaire, qui a l'avantage de fixer en même temps les principales notations. Vient ensuite l'étude des ondes au point de vue cinématique, dans laquelle nous retrouvons,

---

(<sup>1</sup>) L. ROY, *Sur les équations générales des surfaces élastiques* (Journal de mathématiques pures et appliquées, t. VIII, 1929, p. 93 à 114); *Sur les équations générales des surfaces élastiques à trois paramètres* (Journal de l'École Polytechnique, 2<sup>e</sup> série, cahier n° 27, 1929, p. 159 à 203).

(<sup>2</sup>) L. ROY, *Sur les équations générales des lignes élastiques et la propagation des ondes* (Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 3<sup>e</sup> série, t. XVIII, 1926, p. 117 à 195).

comme il était à prévoir, plusieurs formules que nous avons autrefois rencontrées dans la propagation des ondes sur les membranes flexibles<sup>(1)</sup>.

L'étroite analogie, que nous avons déjà constatée entre les équations de la surface et de la ligne à six paramètres, se poursuit dans la théorie de la propagation des ondes. Mais une notable complication surgit dans le cas de la surface, du fait qu'il existe sur une surface une infinité de sens de propagation possibles, tandis que, sur une ligne, ce sens est celui de la ligne elle-même. Les équations relatives à la surface se compliquent donc de la présence des cosinus directeurs de la normale à l'image de l'onde, dans le plan des coordonnées curvilignes d'un point de cette surface.

Les équations de propagation sur la surface à six paramètres, obtenues en supposant indépendantes les composantes du déplacement et de la rotation virtuels du trièdre mobile, ne peuvent pas être appliquées sans précautions à la surface à trois paramètres, pour laquelle ces six composantes sont liées par trois relations. Il est donc indispensable de reprendre l'établissement de l'équation fondamentale des ondes de choc pour cette seconde classe de surfaces. Mais on se heurte alors à une difficulté, qui n'existait pas pour la ligne élastique et qui tient à ce que les conditions aux limites n'ont pas la même forme que pour la surface à six paramètres; cette circonstance nécessite, avec un changement de méthode, des calculs plus compliqués.

Le cas d'une surface de texture symétrique ou isotrope nous conduit à des résultats particulièrement intéressants : parmi les vitesses de propagation possibles que nous obtenons, se retrouvent celles que mettent en évidence les équations des mouvements tangentiels et transversaux des plaques planes; nous reconnaissons ainsi que ces formules anciennes restent valables pour des surfaces de forme quelconque.

Enfin, les conclusions très générales auxquelles nous aboutissons sont les suivantes :

*Aucune onde n'est susceptible de se propager sur une surface élastique affectée de viscosité;*

*Les lois de propagation établies pour les ondes de choc restent valables pour les ondes d'accélération et les ondes d'ordre supérieur.*

On voit que ces propositions sont identiques à celles que nous avons antérieurement énoncées au sujet des lignes élastiques. Comme elles s'appliquent également aux corps élastiques à trois dimensions, en se limitant toutefois aux déformations infiniment petites que nous avons seules envisagées, on voit qu'elles constituent, au point de vue de la propagation des ondes, la propriété la plus générale commune à tous les milieux élastiques, quel que soit le nombre de leurs dimensions.

---

<sup>(1)</sup> L. ROY, *Sur la propagation des ondes dans les membranes flexibles* (Journal de mathématiques pures et appliquées, 6<sup>e</sup> Série, t. VIII, 1912, p. 229 à 329).

Le présent Mémoire a été résumé en cinq Notes publiées dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* :

*L'équation fondamentale des ondes de choc sur les surfaces élastiques*, séance du 27 janvier 1930;

*La propagation des ondes sur les surfaces élastiques à six paramètres*, séance du 10 février 1930;

*La propagation des ondes sur les surfaces élastiques à trois paramètres*, séance du 11 juin 1930;

*La propagation des ondes sur les surfaces élastiques isotropes à trois paramètres*, séance du 23 juin 1930;

*La loi adiabatique dynamique relative aux surfaces élastiques*, séance du 7 juillet 1930.

---

## CHAPITRE I

### Généralités.

1. **Surface élastique à six paramètres.** — En un point  $M$  d'une surface  $S$ , élevons deux demi-normales égales et opposées  $MN_1$  et  $MN_2$ , dont la longueur totale  $e = N_1N_2$  soit très petite par rapport à ses dimensions transversales et à ses rayons de courbure principaux en chacun de ses points. Lorsque  $M$  décrit  $S$ , la longueur  $e$  restant constante ou variant avec continuité, le segment  $N_1N_2$  décrit un certain volume. On appelle *surface élastique* le corps élastique occupant, dans son état primitif, le volume ainsi défini. La surface élastique est donc limitée par ses deux faces  $S_1, S_2$ , lieux des points  $N_1, N_2$  et par un *bord* engendré par le segment  $N_1N_2$ , quand le point  $M$  décrit le contour de la *surface moyenne*  $S$ . La longueur  $e$  est l'*épaisseur* de la surface élastique au point  $M$ ; lorsque cette épaisseur est constante, les deux faces  $S_1, S_2$  sont parallèles à la surface moyenne.

La configuration géométrique de la surface élastique, à l'instant  $t$ , est regardée comme suffisamment déterminée par la connaissance d'une suite continue de trièdres trirectangles  $Muvw$ , dont le lieu des sommets, à l'instant considéré, est la surface  $S$  et dont les axes sont définis de la manière suivante : l'un des plans de coordonnées,  $uMv$  par exemple, est tangent en  $M$  à un feuillet matériel arbitrairement choisi passant par ce point et l'un des deux axes,  $Mu$  par exemple, est tangent en  $M$  à l'une des fibres de ce feuillet. L'orientation par rapport à  $S$  de chaque trièdre  $Muvw$  ou, pour abréger, de chaque trièdre  $(M)$  étant arbitraire, la configuration géométrique de la surface élastique, à l'instant  $t$ , se trouve complètement définie analytiquement par les coordonnées  $x, y, z$  de  $M$  relatives à un trièdre fixe trirectangle  $Oxyz$  et trois autres paramètres  $\theta, \varphi, \psi$ , au moyen desquels s'expriment les cosinus directeurs des axes  $Mu, Mv, Mw$  par rapport aux axes fixes. Ces six paramètres  $x, y, z; \theta, \varphi, \psi$  doivent être regardés comme des fonctions continues du temps  $t$  et de deux variables géométriques. On peut prendre pour celles-ci les arcs  $\widehat{PM} = s, \widehat{P_1M} = s_1$  de coordonnées curvilignes tracés sur  $S$  dans son état actuel; mais il est plus avantageux de prendre les arcs  $\widehat{pm} = \omega, \widehat{p_1m} = \omega_1$ , auxquels se réduisent les précédents, considérés comme des fibres matérielles, dans l'état primitif de  $S$ . Chaque point matériel  $M(x, y, z)$  de  $S$  est ainsi caractérisé, à tout instant, par un même système de valeurs de  $\omega, \omega_1$ . Comme état primitif, nous prendrons de prendre l'*état naturel*, c'est-à-dire l'état d'équilibre que prend la surface élastique, quand elle n'est soumise à aucune force extérieure et quand tous

ses points sont portés à une même température absolue  $T_0$ . Enfin, nous pouvons toujours supposer que le réseau  $(\omega, \omega_1)$  choisi sur l'état primitif est orthogonal.

Cela posé, aux éléments linéaires  $\overline{MM'} = ds$ ,  $\overline{MM'_1} = ds_1$ , tracés sur l'état actuel, correspondent sur l'état primitif les éléments  $\overline{mm'} = d\omega$ ,  $\overline{mm'_1} = d\omega_1$  et l'on a

$$(1) \quad ds = \sqrt{E} d\omega, \quad ds_1 = \sqrt{E_1} d\omega_1,$$

en posant

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial \omega}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \omega}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \omega}\right)^2 = \left|\left(\frac{\partial x}{\partial \omega}\right)^2\right|, \quad E_1 = \left|\left(\frac{\partial x}{\partial \omega_1}\right)^2\right|,$$

conformément à la notation abrégée dont nous avons fait un constant usage dans nos publications antérieures sur la ligne et la surface élastiques. Soient d'autre part

$$F = \left|\frac{\partial x}{\partial \omega} \frac{\partial x}{\partial \omega_1}\right|, \quad H = \sqrt{EE_1 - F^2}$$

les deux autres fonctions bien connues. Les déformations élastiques au sein de chaque tronçon étant toujours très petites, les fonctions  $E, E_1$ , égales à l'unité dans l'état primitif, en diffèrent très peu dans l'état actuel; de même la fonction  $F$ , nulle dans l'état primitif, est très petite dans l'état déformé. Il en résulte que la fonction  $H$  se réduit à  $\sqrt{EE_1}$  aux termes du second ordre près.

Traçons dans un plan deux axes de coordonnées rectangulaires  $O\omega, O\omega_1$ . A chaque point matériel  $M$  de  $S$  correspond, dans ce plan, un point fixe  $m$  de coordonnées  $\omega, \omega_1$ . Donc, à la surface moyenne  $S$  de contour  $C$  correspond, dans le plan  $\omega O\omega_1$ , une aire fixe  $\mathcal{A}$  de contour  $c$  et l'on trouve pour les cosinus directeurs  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  de la demi-normale extérieure à la courbe  $C$ , menée en un point  $M$  de cette courbe dans le plan tangent en  $M$  à  $S$ ,

$$(2) \quad kH(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial \omega} (E_1 \mathbf{a} - F \mathbf{b}) + \frac{\partial(x, y, z)}{\partial \omega_1} (-F \mathbf{a} + E \mathbf{b}),$$

$\mathbf{a}, \mathbf{b}$  désignant les cosinus directeurs de la demi-normale extérieure au contour  $c$  menée dans le plan  $\omega O\omega_1$  au point  $(\omega, \omega_1)$  homologue de  $M$  et

$$(3) \quad k = \frac{dL}{dl} = \sqrt{E_1 a^2 - 2Fab + Eb^2}$$

le rapport de deux éléments linéaires homologues  $dL, dl$  de  $C$  et de  $c$  aux mêmes points.

Enfin, à l'élément superficiel  $d\omega d\omega_1$  de la surface moyenne primitive correspond l'élément  $H d\omega d\omega_1$  de la surface moyenne actuelle. Ces deux éléments étant consti-

tués par les mêmes points matériels, les deux tronçons qui leur correspondent, découpés dans la surface élastique perpendiculairement suivant leurs contours, ont la même masse. De là, l'équation de continuité

$$(4) \quad \rho H = \rho_0.$$

$\rho$  et  $\rho_0$  désignant les densités superficielles de la surface élastique au point  $M$  dans son état actuel et dans son état primitif.

2. **Les douze fonctions caractéristiques de la déformation.** — Soient  $\alpha, \beta, \gamma; \alpha_1, \beta_1, \gamma_1; \alpha_2, \beta_2, \gamma_2$  les cosinus directeurs des axes  $Mu, Mv, Mw$  du trièdre  $(M)$  au point  $M(x, y, z)$  et à l'instant  $t$ . Les cosinus directeurs des axes du trièdre  $(M')$  au point infiniment voisin  $M' \left( x + \frac{\partial x}{\partial \omega} d\omega, y + \frac{\partial y}{\partial \omega} d\omega, z + \frac{\partial z}{\partial \omega} d\omega \right)$  et au même instant  $t$  sont

$$\alpha + \frac{\partial \alpha}{\partial \omega} d\omega, \quad \beta + \frac{\partial \beta}{\partial \omega} d\omega, \quad \dots, \quad \gamma_2 + \frac{\partial \gamma_2}{\partial \omega} d\omega.$$

On sait qu'on passe de  $(M)$  à  $(M')$  par une translation et une rotation infiniment petites, dont nous désignerons par  $(\xi, \eta, \zeta)d\omega$  et  $(p, q, r)d\omega$  les composantes suivant les axes mobiles  $Muvw$ , soit

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi = \left| \alpha \frac{\partial x}{\partial \omega} \right|, \quad \eta = \left| \alpha_1 \frac{\partial x}{\partial \omega} \right|, \quad \zeta = \left| \alpha_2 \frac{\partial x}{\partial \omega} \right|; \\ p = \left| \alpha_2 \frac{\partial \alpha_1}{\partial \omega} \right| = - \left| \alpha_1 \frac{\partial \alpha_2}{\partial \omega} \right|, \\ q = \left| \alpha \frac{\partial \alpha_2}{\partial \omega} \right| = - \left| \alpha_2 \frac{\partial \alpha}{\partial \omega} \right|, \\ r = \left| \alpha_1 \frac{\partial \alpha}{\partial \omega} \right| = - \left| \alpha \frac{\partial \alpha_1}{\partial \omega} \right|. \end{array} \right.$$

Soit de même  $(M'_1)$  le trièdre mobile au point  $M'_1 \left( x + \frac{\partial x}{\partial \omega_1} d\omega_1, y + \frac{\partial y}{\partial \omega_1} d\omega_1, z + \frac{\partial z}{\partial \omega_1} d\omega_1 \right)$  et au même instant  $t$ ; on passe de  $(M)$  à  $(M'_1)$  par la translation  $(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)d\omega_1$  et par la rotation  $(p_1, q_1, r_1)d\omega_1$  définies par les formules analogues à (5)

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi_1 = \left| \alpha \frac{\partial x}{\partial \omega_1} \right|, \quad \eta_1 = \left| \alpha_1 \frac{\partial x}{\partial \omega_1} \right|, \quad \zeta_1 = \left| \alpha_2 \frac{\partial x}{\partial \omega_1} \right|; \\ p_1 = \left| \alpha_2 \frac{\partial \alpha_1}{\partial \omega_1} \right| = - \left| \alpha_1 \frac{\partial \alpha_2}{\partial \omega_1} \right|, \\ q_1 = \left| \alpha \frac{\partial \alpha_2}{\partial \omega_1} \right| = - \left| \alpha_2 \frac{\partial \alpha}{\partial \omega_1} \right|, \\ r_1 = \left| \alpha_1 \frac{\partial \alpha}{\partial \omega_1} \right| = - \left| \alpha \frac{\partial \alpha_1}{\partial \omega_1} \right|. \end{array} \right.$$

On reconnaît alors que la déformation de la surface élastique dans son état actuel par rapport à son état primitif est caractérisée par les douze fonctions

$$(7) \quad \begin{cases} \xi - \xi_0, & \gamma_1 - \gamma_{10}, & \zeta - \zeta_0; & p - p_0, & q - q_0, & r - r_0; \\ \xi_1 - \xi_{10}, & \gamma_1 - \gamma_{10}, & \zeta_1 - \zeta_{10}; & p_1 - p_{10}, & q_1 - q_{10}, & r_1 - r_{10} \end{cases}$$

de  $\omega, \omega_1, t$ , l'indice zéro se rapportant à l'état primitif.

Cela posé, imprimons à la surface élastique un déplacement virtuel et soient  $\delta u, \delta v, \delta w$  les composantes suivant  $Muvw$  du déplacement virtuel de  $\mathbf{M}$ ;  $\delta\omega_u, \delta\omega_v, \delta\omega_w$  les composantes suivant les mêmes axes de la rotation virtuelle de  $(\mathbf{M})$ . Il en résulte pour  $\xi, \gamma_1, \zeta; p, q, r; \xi_1, \gamma_1, \dots, r_1$  les variations virtuelles

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta\xi &= \frac{\partial\delta u}{\partial\omega} + q\delta w - r\delta v + \gamma_1\delta\omega_w - \zeta\delta\omega_r, \\ \delta\gamma_1 &= \frac{\partial\delta v}{\partial\omega} + r\delta u - p\delta w + \zeta\delta\omega_u - \xi\delta\omega_w, \\ \delta\zeta &= \frac{\partial\delta w}{\partial\omega} + p\delta v - q\delta u + \xi\delta\omega_r - \gamma_1\delta\omega_u; \\ \delta p &= \frac{\partial\delta\omega_u}{\partial\omega} + q\delta\omega_w - r\delta\omega_r, \\ \delta q &= \frac{\partial\delta\omega_r}{\partial\omega} + r\delta\omega_u - p\delta\omega_w, \\ \delta r &= \frac{\partial\delta\omega_w}{\partial\omega} + p\delta\omega_r - q\delta\omega_u; \\ \delta\xi_1 &= \frac{\partial\delta u}{\partial\omega_1} + q_1\delta w - r_1\delta v + \gamma_1\delta\omega_w - \zeta_1\delta\omega_r, \\ &\dots\dots\dots \\ \delta p_1 &= \frac{\partial\delta\omega_u}{\partial\omega_1} + q_1\delta\omega_w - r_1\delta\omega_r, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \right.$$

**3. Potentiel thermodynamique interne et viscosité.** — Le potentiel thermodynamique interne de la surface élastique est

$$(9) \quad \Phi = \iint f(\xi - \xi_0, \gamma_1 - \gamma_{10}, \dots, r_1 - r_{10}, T, \omega, \omega_1) d\omega d\omega_1,$$

$f$  étant une fonction donnée des douze déformations (7), de la température absolue  $T$ , de  $\omega, \omega_1$  et l'intégration étant étendue à l'aire  $\mathcal{A}$ , image de  $\mathbf{S}$  dans le plan  $\omega O \omega_1$ ; la variation virtuelle isothermique de  $\Phi$  est ainsi

$$(10) \quad \delta_T \Phi = \iint (f'_\xi \delta\xi + f'_\gamma \delta\gamma_1 + \dots + f'_{r_1} \delta r_1) d\omega d\omega_1.$$

Le travail virtuel de viscosité est d'autre part

$$(11) \quad \delta \mathcal{C}_v = - \int \int (\mathcal{F} \delta \xi + \mathcal{G} \delta \eta + \mathcal{H} \delta \zeta + \mathcal{P} \delta p + \mathcal{Q} \delta q + \mathcal{R} \delta r \\ + \mathcal{F}_1 \delta \xi_1 + \mathcal{G}_1 \delta \eta_1 + \dots + \mathcal{R}_1 \delta r_1) d\omega d\omega_1,$$

$\mathcal{F}, \mathcal{G}, \dots, \mathcal{R}_1$  étant les *actions de viscosité*, fonctions des quinze paramètres dont dépend déjà la fonction  $f$  et des douze dérivées

$$\dot{\xi} = \frac{\partial \xi}{\partial t}, \quad \dot{\eta} = \frac{\partial \eta}{\partial t}, \quad \dots, \quad \dot{r}_1 = \frac{\partial r_1}{\partial t}^{(1)}.$$

D'après l'hypothèse de Lord Rayleigh, ces actions dérivent d'une *fonction dissipative*  $\mathcal{D}$ , forme quadratique définie positive de ces dérivées, telle qu'on ait

$$(12) \quad (\mathcal{F}, \mathcal{G}, \dots, \mathcal{R}_1) = \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial (\dot{\xi}, \dot{\eta}, \dots, \dot{r}_1)}.$$

Si maintenant on pose

$$(13) \quad \begin{cases} \mathcal{R}_u = -(f'_\xi + \mathcal{F}), & \mathcal{R}_v = -(f'_\eta + \mathcal{G}), & \mathcal{R}_w = -(f'_\zeta + \mathcal{H}), \\ \mathcal{C}_u = -(f'_p + \mathcal{P}), & \mathcal{C}_v = -(f'_q + \mathcal{Q}), & \mathcal{C}_w = -(f'_r + \mathcal{R}); \\ \mathcal{R}_{1u} = -(f'_{\xi_1} + \mathcal{F}_1), & \dots, & \mathcal{C}_{1w} = -(f'_{r_1} + \mathcal{R}_1), \end{cases}$$

il vient, d'après (10) et (11),

$$\delta \mathcal{C}_v - \delta_T \Phi = \int \int (\mathcal{R}_u \delta \xi + \mathcal{R}_v \delta \eta + \dots + \mathcal{C}_w \delta r \\ + \mathcal{R}_{1u} \delta \xi_1 + \mathcal{R}_{1v} \delta \eta_1 + \dots + \mathcal{C}_{1w} \delta r_1) d\omega d\omega_1,$$

ce que nous écrirons pour abréger

$$(14) \quad \delta \mathcal{C}_v - \delta_T \Phi = \int \int \sum |\mathcal{R}_u \delta \xi + \mathcal{C}_u \delta p| d\omega d\omega_1,$$

le signe  $\sum$  indiquant une somme de deux groupes de termes, le second se déduisant du premier qui est écrit par l'adjonction de l'indice 1.

---

(<sup>1</sup>) Pour abréger, nous représenterons très souvent de cette façon les dérivées par rapport au temps, soit  $\dot{\xi} = \frac{\partial \xi}{\partial t}$ ,  $\ddot{\xi} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$ ,  $\dots$ .

4. **Équations du mouvement.** — On obtient les équations du mouvement, d'après les principes de l'Énergétique, en écrivant qu'on a dans toute modification virtuelle

$$(15) \quad \delta \mathcal{C}_e + \delta \mathbf{J} + \delta \mathcal{C}_e - \delta \tau \Phi = 0,$$

$\delta \mathcal{C}_e$  désignant le travail virtuel des forces extérieures et  $\delta \mathbf{J}$  celui des forces d'inertie. Soient alors

$$(\mathcal{X}_e, \mathcal{Y}_e, \mathcal{Z}_e; \mathcal{L}_e, \mathcal{M}_e, \mathcal{N}_e) d\omega d\omega_i$$

les composantes suivant les axes  $Muvw$  de la force et du couple extérieurs appliqués au tronçon  $edS$ ;

$$(\mathcal{X}_i, \mathcal{Y}_i, \mathcal{Z}_i; \mathcal{L}_i, \mathcal{M}_i, \mathcal{N}_i) d\omega d\omega_i$$

les composantes analogues relatives aux forces d'inertie;

$$(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}; \mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{N}) dl$$

les composantes de la force et du couple extérieurs appliqués à un élément de bord  $edL$  de la surface, suivant les axes  $Muvw$  issus d'un point  $M$  de  $C$  appartenant à cet élément. On a

$$(16) \quad \delta \mathcal{C}_e + \delta \mathbf{J} = \int |\mathcal{X} \delta u + \mathcal{L} \delta \omega_u| dl \\ + \iint |(\mathcal{X}_e + \mathcal{X}_i) \delta u + (\mathcal{L}_e + \mathcal{L}_i) \delta \omega_u| d\omega d\omega_i.$$

En transportant les expressions (16) et (14) dans l'égalité (15) et en y remplaçant les variations  $\delta \xi, \delta \eta, \dots, \delta r_i$  par leurs valeurs (8), on reconnaît, après des intégrations par parties, qu'on doit avoir :

I. En chaque point de la surface élastique, les six équations indéfinies

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum \left( \frac{\partial \mathcal{R}_u}{\partial \omega} + q \mathcal{R}_w - r \mathcal{R}_v \right) = \mathcal{X}_e + \mathcal{X}_i, \\ \sum \left( \frac{\partial \mathcal{R}_v}{\partial \omega} + r \mathcal{R}_u - p \mathcal{R}_w \right) = \mathcal{Y}_e + \mathcal{Y}_i, \\ \sum \left( \frac{\partial \mathcal{R}_w}{\partial \omega} + p \mathcal{R}_v - q \mathcal{R}_u \right) = \mathcal{Z}_e + \mathcal{Z}_i; \\ \sum \left( \frac{\partial \mathcal{C}_u}{\partial \omega} + q \mathcal{C}_w - r \mathcal{C}_v + \tau \mathcal{R}_w - \zeta \mathcal{R}_v \right) = \mathcal{L}_e + \mathcal{L}_i, \\ \sum \left( \frac{\partial \mathcal{C}_v}{\partial \omega} + r \mathcal{C}_u - p \mathcal{C}_w + \zeta \mathcal{R}_u - \xi \mathcal{R}_w \right) = \mathcal{M}_e + \mathcal{M}_i, \\ \sum \left( \frac{\partial \mathcal{C}_w}{\partial \omega} + p \mathcal{C}_v - q \mathcal{C}_u + \xi \mathcal{R}_v - \tau \mathcal{R}_u \right) = \mathcal{N}_e + \mathcal{N}_i; \end{array} \right.$$

II. En chaque point de son contour, les six conditions aux limites

$$(18) \quad \begin{cases} \mathcal{X} + a\mathcal{R}_u + b\mathcal{R}_{1u} = 0; & \mathcal{L} + a\mathcal{C}_u + b\mathcal{C}_{1u} = 0, \\ \mathcal{Y} + a\mathcal{R}_v + b\mathcal{R}_{1v} = 0; & \mathcal{M} + a\mathcal{C}_v + b\mathcal{C}_{1v} = 0, \\ \mathcal{Z} + a\mathcal{R}_w + b\mathcal{R}_{1w} = 0; & \mathcal{N} + a\mathcal{C}_w + b\mathcal{C}_{1w} = 0. \end{cases}$$

La force d'inertie a pour composantes

$$(19) \quad \mathcal{X}_i = -\varepsilon_0 |\dot{x}\ddot{x}|, \quad \mathcal{Y}_i = -\varepsilon_0 |\dot{z}_1\ddot{x}|, \quad \mathcal{Z}_i = -\varepsilon_0 |\dot{z}_1\ddot{x}|$$

et le couple d'inertie

$$(20) \quad \begin{cases} \mathcal{L}_i = -A\dot{P} + F\dot{Q} + E\dot{R} + Q(EP + DQ - CR) \\ \quad \quad \quad - R(FP - BQ + DR), \\ \mathcal{M}_i = F\dot{P} - B\dot{Q} + D\dot{R} + R(-AP + FQ + ER) \\ \quad \quad \quad - P(EP + DQ - CR), \\ \mathcal{N}_i = E\dot{P} + D\dot{Q} - C\dot{R} + P(FP - BQ + DR) \\ \quad \quad \quad - Q(-AP + FQ + ER), \end{cases}$$

(A, B, ..., F)  $d\omega d\omega_1$  désignant les moments et produits d'inertie du tronçon relatifs aux axes  $Muvw^{(1)}$ , soit

$$(21) \quad (A, B, C; D, E, F) = \frac{\varepsilon_0 e^2}{12} (m^2 + n^2, n^2 + l^2, l^2 + m^2, mn, nl, lm),$$

$l, m, n$  désignant les cosinus directeurs d'une demi-normale à S par rapport aux axes mobiles  $Muvw$ , et

$$(22) \quad \begin{cases} P = |\alpha_1 \dot{z}_1| = -|\alpha_1 \dot{z}_1|, \\ Q = |\alpha_1 \dot{z}_1| = -|\alpha_1 \dot{z}_1|, \\ R = |\alpha_1 \dot{z}_1| = -|\alpha_1 \dot{z}_1| \end{cases}$$

les composantes suivant les mêmes axes de la rotation instantanée du tronçon, c'est à dire du trièdre (M).

**5. Relation supplémentaire.** — La quantité de chaleur dégagée, dans une modification réelle élémentaire, par une portion arbitraire de la surface élastique est

$$(23) \quad dQ = dt \int \int \left[ \frac{T}{E} (f''_{\tau_1} \dot{z}_1 + f''_{\tau_2} \dot{z}_2 + \dots + f''_{\tau_r} \dot{z}_r) - c\dot{T} + \frac{2\mathcal{Q}}{E} \right] d\omega d\omega_1,$$

---

<sup>(1)</sup> Il n'y a évidemment aucune confusion à craindre entre les produits d'inertie E, F et les fonctions déjà désignées ainsi dès le n° 1.

la quantité

$$c = -\frac{T}{E} f''_{\tau^2}$$

désignant la *capacité calorifique* de la surface élastique rapportée à l'unité de surface primitive et  $E$  l'équivalent mécanique de la chaleur.

Soit, d'autre part,  $\frac{F_n}{e}$  le flux de chaleur en un point du contour de la portion de surface élastique considérée et relatif à la demi-normale extérieure à l'élément de bord  $edL$  correspondant; on a aussi, en supposant la surface athermane et dénuée de sources de chaleur,

$$(24) \quad dQ = dt \left[ - \int F_n dL + \int k(T - T_e) dS \right],$$

$k$  étant le double du coefficient de conductibilité extérieure<sup>(1)</sup> que, pour simplifier, nous supposons le même pour les deux faces et  $T_e$  la température absolue extérieure. En égalant les expressions (23) et (24), on en déduit, en tenant compte de la petitesse des déformations élastiques, l'équation indéfinie de la température

$$(25) \quad c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial F_\omega}{\partial \omega} + \frac{\partial F_{\omega_1}}{\partial \omega_1} - k(T - T_e) + \frac{T}{E} \left( f''_{\tau\xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + f''_{\tau\eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \dots + f''_{\tau r_1} \frac{\partial r_1}{\partial t} \right) + \frac{2Q}{E},$$

$\frac{1}{e}(F_\omega, F_{\omega_1})$  désignant les composantes du flux de chaleur suivant chaque ligne du réseau; ce sont des fonctions linéaires et homogènes des dérivées  $\frac{\partial T}{\partial(\omega, \omega_1)}$  dont les coefficients, fonctions de  $\omega, \omega_1, T$ , sont les coefficients de conductibilité calorifique de la surface au point considéré.

**6. Surface élastique à trois paramètres.** — Dans le cas de la surface élastique à trois paramètres, le feuillet matériel tangent en  $M$  à l'un des plans de coordonnées du trièdre mobile  $(M)$  est l'élément de la surface moyenne  $S$  en ce point. L'un des axes de ce trièdre,  $Mu$  par exemple, est donc pris tangent à l'un des éléments de fibre de  $S$ , à  $ds$  par exemple; le plan  $uMv$  est ainsi le plan tangent en  $M$  à cette surface dont la normale est alors l'axe  $Mw$ . La seule connaissance de  $S$  entraînant maintenant celle de chaque trièdre, la surface élastique ne dépend plus que des trois paramètres  $x, y, z$ , coordonnées de  $M$  fonctions de  $\omega, \omega_1, t$ .

---

<sup>(1)</sup> Il n'y a évidemment ici aucune confusion à craindre entre ce coefficient et le rapport défini par la formule (3).

Ainsi,  $Mu$  coïncide avec la tangente à la ligne  $s$  du réseau et  $Mv$  fait avec la tangente à la ligne  $s_1$  un angle, nul dans l'état primitif, égal au *glissement*  $g$  de  $S$  en  $M$  dans l'état actuel, en ce sens que l'angle du réseau dans cet état est  $\frac{\pi}{2} - g$ .

Soient alors

$$\lambda = \frac{ds - d\omega}{d\omega} = \sqrt{E} - 1, \quad \lambda_1 = \frac{ds_1 - d\omega_1}{d\omega_1} = \sqrt{E_1} - 1$$

les dilatations en  $M$  des lignes  $s, s_1$  du réseau; les trois premières formules (5) et (6) donnent

$$(26) \quad \xi = 1 + \lambda, \quad (\eta, \zeta) = 0; \quad \xi_1 = g, \quad \eta_1 = 1 + \lambda_1, \quad \zeta_1 = 0;$$

d'où

$$(27) \quad \xi - \xi_0 = \lambda, \quad (\eta - \eta_0, \zeta - \zeta_0) = 0; \quad \xi_1 - \xi_{10} = g, \quad \eta_1 - \eta_{10} = \lambda_1, \quad \zeta_1 - \zeta_{10} = 0,$$

puisque les déformations sont nulles dans l'état primitif. Les formules de Kirchhoff, qui sont à la base du calcul du potentiel thermodynamique interne, exigent en outre qu'on ait

$$(28) \quad (r, r_1) = 0,$$

d'où

$$(29) \quad (r - r_0, r_1 - r_{10}) = 0.$$

Dix des égalités (8) deviennent alors, d'après (26) et (28),

$$(30) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta\lambda &= \frac{\partial\delta u}{\partial\omega} + q\delta w, \\ \delta g &= \frac{\partial\delta u}{\partial\omega_1} + q_1\delta w + (1 + \lambda_1)\delta\omega_w, \\ \delta\lambda_1 &= \frac{\partial\delta v}{\partial\omega_1} - p_1\delta w - g\delta\omega_w; \\ \delta p &= \frac{\partial\delta\omega_u}{\partial\omega} + q\delta\omega_w, & \delta p_1 &= \frac{\partial\delta\omega_u}{\partial\omega_1} + q_1\delta\omega_w, \\ \delta q &= \frac{\partial\delta\omega_r}{\partial\omega} - p\delta\omega_w, & \delta q_1 &= \frac{\partial\delta\omega_r}{\partial\omega_1} - p_1\delta\omega_w; \end{aligned} \right.$$

$$(31) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial\delta v}{\partial\omega} - p\delta w - (1 + \lambda)\delta\omega_w &= 0, \\ \frac{\partial\delta w}{\partial\omega} + p\delta v - q\delta u + (1 + \lambda)\delta\omega_v &= 0, \\ \frac{\partial\delta w}{\partial\omega_1} + p_1\delta v - q_1\delta u + g\delta\omega_v - (1 + \lambda_1)\delta\omega_u &= 0. \end{aligned} \right.$$

D'après (27) et (29) les douze fonctions (7) caractéristiques de la déformation se réduisent à sept, de sorte que le potentiel thermodynamique interne (9) devient

$$(32) \quad \Phi = \int \int f(\lambda, p - p_0, q - q_0; g, \lambda_i, p_i - p_{i0}, q_i - q_{i0}; T, \omega, \omega_i) d\omega d\omega_i$$

et le travail virtuel de viscosité (11)

$$(33) \quad \delta \mathcal{C}_r = - \int \int \left[ \mathcal{F} \delta \dot{\lambda} + \mathcal{F}_i \delta g + \mathcal{G}_i \delta \lambda_i + \sum (\mathcal{P} \delta p + \mathcal{Q} \delta q) \right] d\omega d\omega_i.$$

L'égalité (14) s'écrit ainsi

$$\delta \mathcal{C}_r - \delta_\tau \Phi = \int \int \left[ \mathcal{R}_u \delta \lambda + \mathcal{R}_{iu} \delta g + \mathcal{R}_{iv} \delta \lambda_i + \sum (\mathcal{C}_u \delta p + \mathcal{C}_v \delta q) \right] d\omega d\omega_i,$$

avec, d'après (13).

$$(34) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{R}_u = -(f'_\lambda + \mathcal{F}), \quad \mathcal{R}_{iu} = -(f'_g + \mathcal{F}_i), \quad \mathcal{R}_{iv} = -(f'_{\lambda_i} + \mathcal{G}_i); \\ \mathcal{C}_u = -(f'_p + \mathcal{P}), \quad \mathcal{C}_v = -(f'_q + \mathcal{Q}), \\ \mathcal{C}_{iu} = -(f'_{p_i} + \mathcal{P}_i), \quad \mathcal{C}_{iv} = -(f'_{q_i} + \mathcal{Q}_i). \end{array} \right.$$

Il résulte en outre du choix des axes que les composantes  $\mathcal{V}_b, \mathcal{V}_e, \mathcal{V}_i$  sont nulles.

Si alors on pose

$$(35) \quad \mathcal{L}' = \mathcal{L} + a\mathcal{C}_u + b\mathcal{C}_{iu}, \quad \mathcal{M}' = \mathcal{M} + a\mathcal{C}_v + b\mathcal{C}_{iv};$$

$$(36) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{L}' = \mathcal{L}_e + \mathcal{L}_i - \frac{\partial \mathcal{C}_u}{\partial \omega} - \frac{\partial \mathcal{C}_{iu}}{\partial \omega_i}, \\ \mathbf{M}' = \mathcal{M}_e + \mathcal{M}_i - \frac{\partial \mathcal{C}_v}{\partial \omega} - \frac{\partial \mathcal{C}_{iv}}{\partial \omega_i}, \\ \mathbf{N}' = \sum (q\mathcal{C}_u - p\mathcal{C}_v), \end{array} \right.$$

l'équation fondamentale (15) de l'Énergétique s'écrit

$$(37) \quad \int (|\mathcal{X} \delta u| + \mathcal{L}' \delta \omega_u + \mathcal{M}' \delta \omega_v) dl \\ + \int \int [\mathcal{R}_u \delta \lambda + \mathcal{R}_{iu} \delta g + \mathcal{R}_{iv} \delta \lambda_i + |(\mathcal{X}_e + \mathcal{X}_i) \delta u + \mathbf{L}' \delta \omega_u|] d\omega d\omega_i = 0$$

et, en tenant compte des égalités (30) et (31), on reconnaît qu'on doit avoir :

I. En chaque point de la surface élastique, les six équations indéfinies

$$(38) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{R}_e + \mathcal{R}_i - \sum \left( \frac{\partial \mathcal{R}_u}{\partial \omega} + q \mathcal{R}_w \right) = 0, \\ \mathcal{Y}_e + \mathcal{Y}_i + \sum \left( -\frac{\partial \mathcal{R}_i}{\partial \omega} + p \mathcal{R}_w \right) = 0, \\ \mathcal{Z}_e + \mathcal{Z}_i + \sum \left( -\frac{\partial \mathcal{R}_w}{\partial \omega} + q \mathcal{R}_u - p \mathcal{R}_v \right) = 0; \\ \mathbf{L}' - (1 + \lambda_i) \mathcal{R}_{1w} = 0, \quad \mathbf{M}' + (1 + \lambda) \mathcal{R}_w + g \mathcal{R}_{1w} = 0, \\ \mathbf{N}' - (1 + \lambda) \mathcal{R}_v + (1 + \lambda_i) \mathcal{R}_{1u} - g \mathcal{R}_{1v} = 0, \end{array} \right.$$

où  $\mathcal{R}_v, \mathcal{R}_w, \mathcal{R}_{1w}$  sont des inconnues auxiliaires;

II. En chaque point de son contour, les sept conditions aux limites

$$(39) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{X} + a \mathcal{R}_u + b \mathcal{R}_{1u} - q \mathcal{R}'_w - q_i \mathcal{R}'_{1w} = 0, \\ \mathcal{Y} + a \mathcal{R}_v + b \mathcal{R}_{1v} + p \mathcal{R}'_w + p_i \mathcal{R}'_{1w} - \frac{\partial b \mathcal{R}'_v}{\partial l} = 0, \\ \mathcal{Z} + a \mathcal{R}_w + b \mathcal{R}_{1w} - p \mathcal{R}'_v + \frac{\lambda (a \mathcal{R}'_{1w} - b \mathcal{R}'_w)}{\partial l} = 0; \\ \mathcal{R}'_v = 0, \quad a \mathcal{R}'_w + b \mathcal{R}'_{1w} = 0; \\ \mathcal{L}' - (1 + \lambda_i) \mathcal{R}'_{1w} = 0, \quad \lambda b' + (1 + \lambda) \mathcal{R}'_w + g \mathcal{R}'_{1w} = 0, \end{array} \right.$$

où  $\mathcal{R}'_v, \mathcal{R}'_w, \mathcal{R}'_{1w}$  sont trois autres inconnues auxiliaires.

Remarquons que dans le calcul de  $\mathcal{L}_i, \mathcal{M}_i$  d'après les formules (20), on doit faire, d'après (21),

$$(40) \quad A = B = \frac{\hat{e}_0 e^2}{12}, \quad (C, D, E, F) = 0,$$

puisqu'on a ici  $(l, m) = 0, n = 1$ .

Enfin, lorsque les faces du trièdre mobile (M) sont des plans de symétrie de contexture, le potentiel thermodynamique interne par unité d'aire a pour expression

$$(41) \quad f = e \left( \mathcal{A} \lambda + \mathcal{B} \lambda_i + \frac{\mathcal{H}}{2} \lambda^2 + \mathcal{J} \lambda \lambda_i + \frac{\mathcal{K}}{2} \lambda_i^2 + \frac{\mathcal{A}_{66}}{2} g^2 \right) \\ + \frac{e^3}{24} [\mathcal{H} (q - q_0)^2 - 2 \mathcal{J} (q - q_0) (p_i - p_{10}) + \mathcal{K} (p_i - p_{10})^2 \\ + \mathcal{A}_{66} (p - p_0 - q_i + q_{10})^2],$$

$\mathcal{A}, \mathcal{B}, \dots, \mathcal{A}_{66}$  étant les coefficients d'élasticité de la surface, fonctions de  $\omega, \omega_1, T$ ; de sorte que les égalités (34) nous donnent, dans le cas d'une substance dénuée de viscosité,

$$(42) \quad \begin{cases} \mathcal{R}_u = -e(\mathcal{A} + \mathcal{H}\vartheta + \mathcal{J}\vartheta_1), & \mathcal{R}_{uv} = -e\mathcal{A}_{66}g, & \mathcal{R}_{iv} = -e(\mathcal{B} + \mathcal{J}\vartheta + \mathcal{K}\vartheta_1); \\ \mathcal{C}_u = -\frac{e^3}{12}\mathcal{A}_{66}(p - p_0 - q_1 + q_{10}), & \mathcal{C}_v = -\frac{e^3}{12}[\mathcal{H}(q - q_0) - \mathcal{J}(p_1 - p_{10})], \\ \mathcal{C}_{uv} = -\frac{e^3}{12}[-\mathcal{J}(q - q_0) + \mathcal{K}(p_1 - p_{10})], & \mathcal{C}_{iv} = -\mathcal{C}_u. \end{cases}$$

Dans le cas d'une substance isotrope, on a

$$(43) \quad \mathcal{A} = \mathcal{B} = -\frac{2\mu\nu}{\lambda + 2\mu}, \quad \mathcal{H} = \mathcal{K} = 4\mu \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu}, \quad \mathcal{J} = \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu}, \quad \mathcal{A}_{66} = \mu,$$

$\lambda, \mu$  étant les deux coefficients d'élasticité de Lamé,  $\nu$  le troisième coefficient d'élasticité qu'introduisent les variations de température.

## CHAPITRE II

### Les ondes au point de vue cinématique.

7. **Préliminaires.** — Supposons qu'une onde persistante, c'est-à-dire une ligne de discontinuité pour certains éléments du mouvement, se propage sur une surface élastique et soit, à l'instant  $t$ ,  $C$  cette onde supposée tracée sur la surface moyenne  $S$ . Elle partage cette surface en deux régions 1 et 2. Soit alors, au même instant  $t$ ,  $C'$  le lieu des points de  $S$ , qui seront atteints par l'onde à l'instant ultérieur  $t + dt$ . Supposons que la courbe  $C'$  soit située dans la région 2; on dira que l'onde se propage de la région 1 vers la région 2, ou encore que le mouvement 1 se propage dans le mouvement 2. Dans ces conditions, la demi-normale  $MN$  menée à l'onde  $C$  au point  $M$  dans le plan tangent en  $M$  à la région 2 et vers cette région coupe la courbe  $C'$  en un point  $M'_2$ . Soit  $dN_2 = \overline{MM'_2}$  la valeur algébrique du segment  $MM'_2$  comptée positivement suivant cette demi-normale; la quantité positive

$$(44) \quad v_2 = \frac{dN_2}{dt}$$

s'appelle la *vitesse de propagation de l'onde* se propageant de la région 1 vers la région 2.

Supposons au contraire la courbe  $C'$  située dans la région 1; on dira que l'onde se propage de la région 2 vers la région 1, ou encore que le mouvement 2 se propage dans le mouvement 1. Dans ces conditions, la courbe  $C'$  rencontre en un point  $M'_1$  le prolongement de la demi-normale menée en  $M$  à l'onde  $C$  dans le plan tangent en  $M$  à la région 1 et vers l'extérieur de cette région. Soit  $dN_1 = \overline{MM'_1}$  la valeur algébrique du segment  $MM'_1$  comptée positivement suivant cette demi-normale; la quantité négative

$$v_1 = \frac{dN_1}{dt}$$

s'appelle la *vitesse de propagation de l'onde* se propageant de la région 2 vers la région 1.

Cela posé, nous savons qu'à la surface  $S$  à l'instant  $t$  correspond, dans le plan  $\omega O \omega_1$ , une aire fixe  $A$  image de  $S$ . À l'onde  $C$  correspond donc dans ce plan son image  $c$ , séparative des régions 1 et 2 correspondant à celles de  $S$ . En  $m$ , image de  $M$ , menons la demi-normale  $mn$  à  $c$  dirigée vers la région 2 et soit  $dn = \overline{mm'}$  la valeur algébrique du segment  $mm'$  intercepté par  $c$  et  $c'$ , image de  $C'$ , sur cette

demi-normale ou son prolongement, suivant que l'onde se propage de la région 1 vers la région 2 ou inversement. La quantité

$$(45) \quad \mathcal{V} = \frac{dn}{dt},$$

qui a le signe de  $\mathcal{V}_2$  ou de  $\mathcal{V}_1$  suivant le sens de la propagation, s'appelle la *vitesse de propagation de l'image de l'onde*.

Nous conviendrons d'affecter de l'indice 1 ou de l'indice 2 toute quantité relative aux régions 1 ou 2, et nous désignerons par la caractéristique  $\delta'$  la variation brusque qu'éprouve toute quantité discontinue A à la traversée de l'onde, en passant de la région 1 à la région 2, soit

$$\delta' A = A_2 - A_1.$$

**8. Ondes de choc sur la surface à six paramètres.** — Considérons tout d'abord une onde de choc, c'est-à-dire une onde du premier ordre par rapport aux paramètres  $x, y, z; \alpha, \beta, \gamma; \alpha_1, \beta_1, \gamma_1; \alpha_2, \beta_2, \gamma_2$  fixant la configuration de la surface élastique à chaque instant. Chacun d'eux restant continu à la traversée de l'onde, on a par exemple

$$(46) \quad \delta' x = 0$$

le long de l'image  $c$  de l'onde à l'instant  $t$ , c'est-à-dire

$$(47) \quad \delta' \frac{\partial x}{\partial \omega} d\omega + \delta' \frac{\partial x}{\partial \omega_1} d\omega_1 = 0,$$

pour toutes les valeurs de  $d\omega, d\omega_1$  telles que

$$a d\omega + b d\omega_1 = 0,$$

$a, b$  étant les cosinus directeurs de la demi-normale  $mn$  à la courbe  $c$ . On en conclut qu'il existe une quantité  $\lambda$  telle qu'on ait

$$(48) \quad \frac{\delta' \frac{\partial x}{\partial \omega}}{a} = \frac{\delta' \frac{\partial x}{\partial \omega_1}}{b} = \lambda.$$

Écrivons maintenant que l'égalité (47) a lieu, non seulement au point  $m(\omega, \omega_1)$  à l'instant  $t$ , mais au point  $m'(\omega + d\omega, \omega_1 + d\omega_1)$  à l'instant  $t + dt$ ; il vient

$$\delta' \frac{\partial x}{\partial \omega} d\omega + \delta' \frac{\partial x}{\partial \omega_1} d\omega_1 + \delta' \frac{\partial x}{\partial t} dt = 0,$$

pour

$$d\omega = a\,dn, \quad d\omega_1 = b\,dn,$$

c'est-à-dire

$$\left( a\delta' \frac{\partial x}{\partial \omega} + b\delta' \frac{\partial x}{\partial \omega_1} \right) \frac{dn}{dt} + \delta' \frac{\partial x}{\partial t} = 0;$$

d'où, d'après (45) et (48).

$$\delta' \frac{\partial x}{\partial t} = -\lambda \mathcal{V}.$$

En définitive, une onde de choc se propageant sur une surface élastique à six paramètres est caractérisée par douze quantités

$$\lambda, \mu, \nu; \quad a, b, c; \quad a_1, b_1, c_1; \quad a_2, b_2, c_2$$

telles qu'on ait

$$(49) \quad \delta' \frac{\partial(x, y, z; \alpha, \beta, \dots, \gamma_2)}{\partial(\omega, \omega_1, t)} = (a, b, -\mathcal{V})(\lambda, \mu, \nu; a, b, \dots, c_2).$$

Les neuf quantités  $a, b, \dots, c_2$  relatives aux cosinus directeurs se réduisent d'ailleurs à trois paramètres indépendants, car les six relations entre les cosinus

$$|\alpha^2| = 1, \quad |\alpha_1^2| = 1, \quad \dots, \quad |\alpha_2 \alpha| = 0$$

dérivées par rapport à  $\omega$  ou à  $\omega_1$  et écrites de part et d'autre de l'onde donnent, d'après (49),

$$(50) \quad \begin{cases} |\alpha \alpha| = 0, & |\alpha_1 \alpha_1| = 0, & |\alpha_2 \alpha_2| = 0; \\ |\alpha \alpha_1| + |\alpha_1 \alpha| = 0, & |\alpha_1 \alpha_2| + |\alpha_2 \alpha_1| = 0, & |\alpha_2 \alpha| + |\alpha \alpha_2| = 0. \end{cases}$$

Les relations (50) sont identiques à celles que nous avons antérieurement obtenues pour la ligne élastique<sup>(1)</sup>; les trois premières expriment que chaque vecteur discontinuité  $(a, b, c)$ ,  $(a_1, b_1, c_1)$ ,  $(a_2, b_2, c_2)$  est normal à chacun des axes  $Mu, Mv, Mw$  du trièdre mobile qui lui correspond.

---

(<sup>1</sup>) L. ROY, *Sur les équations générales des lignes élastiques et la propagation des ondes*, p. 159, formules (91).

D'après les égalités (5), (6) et (49), l'onde considérée sera en général d'ordre zéro par rapport à  $\xi, \eta, \dots, R$  et nous aurons

$$(51) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\delta' \xi}{a} = \frac{\delta' \xi_1}{b} = |\alpha \lambda|, \quad \frac{\delta' \eta}{a} = \frac{\delta' \eta_1}{b} = |\alpha_1 \lambda|, \quad \frac{\delta' \zeta}{a} = \frac{\delta' \zeta_1}{b} = |\alpha_2 \lambda|; \\ \frac{\delta' p}{a} = \frac{\delta' p_1}{b} = |\alpha_2 a_1| = -|\alpha_1 a_2| = -\frac{\delta' P}{Q}, \\ \frac{\delta' q}{a} = \frac{\delta' q_1}{b} = |\alpha a_2| = -|\alpha_2 a| = -\frac{\delta' Q}{Q}, \\ \frac{\delta' r}{a} = \frac{\delta' r_1}{b} = |\alpha_1 a| = -|\alpha a_1| = -\frac{\delta' R}{Q}. \end{array} \right.$$

Inversement, les égalités (50) et (51) permettent d'exprimer les douze quantités  $\lambda, \mu, \nu; a, b, \dots, c_2$ , en fonction des six discontinuités  $\delta'(\xi, \eta, \dots, r)$  ou  $\delta'(\xi_1, \eta_1, \dots, r_1)$ , ce qui donne par un calcul facile

$$(52) \quad \left\{ \begin{array}{l} a(\lambda, \mu, \nu) = (\alpha, \beta, \gamma) \delta' \xi + (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) \delta' \eta + (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) \delta' \zeta; \\ a(a, b, c) = (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) \delta' r - (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) \delta' q, \\ a(a_1, b_1, c_1) = (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) \delta' p - (\alpha, \beta, \gamma) \delta' r, \\ a(a_2, b_2, c_2) = (\alpha, \beta, \gamma) \delta' q - (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) \delta' p, \end{array} \right.$$

égalités où l'on peut remplacer aux premiers membres  $a$  par  $b$  et, aux seconds,  $\xi, \eta, \dots, r$  par  $\xi_1, \eta_1, \dots, r_1$ .

De même, l'onde considérée est en général d'ordre zéro par rapport à  $E, F, E_1, H, \rho$ ; mais le produit  $\rho H$  reste continu à la traversée de l'onde, d'après l'équation de continuité (4).

Enfin, la formule (47) et les deux autres analogues expriment la continuité, à la traversée de l'onde, des composantes d'un élément  $dL$  parallèle à l'onde; il en est donc de même du rapport  $k$  d'après (3), les cosinus directeurs  $a, b$  étant alors ceux de la demi-normale à l'onde.

**9. Vitesses de propagation.** — Cherchons la relation entre la vitesse de propagation de l'onde et celle de son image dans le plan  $\omega O \omega_1$ ; nous allons voir qu'elle dépend du sens de propagation.

Supposons tout d'abord que l'onde se propage de la région 1 vers la région 2 et soient

$$f(\omega, \omega_1, t) = 0$$

l'équation de son image  $c$  dans le plan  $\omega O \omega_1$ ,

$$(53) \quad d\omega = a dn, \quad d\omega_1 = b dn$$

les composantes du segment  $mm'$  envisagé au n° 7. Le point  $m'(\omega + d\omega, \omega_1 + d\omega_1)$  se trouvant sur l'image  $c'$  de l'onde à l'instant  $t + dt$ , on a

$$f(\omega + d\omega, \omega_1 + d\omega_1, t + dt) = 0,$$

c'est-à-dire

$$(54) \quad \frac{\partial f}{\partial \omega} d\omega + \frac{\partial f}{\partial \omega_1} d\omega_1 + \frac{\partial f}{\partial t} dt = 0;$$

d'où, d'après (45) et (53),

$$(55) \quad \left( a \frac{\partial f}{\partial \omega} + b \frac{\partial f}{\partial \omega_1} \right) \mathfrak{V} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0.$$

Soient d'autre part  $\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2, \mathbf{c}_2$  les cosinus directeurs de la demi-normale menée à l'onde C au point M dans le plan tangent en M à la région 2 et vers cette région;  $x + dx, y + dy, z + dz$  les coordonnées du point M' d'intersection de la courbe C' avec cette demi-normale; on a

$$\mathbf{a}_2 dN_2 = \left( \frac{\partial x}{\partial \omega} \right)_2 d\omega + \left( \frac{\partial x}{\partial \omega_1} \right)_2 d\omega_1,$$

d'où, d'après (44),

$$(56) \quad \mathbf{a}_2 \mathfrak{V}_2 = \left( \frac{\partial x}{\partial \omega} \right)_2 \frac{d\omega}{dt} + \left( \frac{\partial x}{\partial \omega_1} \right)_2 \frac{d\omega_1}{dt},$$

$\omega + d\omega, \omega_1 + d\omega_1$  étant les coordonnées de l'image de M'. Cette image n'étant pas le point  $m'$ , parce que la demi-normale MN à l'onde C n'a pas pour image la demi-normale  $mn$  à l'image  $c$  de cette onde, les accroissements  $d\omega, d\omega_1$  n'ont plus la même signification que dans les formules (53) et (54). Mais comme l'image de M est également située sur  $c'$ , ces accroissements satisfont encore à la relation (54). Or, on a

$$\frac{\mathbf{a}}{\frac{\partial f}{\partial \omega}} = \frac{\mathbf{b}}{\frac{\partial f}{\partial \omega_1}} = \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{a} \frac{\partial f}{\partial \omega} + \mathbf{b} \frac{\partial f}{\partial \omega_1}} = - \frac{\mathfrak{V}}{\frac{\partial f}{\partial t}}$$

d'après (55), de sorte que l'égalité (54) s'écrit encore

$$(57) \quad \mathfrak{V} = \mathbf{a} \frac{d\omega}{dt} + \mathbf{b} \frac{d\omega_1}{dt}.$$

Cette formule montre que les nouveaux accroissements  $d\omega$ ,  $d\omega_1$  peuvent être substitués aux anciens dans le calcul de  $\mathcal{V}$  et cette circonstance tient à ce que l'image de MN fait un angle infiniment petit avec  $mn$ .

Cela posé, l'égalité (56) et les deux autres analogues nous donnent

$$(58) \quad \mathcal{V}_2 = \left| \mathbf{a}_2 \left( \frac{\partial x}{\partial \omega} \right)_2 \right| \frac{d\omega}{dt} + \left| \mathbf{a}_2 \left( \frac{\partial x}{\partial \omega_1} \right)_2 \right| \frac{d\omega_1}{dt}$$

et comme, d'une manière générale, les cosinus directeurs  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  d'une demi-normale MN à une courbe C, tracée sur la surface moyenne S et menée en un point M de cette courbe dans le plan tangent en M à S, sont donnés par les formules (2),  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  désignant les cosinus directeurs de la demi-normale à l'image  $c$  de C au point homologue de M et dans le sens correspondant à MN, il vient dans le cas actuel

$$k \left| \mathbf{a}_2 \left( \frac{\partial x}{\partial \omega} \right)_2 \right| = H_2 a, \quad k \left| \mathbf{a}_2 \left( \frac{\partial x}{\partial \omega_1} \right)_2 \right| = H_2 b.$$

L'égalité (58) devient ainsi d'après (57)

$$(59) \quad k\mathcal{V}_2 = H_2 \mathcal{V}.$$

Lorsque la propagation de l'onde s'effectue en sens contraire, on trouve de même

$$(60) \quad k\mathcal{V}_1 = H_1 \mathcal{V}',$$

en mettant  $\mathcal{V}'$  à la place de  $\mathcal{V}$ , ces deux vitesses étant de signes contraires. Si donc on a

$$\mathcal{V} + \mathcal{V}' = 0,$$

les égalités (59) et (60) multipliées respectivement par  $\rho_2$  et  $\rho_1$ , puis ajoutées membre à membre nous donnent, puisque le produit  $\rho H$  est continu,

$$\rho_1 \mathcal{V}_1 + \rho_2 \mathcal{V}_2 = 0.$$

Cette relation a été obtenue pour la première fois par Riemann<sup>(1)</sup> dans la propagation des ondes planes en Hydrodynamique; elle a été étendue plus tard par M. Jouguet<sup>(2)</sup> au cas des ondes de choc quelconques dans les fluides. Comme nous avons antérieurement reconnu qu'elle s'applique également au fil flexible, à la membrane flexible et à la ligne élastique<sup>(3)</sup>, nous voyons qu'elle s'étend à la propagation des ondes de choc sur toutes les catégories de corps minces.

(1) RIEMANN'S WERKE, p. 145.

(2) E. JOUGUET, *Sur la propagation des discontinuités dans les fluides* (Comptes rendus, t. 132, 18 mars 1901).

(3) L. ROY, *Recherches sur la dynamique du fil flexible* (Annales scientifiques de l'École Normale supérieure, 3<sup>e</sup> série, t. 29, 1912, p. 384). — *Sur la propagation des ondes dans les membranes flexibles*, p. 276. — *Sur les équations générales des lignes élastiques et la propagation des ondes*, p. 156.

10. **Ondes d'accélération et d'ordre supérieur sur la surface à six paramètres.** — Supposons maintenant l'onde du second ordre par rapport à  $x, y, z; \alpha, \beta, \dots, \gamma,$  (onde d'accélération); nous aurons par exemple

$$(61) \quad \partial' \frac{\partial^2 x}{\partial(\omega, \omega_1, t)} = 0$$

le long de  $c$  à l'instant  $t$ , c'est-à-dire

$$(62) \quad \left\{ \begin{array}{l} \partial' \frac{\partial^2 x}{\partial \omega^2} d\omega + \partial' \frac{\partial^2 x}{\partial \omega \partial \omega_1} d\omega_1 = 0, \\ \partial' \frac{\partial^2 x}{\partial \omega_1 \partial \omega} d\omega + \partial' \frac{\partial^2 x}{\partial \omega_1^2} d\omega_1 = 0, \\ \partial' \frac{\partial^2 x}{\partial t \partial \omega} d\omega + \partial' \frac{\partial^2 x}{\partial t \partial \omega_1} d\omega_1 = 0, \end{array} \right.$$

pour toutes les valeurs de  $d\omega, d\omega_1$  telles que

$$a d\omega + b d\omega_1 = 0.$$

On conclut des deux premières (62) qu'il existe une quantité  $\lambda$  telle qu'on ait

$$(63) \quad \partial' \frac{\partial^2 x}{\partial \omega^p \partial \omega_1^q} = a^p b^q \lambda, \quad (p + q = 2).$$

Écrivons maintenant que les égalités (61) ont lieu également au point  $m'(\omega + d\omega, \omega_1 + d\omega_1)$  de  $c'$  à l'instant  $t + dt$ ; il vient

$$\begin{aligned} \partial' \frac{\partial^2 x}{\partial \omega^2} d\omega + \partial' \frac{\partial^2 x}{\partial \omega \partial \omega_1} d\omega_1 + \partial' \frac{\partial^2 x}{\partial \omega \partial t} dt &= 0, \\ \partial' \frac{\partial^2 x}{\partial \omega_1 \partial \omega} d\omega + \partial' \frac{\partial^2 x}{\partial \omega_1^2} d\omega_1 + \partial' \frac{\partial^2 x}{\partial \omega_1 \partial t} dt &= 0, \\ \partial' \frac{\partial^2 x}{\partial t \partial \omega} d\omega + \partial' \frac{\partial^2 x}{\partial t \partial \omega_1} d\omega_1 + \partial' \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} dt &= 0, \end{aligned}$$

pour

$$d\omega = a dn, \quad d\omega_1 = b dn.$$

Les deux premières donnent d'après (63)

$$\partial' \frac{\partial^2 x}{\partial(\omega, \omega_1) \partial t} = -(a, b) \lambda \mathfrak{U}$$

et la troisième (62) est ainsi satisfaite; la dernière donne

$$\delta' \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \lambda \mathcal{V}^2.$$

En résumé, une onde du second ordre par rapport à  $x, y, z; \alpha, \beta, \dots, \gamma_2$  est caractérisée par douze quantités  $\lambda, \mu, \nu; a, b, \dots, c_2$ , telles qu'on ait

$$\delta' \frac{\partial^2(x, y, z; \alpha, \beta, \dots, \gamma_2)}{\partial \omega^p \partial \omega_1^q \partial t^r} = a^p b^q (-\mathcal{V})^r (\lambda, \mu, \nu; a, b, \dots, c_2)$$

pour  $p + q + r = 2$ .

Plus généralement, on reconnaît qu'une onde d'ordre  $n$  par rapport à  $x, y, z; \alpha, \beta, \dots, \gamma_2$  est caractérisée par douze quantités  $\lambda, \mu, \nu; a, b, \dots, c_2$ , telles qu'on ait

$$(64) \quad \delta' \frac{\partial^n(x, y, z; \alpha, \beta, \dots, \gamma_2)}{\partial \omega^p \partial \omega_1^q \partial t^r} = a^p b^q (-\mathcal{V})^r (\lambda, \mu, \nu; a, b, \dots, c_2)$$

pour  $p + q + r = n$  et les six relations entre les cosinus directeurs dérivées  $n$  fois par rapport à  $\omega, \omega_1$ , ou  $t$  conduisent encore aux égalités (50).

D'autre part, l'onde est en général d'ordre  $n - 1$  par rapport à  $\xi, \eta, \dots, r_1; P, Q, R; \rho, H, E, F, E_1$ , de sorte que les égalités (5) et (6) dérivées  $n - 1$  fois nous donnent d'après (64)

$$(65) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\delta' \frac{\partial^{n-1} \xi}{\partial \omega^p \partial \omega_1^q \partial t^r}}{a} = \frac{\delta' \frac{\partial^{n-1} \xi_1}{\partial \omega^p \partial \omega_1^q \partial t^r}}{b} = a^p b^q (-\mathcal{V})^r |\alpha \lambda|, \\ \frac{\delta' \frac{\partial^{n-1} \eta}{\partial \omega^p \partial \omega_1^q \partial t^r}}{a} = \frac{\delta' \frac{\partial^{n-1} \eta_1}{\partial \omega^p \partial \omega_1^q \partial t^r}}{b} = a^p b^q (-\mathcal{V})^r |\alpha_1 \lambda|, \\ \frac{\delta' \frac{\partial^{n-1} \zeta}{\partial \omega^p \partial \omega_1^q \partial t^r}}{a} = \frac{\delta' \frac{\partial^{n-1} \zeta_1}{\partial \omega^p \partial \omega_1^q \partial t^r}}{b} = a^p b^q (-\mathcal{V})^r |\alpha_2 \lambda|; \\ \frac{\delta' \frac{\partial^{n-1} p}{\partial \omega^p \partial \omega_1^q \partial t^r}}{a} = \frac{\delta' \frac{\partial^{n-1} p_1}{\partial \omega^p \partial \omega_1^q \partial t^r}}{b} = - \frac{\delta' \frac{\partial^{n-1} P}{\partial \omega^p \partial \omega_1^q \partial t^r}}{\mathcal{V}} = a^p b^q (-\mathcal{V})^r |\alpha_2 a_1|, \\ \frac{\delta' \frac{\partial^{n-1} q}{\partial \omega^p \partial \omega_1^q \partial t^r}}{a} = \frac{\delta' \frac{\partial^{n-1} q_1}{\partial \omega^p \partial \omega_1^q \partial t^r}}{b} = - \frac{\delta' \frac{\partial^{n-1} Q}{\partial \omega^p \partial \omega_1^q \partial t^r}}{\mathcal{V}} = a^p b^q (-\mathcal{V})^r |\alpha a_1|, \\ \frac{\delta' \frac{\partial^{n-1} r}{\partial \omega^p \partial \omega_1^q \partial t^r}}{a} = \frac{\delta' \frac{\partial^{n-1} r_1}{\partial \omega^p \partial \omega_1^q \partial t^r}}{b} = - \frac{\delta' \frac{\partial^{n-1} R}{\partial \omega^p \partial \omega_1^q \partial t^r}}{\mathcal{V}} = a^p b^q (-\mathcal{V})^r |\alpha_1 a|, \end{array} \right.$$

pour  $p + q + r = n - 1$  (\*). On en déduit, d'après (50), les égalités

$$(66) \quad \left\{ \begin{array}{l} a''\lambda = \alpha \delta' \frac{\partial^{n-1} \xi}{\partial \omega^{n-1}} + \alpha_1 \delta' \frac{\partial^{n-1} \eta_1}{\partial \omega^{n-1}} + \alpha_2 \delta' \frac{\partial^{n-1} \zeta}{\partial \omega^{n-1}}, \\ \dots\dots\dots \\ a''a = \alpha_1 \delta' \frac{\partial^{n-1} r}{\partial \omega^{n-1}} - \alpha_2 \delta' \frac{\partial^{n-1} q}{\partial \omega^{n-1}}, \\ \dots\dots\dots \end{array} \right.$$

analogues aux égalités (52). Enfin, par suite de la continuité de  $H$ , la vitesse de propagation de l'onde a pour valeur, d'après (59) et (60),

$$\frac{H}{k} \mathcal{V}.$$

Comme d'ailleurs  $H$  et  $k$  diffèrent très peu de l'unité, par suite de la petitesse des déformations élastiques au sein de chaque tronçon, on voit que cette vitesse diffère très peu de la vitesse de propagation  $\mathcal{V}$  de l'image de l'onde.

**II. Ondes sur la surface à trois paramètres.** — Nous allons rechercher ce que deviennent les formules générales (51) et (65), du fait des égalités (26) et (28) qui caractérisent la surface à trois paramètres.

Tout d'abord, quel que soit l'ordre de la discontinuité, les deuxième et troisième groupes (51) et (65) montrent qu'on a, d'après (26),

$$|\alpha_1 \lambda| = 0, \quad |\alpha_2 \lambda| = 0.$$

Le vecteur  $(\lambda, \mu, \nu)$  est donc dirigé suivant  $Mu$ , de sorte que,  $\Lambda$  étant sa valeur algébrique suivant cet axe, on a

$$(67) \quad (\lambda, \mu, \nu) = (\alpha, \beta, \gamma) \Lambda.$$

D'autre part, le dernier groupe (51) et (65) montre qu'on a, d'après (28),

$$|\alpha_1 a| = 0.$$

Il résulte alors des première, deuxième et quatrième formules (50) que les vecteurs  $(a, b, c)$  et  $(a_1, b_1, c_1)$  sont dirigés suivant  $Mw$ ; de sorte que  $\Delta$  et  $\Delta_1$  étant leurs valeurs algébriques suivant cet axe, on a

$$(68) \quad (a, b, c) = (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) \Delta, \quad (a_1, b_1, c_1) = (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) \Delta_1.$$

---

(\*) Il n'y a évidemment aucune confusion possible entre ces nombres  $p, q, r$  et les composantes de la rotation par unité de longueur désignées par les mêmes lettres.

Les deux dernières (50) s'écrivent ainsi :

$$(69) \quad |\alpha a_2| = -\Delta, \quad |\alpha_1 a_2| = -\Delta_1;$$

jointes à la troisième (50), elles donnent

$$(70) \quad (a_2, b_2, c_2) = -(\alpha, \beta, \gamma) \Delta - (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) \Delta_1.$$

Le vecteur  $(a_2, b_2, c_2)$  a donc pour valeur  $\sqrt{\Delta^2 + \Delta_1^2}$ ; il est contenu dans le plan  $uMv$  et ses projections sur  $Mu$  et  $Mv$  sont respectivement  $-\Delta$  et  $-\Delta_1$ .

En définitive, une onde se propageant sur une surface élastique à trois paramètres est caractérisée par trois vecteurs indépendants, l'un  $\Delta$  dirigé suivant  $Mu$ , les deux autres  $\Delta, \Delta_1$  dirigés suivant  $Mv$  et par un quatrième vecteur  $\sqrt{\Delta^2 + \Delta_1^2}$  contenu dans le plan  $uMv$  et complètement déterminé par les deux précédents. Nous dirons que les discontinuités  $\Delta, \sqrt{\Delta^2 + \Delta_1^2}$  sont *tangentes* et que les deux autres  $\Delta, \Delta_1$  sont *normales*. Les égalités (51) relatives aux ondes de choc se réduisent ainsi à

$$(71) \quad \begin{cases} \frac{\delta' \Delta}{a} = \frac{\delta' g}{b} = \Delta, & \delta' \Delta_1 = 0; \\ \frac{\delta' p}{a} = \frac{\delta' p_1}{b} = \Delta_1 = -\frac{\delta' P}{\mathcal{V}}, \\ \frac{\delta' q}{a} = \frac{\delta' q_1}{b} = -\Delta = -\frac{\delta' Q}{\mathcal{V}} \end{cases}$$

et les égalités (65) relatives aux ondes d'accélération et d'ordre supérieur à

$$(72) \quad \begin{cases} \frac{\delta' \frac{\partial^{n-1} \Delta}{\partial \omega^p \partial \omega_1^q \partial t^r}}{a} = \frac{\delta' \frac{\partial^{n-1} g}{\partial \omega^p \partial \omega_1^q \partial t^r}}{b} = a^p b^q (-\mathcal{V})^r \Delta, \\ \delta' \frac{\partial^{n-1} \Delta_1}{\partial \omega^p \partial \omega_1^q \partial t^r} = 0; \\ \frac{\delta' \frac{\partial^{n-1} p}{\partial \omega^p \partial \omega_1^q \partial t^r}}{a} = \frac{\delta' \frac{\partial^{n-1} p_1}{\partial \omega^p \partial \omega_1^q \partial t^r}}{b} = -\frac{\delta' \frac{\partial^{n-1} P}{\partial \omega^p \partial \omega_1^q \partial t^r}}{\mathcal{V}} = a^p b^q (-\mathcal{V})^r \Delta_1, \\ \frac{\delta' \frac{\partial^{n-1} q}{\partial \omega^p \partial \omega_1^q \partial t^r}}{a} = \frac{\delta' \frac{\partial^{n-1} q_1}{\partial \omega^p \partial \omega_1^q \partial t^r}}{b} = -\frac{\delta' \frac{\partial^{n-1} Q}{\partial \omega^p \partial \omega_1^q \partial t^r}}{\mathcal{V}} = -a^p b^q (-\mathcal{V})^r \Delta. \end{cases}$$

Soient enfin  $a', b', c'$  les cosinus directeurs de la tangente à l'onde; on a

$$a' dL = dx = \frac{\partial x}{\partial \omega} d\omega + \frac{\partial x}{\partial \omega_1} d\omega_1,$$

$dL$  désignant l'élément linéaire de l'onde auquel correspond, dans le plan  $\omega O \omega_1$ , l'élément  $dl$  de composantes

$$d\omega = b dl, \quad d\omega_1 = -a dl;$$

d'où

$$ka' = b \frac{\partial x}{\partial \omega} - a \frac{\partial x}{\partial \omega_1}.$$

Mais on a, en négligeant les déformations élastiques, c'est-à-dire des termes du premier ordre de petitesse,

$$k = 1, \quad \frac{\partial x}{\partial \omega} = \alpha, \quad \frac{\partial x}{\partial \omega_1} = \alpha_1,$$

de sorte qu'il vient, à ce degré d'approximation:

$$(73) \quad (a', b', c') = b(\alpha, \beta, \gamma) - a(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1).$$

On en déduit, d'après (70),

$$(73') \quad |a' a_1| = -b \Delta + a \Delta_1.$$


---

## CHAPITRE III

### Propagation des ondes de choc sur la surface élastique à six paramètres.

12. **Équation fondamentale.** — Considérons, dans le plan  $\omega O \omega_1$ , aux instants  $t$  et  $t + dt$ ,  $dt$  étant supposé positif, les images  $c$  et  $c'$  de l'onde que nous supposons se propager de la région 1 vers la région 2 (*fig. 1*). Désignons par  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  deux quantités finies positives et considérons les deux courbes  $c_1, c_2$ , tracées respectivement dans les régions 1 et 2, de part et d'autre de la bande limitée par  $c, c'$  aux distances  $\varepsilon_1 dt$  et  $\varepsilon_2 dt$  de  $c$  et de  $c'$ . Nous allons appliquer l'équation fondamentale de l'Énergétique

$$(15) \quad \delta \bar{\mathcal{C}}_e + \delta \bar{J} + \delta \bar{\mathcal{C}}_v - \delta \bar{\tau} \Phi = 0,$$

à la portion de surface élastique ayant pour image la bande  $a_1 a_2 b_1 b_2$  limitée par les courbes  $c_1, c$  et par deux autres courbes  $a, a_2, b, b_2$  menées normalement aux précédentes en deux points arbitraires  $a$  et  $b$  de  $c$ . La distance de  $c$  et  $c'$  étant  $mm' = dn = \mathcal{V} dt$ , on voit que la largeur de la bande considérée est de l'ordre de  $dt$ , tandis que sa longueur  $ab$  est arbitraire.

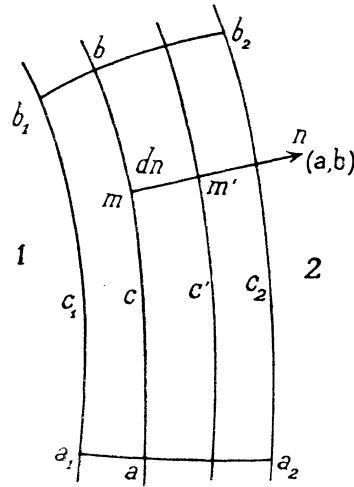


FIG. 1.

Le travail virtuel des forces extérieures  $\delta \bar{\mathcal{C}}$  comprend, non seulement celui des forces et couples appliqués à chaque élément de la portion de surface considérée, mais aussi celui des forces et couples de liaisons appliqués le long de son contour, correspondant aux actions exercées le long de ce contour par le reste de la surface. Les courbes  $c_1, c_2$  n'étant pas atteintes par l'onde pendant le temps  $dt$ , les équations générales du mouvement, établies dans l'hypothèse de la continuité, sont applicables le long de ces deux courbes à l'instant  $t$ , en particulier les conditions aux limites (18). Il résulte alors de celles-ci que la force et le couple de liaisons appliqués à un élément  $dL$  des courbes  $C_1, C_2$  ayant pour images  $c_1, c_2$  ont pour composantes suivant les axes locaux  $Muvw$

$$\begin{aligned} &-(a \mathcal{R}_u + b \mathcal{R}_{1u}, \quad a \mathcal{R}_v + b \mathcal{R}_{1v}, \quad a \mathcal{R}_w + b \mathcal{R}_{1w}) dl, \\ &-(a \mathcal{C}_u + b \mathcal{C}_{1u}, \quad a \mathcal{C}_v + b \mathcal{C}_{1v}, \quad a \mathcal{C}_w + b \mathcal{C}_{1w}) dl, \end{aligned}$$

$\mathbf{a}, \mathbf{b}$  étant les cosinus directeurs de la demi-normale en un point des courbes  $c_1, c'$  menée vers l'extérieur de la bande considérée.

Nous avons ainsi, en désignant par

$$(\mathcal{K}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}; \mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{N}) dl$$

les composantes suivant les mêmes axes de la force et du couple de liaisons appliqués à un élément  $dL$  des portions de contour ayant pour images  $a_1 a_2$  et  $b_1 b_2$ ,

$$(74) \quad \begin{aligned} \delta \mathcal{C}_e = & \int \int |\mathcal{K}_e \delta u + \mathcal{L}_e \delta \omega_u| d\omega d\omega_1 \\ & + \int_{a_1 a_2 + b_1 b_2} |\mathcal{K} \delta u + \mathcal{L} \delta \omega_u| dl \\ & - \int_{c_1 + c_2} |(\mathbf{a} \mathcal{R}_u + \mathbf{b} \mathcal{R}_{1u}) \delta u + (\mathbf{a} \mathcal{C}_u + \mathbf{b} \mathcal{C}_{1u}) \delta \omega_u| dl, \end{aligned}$$

la première intégrale étant étendue à l'aire  $(a_1 a_2 b_1 b_2)$ . Or, cette aire et les portions de contour  $a_1 a_2, b_1 b_2$  étant de l'ordre de  $dt$ , les deux premières intégrales sont de l'ordre de  $(\delta u, \delta v, \dots, \delta \omega_w) dt$ , donc négligeables par rapport à d'autres termes de (15) que nous serons ainsi conduits à conserver seuls. D'autre part, la demi-normale extérieure aux courbes  $c_2$  ou  $c_1$  différant infiniment peu de la demi-normale  $mn$  à la courbe  $c$  dans le sens indiqué ou dans son prolongement, la dernière intégrale se réduit sensiblement à

$$- \int |(\mathbf{a} \delta' \mathcal{R}_u + \mathbf{b} \delta' \mathcal{R}_{1u}) \delta u + (\mathbf{a} \delta' \mathcal{C}_u + \mathbf{b} \delta' \mathcal{C}_{1u}) \delta \omega_u| dl,$$

l'intégrale étant étendue à la portion  $ab$  de la courbe  $c$ , car les fonctions  $\mathcal{R}_u, \mathcal{R}_{1u}, \dots, \mathcal{C}_{1w}$  sont discontinues à la traversée de l'onde, puisqu'elles dépendent des quantités discontinues  $\xi, \tau, \dots$ . L'expression (74) devient donc finalement

$$(75) \quad \delta \mathcal{C}_e = - \int |(\mathbf{a} \delta' \mathcal{R}_u + \mathbf{b} \delta' \mathcal{R}_{1u}) \delta u + (\mathbf{a} \delta' \mathcal{C}_u + \mathbf{b} \delta' \mathcal{C}_{1u}) \delta \omega_u| dl.$$

D'autre part, la variation isothermique du potentiel thermodynamique interne  $\delta_T \Phi$  est donnée par l'égalité (10); mais comme, d'après (8), les variations  $\delta \xi, \delta \tau, \dots, \delta r_1$  sont de l'ordre de  $\delta u, \delta v, \dots, \delta \omega_w$  et que le domaine d'intégration est ici de l'ordre de  $dt$ , cette expression est de l'ordre de  $(\delta u, \delta v, \dots, \delta \omega_w) dt$ , donc négligeable.

Il en est encore de même de la partie de  $\delta \mathcal{J} + \delta \mathcal{C}_r$  relative aux bandes comprises entre  $C_1$  et  $C$ ,  $C'$  et  $C_2$ , non atteintes par l'onde pendant le temps  $dt$ , mais non de celle qui est relative à la bande comprise entre  $C$  et  $C'$ , balayée par l'onde pendant le temps  $dt$ .

Soient, en effet,  $V$  et  $V'$  les vitesses d'un même point matériel  $M$  aux instants  $t$  et  $t + dt$ ,  $(P', Q', R')$  la rotation instantanée du trièdre  $(M)$  à l'instant  $t + dt$ ; on peut écrire d'une manière générale

$$\ddot{x} = \frac{V'_x - V_x}{dt}, \dots; \quad \dot{P} = \frac{P' - P}{dt}, \dots,$$

de sorte qu'on a pour un point quelconque de la bande comprise entre  $C$  et  $C'$

$$(76) \quad \ddot{x} = \frac{\dot{x}_i - \dot{x}_i}{dt} = -\frac{\delta' \dot{x}}{dt}, \dots; \quad \dot{P} = -\frac{\delta' P}{dt}, \dots,$$

ce qui revient à dire que les accélérations des points immédiatement en avant du front de l'onde sont infinies si la discontinuité est effectivement du premier ordre.

Cela posé, on a d'une manière générale et d'après (16)

$$\delta j = \iint |\mathcal{K}_i \delta u + \mathcal{L}_i \delta \omega_u| d\omega d\omega_i,$$

où les composantes  $\mathcal{K}_i, \mathcal{Y}_i, \dots, \mathcal{N}_i$  sont données par les formules (19) et (20). Nous avons donc, d'après (76), pour la bande  $(CC')$  et en prenant  $dldn = dV dt$  comme élément d'aire dans le plan  $\omega O \omega_i$ ,  $dl$  étant l'élément linéaire de la courbe  $c$ ,

$$\begin{aligned} \delta j &= dt \int |\mathcal{K}_i \delta u + \mathcal{L}_i \delta \omega_u| V dl \\ &= \int [\rho_0 (|\alpha \delta' \dot{x}| \delta u + |\alpha_i \delta' \dot{x}| \delta v + |\alpha_s \delta' \dot{x}| \delta w) \\ &\quad + |(A \delta' P - F \delta' Q - E \delta' R) \delta \omega_u|] V dl, \end{aligned}$$

car les termes de  $\mathcal{L}_i, \mathcal{M}_i, \mathcal{N}_i$  indépendants des dérivées  $\dot{P}, \dot{Q}, \dot{R}$  fournissent un contingent de l'ordre de  $(\delta \omega_u, \delta \omega_v, \delta \omega_w) dt$ , donc négligeable; l'intégrale curviligne est étendue à la portion  $ab$  de la courbe  $c$ . Comme on a d'ailleurs, d'après (49) et (51),

$$|\alpha \delta' \dot{x}| = -V |\alpha \lambda| = -V \frac{\delta' \xi}{a}, \dots; \quad \delta' P = -V \frac{\delta' p}{a}, \dots,$$

il vient en définitive

$$(77) \quad \delta j = - \int [\rho_0 \delta' \xi \delta u + (A \delta' p - F \delta' q - E \delta' r) \delta \omega_u] \frac{V}{a} dl.$$

L'expression de  $\delta \mathcal{C}_v$  pour la portion  $(CC')$  est, d'après (11) et en prenant le même élément d'aire  $dV dt$ ,

$$(78) \quad \delta \mathcal{C}_v = -dt \int \sum [\mathcal{F} \delta \xi + \mathcal{F} \delta p] V dl;$$

elle est de l'ordre de  $\partial \xi, \partial \eta, \dots$ , car les actions de viscosité  $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \dots, \mathcal{R}$ , qui doivent être calculées sur le bord de la région 2, sont des fonctions linéaires et homogènes des dérivées  $\dot{\xi}, \dot{\eta}, \dots$  qui ont ici pour valeurs, d'après (76),

$$\dot{\xi} = -\frac{\partial' \xi}{dt}, \quad \dot{\eta} = -\frac{\partial' \eta}{dt}, \dots, \quad \dot{r}_i = -\frac{\partial' r_i}{dt},$$

de sorte que les produits  $(\mathcal{F}, \mathcal{G}, \dots, \mathcal{R}_i) dt$  sont finis. En y remplaçant les variations  $\partial \xi, \partial \eta, \dots, \partial r_i$  par leurs valeurs (8), il vient

$$(79) \quad \partial \mathcal{C}_v = -dt \int \sum \left[ \mathcal{F} \left( \frac{\partial \partial u}{\partial \omega} + q \partial w - r \partial v + \eta \partial \omega_w - \zeta \partial \omega_v \right) + \mathcal{F} \left( \frac{\partial \partial \omega_u}{\partial \omega} + q \partial \omega_w - r \partial \omega_v \right) \right]_2 \mathcal{V} dl,$$

l'indice 2 signifiant que la quantité entre traits, qui contient les quantités discontinues  $\xi, \eta, \dots$ , se rapporte à la région 2. Remplaçons-y enfin les dérivées  $\frac{\partial}{\partial \omega}, \frac{\partial}{\partial \omega_i}$  en un point de la courbe  $c$  par leurs valeurs

$$(79') \quad \frac{\partial}{\partial \omega} = a \frac{\partial}{\partial n} + b \frac{\partial}{\partial l}, \quad \frac{\partial}{\partial \omega_i} = b \frac{\partial}{\partial n} - a \frac{\partial}{\partial l}$$

en fonction des dérivées  $\frac{\partial}{\partial n}, \frac{\partial}{\partial l}$  suivant la normale  $(a, b)$  et la tangente  $(b, -a)$  à cette courbe; l'égalité (15) s'écrit alors, d'après (75), (77) et (79),

$$(80) \quad \int \left[ \left( \rho_0 \frac{\mathcal{V}^*}{a} \partial' \xi + a \partial' \mathcal{R}_u + b \partial' \mathcal{R}_{iu} \right) \partial u + \left[ \frac{\mathcal{V}^*}{a} (A \partial' p - F \partial' q - E \partial' r) + a \partial' \mathcal{C}_u + b \partial' \mathcal{C}_{iu} \right] \partial \omega_u + \left\{ (a \mathcal{F} + b \mathcal{F}_i) \frac{\partial \partial u}{\partial n} + (b \mathcal{F} - a \mathcal{F}_i) \frac{\partial \partial u}{\partial l} + (a \mathcal{F} + b \mathcal{F}_i) \frac{\partial \partial \omega_u}{\partial n} + (b \mathcal{F} - a \mathcal{F}_i) \frac{\partial \partial \omega_u}{\partial l} + \sum [\mathcal{F}(q \partial w - r \partial v + \eta \partial \omega_w - \zeta \partial \omega_v) + \mathcal{F}(q \partial \omega_w - r \partial \omega_v)] \right\} \mathcal{V} dl \right]_2 dl = 0.$$

C'est l'équation fondamentale des ondes de choc, que nous allons appliquer successivement aux cas où la surface élastique est affectée et dénuée de viscosité.

13. **Surface affectée de viscosité.** — L'équation (80) doit être satisfaite quelles que soient les fonctions  $\delta(u, v, \dots, \omega_w)$  le long de la portion arbitraire  $ab$  de la courbe  $c$ , à laquelle s'étend l'intégration. Considérons tout d'abord l'équation plus simple

$$(81) \quad \int_a^b \left( P \delta u + Q \frac{\partial \delta u}{\partial n} + R \frac{\partial \delta u}{\partial l} \right) dl = 0$$

à vérifier dans les mêmes conditions et où  $P, Q, R$  désignent des fonctions quelconques; en intégrant par parties, elle s'écrit

$$(R \delta u)_a^b + \int_a^b \left[ \left( P - \frac{\partial R}{\partial l} \right) \delta u + Q \frac{\partial \delta u}{\partial n} \right] dl = 0$$

et, comme elle doit être vérifiée quelles que soient la fonction  $\delta u$  et les limites  $a$  et  $b$ , il faut qu'on ait

$$R_a = 0, \quad R_b = 0, \quad P - \frac{\partial R}{\partial l} = 0, \quad Q = 0.$$

Les deux premières exigent que  $R$  soit nul tout le long de  $c$ , puisque les points  $a$  et  $b$  sont arbitraires; d'où  $\frac{\partial R}{\partial l} = 0$  et, par suite,  $P = 0$ . En définitive, l'égalité (81) exige qu'on ait

$$(P, Q, R) = 0.$$

Il en résulte que, dans l'égalité (80), les coefficients de toutes les variations et de leurs dérivées doivent être nuls; en particulier, qu'on doit avoir

$$(a\mathcal{F} + b\mathcal{F}_1, \quad b\mathcal{F} - a\mathcal{F}_1; \quad \dots; \quad a\mathcal{L} + b\mathcal{L}_1, \quad b\mathcal{L} - a\mathcal{L}_1; \quad \dots) \mathcal{V} dt = 0.$$

Si donc la vitesse de propagation  $\mathcal{V}$  n'est pas nulle, ces douze équations considérées deux à deux montrent qu'on doit avoir

$$(\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}, \mathcal{L}, \mathcal{Q}, \mathcal{R}; \quad \mathcal{F}_1, \mathcal{G}_1, \mathcal{H}_1, \mathcal{L}_1, \mathcal{Q}_1, \mathcal{R}_1) dt = 0.$$

On a ainsi douze équations linéaires et homogènes en

$$\dot{\xi} dt = -\delta' \xi, \quad \dot{\eta} dt = -\delta' \eta, \quad \dots, \quad \dot{r}_1 dt = -\delta' r_1,$$

dont le déterminant n'est pas nul, puisque la fonction dissipative est une forme quadratique définie positive; cela exige que toutes les discontinuités soient nulles et par suite, d'après (52), qu'on ait

$$(\lambda, \mu, \nu; \quad a, b, \quad \dots, \quad c_1) = 0.$$

De là le résultat suivant :

*Une surface élastique à six paramètres, affectée de viscosité, ne peut être le siège d'aucune onde de choc qui se propage.*

**14. Surface dénuée de viscosité.** — Dans cette hypothèse, les actions de viscosité sont nulles et l'égalité (80) se réduit à ses deux premières lignes. Comme elle doit être vérifiée quelles que soient les fonctions  $\delta(u, v, \dots, \omega_w)$  en chaque point de l'onde, cela exige qu'on ait

$$(82) \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho_0 \frac{\mathcal{V}^2}{a} \delta' \xi + a \delta' \mathcal{R}_u + b \delta' \mathcal{R}_{1u} = 0, \\ \rho_0 \frac{\mathcal{V}^2}{a} \delta' \eta + a \delta' \mathcal{R}_v + b \delta' \mathcal{R}_{1v} = 0, \\ \rho_0 \frac{\mathcal{V}^2}{a} \delta' \zeta + a \delta' \mathcal{R}_w + b \delta' \mathcal{R}_{1w} = 0; \\ \frac{\mathcal{V}^2}{a} (A \delta' p - F \delta' q - E \delta' r) + a \delta' \mathcal{C}_u + b \delta' \mathcal{C}_{1u} = 0, \\ \frac{\mathcal{V}^2}{a} (-F \delta' p + B \delta' q - D \delta' r) + a \delta' \mathcal{C}_v + b \delta' \mathcal{C}_{1v} = 0, \\ \frac{\mathcal{V}^2}{a} (-E \delta' p - D \delta' q + C \delta' r) + a \delta' \mathcal{C}_w + b \delta' \mathcal{C}_{1w} = 0, \end{array} \right.$$

avec, d'après (13),

$$(83) \quad \left\{ \begin{array}{lll} \mathcal{R}_u = -f'_\xi, & \mathcal{R}_v = -f'_\eta, & \mathcal{R}_w = -f'_\zeta, \\ \mathcal{C}_u = -f'_p, & \mathcal{C}_v = -f'_q, & \mathcal{C}_w = -f'_r; \\ \mathcal{R}_{1u} = -f'_{\xi_1}, & \dots\dots\dots, & \mathcal{C}_{1w} = -f'_{r_1}. \end{array} \right.$$

Comme les douze déformations (7) sont supposées très petites, il en est de même de leurs variations  $\delta'(\xi, \eta, \dots, r_1)$  à la traversée de l'onde; de sorte que, si nous supposons la variation correspondante  $\delta'T$  de la température absolue également très petite, nous pouvons calculer les variations  $\delta'(\mathcal{R}_u, \mathcal{R}_v, \dots, \mathcal{C}_{1w})$  par une simple différentiation des formules (83), soit

$$(84) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta' \mathcal{R}_u = - (f''_{\xi^2} \delta' \xi + f''_{\xi \eta} \delta' \eta + \dots + f''_{\xi r_1} \delta' r_1 + f''_{\xi T} \delta' T), \\ \dots\dots\dots \\ \delta' \mathcal{C}_{1w} = - (f''_{r_1 \xi} \delta' \xi + f''_{r_1 \eta} \delta' \eta + \dots + f''_{r_1^2} \delta' r_1 + f''_{r_1 T} \delta' T), \end{array} \right.$$

égalités où les dérivées partielles peuvent être indifféremment évaluées dans les régions 1 ou 2 sur le bord de l'onde, puisque les discontinuités sont très petites. Nous avons alors deux cas à distinguer suivant que la surface élastique est bonne ou mauvaise conductrice de la chaleur.

15. **Surface bonne conductrice de la chaleur.** — Tout d'abord, si l'on suppose la température discontinue à la traversée de l'onde et si l'on tient compte de ce qu'en chaque point de la bande CC' balayée par l'onde pendant le temps  $dt$ , on a

$$\dot{\xi} = -\frac{\partial' \xi}{dt}, \quad \dot{\eta} = -\frac{\partial' \eta}{dt}, \quad \dots, \quad \dot{T} = -\frac{\partial' T}{dt},$$

l'expression (23) de la quantité de chaleur dégagée pendant le temps  $dt$  par une portion de la surface donne, pour la portion de la bande CC' considérée,

$$(85) \quad dQ \equiv -dt \int \left[ \frac{T}{E} (f''_{\tau\xi} \delta' \xi + f''_{\tau\eta} \delta' \eta + \dots + f''_{\tau r_1} \delta' r_1) - c \delta' T \right] \mathcal{V} dl.$$

Mais cette quantité de chaleur est également donnée par l'expression (24) appliquée à la même portion et, en la comparant à la précédente, on voit que la quantité entre crochets de cette expression (24) doit avoir une valeur finie. Il faut donc qu'il en soit ainsi de  $F_n$  tout le long du contour, en particulier le long de la courbe  $c$ ; et comme cette quantité est une fonction linéaire et homogène des dérivées  $\frac{\partial T}{\partial(\omega, \omega_1)}$ , il faut, pour que ces dérivées soient finies, que la température reste continue à la traversée de l'onde, c'est-à-dire qu'on ait  $\delta' T = 0$ .

Les expressions (84), ainsi débarrassées de leurs derniers termes en  $\delta' T$ , nous donnent alors

$$\begin{aligned} -(a \delta' \mathcal{R}_u + b \delta' \mathcal{R}_{iu}) = & (a f''_{\xi^2} + b f''_{\xi_1 \xi}) \delta' \xi + (a f''_{\xi \eta} + b f''_{\xi_1 \eta}) \delta' \eta + \\ & \dots + (a f''_{\xi r_1} + b f''_{\xi_1 r_1}) \delta' r_1. \end{aligned}$$

Si l'on y remplace  $\delta'(\xi_1, \eta_1, \dots, r_1)$  par leurs valeurs tirées de (51), en fonction de  $\delta'(\xi, \eta, \dots, r)$ , il vient

$$\begin{aligned} -a(a \delta' \mathcal{R}_u + b \delta' \mathcal{R}_{iu}) = & (a^2 f''_{\xi^2} + 2ab f''_{\xi \xi_1} + b^2 f''_{\xi_1^2}) \delta' \xi \\ & + [a^2 f''_{\xi \eta} + ab(f''_{\xi \eta_1} + f''_{\xi_1 \eta}) + b^2 f''_{\xi_1 \eta_1}] \delta' \eta + \dots \\ & + [a^2 f''_{\xi r} + ab(f''_{\xi r_1} + f''_{\xi_1 r}) + b^2 f''_{\xi_1 r_1}] \delta' r. \end{aligned}$$

On est ainsi conduit à poser, pour abrégé.

$$(86) \quad \Phi_{uv} = a^2 f''_{uv} + ab(f''_{uv_1} + f''_{u_1v}) + b^2 f''_{u_1v_1},$$

d'où il résulte que  $\Phi_{uv} = \Phi_{vu}$  et nous obtenons ainsi en définitive

$$(87) \quad \begin{cases} -a(\delta' \mathcal{R}_u + b\delta' \mathcal{R}_{1u}) = \Phi_{\xi\xi} \delta' \xi + \Phi_{\xi\tau_1} \delta' \tau_1 + \dots + \Phi_{\xi r} \delta' r, \\ \dots\dots\dots \\ -a(\delta' \mathcal{C}_w + b\delta' \mathcal{C}_{1w}) = \Phi_{r\xi} \delta' \xi + \Phi_{r\tau_1} \delta' \tau_1 + \dots + \Phi_{rr} \delta' r. \end{cases}$$

Substituons alors ces expressions dans les égalités (82); celles-ci deviennent

$$(88) \quad \begin{aligned} &(\Phi_{\xi\xi} - \rho_0 \mathcal{U}^2) \delta' \xi + \Phi_{\xi\tau_1} \delta' \tau_1 + \dots\dots\dots + \Phi_{\xi r} \delta' r = 0, \\ &\Phi_{\tau_1\xi} \delta' \xi + (\Phi_{\tau_1\tau_1} - \rho_0 \mathcal{U}^2) \delta' \tau_1 + \Phi_{\tau_1\tau_2} \delta' \tau_2 + \dots\dots\dots + \Phi_{\tau_1 r} \delta' r = 0, \\ &\Phi_{\xi\tau_2} \delta' \xi + \Phi_{\tau_2\tau_1} \delta' \tau_1 + (\Phi_{\tau_2\tau_2} - \rho_0 \mathcal{U}^2) \delta' \tau_2 + \Phi_{\tau_2 p} \delta' p + \Phi_{\tau_2 q} \delta' q + \Phi_{\tau_2 r} \delta' r = 0, \\ &\Phi_{p\xi} \delta' \xi + \Phi_{p\tau_1} \delta' \tau_1 + \Phi_{p\tau_2} \delta' \tau_2 \\ &\quad + (\Phi_{p^2} - A \mathcal{U}^2) \delta' p + (\Phi_{pq} + F \mathcal{U}^2) \delta' q + (\Phi_{pr} + E \mathcal{U}^2) \delta' r = 0, \\ &\Phi_{q\xi} \delta' \xi + \Phi_{q\tau_1} \delta' \tau_1 + \Phi_{q\tau_2} \delta' \tau_2 \\ &\quad + (\Phi_{qp} + F \mathcal{U}^2) \delta' p + (\Phi_{q^2} - B \mathcal{U}^2) \delta' q + (\Phi_{qr} + D \mathcal{U}^2) \delta' r = 0, \\ &\Phi_{r\xi} \delta' \xi + \Phi_{r\tau_1} \delta' \tau_1 + \Phi_{r\tau_2} \delta' \tau_2 \\ &\quad + (\Phi_{rp} + E \mathcal{U}^2) \delta' p + (\Phi_{rq} + D \mathcal{U}^2) \delta' q + (\Phi_{r^2} - C \mathcal{U}^2) \delta' r = 0. \end{aligned}$$

Pour que les discontinuités ne soient pas toutes nulles, il faut et il suffit que le déterminant de ces six équations linéaires et homogènes le soit, c'est-à-dire qu'on ait

$$(89) \quad \begin{vmatrix} \Phi_{\xi\xi} - \rho_0 \mathcal{U}^2 & \Phi_{\xi\tau_1} & \Phi_{\xi\tau_2} & \Phi_{\xi p} & \Phi_{\xi q} & \Phi_{\xi r} \\ \Phi_{\tau_1\xi} & \Phi_{\tau_1\tau_1} - \rho_0 \mathcal{U}^2 & \Phi_{\tau_1\tau_2} & \Phi_{\tau_1 p} & \Phi_{\tau_1 q} & \Phi_{\tau_1 r} \\ \Phi_{\tau_2\xi} & \Phi_{\tau_2\tau_1} & \Phi_{\tau_2\tau_2} - \rho_0 \mathcal{U}^2 & \Phi_{\tau_2 p} & \Phi_{\tau_2 q} & \Phi_{\tau_2 r} \\ \Phi_{p\xi} & \Phi_{p\tau_1} & \Phi_{p\tau_2} & \Phi_{p^2} - A \mathcal{U}^2 & \Phi_{pq} + F \mathcal{U}^2 & \Phi_{pr} + E \mathcal{U}^2 \\ \Phi_{q\xi} & \Phi_{q\tau_1} & \Phi_{q\tau_2} & \Phi_{qp} + F \mathcal{U}^2 & \Phi_{q^2} - B \mathcal{U}^2 & \Phi_{qr} + D \mathcal{U}^2 \\ \Phi_{r\xi} & \Phi_{r\tau_1} & \Phi_{r\tau_2} & \Phi_{rp} + E \mathcal{U}^2 & \Phi_{rq} + D \mathcal{U}^2 & \Phi_{r^2} - C \mathcal{U}^2 \end{vmatrix} = 0,$$

équation du sixième degré en  $\mathcal{U}^2$ , qui détermine six vitesses possibles de propagation, à supposer toutefois qu'elles soient toutes réelles. L'une de ces vitesses étant

choisie, les équations (88) se réduisent à cinq distinctes, d'où l'on déduit un résultat de la forme

$$(90) \quad \frac{\delta' \xi}{D_1} = \frac{\delta' \eta_1}{D_2} = \dots = \frac{\delta' r}{D_6},$$

les  $D_i$  étant des fonctions connues, ce qui détermine  $\delta'(\xi, \eta_1, \dots, r)$  en fonction d'un paramètre arbitraire. On déduit ensuite  $\lambda, \mu, \nu; a, b, \dots, c_2$  des formules (52). Le problème est ainsi entièrement résolu, en ce sens que tous les éléments du mouvement 2, en chaque point de l'onde, se déduisent de ceux du mouvement 1, au même point, à l'aide d'un paramètre arbitraire auquel chaque discontinuité est proportionnelle.

**16. Surface mauvaise conductrice de la chaleur.** — Dans cette hypothèse et en supposant la vitesse de propagation  $\mathcal{V}$  différente de zéro, la première expression (85) de  $dQ$ , relative à la portion de bande (CC') considérée, est de l'ordre de  $dt$ , tandis que la seconde (24) est de l'ordre de  $dt^2$ , le flux de chaleur  $\frac{F_n}{e}$  étant nul en chaque point du contour par suite de la nullité des coefficients de conductibilité résultant de notre hypothèse. L'expression (85) de  $dQ$  est donc nulle, de sorte que la propagation s'effectue suivant la loi adiabatique; il vient ainsi

$$(91) \quad \delta' T = \frac{T}{cE} (f''_{\tau\xi} \delta' \xi + f''_{\tau\eta_1} \delta' \eta_1 + \dots + f''_{\tau r_1} \delta' r_1).$$

Il résulte alors des égalités (83) que la quantité  $a\delta' \mathcal{R}_u + b\delta' \mathcal{R}_{1u}$ , par exemple, comprend les termes figurant déjà dans la première égalité (87) et, en outre, la quantité

$$-(af''_{\xi\tau} + bf''_{\xi,\tau}) \delta' T.$$

En y remplaçant  $\delta' T$  par sa valeur (91) et en y exprimant comme précédemment  $\delta'(\xi, \eta_1, \dots, r_1)$  en fonction de  $\delta'(\xi, \eta_1, \dots, r)$  à l'aide des formules (51), cette expression devient

$$-\frac{T}{cEa} (af''_{\tau\xi} + bf''_{\tau\xi_1}) [(af''_{\tau\xi} + bf''_{\tau\xi_1}) \delta' \xi + (af''_{\tau\eta_1} + bf''_{\tau\eta_1}) \delta' \eta_1 + \dots + (af''_{\tau r_1} + bf''_{\tau r_1}) \delta' r],$$

soit encore, plus simplement,

$$-\frac{T}{cEa} \Psi_\xi (\Psi_\xi \delta' \xi + \Psi_{\eta_1} \delta' \eta_1 + \dots + \Psi_r \delta' r),$$



rent des précédentes (88) et (89) qu'en ce que chaque fonction  $\Phi$ , telle que  $\Phi_{\xi\eta}$ , s'y trouve remplacée par

$$\Phi_{\xi\eta} + \frac{T}{cE} \Psi_{\xi} \Psi_{\eta}.$$

Le déterminant (89) étant symétrique du fait que les deux indices des fonctions  $\Phi$  sont permutable, il en est de même du déterminant (95). Une vitesse de propagation étant calculée, la détermination des discontinuités correspondantes s'effectue comme précédemment à l'aide des égalités (90) et (52). Remarquons enfin que le cas précédemment traité de la surface élastique bonne conductrice de la chaleur se déduit du cas actuel en faisant infinie la capacité calorifique  $c$ .

**17. Loi adiabatique dynamique.** — L'égalité (91) constitue la relation supplémentaire dans la propagation adiabatique des ondes de choc sur les surfaces élastiques. Nous l'avons obtenue en annulant la quantité de chaleur dégagée pendant le temps  $dt$  par une portion arbitraire de la bande infiniment étroite balayée par l'onde pendant le même temps, cette quantité de chaleur ayant été calculée à l'aide du principe de Carnot. Si nous la calculons, au contraire, à l'aide du principe d'équivalence, nous aboutirons à une forme nouvelle nécessairement équivalente à la précédente (91), qui correspondra à ce qu'on appelle en Hydrodynamique la *loi adiabatique dynamique*. Nous allons établir cette loi pour les surfaces élastiques dénuées de viscosité, puisque, s'il y a viscosité, nous savons qu'aucune onde de choc n'est susceptible de se propager.

Le principe d'équivalence appliqué à la portion de surface déjà considérée au n° 12 s'écrit

$$(96) \quad d\mathcal{C}_e = \mathbf{E}d\mathbf{Q} + d \int (\mathcal{U} + \mathcal{W}) dm,$$

où  $d\mathcal{C}_e$  est le travail élémentaire des forces extérieures, qui comprend celui de la force et du couple de liaison appliqués le long du contour de la portion considérée;  $\mathcal{U}$  et  $\mathcal{W}$  désignent les énergies interne et cinétique par unité de masse et  $d$  la variation éprouvée pendant le temps  $dt$  par l'intégrale étendue à tous les éléments de masse  $dm$  de la portion de surface considérée. Si nous désignons par

$$(97) \quad U = |\mathbf{x}\dot{\mathbf{x}}|, \quad V = |\mathbf{x}_1\dot{\mathbf{x}}|, \quad W = |\mathbf{x}_2\dot{\mathbf{x}}|$$

les composantes de la vitesse de  $\mathbf{M}$  suivant les axes mobiles  $Muvw$ , nous avons, d'après (74),

$$\begin{aligned} d\mathcal{C}_e = dt \int \int |\mathcal{R}_e U + \mathcal{L}_e P| d\omega d\omega_1 + dt \int_{a_1, a_2 + b_1, b_2} |\mathcal{R} U + \mathcal{L} P| dl \\ - dt \int_{c_1 + c_2} |(a\mathcal{R}_u + b\mathcal{R}_{1u}) U + (a\mathcal{C}_u + b\mathcal{C}_{1u}) P| dl, \end{aligned}$$

expression qui se réduit à

$$d\mathcal{C}_e = - dt \int \delta' [(a\mathcal{R}_u + b\mathcal{R}_{iu})U + (a\mathcal{C}_u + b\mathcal{C}_{iu})P] dl,$$

l'intégrale étant étendue à la portion  $ab$  de la courbe  $c$ , les autres termes étant de l'ordre de  $dt^2$ . On a d'autre part pour la bande  $(CC')$

$$d(\mathcal{U} + \mathcal{W}) = - \delta'(\mathcal{U} + \mathcal{W}), \quad dm = \rho_0 \mathcal{V} dt dl,$$

d'où

$$d \int (\mathcal{U} + \mathcal{W}) dm = - dt \int \delta'(\mathcal{U} + \mathcal{W}) \rho_0 \mathcal{V} dl,$$

les parties relatives aux bandes  $(C, C)$  et  $(C', C')$  étant de l'ordre de  $dt^2$ . L'égalité (96) devient ainsi

$$\mathbf{E}dQ = dt \int [\rho_0 \mathcal{V} \delta'(\mathcal{U} + \mathcal{W}) - \delta' [(a\mathcal{R}_u + b\mathcal{R}_{iu})U + (a\mathcal{C}_u + b\mathcal{C}_{iu})P]] dl,$$

quantité de l'ordre de  $dt$ . Or, dans l'hypothèse actuelle que les coefficients de conductibilité calorifique de la surface sont nuls, nous avons vu que la seconde expression de  $dQ$  donnée par (24) est de l'ordre de  $dt^2$ ; on en conclut qu'on doit avoir en chaque point de l'onde

$$(98) \quad \rho_0 \mathcal{V} \delta'(\mathcal{U} + \mathcal{W}) - \delta' [(a\mathcal{R}_u + b\mathcal{R}_{iu})U + (a\mathcal{C}_u + b\mathcal{C}_{iu})P] = 0.$$

Cela posé, le double de la force vive du tronçon  $edS$  de la surface élastique par rapport à des axes de directions fixes issus de son centre de gravité  $\mathbf{M}$  étant

$$(A P^2 + B Q^2 + C R^2 - 2 D Q R - 2 E R P - 2 F P Q) d\omega d\omega_1,$$

et la masse de ce tronçon étant  $\rho_0 d\omega d\omega_1$ , on a, d'après le théorème de König,

$$2\mathcal{W} = \left| U^2 + \frac{1}{\rho_0} (A P^2 - 2 D Q R) \right|.$$

Si donc on tient compte de ce que,  $U$  et  $V$  désignant deux quantités discontinues à la traversée de l'onde, on a d'une manière générale

$$(99) \quad \begin{cases} \delta' U^2 = (U_1 + U_2) \delta' U, \\ 2\delta'(UV) = (V_1 + V_2) \delta' U + (U_1 + U_2) \delta' V, \end{cases}$$

il vient

$$2\delta'\mathcal{W} = \left| (U_1 + U_2) \delta' U + \frac{1}{\rho_0} \{ A(P_1 + P_2) \delta' P - D[(R_1 + R_2) \delta' Q + (Q_1 + Q_2) \delta' R] \} \right|,$$

ou encore

$$2\rho_0\delta'W = |\rho_0(U_1 + U_2)\delta'U + [A(P_1 + P_2) - F(Q_1 + Q_2) - E(R_1 + R_2)]\delta'P|.$$

On a d'autre part, d'après la deuxième (99),

$$(100) \quad \begin{aligned} 2\delta' |(a\mathcal{R}_u + b\mathcal{R}_{iu})U + (a\mathcal{C}_u + b\mathcal{C}_{iu})P| = \\ |[(a\mathcal{R}_u + b\mathcal{R}_{iu})_1 + (a\mathcal{R}_u + b\mathcal{R}_{iu})_2]\delta'U \\ + [(a\mathcal{C}_u + b\mathcal{C}_{iu})_1 + (a\mathcal{C}_u + b\mathcal{C}_{iu})_2]\delta'P \\ + (U_1 + U_2)(a\delta'\mathcal{R}_u + b\delta'\mathcal{R}_{iu}) + (P_1 + P_2)(a\delta'\mathcal{C}_u + b\delta'\mathcal{C}_{iu})|. \end{aligned}$$

Mais on a, d'après (97), (49) et (51),

$$\delta'U = |x\delta'x| = -\mathcal{V}|x\lambda| = -\mathcal{V}\frac{\delta'\xi}{a}, \quad \delta'P = -\mathcal{V}\frac{\delta'p}{a},$$

d'où

$$(101) \quad 2\rho_0\delta'W = -\frac{\mathcal{V}}{a}|\rho_0(U_1 + U_2)\delta'\xi + [A(P_1 + P_2) - F(Q_1 + Q_2) - E(R_1 + R_2)]\delta'p|$$

et, en remplaçant en outre dans (100) les expressions  $a\delta'\mathcal{R}_u + b\delta'\mathcal{R}_{iu}$ ,  $a\delta'\mathcal{C}_u + b\delta'\mathcal{C}_{iu}$  par leurs valeurs tirées des égalités (82),

$$(102) \quad \begin{aligned} 2\delta' |(a\mathcal{R}_u + b\mathcal{R}_{iu})U + (a\mathcal{C}_u + b\mathcal{C}_{iu})P| = \\ -\frac{\mathcal{V}}{a} |[(a\mathcal{R}_u + b\mathcal{R}_{iu})_1 + (a\mathcal{R}_u + b\mathcal{R}_{iu})_2]\delta'\xi \\ + [(a\mathcal{C}_u + b\mathcal{C}_{iu})_1 + (a\mathcal{C}_u + b\mathcal{C}_{iu})_2]\delta'p| \\ -\frac{\mathcal{V}^2}{a} |\rho_0(U_1 + U_2)\delta'\xi + (P_1 + P_2)(A\delta'p - F\delta'q - E\delta'r)|. \end{aligned}$$

Substituons alors les expressions (101) et (102) dans l'égalité (98) et tenons compte de l'identité

$$\begin{aligned} |(P_1 + P_2)(A\delta'p - F\delta'q - E\delta'r)| = \\ |[A(P_1 + P_2) - F(Q_1 + Q_2) - E(R_1 + R_2)]\delta'p|, \end{aligned}$$

il vient

$$(103) \quad \begin{aligned} 2\rho_0\delta'W + \frac{1}{a} |[(a\mathcal{R}_u + b\mathcal{R}_{iu})_1 + (a\mathcal{R}_u + b\mathcal{R}_{iu})_2]\delta'\xi \\ + [(a\mathcal{C}_u + b\mathcal{C}_{iu})_1 + (a\mathcal{C}_u + b\mathcal{C}_{iu})_2]\delta'p| = 0. \end{aligned}$$

C'est la première forme de la loi adiabatique dynamique; nous allons obtenir la seconde en remplaçant, dans (103),  $\delta'(\xi, \eta, \dots, r)$  par leurs valeurs tirées des égalités (82).

Nous avons tout d'abord, d'après les trois premières (82) et la première (99),

$$(104) \quad \varepsilon_0 \frac{\mathcal{V}^2}{a} [(a\mathcal{R}_u + b\mathcal{R}_{iu}) + (a\mathcal{R}_u + b\mathcal{R}_{iu})] \delta' \xi = -\varepsilon' (a\mathcal{R}_u + b\mathcal{R}_{iu})^2.$$

D'autre part, la résolution des trois dernières équations (82) par rapport à  $\delta'(p, q, r)$  donne un résultat de la forme

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{V}^2}{a} \delta' p &= \mathcal{A} \delta' (a\mathcal{C}_u + b\mathcal{C}_{iu}) - \mathcal{F} \delta' (a\mathcal{C}_v + b\mathcal{C}_{iv}) - \mathcal{E} \delta' (a\mathcal{C}_w + b\mathcal{C}_{iw}), \\ \frac{\mathcal{V}^2}{a} \delta' q &= -\mathcal{F} \delta' (a\mathcal{C}_u + b\mathcal{C}_{iu}) + \mathcal{B} \delta' (a\mathcal{C}_v + b\mathcal{C}_{iv}) - \mathcal{D} \delta' (a\mathcal{C}_w + b\mathcal{C}_{iw}), \\ \frac{\mathcal{V}^2}{a} \delta' r &= -\mathcal{E} \delta' (a\mathcal{C}_u + b\mathcal{C}_{iu}) - \mathcal{D} \delta' (a\mathcal{C}_v + b\mathcal{C}_{iv}) + \mathcal{C} \delta' (a\mathcal{C}_w + b\mathcal{C}_{iw}), \end{aligned}$$

en posant

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{A} &= \mathcal{D}^2 - \mathcal{B}\mathcal{C}, & \Delta \mathcal{B} &= \mathcal{E}^2 - \mathcal{C}\mathcal{A}, & \Delta \mathcal{C} &= \mathcal{F}^2 - \mathcal{A}\mathcal{B}; \\ \Delta \mathcal{D} &= \mathcal{A}\mathcal{D} + \mathcal{E}\mathcal{F}, & \Delta \mathcal{E} &= \mathcal{B}\mathcal{E} + \mathcal{F}\mathcal{D}, & \Delta \mathcal{F} &= \mathcal{C}\mathcal{F} + \mathcal{D}\mathcal{E} \end{aligned}$$

et  $\Delta$  désignant le déterminant des inconnues; on en déduit, d'après (99),

$$(105) \quad \frac{\mathcal{V}^2}{a} |[(a\mathcal{C}_u + b\mathcal{C}_{iu}) + (a\mathcal{C}_u + b\mathcal{C}_{iu})] \delta' p| = |\mathcal{A} \delta' (a\mathcal{C}_u + b\mathcal{C}_{iu}) - 2\mathcal{D} \delta' (a\mathcal{C}_v + b\mathcal{C}_{iv}) (a\mathcal{C}_w + b\mathcal{C}_{iw})|.$$

Les expressions (104) et (105) transforment ainsi l'égalité (103) en la suivante

$$(106) \quad 2\varepsilon_0 \mathcal{V}^2 \delta' \mathcal{U} - \delta' \left| (a\mathcal{R}_u + b\mathcal{R}_{iu})^2 + \frac{\mathcal{A}}{\varepsilon_0} (a\mathcal{C}_u + b\mathcal{C}_{iu})^2 - 2\frac{\mathcal{D}}{\varepsilon_0} (a\mathcal{C}_v + b\mathcal{C}_{iv}) (a\mathcal{C}_w + b\mathcal{C}_{iw}) \right| = 0.$$

C'est la deuxième forme de la loi adiabatique dynamique que nous voulions obtenir. Les égalités (103) et (106) sont à rapprocher des deux égalités analogues que nous avons antérieurement établies pour la ligne élastique<sup>(1)</sup>.

---

(<sup>1</sup>) L. ROY, *Sur les équations générales des lignes élastiques et la propagation des ondes*, p. 164, formules (117) et (118).

## CHAPITRE IV

### Propagation des ondes d'accélération et d'ordre supérieur sur la surface élastique à six paramètres.

**18. Ondes du premier ordre par rapport aux cosinus directeurs et d'ordre supérieur par rapport aux coordonnées.** — Si nous supposons l'onde du premier ordre par rapport aux cosinus directeurs  $\alpha, \beta, \dots, \gamma_s$  du trièdre (M) et d'ordre supérieur à un par rapport aux coordonnées  $x, y, z$  de M, le vecteur  $(\lambda, \mu, \nu)$  est nul, d'après (49), et il en est de même de  $\delta'(\xi, \eta, \zeta)$ , d'après (51). Nous devons donc effacer, dans les équations fondamentales (80) et (82) et toutes celles qui en sont la conséquence, les termes en  $\delta'(\xi, \eta, \zeta)$ .

Tout d'abord, s'il y a viscosité, il résulte encore des considérations développées au n° 13 qu'aucune onde de la catégorie envisagée n'est susceptible de se propager sur la surface élastique.

Si la surface est dénuée de viscosité et bonne conductrice de la chaleur, les équations (88), dans chacune desquelles les trois premiers termes ont disparu, constituent un système de six équations linéaires et homogènes en  $\delta'(p, q, r)$ , dont la seule solution est

$$\delta'(p, q, r) = 0,$$

à moins que les coefficients  $\Phi_{\xi p}, \Phi_{\xi q}, \dots, \Phi_{\xi r}$  des trois premières équations ne soient nuls. Dans ces conditions, il existe des ondes dont les vitesses de propagation s'obtiennent en annulant le déterminant des trois dernières équations, c'est-à-dire le déterminant formé des trois derniers éléments des trois dernières lignes et colonnes du déterminant (89). Ces ondes rentrent d'ailleurs dans la catégorie étudiée au n° 15, puisque le déterminant (89) est alors le produit du précédent et d'un autre déterminant du troisième ordre relatif aux termes en  $\delta'(\xi, \eta, \zeta)$  des équations (88).

Si la surface est mauvaise conductrice de la chaleur, les équations (94) conduisent à des conclusions analogues.

**19. Ondes d'accélération avec viscosité.** — Supposons maintenant l'onde du second ordre par rapport à  $x, y, z$ ;  $\alpha, \beta, \dots, \gamma_s$ ; d'après les égalités (5), (6) et (22), elle est alors du premier ordre par rapport à  $\xi, \eta, \dots, r_s$ ; P, Q, R et nous avons les formules (65) avec  $n = 2$ . Supposons que l'onde soit également du premier ordre par rapport à T. Les équations indéfinies (17) ne s'appliquent pas encore, les déri-

vées  $\frac{\partial(\mathcal{R}_u, \mathcal{R}_v, \dots, \mathcal{C}_{1w})}{\partial(\omega, \omega_1)}$  n'ayant pas de sens sur l'onde, puisque, d'après (13), les fonctions  $\mathcal{R}_u, \mathcal{R}_v, \dots, \mathcal{C}_{1w}$  y sont discontinues par l'intermédiaire des actions de viscosité. Appliquons donc encore l'équation fondamentale de l'Energétique (15) à la même portion que pour les ondes de choc, ayant pour image la bande  $(a_1 a_2 b_1 b_2 a_1)$ . Nous avons la même partie principale (75) pour  $\delta \mathcal{C}_e$  et comme, d'après (14) et (16), les autres termes de l'équation (15) sont de l'ordre de  $(\delta u, \delta v, \dots, \delta \omega_w) dt$ , donc négligeables, cette équation se réduit à

$$\int |(a \delta' \mathcal{R}_u + b \delta' \mathcal{R}_{1u}) \delta u + (a \delta' \mathcal{C}_u + b \delta' \mathcal{C}_{1u}) \delta \omega_u| dl = 0.$$

Cette égalité, devant être vérifiée quels que soient le déplacement et la rotation virtuels en chaque point de l'onde, exige que chaque parenthèse soit nulle, par suite qu'on ait

$$(107) \quad a \delta' \mathcal{F} + b \delta' \mathcal{F}_1 = 0, \quad a \delta' \mathcal{G} + b \delta' \mathcal{G}_1 = 0, \quad \dots, \quad a \delta' \mathcal{R} + b \delta' \mathcal{R}_1 = 0,$$

puisque, d'après (13), la discontinuité des fonctions  $\mathcal{R}_u, \mathcal{R}_v, \dots, \mathcal{C}_{1w}$  n'est due qu'à la présence des actions de viscosité.

Les égalités (107) doivent être vérifiées quelle que soit l'orientation de l'onde; en particulier, pour  $a = 1$ ,  $b = 0$ , elles se réduisent à

$$\delta'(\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}, \mathcal{I}, \mathcal{Q}, \mathcal{R}) = 0$$

et comme alors, d'après (65), les discontinuités  $\delta'(\dot{\xi}_1, \dot{\eta}_1, \dots, \dot{r}_1)$  sont nulles, elles deviennent, d'après (12),

$$\mathcal{D}_{\xi\xi}'' \delta' \dot{\xi} + \mathcal{D}_{\xi\eta}'' \delta' \dot{\eta} + \dots + \mathcal{D}_{\xi r}'' \delta' \dot{r} = 0,$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\mathcal{D}_{r\xi}'' \delta' \dot{\xi} + \mathcal{D}_{r\eta}'' \delta' \dot{\eta} + \dots + \mathcal{D}_{rr}'' \delta' \dot{r} = 0.$$

Remarquons que les dérivées secondes de la fonction dissipative  $\mathcal{D}$  par rapport à  $\dot{\xi}, \dot{\eta}, \dots$  sont indépendantes de ces dernières dérivées, puisque cette fonction en est une forme quadratique.

Or, le déterminant de ces six équations linéaires et homogènes est positif, car il se déduit du discriminant de la forme quadratique définie positive  $\mathcal{D}$  en y supprimant les six dernières lignes et les six dernières colonnes; il faut donc qu'on ait

$$\delta'(\dot{\xi}, \dot{\eta}, \dots, \dot{r}) = 0$$

et par suite, d'après (65), (66) et en supposant  $\mathcal{V}$  différent de zéro,

$$(\lambda, \mu, \nu; a, b, \dots, c_2) = 0.$$

De là le résultat suivant :

*Une surface élastique à six paramètres affectée de viscosité ne peut être le siège d'aucune onde d'accélération qui se propage.*

**20. Ondes d'accélération sans viscosité.** — Les composantes  $\mathcal{R}_u, \mathcal{R}_v, \dots, \mathcal{C}_{1w}$  étant maintenant continues à la traversée de l'onde, puisqu'elles se réduisent ici aux expressions (83), nous pouvons appliquer les équations indéfinies (17) qui, écrites de part et d'autre de l'onde et retranchées membre à membre, nous donnent

$$(108) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta' \frac{\partial \mathcal{R}_u}{\partial \omega} + \delta' \frac{\partial \mathcal{R}_{1u}}{\partial \omega_1} = \delta' \mathcal{X}_i, \\ \dots\dots\dots \\ \delta' \frac{\partial \mathcal{C}_w}{\partial \omega} + \delta' \frac{\partial \mathcal{C}_{1w}}{\partial \omega_1} = \delta' \mathcal{V}_i, \end{array} \right.$$

les autres termes restant continus à la traversée de l'onde, en particulier la force et le couple extérieurs par unité d'aire ( $\mathcal{X}_e, \mathcal{Y}_e, \dots, \mathcal{V}_e$ ). Or nous avons d'après (83)

$$(109) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta' \frac{\partial \mathcal{R}_u}{\partial \omega} = - \left( f''_{\xi^2} \delta' \frac{\partial \xi}{\partial \omega} + f''_{\xi\eta} \delta' \frac{\partial \eta}{\partial \omega} + \dots + f''_{\xi r_1} \delta' \frac{\partial r_1}{\partial \omega} + f''_{\xi T} \delta' \frac{\partial T}{\partial \omega} \right), \\ \delta' \frac{\partial \mathcal{R}_{1u}}{\partial \omega_1} = - \left( f''_{\xi_1 \xi} \delta' \frac{\partial \xi}{\partial \omega_1} + f''_{\xi_1 \eta} \delta' \frac{\partial \eta}{\partial \omega_1} + \dots + f''_{\xi_1 r_1} \delta' \frac{\partial r_1}{\partial \omega_1} + f''_{\xi_1 T} \delta' \frac{\partial T}{\partial \omega_1} \right), \\ \dots\dots\dots \end{array} \right.$$

et, d'après (19), (20), (64) et (65),

$$(110) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta' \mathcal{X}_i = - \rho_0 |\alpha \delta' \ddot{x}| = - \rho_0 \mathcal{V}^* |\alpha \lambda| = - \rho_0 \frac{\mathcal{V}^2}{a^2} \delta' \frac{\partial \xi}{\partial \omega}, \\ \dots\dots\dots \\ \delta' \mathcal{V}_i = - A \delta' \dot{P} + F \delta' \dot{Q} + E \delta' \dot{R} = \frac{\mathcal{V}^2}{a^2} \left( - A \delta' \frac{\partial p}{\partial \omega} + F \delta' \frac{\partial q}{\partial \omega} + E \delta' \frac{\partial r}{\partial \omega} \right), \\ \dots\dots\dots \end{array} \right.$$

Cela posé, tout comme dans le cas des ondes de choc, nous avons encore deux cas à distinguer.

I. *La surface est bonne conductrice de la chaleur.* — Tout d'abord, l'onde étant supposée du premier ordre par rapport à la température, il existe, d'après (49), une quantité  $\tau$  telle qu'on ait

$$(111) \quad \delta' \frac{\partial T}{\partial(\omega, \omega_1, t)} = (a, b, -\mathcal{V}) \tau.$$

Mais pour calculer les variations de ces dérivées, nous ne pouvons pas encore employer l'équation indéfinie (25), établie en supposant la continuité des dérivées premières. On a toutefois, d'après (23) et (24) et en tenant compte de ce que la viscosité est ici nulle

$$(112) \quad \iint \left[ \frac{T}{\mathbf{E}} \left( f''_{\tau\xi} \dot{\xi} + f''_{\tau\eta} \dot{\eta} + \dots + f''_{\tau r_1} \dot{r}_1 \right) - c \dot{T} \right] d\omega d\omega_1 = \\ - \int F_n dL + \int k(T - T_e) dS,$$

les intégrales doubles s'étendant à une portion quelconque de la surface et l'intégrale curviligne à son contour. Si nous prenons pour celle-ci la bande de largeur  $dt$  comprenant l'onde et déjà considérée (nos 12 et 19), les deux intégrales de surface sont de l'ordre de  $dt$ , de sorte que l'égalité (112) devient

$$\int \delta' F_n dL = 0,$$

l'intégrale curviligne étant maintenant prise suivant l'onde. La longueur du chemin d'intégration étant arbitraire, on a donc

$$\delta' F_n = 0, \quad \text{d'où} \quad \tau = 0$$

d'après (111), puisque le flux de chaleur  $\frac{F_n}{e}$  est une fonction linéaire et homogène des dérivées  $\frac{\partial T}{\partial(\omega, \omega_1)}$ ; la discontinuité est donc au moins du second ordre par rapport à la température.

Dans ces conditions, les équations (108) deviennent, d'après (109), (110) et (86),

$$(\Phi_{\xi^2} - \rho_0 \mathcal{V}^*) \delta' \frac{\partial \xi}{\partial \omega} + \Phi_{\xi\eta} \delta' \frac{\partial \eta}{\partial \omega} + \dots + \Phi_{\xi r} \delta' \frac{\partial r}{\partial \omega} = 0, \\ \dots \dots \dots \Phi_{r\xi} \delta' \frac{\partial \xi}{\partial \omega} + \Phi_{r\eta} \delta' \frac{\partial \eta}{\partial \omega} + \dots + (\Phi_{r^2} - C \mathcal{V}^*) \delta' \frac{\partial r}{\partial \omega} = 0.$$



indéfinies (17) et (25) sont maintenant applicables; les premières nous donnent, en supposant la surface affectée de viscosité,

$$\varepsilon' \frac{\partial \mathcal{R}_u}{\partial \omega} + \varepsilon' \frac{\partial \mathcal{R}_{1u}}{\partial \omega_1} = 0, \dots, \varepsilon' \frac{\partial \mathcal{C}_w}{\partial \omega} + \varepsilon' \frac{\partial \mathcal{C}_{1w}}{\partial \omega_1} = 0,$$

ces dérivées étant discontinues par l'intermédiaire des actions de viscosité  $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \dots, \mathcal{R}_i$ , de sorte que les équations précédentes s'écrivent encore, en appliquant les égalités (65) pour  $n = 2$  à ces actions elles-mêmes,

$$a \varepsilon' \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \omega} + b \varepsilon' \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial \omega} = 0, \dots, a \varepsilon' \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \omega} + b \varepsilon' \frac{\partial \mathcal{R}_1}{\partial \omega} = 0.$$

Ce sont les équations (107) dans lesquelles l'ordre des discontinuités est simplement élevé d'une unité; si donc  $\mathcal{V}$  est différent de zéro, toutes les discontinuités doivent être nulles. Aucune onde du troisième ordre n'est donc susceptible de se propager sur une surface élastique à six paramètres affectée de viscosité.

Si maintenant on suppose la surface dénuée de viscosité, les équations indéfinies (17) dérivées par rapport à  $\omega$  nous donnent

$$\varepsilon' \frac{\partial^2 \mathcal{R}_u}{\partial \omega^2} + \varepsilon' \frac{\partial^2 \mathcal{R}_{1u}}{\partial \omega_1 \partial \omega} = \varepsilon' \frac{\partial^2 \mathcal{R}_i}{\partial \omega}, \dots,$$

d'où nous déduirions par les raisonnements déjà faits les mêmes conclusions qu'au n° 20. Les discontinuités d'un ordre quelconque supérieur à trois fourniraient exactement les mêmes résultats; en définitive :

*Les résultats énoncés pour les ondes de choc se propageant sur une surface élastique à six paramètres, restent valables pour les ondes d'ordre supérieur au premier.*

## CHAPITRE V

### Propagation des ondes sur la surface élastique à trois paramètres.

22. **Équation fondamentale des ondes de choc.** — Pour établir l'équation fondamentale des ondes de choc relative à la surface à trois paramètres, nous ne pouvons plus, comme au n° 12, appliquer l'équation fondamentale de l'Energétique (15) à la seule portion de surface constituée par une bande de largeur infiniment petite et de longueur arbitraire comprenant l'onde. Cela tient à ce que les conditions aux limites (39) ne permettent plus de déterminer complètement et aisément la force et le couple de liaisons par unité de longueur dus au reste de la surface. Nous allons lever cette difficulté, en appliquant l'équation fondamentale (15) à une portion de surface arbitraire comprenant l'onde à l'instant  $t$ .

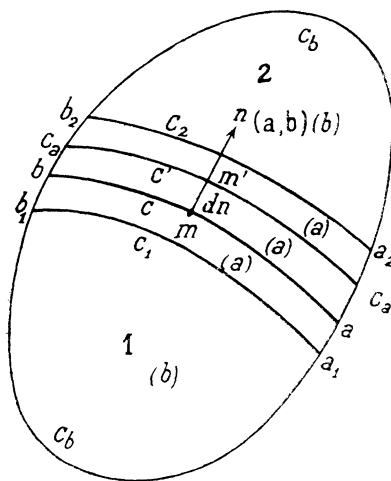


FIG. 2.

Désignons par  $(a)$  la région  $(a_1, a_2, b_1, b_2)$  considérée précédemment (n° 12). Joignons les points  $a_1, b_1; a_2, b_2$  par deux arcs de courbe arbitraires  $c_b$  tracés respectivement dans les régions 1 et 2 et limitant ainsi, avec les arcs primitifs  $c_1, c_2$ , deux domaines finis des régions 1 et 2, dont nous désignerons par  $(b)$  l'ensemble (fig. 2); soit enfin  $c_a$  l'ensemble des arcs  $a_1, a_2, b_1, b_2$ . Nous allons appliquer l'équation fondamentale de l'Energétique à la portion  $(A) + (B)$  de la surface élastique limitée par la courbe  $C_A + C_B$ , à laquelle correspond, dans le plan  $\omega O \omega_1$ , l'aire  $(a) + (b)$  limitée par la courbe  $c_a + c_b$ . Nous devons donc avoir pour tout déplacement virtuel

$$(114) \quad (\delta \mathcal{C}_e + \delta \dot{J} + \delta \mathcal{C}_r - \delta_\tau \Phi)_{(a)+(b)} = 0.$$

Calculons d'abord la partie du premier membre relative à la portion  $(a)$ .

Comme pour la surface à six paramètres, les termes  $\delta \mathcal{C}_e$  et  $\delta_\tau \Phi$  sont négligeables comme étant de l'ordre de  $(\delta u, \delta v, \dots) dt$ ; de même les termes de  $\delta \dot{J} + \delta \mathcal{C}_r$  relatifs aux bandes  $(c, c)$  et  $(c', c_s)$ . La partie cherchée se réduit donc au terme  $\delta \dot{J} + \delta \mathcal{C}_v$

étendu à la bande  $(cc')$  balayée par l'onde pendant le temps  $dt$ . Comme d'ailleurs on a ici, d'après (26),

$$\delta' \xi = \delta' \vartheta, \quad \delta'(\eta, \zeta) = 0,$$

il vient, d'après (28), (40) et (77),

$$\delta \dot{\mathbf{J}} = - \int \varrho_0 \left[ \delta' \vartheta \delta u + \frac{e^2}{12} (\delta' p \delta \omega_u + \delta' q \delta \omega_r) \right] \frac{\mathcal{V}^2}{a} dl$$

et, d'après (33) et (78),

$$\delta \mathcal{C}_v = - dt \int \left[ \mathcal{F} \delta \vartheta + \mathcal{F}_1 \delta g + \mathcal{G}_1 \delta \vartheta_1 + \sum (\mathcal{F} \delta p + \mathcal{Q} \delta q) \right]_2 \mathcal{V} dl,$$

l'indice 2 indiquant que la quantité entre crochets doit être calculée dans la région 2 le long de la courbe  $c$ . Dans cette expression, les actions de viscosité  $\mathcal{F}, \mathcal{F}_1, \dots$  sont des fonctions linéaires et homogènes des dérivées  $\dot{\vartheta}, \dot{g}, \dots$  qui ont ici pour valeur, d'après (76),

$$\dot{\vartheta} = - \frac{\delta' \vartheta}{dt}, \quad \dot{g} = - \frac{\delta' g}{dt}, \quad \dots, \quad \dot{q}_1 = - \frac{\delta' q_1}{dt}.$$

Il vient ainsi

$$(115) \quad (\delta \mathcal{C}_e + \delta \dot{\mathbf{J}} + \delta \mathcal{C}_v - \delta_{\mathbf{T}} \Phi)_{(a)} = - \int_c \left\{ \varrho_0 \left[ \delta' \vartheta \delta u + \frac{e^2}{12} (\delta' p \delta \omega_u + \delta' q \delta \omega_r) \right] \frac{\mathcal{V}}{a} + \left[ \mathcal{F} \delta \vartheta + \mathcal{F}_1 \delta g + \mathcal{G}_1 \delta \vartheta_1 + \sum (\mathcal{F} \delta p + \mathcal{Q} \delta q) \right]_2 \mathcal{V} dl, \right.$$

le chemin d'intégration  $c$  étant explicitement indiqué pour éviter toute confusion dans ce qui suit.

Nous avons d'autre part d'après l'égalité (37), dont le premier membre est celui de l'équation fondamentale de l'Energétique,

$$(116) \quad (\delta \mathcal{C}_e + \delta \dot{\mathbf{J}} + \delta \mathcal{C}_v - \delta_{\mathbf{T}} \Phi)_b = \int_{c_b} (|\mathcal{K} \delta u| + \mathcal{F} \delta \omega_u + \mathcal{A} \mathcal{B}' \delta \omega_r) dl + \int_{c_1+c_2} [(a \mathcal{C}_u + b \mathcal{C}_{ur}) \delta \omega_u + (a \mathcal{C}_r + b \mathcal{C}_{rv}) \delta \omega_r] dl + \int \int_{(b)} [\mathcal{R}_u \delta \vartheta + \mathcal{R}_{ur} \delta g + \mathcal{R}_{1r} \delta \vartheta_1 + (|\mathcal{K}_e + \mathcal{K}_l| \delta u + \mathbf{L}' \delta \omega_u)] d\omega d\omega_1,$$

$\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}; \mathcal{L}, \mathcal{M}$ ,  $\mathbf{o}$  désignant les composantes suivant les axes mobiles de la force et du couple de liaison par unité de longueur que le reste de la surface exerce le long du contour  $C_b$  de la région (B); pour plus de clarté, nous avons décomposé en deux parties l'intégrale curviligne de (37), puisque, le long de la courbe  $C_i + C_s$ , les forces et couples  $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}; \mathcal{L}, \mathcal{M}$  ne sont pas à envisager, du fait que nous appliquons l'équation fondamentale (15) à la portion (A) + (B). L'expression de la seconde intégrale curviligne résulte des égalités (35).

Si nous remarquons alors que cette seconde intégrale étendue à la portion  $c_i + c_s$  du contour de (b) a pour expression

$$- \int_c [(a\delta' C_u + b\delta' C_{iu}) \delta\omega_u + (a\delta' C_v + b\delta' C_{iv}) \delta\omega_v] dl,$$

l'égalité (114) devient, d'après (115) et (116),

$$\begin{aligned} & - \int_c \left\{ \rho_0 \left[ \delta' \delta u + \frac{e^2}{12} (\delta' p \delta\omega_u + \delta' q \delta\omega_i) \right] \frac{V^2}{a} \right. \\ & \quad + \left[ \mathcal{F} \delta \delta + \mathcal{F}_i \delta g + \mathcal{G}_i \delta \delta_i + \sum (\mathcal{F} \delta p + \mathcal{Q} \delta q) \right]_2 V dt \\ & \quad + (a\delta' C_u + b\delta' C_{iu}) \delta\omega_u + (a\delta' C_v + b\delta' C_{iv}) \delta\omega_v \left. \right\} dl \\ & \quad + \int_{c_b} (|\mathcal{X} \delta u| + \mathcal{L}' \delta\omega_u + \mathcal{M}' \delta\omega_v) dl \\ & + \int \int_{(b)} [\mathcal{R}_u \delta \delta + \mathcal{R}_{iu} \delta g + \mathcal{R}_w \delta \delta_i + |\mathcal{X}_e + \mathcal{X}_i| \delta u + \mathbf{L}' \delta\omega_u] d\omega d\omega_i = 0, \end{aligned}$$

dans laquelle les variations  $\delta \delta, \delta g, \delta \delta_i; \delta p, \delta q; \delta p_i, \delta q_i$  doivent être remplacées par leurs valeurs (30).

L'égalité ainsi obtenue ne doit pas être vérifiée quelles que soient les composantes

$$(117) \quad \delta u, \delta v, \delta w; \quad \delta\omega_u, \delta\omega_v, \delta\omega_w$$

du déplacement et de la rotation virtuels, mais seulement pour toutes leurs valeurs vérifiant les égalités (31). D'après les principes du calcul des variations, il doit donc exister :

En chaque point de la région (b) trois fonctions  $\mathcal{R}_v, \mathcal{R}_w, \mathcal{R}_{iw}$ ;

En chaque point du contour  $c_b$  trois fonctions  $\mathcal{R}'_v, \mathcal{R}'_w, \mathcal{R}'_{iw}$ ;

En chaque point de l'image  $c$  de l'onde trois fonctions  $\mathcal{G}, \mathcal{H}, \mathcal{H}_i$ , telles qu'on ait, quelles que soient les six variations (117),

$$\begin{aligned}
(118) \quad & - \int_c \left( \varepsilon_0 \left[ \delta' \delta u + \frac{e^2}{12} (\delta' p \delta \omega_u + \delta' q \delta \omega_v) \right] \frac{\mathcal{V}^*}{a} \right. \\
& + \left\{ \mathcal{F} \left( \frac{\partial \delta u}{\partial \omega} + q \delta w \right) + \mathcal{G} \left[ \frac{\partial \delta v}{\partial \omega} - p \delta w - (1 + \lambda) \delta \omega_w \right] \right. \\
& \quad + \mathcal{H} \left[ \frac{\partial \delta w}{\partial \omega} + p \delta v - q \delta u + (1 + \lambda) \delta \omega_v \right] \\
& + \mathcal{F}_1 \left[ \frac{\partial \delta u}{\partial \omega_1} + q_1 \delta w + (1 + \lambda_1) \delta \omega_w \right] + \mathcal{G}_1 \left( \frac{\partial \delta v}{\partial \omega_1} - p_1 \delta w - g \delta \omega_w \right) \\
& \quad + \mathcal{H}_1 \left[ \frac{\partial \delta w}{\partial \omega_1} + p_1 \delta v - q_1 \delta u + g \delta \omega_v - (1 + \lambda_1) \delta \omega_u \right] \\
& + \sum \left[ \mathcal{F} \left( \frac{\partial \delta \omega_u}{\partial \omega} + q \delta \omega_w \right) + \mathcal{Q} \left( \frac{\partial \delta \omega_v}{\partial \omega} - p \delta \omega_w \right) \right] \Bigg\}_2 \mathcal{V} dt \\
& \quad + (a \delta' \mathcal{C}_u + b \delta' \mathcal{C}_{1u}) \delta \omega_u + (a \delta' \mathcal{C}_v + b \delta' \mathcal{C}_{1v}) \delta \omega_v \Bigg) dl \\
& + \int_{c_b} \left\{ |\mathcal{K} \delta u| + \mathcal{L}' \delta \omega_u + \mathcal{M}' \delta \omega_v + \mathcal{R}'_r \left[ \frac{\partial \delta v}{\partial \omega} - p \delta w - (1 + \lambda) \delta \omega_w \right] \right. \\
& \quad + \mathcal{R}'_w \left[ \frac{\partial \delta w}{\partial \omega} + p \delta v - q \delta u + (1 + \lambda) \delta \omega_v \right] \\
& \quad + \mathcal{R}'_{1w} \left[ \frac{\partial \delta w}{\partial \omega_1} + p_1 \delta v - q_1 \delta u + g \delta \omega_v - (1 + \lambda_1) \delta \omega_u \right] \Bigg\} dl \\
& + \int_{(b)} \left\{ |(\mathcal{K}_e + \mathcal{K}_l) \delta u + \mathbf{L}' \delta \omega_u| \right. \\
& \quad + \mathcal{R}_u \left( \frac{\partial \delta u}{\partial \omega} + q \delta w \right) + \mathcal{R}_r \left[ \frac{\partial \delta v}{\partial \omega} - p \delta w - (1 + \lambda) \delta \omega_w \right] \\
& \quad + \mathcal{R}_w \left[ \frac{\partial \delta w}{\partial \omega} + p \delta v - q \delta u + (1 + \lambda) \delta \omega_v \right] \\
& + \mathcal{R}_{1u} \left[ \frac{\partial \delta u}{\partial \omega_1} + q_1 \delta w + (1 + \lambda_1) \delta \omega_w \right] + \mathcal{R}_{1v} \left( \frac{\partial \delta v}{\partial \omega_1} - p_1 \delta w - g \delta \omega_w \right) \\
& \quad + \mathcal{R}_{1w} \left[ \frac{\partial \delta w}{\partial \omega_1} + p_1 \delta v - q_1 \delta u + g \delta \omega_v - (1 + \lambda_1) \delta \omega_u \right] \Bigg\} d\omega d\omega_1 = 0.
\end{aligned}$$

Appliquons alors aux dérivées par rapport à  $\omega$  et à  $\omega_1$  figurant dans les intégrales curvilignes les formules (79'), dans lesquelles la demi-normale  $n(a, b)$  est extérieure à la région  $(b)$ ; en tenant compte du sens correspondant de la tangente  $l(b, -a)$  (fig. 2), nous avons, dans la deuxième intégrale curviligne prise le long de  $c_b$ ,

$$\int_{c_b} b \mathcal{R}'_v \frac{\partial \delta v}{\partial l} dl = (b \mathcal{R}'_v \delta v)_{b_1}^{a_1} + (b \mathcal{R}'_v \delta v)_{a_2}^{b_2} - \int_{c_b} \frac{\partial b \mathcal{R}'_v}{\partial l} dl,$$

soit encore

$$\int_c b \mathcal{R}'_v \frac{\partial \delta v}{\partial l} dl = (b \delta' \mathcal{R}'_v \delta v)_b - (b \delta' \mathcal{R}'_v \delta v)_a - \int_c \frac{\partial b \mathcal{R}'_v}{\partial l} \delta v dl$$

et l'on a de même

$$\begin{aligned} \int_c (b \mathcal{R}'_w - a \mathcal{R}'_{1w}) \frac{\partial \delta w}{\partial l} dl &= [(b \delta' \mathcal{R}'_w - a \delta' \mathcal{R}'_{1w}) \delta w]_b \\ &- [(b \delta' \mathcal{R}'_w - a \delta' \mathcal{R}'_{1w}) \delta w]_a + \int_c \frac{\partial (a \mathcal{R}'_{1w} - b \mathcal{R}'_w)}{\partial l} \delta w dl. \end{aligned}$$

Transformons enfin par intégrations par parties les termes en  $\mathcal{R}_u \frac{\partial \delta u}{\partial \omega}$ , ... figurant dans l'intégrale double et l'égalité (118) s'écrit en définitive

$$\begin{aligned} (119) \quad & - \int_c \left( \left( \rho_0 \frac{\mathcal{V}^2}{a} \delta' \partial + a \delta' \mathcal{R}_u + b \delta' \mathcal{R}_{1u} \right) \delta u \right. \\ & + (a \delta' \mathcal{R}_v + b \delta' \mathcal{R}_{1v}) \delta v + (a \delta' \mathcal{R}_w + b \delta' \mathcal{R}_{1w}) \delta w \\ & + \left( \rho_0 \frac{e^2}{12} \frac{\mathcal{V}^2}{a} \delta' p + a \delta' \mathcal{C}_u + b \delta' \mathcal{C}_{1u} \right) \delta \omega_u \\ & + \left( \rho_0 \frac{e^2}{12} \frac{\mathcal{V}^2}{a} \delta' q + a \delta' \mathcal{C}_v + b \delta' \mathcal{C}_{1v} \right) \delta \omega_v \\ & + \left\{ \left( a \mathcal{F} + b \mathcal{F}_1 \right) \frac{\partial \delta u}{\partial n} + (b \mathcal{F} - a \mathcal{F}_1) \frac{\partial \delta u}{\partial l} \right\} \\ & + \mathcal{F} q \delta w - \mathcal{G} [p \delta w + (1 + \partial) \delta \omega_w] \\ & + \mathcal{H} [p \delta v - q \delta u + (1 + \partial) \delta \omega_v] \\ & + \mathcal{F}_1 [q_1 \delta w + (1 + \partial_1) \delta \omega_w] - \mathcal{G}_1 (p_1 \delta w + g \delta \omega_w) \\ & + \mathcal{H}_1 [p_1 \delta v - q_1 \delta u + g \delta \omega_v - (1 + \partial_1) \delta \omega_u] \\ & + (a \mathcal{F} + b \mathcal{F}_1) \frac{\partial \delta \omega_u}{\partial n} + (b \mathcal{F} - a \mathcal{F}_1) \frac{\partial \delta \omega_u}{\partial l} \\ & + (a \mathcal{Q} + b \mathcal{Q}_1) \frac{\partial \delta \omega_v}{\partial n} + (b \mathcal{Q} - a \mathcal{Q}_1) \frac{\partial \delta \omega_v}{\partial l} \\ & + \sum (\mathcal{F} q - \mathcal{Q} p) \delta \omega_w \Bigg\}_2 \mathcal{V} dt \Bigg) dl \\ & + [-b \delta' \mathcal{R}'_v \delta v + (a \delta' \mathcal{R}'_{1w} - b \delta' \mathcal{R}'_w) \delta w]_a \\ & - [-b \delta' \mathcal{R}'_v \delta v + (a \delta' \mathcal{R}'_{1w} - b \delta' \mathcal{R}'_w) \delta w]_b \\ & + \int_c \left\{ (\mathcal{K} + a \mathcal{R}_u + b \mathcal{R}_{1u} - q \mathcal{R}'_w - q_1 \mathcal{R}'_{1w}) \delta u \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left( \mathcal{Y} + a\mathcal{R}_v + b\mathcal{R}_{iv} + p\mathcal{R}'_w + p_i\mathcal{R}'_{iw} - \frac{\partial b\mathcal{R}'_v}{\partial l} \right) \delta v \\
& + \left[ \mathcal{Z} + a\mathcal{R}_w + b\mathcal{R}_{iw} - p\mathcal{R}'_v + \frac{\partial(a\mathcal{R}'_{iw} - b\mathcal{R}'_w)}{\partial l} \right] \delta w \\
& + a\mathcal{R}'_v \frac{\partial \delta v}{\partial n} + (a\mathcal{R}'_w - b\mathcal{R}'_{iw}) \frac{\partial \delta w}{\partial n} \\
& + [\mathcal{L}' - (1 + \vartheta_i)\mathcal{R}'_{iw}] \delta \omega_u + [\mathcal{M}' + (1 + \vartheta)\mathcal{R}'_w + g\mathcal{R}'_{iw}] \delta \omega_v - (1 + \vartheta)\mathcal{R}'_v \delta \omega_w \Big\} dt \\
& + \int \int_{(b)} \left\{ \left[ \mathcal{X}_e + \mathcal{X}_i - \sum \left( \frac{\partial \mathcal{R}_u}{\partial \omega} + q\mathcal{R}_w \right) \right] \delta u \right. \\
& + \left[ \mathcal{Y}_e + \mathcal{Y}_i + \sum \left( -\frac{\partial \mathcal{R}_v}{\partial \omega} + p\mathcal{R}_w \right) \right] \delta v \\
& + \left[ \mathcal{Z}_e + \mathcal{Z}_i + \sum \left( -\frac{\partial \mathcal{R}_w}{\partial \omega} + q\mathcal{R}_u - p\mathcal{R}_v \right) \right] \delta w \\
& + [\mathbf{L}' - (1 + \vartheta_i)\mathcal{R}_{iw}] \delta \omega_u + [\mathbf{M}' + (1 + \vartheta)\mathcal{R}_w + g\mathcal{R}_{iw}] \delta \omega_v \\
& + [\mathbf{N}' - (1 + \vartheta)\mathcal{R}_v + (1 + \vartheta_i)\mathcal{R}_{iv} - g\mathcal{R}_{iv}] \delta \omega_w \Big\} d\omega d\omega_i = 0.
\end{aligned}$$

Telle est l'équation fondamentale des ondes de choc pour la surface élastique à trois paramètres; nous allons l'appliquer successivement aux cas où la surface est affectée et dénuée de viscosité.

**23. Surface affectée de viscosité.** — L'équation (119) devant être vérifiée quelles que soient les fonctions (117), cela exige que leurs coefficients soient nuls et aussi ceux de leurs dérivées normales et tangentielles, ainsi que nous l'avons vu au n° 13, puisque les points  $a$  et  $b$  considérés sur la courbe  $c$  sont arbitraires. On doit donc avoir :

I. En chaque point de la région  $(b)$ , les six équations indéfinies (38);

II. En chaque point de la portion de contour  $c_b$ , les sept conditions aux limites (39);

III. Aux points  $a$  et  $b$ , où le contour  $c_b$  coupe l'image de l'onde, les deux conditions

$$\delta' \mathcal{R}'_v = 0, \quad a\delta' \mathcal{R}'_{iw} - b\delta' \mathcal{R}'_w = 0;$$

IV. En chaque point de l'onde, les dix égalités

$$(a\mathcal{F} + b\mathcal{F}_i, b\mathcal{F} - a\mathcal{F}_i; \dots; a\mathcal{Q} + b\mathcal{Q}_i, b\mathcal{Q} - a\mathcal{Q}_i) \mathcal{V} dt = 0,$$

qui, en supposant la vitesse de propagation  $V$  différente de zéro et ainsi que nous l'avons vu au n° 13, entraînent les conditions

$$(120) \quad (\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}, \mathcal{I}, \mathcal{Q}; \mathcal{F}_1, \mathcal{G}_1, \mathcal{H}_1, \mathcal{I}_1, \mathcal{Q}_1) dt = 0;$$

et en outre

$$(121) \quad a \delta' \mathcal{R}_v + b \delta' \mathcal{R}_{iv} = 0, \quad a \delta' \mathcal{R}_w + b \delta' \mathcal{R}_{iw} = 0;$$

$$(122) \quad \begin{cases} \rho_0 \frac{V^2}{a} \delta' \vartheta + a \delta' \mathcal{R}_u + b \delta' \mathcal{R}_{iu} = 0, \\ \rho_0 \frac{e^2}{12} \frac{V^2}{a} \delta' p + a \delta' \mathcal{C}_u + b \delta' \mathcal{C}_{iu} = 0, \\ \rho_0 \frac{e^2}{12} \frac{V^2}{a} \delta' q + a \delta' \mathcal{C}_r + b \delta' \mathcal{C}_{ir} = 0. \end{cases}$$

Les conclusions I et II étaient à prévoir, puisque la région (B) et la portion de contour  $C_b$  ne sont pas atteintes par l'onde entre les instants  $t$  et  $t + dt$ . On voit d'autre part que les égalités (121) et (122) coïncident avec les égalités correspondantes (82) relatives à la surface à six paramètres, dans lesquelles on tient compte des formules (26), (28) et (40), les fonctions  $\mathcal{R}_v$ ,  $\mathcal{R}_w$ ,  $\mathcal{R}_{iw}$  introduites par la méthode des variations jouant alors le rôle d'inconnues auxiliaires.

Cela posé, les égalités (120), dont nous détachons celles qui annulent les trois fonctions  $\mathcal{G}$ ,  $\mathcal{H}$ ,  $\mathcal{H}_1$  introduites par la méthode des variations, constituent un système de sept équations linéaires et homogènes en

$$\dot{\vartheta} dt = -\delta' \vartheta, \quad \dot{g} dt = -\delta' g, \quad \dots, \quad \dot{q}_1 dt = -\delta' q_1$$

dont le déterminant n'est pas nul, puisque c'est le discriminant de la fonction dissipative; cela exige que toutes ces discontinuités soient nulles et par suite qu'on ait, d'après (71),

$$(\Lambda, \Delta, \Delta_1) = 0.$$

De là, en tenant compte de la conclusion du n° 13, le résultat général suivant :

*Une surface élastique affectée de viscosité ne peut être le siège d'aucune onde de choc qui se propage.*

**24. Surface dénuée de viscosité et bonne conductrice de la chaleur.** — Dans cette hypothèse, les équations (120) se réduisent aux trois relatives aux fonctions auxiliaires  $\mathcal{G}$ ,  $\mathcal{H}$ ,  $\mathcal{H}_1$ ; les équations (121) déterminent les variations des fonctions



25. **Surface dénuée de viscosité et mauvaise conductrice de la chaleur.** — Nous avons alors, comme cas particulier de l'égalité (91) et d'après (71),

$$(125) \quad \delta' \mathbf{T} = \frac{\mathbf{T}}{c \mathbf{E}} \left[ f''_{T_d} \delta' d + f''_{T_g} \delta' g + \sum (f''_{T_p} \delta' p + f''_{T_q} \delta' q) \right],$$

de sorte que les formules (93) deviennent

$$(126) \left\{ \begin{aligned} -a(a\delta' \mathcal{R}_u + b\delta' \mathcal{R}_{iu}) &= \left( \Phi_{\xi^2} + \frac{T}{c\mathbf{E}} \Psi_{\xi^2} \right) \delta' \vartheta + \left( \Phi_{\xi p} + \frac{T}{c\mathbf{E}} \Psi_{\xi} \Psi_p \right) \delta' p \\ &\quad + \left( \Phi_{\xi q} + \frac{T}{c\mathbf{E}} \Psi_{\xi} \Psi_q \right) \delta' q, \\ \dots\dots\dots \\ -a(a\delta' \mathcal{C}_v + b\delta' \mathcal{C}_{iv}) &= \left( \Phi_{q\xi} + \frac{T}{c\mathbf{E}} \Psi_q \Psi_{\xi} \right) \delta' \vartheta + \left( \Phi_{qp} + \frac{T}{c\mathbf{E}} \Psi_q \Psi_p \right) \delta' p \\ &\quad + \left( \Phi_{q^2} + \frac{T}{c\mathbf{E}} \Psi_q^2 \right) \delta' q, \end{aligned} \right.$$

la fonction  $\Psi_u$  restant définie par (92), avec la même correspondance (124) que pour les fonctions  $\Phi_{uv}$ , c'est-à-dire qu'on a

$$\Psi_{\xi} = a f''_{T_d} + b f''_{T_g}, \dots$$

Les équations (122) deviennent ainsi

$$(127) \quad \begin{cases} \left( \Phi_{\xi^2} + \frac{T}{cE} \Psi_{\xi^2} - \rho_0 V^2 \right) \delta' \vartheta + \dots + \left( \Phi_{q^2} + \frac{T}{cE} \Psi_q \Psi_q \right) \delta' q = 0, \\ \dots\dots\dots \\ \left( \Phi_{q\xi} + \frac{T}{cE} \Psi_q \Psi_{\xi} \right) \delta' \vartheta + \dots + \left( \Phi_{q^2} + \frac{T}{cE} \Psi_q^2 - \rho_0 \frac{e^2}{12} V^2 \right) \delta' q = 0; \end{cases}$$

de là l'équation aux vitesses de propagation

$$\left| \begin{array}{cccc} \Phi_{\xi^2} + \frac{\mathbf{T}}{c\mathbf{E}} \Psi_{\xi}^2 - \rho_0 \mathcal{V}^2 & \dots & \Phi_{\xi q} + \frac{\mathbf{T}}{c\mathbf{E}} \Psi_{\xi} \Psi_q & \\ \dots & \dots & \dots & \\ \Phi_{q\xi} + \frac{\mathbf{T}}{c\mathbf{E}} \Psi_q \Psi_{\xi} & \dots & \Phi_{q^2} + \frac{\mathbf{T}}{c\mathbf{E}} \Psi_q^2 - \rho_0 \frac{e^2}{12} \mathcal{V}^2 & \end{array} \right| = 0.$$

26. **Cas d'une substance présentant trois plans de symétrie de contexture.** — Il nous suffit de considérer le cas d'une substance mauvaise conductrice de la cha-

leur, puisque celui d'une substance bonne conductrice s'en déduit en faisant infinie la capacité calorifique  $c$ , ainsi que nous l'avons remarqué au n° 16.

Cela posé, au lieu de calculer les fonctions  $\Phi_{uv}$  et  $\Psi_u$  figurant dans les équations (127) en partant de leurs définitions (86), (92) et du potentiel thermodynamique interne (41), il est plus simple de partir des expressions (42) de  $\mathcal{R}_u$ ,  $\mathcal{R}_{1u}$ , ...,  $\mathcal{C}_{1v}$  et d'appliquer les équations initiales (122). Nous avons ainsi, en tenant compte de ce que  $\delta' \delta_i = 0$ ,

$$(128) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta' \mathcal{R}_u = -e \left( \frac{d\mathcal{A}}{dT} \delta' T + \mathcal{H} \delta' \delta \right), \\ \delta' \mathcal{R}_{1u} = -e \mathcal{A}_{ee} \delta' g, \\ \delta' \mathcal{C}_u = -\frac{e^3}{12} \mathcal{A}_{ee} (\delta' p - \delta' q_i) = -\delta' \mathcal{C}_{1v}, \\ \delta' \mathcal{C}_{1u} = -\frac{e^3}{12} (-\mathcal{J} \delta' q + \mathcal{K} \delta' p_i), \\ \delta' \mathcal{C}_v = -\frac{e^3}{12} (\mathcal{H} \delta' q - \mathcal{J} \delta' p_i). \end{array} \right.$$

On a d'autre part, d'après (41),

$$f''_{T\delta} = e \frac{d\mathcal{A}}{dT},$$

les autres dérivées secondes figurant dans l'expression (125) de  $\delta' T$  étant de l'ordre de grandeur des déformations, donc négligeables; on a par suite

$$\delta' T = e \frac{T}{c\mathbf{E}} \frac{d\mathcal{A}}{dT} \delta' \delta.$$

Les expressions (126) deviennent ainsi, d'après (128), (71) et en posant

$$\mathcal{A}' = \frac{d\mathcal{A}}{dT},$$

$$(129) \quad \left\{ \begin{array}{l} -a(a \delta' \mathcal{R}_u + b \delta' \mathcal{R}_{1u}) = e \left[ a^2 \left( \frac{eT}{c\mathbf{E}} \mathcal{A}'^2 + \mathcal{H} \right) + b^2 \mathcal{A}_{ee} \right] \delta' \delta, \\ -a(a \delta' \mathcal{C}_u + b \delta' \mathcal{C}_{1u}) = \frac{e^3}{12} [(a^2 \mathcal{A}_{ee} + b^2 \mathcal{K}) \delta' p - ab(\mathcal{A}_{ee} + \mathcal{J}) \delta' q], \\ -a(a \delta' \mathcal{C}_v + b \delta' \mathcal{C}_{1v}) = \frac{e^3}{12} [-ab(\mathcal{A}_{ee} + \mathcal{J}) \delta' p + (a^2 \mathcal{H} + b^2 \mathcal{A}_{ee}) \delta' q]; \end{array} \right.$$

d'où, en substituant dans les équations (122),

$$(130) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left[ a^2 \left( \frac{T}{cE} \mathcal{A}'^2 + \mathcal{H} \right) + b^2 \mathcal{A}_{66} - \rho_0 \mathcal{V}^2 \right] \delta' \mathfrak{d} = 0, \\ (a^2 \mathcal{A}_{66} + b^2 \mathcal{H} - \rho_0 \mathcal{V}^2) \delta' p - ab (\mathcal{A}_{66} + \mathfrak{J}) \delta' q = 0, \\ -ab (\mathcal{A}_{66} + \mathfrak{J}) \delta' p + (a^2 \mathcal{H} + b^2 \mathcal{A}_{66} - \rho_0 \mathcal{V}^2) \delta' q = 0, \end{array} \right.$$

$\rho_0$  désignant alors la densité cubique et  $c$  la capacité calorifique par unité de volume. On voit que l'une des vitesses de propagation s'obtient en annulant le coefficient de  $\delta' \mathfrak{d}$ ; les deux autres sont alors données par une équation du second degré.

**27. Cas d'une substance isotrope.** — Dans le cas d'une substance isotrope, les formules (43) nous donnent

$$\begin{aligned} \mathcal{A}' &= -\frac{2\mu}{\lambda + 2\mu} \nu', & a^2 \mathcal{A}_{66} + b^2 \mathcal{H} &= \mu + b^2 \mathfrak{E}, \\ \mathcal{A}_{66} + \mathfrak{J} &= \mathfrak{E}, & a^2 \mathcal{H} + b^2 \mathcal{A}_{66} &= \mu + a^2 \mathfrak{E}, \end{aligned}$$

en posant

$$\nu' = \frac{d\nu}{dT}, \quad \mathfrak{E} = \mu \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu}.$$

On voit que ce dernier coefficient d'élasticité est peu différent du module de Young; les équations (130) deviennent alors

$$(131) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \mu + a^2 \left[ \mathfrak{E} + \frac{T}{cE} \left( \frac{2\mu\nu'}{\lambda + 2\mu} \right)^2 \right] - \rho_0 \mathcal{V}^2 \right\} \delta' \mathfrak{d} = 0, \\ (\mu + b^2 \mathfrak{E} - \rho_0 \mathcal{V}^2) \delta' p - ab \mathfrak{E} \delta' q = 0, \\ -ab \mathfrak{E} \delta' p + (\mu + a^2 \mathfrak{E} - \rho_0 \mathcal{V}^2) \delta' q = 0. \end{array} \right.$$

L'équation aux vitesses de propagation est ainsi, tous calculs faits,

$$(132) \quad \left\{ \mu + a^2 \left[ \mathfrak{E} + \frac{T}{cE} \left( \frac{2\mu\nu'}{\lambda + 2\mu} \right)^2 \right] - \rho_0 \mathcal{V}^2 \right\} (\mu + \mathfrak{E} - \rho_0 \mathcal{V}^2) (\mu - \rho_0 \mathcal{V}^2) = 0.$$

Nous avons donc trois cas à distinguer.

I.  $\mu + a^2 \left[ \mathfrak{E} + \frac{T}{cE} \left( \frac{2\mu\nu'}{\lambda + 2\mu} \right)^2 \right] - \rho_0 \mathcal{V}^2 = 0$ . La vitesse de propagation est alors

$$(133) \quad \mathcal{V} = \pm \sqrt{\frac{1}{\rho_0} \left\{ \mu + a^2 \left[ \mathfrak{E} + \frac{T}{cE} \left( \frac{2\mu\nu'}{\lambda + 2\mu} \right)^2 \right] \right\}}.$$

D'après la première (131),  $\delta'\delta$  est arbitraire; les deux autres donnent

$$\delta'(p, q) = 0, \quad \text{d'où} \quad (\Delta, \Delta_1 = 0)$$

d'après (71). Il résulte alors de (68) et (70) que les cosinus directeurs restent continus. L'onde est ainsi caractérisée par le seul vecteur  $\Lambda$  dirigé suivant  $Mu$  et qui peut faire avec l'onde un angle quelconque; la discontinuité n'est donc relative qu'aux coordonnées sans porter sur les cosinus.

Remarquons que, pour  $a = 1$ , c'est-à-dire lorsque le vecteur  $\Lambda$  est normal à l'onde, la vitesse de propagation (133) coïncide avec celle que nous avons autrefois obtenue, par des considérations toutes différentes, dans le mouvement tangentiel des plaques planes<sup>(1)</sup>.

II.  $\mu + \xi - \rho_0 \mathcal{V}^2 = 0$ . La vitesse de propagation est alors

$$(134) \quad \mathcal{V} = \pm \sqrt{\frac{\mu + \xi}{\rho_0}} = \pm \sqrt{\frac{4\mu}{\rho_0} \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu}}.$$

La première (131) exige que  $\delta'\delta$  soit nul et, par suite, le vecteur  $\Lambda$ ; les deux autres donnent ensuite, d'après (71),

$$a\Delta_1 - b\Delta = 0, \quad \text{d'où} \quad |a'a_2| = 0$$

d'après (73'). Cette dernière égalité exprime que le vecteur  $(a_2, b_2, c_2)$  est normal à l'onde, c'est-à-dire représente une discontinuité longitudinale. Contrairement au cas précédent, la discontinuité n'est donc relative qu'aux cosinus sans porter sur les coordonnées.

Remarquons que la vitesse de propagation (134) est celle qui se trouve mise en évidence sur l'équation du mouvement transversal d'une plaque plane et qui résulte du terme relatif à l'inertie de rotation, négligé par beaucoup d'auteurs<sup>(2)</sup>.

III.  $\mu - \rho_0 \mathcal{V}^2 = 0$ . La vitesse de propagation est alors

$$(135) \quad \mathcal{V} = \pm \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}.$$

La première (131) exige encore que  $\delta'\delta$  soit nul et, par suite, le vecteur  $\Lambda$ ; les deux autres donnent ensuite, d'après (71),

$$a\Delta + b\Delta_1 = 0.$$

<sup>(1)</sup> L. ROY, *Recherches sur les propriétés thermomécaniques des corps solides* (Journal de Mathématiques pures et appliquées, 6<sup>e</sup> série, t. VI, 1910, p. 244, formule (24)).

<sup>(2)</sup> L. ROY, *Sur les équations générales des surfaces élastiques à trois paramètres*, p. 202, troisième équation (92).

Les formules (70) s'écrivent ainsi

$$b(a_1, b_1, c_1) = -\Delta(bx - az_1, b\beta - a\beta_1, b\gamma - a\gamma_1),$$

d'où l'on tire, d'après (73),

$$\frac{a_2}{a'} = \frac{b_2}{b'} = \frac{c_2}{c'}.$$

Le vecteur  $(a_1, b_1, c_1)$  est donc tangent à l'onde, c'est-à-dire représente une discontinuité transversale. Comme dans le cas précédent, la discontinuité n'est encore relative qu'aux cosinus sans porter sur les coordonnées.

Remarquons enfin que la vitesse de propagation (135) est celle des ondes transversales dans les milieux élastiques isotropes à trois dimensions.

**28. Loi adiabatique dynamique.** — Il résulte des formules (26), (28) et (122) que les égalités (103) et (106) exprimant les deux formes de la loi adiabatique dynamique deviennent ici

$$\begin{aligned} 2\varphi_0\delta'q + \frac{1}{a} \{ [(a\mathcal{R}_u + b\mathcal{R}_{1u})_1 + (a\mathcal{R}_u + b\mathcal{R}_{1u})_2] \delta' \delta \\ + [(a\mathcal{C}_u + b\mathcal{C}_{1u})_1 + (a\mathcal{C}_u + b\mathcal{C}_{1u})_2] \delta' p \\ + [(a\mathcal{C}_v + b\mathcal{C}_{1v})_1 + (a\mathcal{C}_v + b\mathcal{C}_{1v})_2] \delta' q \} = 0, \\ 2\varphi_0^2 V^2 \delta'q - \delta' \left\{ (a\mathcal{R}_u + b\mathcal{R}_{1u})^2 + \frac{12}{\epsilon^2} [(a\mathcal{C}_u + b\mathcal{C}_{1u})^2 + (a\mathcal{C}_v + b\mathcal{C}_{1v})^2] \right\} = 0. \end{aligned}$$

Il est alors facile de les appliquer aux trois cas de propagation que nous venons d'étudier pour une substance isotrope. Dans le premier, il ne subsiste dans chaque accolade que les termes en  $\mathcal{R}_u, \mathcal{R}_{1u}$ ; dans les deux autres au contraire, ce sont ces termes qui disparaissent.

**29. Ondes du premier ordre par rapport aux cosinus directeurs et d'ordre supérieur par rapport aux coordonnées.** — L'onde étant du premier ordre par rapport aux cosinus directeurs et d'ordre supérieur par rapport aux coordonnées, les raisonnements faits pour parvenir à l'équation (119) subsistent, sauf que  $\delta'\delta$  est nul. Nous avons donc encore les équations (120), (121), (122). Or, s'il y a viscosité, sept des équations (120) sont linéaires et homogènes en  $\delta'(p, q, p_1, q_1)$ , de sorte qu'il faut encore que ces discontinuités soient nulles. Une telle onde ne peut donc se propager sur une surface affectée de viscosité.

S'il n'y a pas viscosité, les équations (122) jointes aux formules (126), dans les-

quelles on efface les termes en  $\delta'\delta$ , constituent un système de trois équations linéaires et homogènes en  $\delta'(p, q)$ . Cela exige que  $\delta'(p, q)$  soient nuls, sauf si ces trois équations se réduisent à deux. Dans le premier cas, qui est celui d'une substance de texture quelconque, nous retrouvons la même impossibilité de telles ondes que dans la théorie de la ligne élastique<sup>(1)</sup>; mais dans le second, ces ondes deviennent possibles. Or, ce second cas est précisément celui d'une substance de texture symétrique ou isotrope, puisque la première (122), qui coïncide alors avec la première (130) ou (131), est indépendante de  $\delta'(p, q)$  et se trouve identiquement vérifiée du fait que  $\delta'\delta$  est nul. On retombe ainsi sur les deux dernières équations (130) ou (131), qui nous redonnent les cas de propagation II et III du n° 27.

**30. Ondes d'accélération et d'ordre supérieur avec viscosité.** — Considérons maintenant le cas d'une onde du second ordre par rapport à  $x, y, z$ ;  $\alpha, \beta, \dots, \gamma_2$ , c'est-à-dire du premier ordre par rapport à  $\delta, g, p, q, p_1, q_1$ , d'après les formules (72), et à la température absolue  $T$ . Les fonctions  $\mathcal{R}_u, \mathcal{R}_{1u}, \dots, \mathcal{C}_v$  restent discontinues à la traversée de l'onde par l'intermédiaire des actions de viscosité. L'équation (119) établie dans cette hypothèse subsiste donc, mais en y effaçant tous les termes où figurent les discontinuités d'ordre zéro, c'est-à-dire en  $\delta'(\delta, p, q)$ . Les équations (121) et (122) se réduisent ainsi aux suivantes

$$(136) \quad a\delta'\mathcal{R}_u + b\delta'\mathcal{R}_{1u} = 0, \dots, a\delta'\mathcal{C}_v + b\delta'\mathcal{C}_{1v} = 0,$$

qui doivent être vérifiées quelle que soit l'orientation de l'onde; en particulier, pour  $a = 1, b = 0$ , elles exigent qu'on ait

$$\delta'(\mathcal{F}, \mathcal{I}, \mathcal{Q}) = 0$$

et, par des considérations analogues à celles que nous avons développées au n° 19, on en conclut, en supposant  $\mathcal{V}$  différent de zéro, que les discontinuités sont toutes nulles. Comme ces résultats s'étendent aisément aux ondes d'ordre supérieur, ainsi que nous l'avons vu au n° 21 pour la surface à six paramètres, nous arrivons à la proposition générale suivante :

*Une surface élastique affectée de viscosité ne peut être le siège d'aucune onde qui se propage.*

---

(1) L. ROY, *Sur les équations générales des lignes élastiques et la propagation des ondes*, p. 191. Dans cette étude, nous avons négligé d'envisager le second cas, qui nous aurait conduit à des conclusions analogues à celles du présent paragraphe.

31. **Ondes d'accélération et d'ordre supérieur sans viscosité.** — En supposant encore l'onde du second ordre, les fonctions  $\mathcal{R}_u, \mathcal{R}_{1u}, \mathcal{R}_{1v}; \mathcal{C}_u, \mathcal{C}_{1u}, \mathcal{C}_v, \mathcal{C}_{1v}$  sont continues à la traversée de l'onde et, d'après (136), il en est de même des trois fonctions auxiliaires  $\mathcal{R}_v, \mathcal{R}_w, \mathcal{R}_{1w}$ . Les première, quatrième et cinquième équations indéfinies (38) nous donnent alors, d'après (36),

$$(137) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta' \mathcal{X}_i = \delta' \left( \frac{\partial \mathcal{R}_u}{\partial \omega} + \frac{\partial \mathcal{R}_{1u}}{\partial \omega_1} \right), \\ \delta' \mathcal{Y}_i = \delta' \left( \frac{\partial \mathcal{C}_u}{\partial \omega} + \frac{\partial \mathcal{C}_{1u}}{\partial \omega_1} \right), \\ \delta' \mathcal{M}_i = \delta' \left( \frac{\partial \mathcal{C}_v}{\partial \omega} + \frac{\partial \mathcal{C}_{1v}}{\partial \omega_1} \right). \end{array} \right.$$

Les deuxième et troisième (38) feraient connaître

$$\delta' \frac{\partial \mathcal{R}_r}{\partial \omega}, \quad \delta' \left( \frac{\partial \mathcal{R}_w}{\partial \omega} + \frac{\partial \mathcal{R}_{1w}}{\partial \omega_1} \right);$$

quant à la sixième, tous ses termes sont, d'après la troisième (36), continus à la traversée de l'onde. Or, les équations (137) font précisément partie des équations générales (108), qui nous ont antérieurement conduits aux mêmes lois de propagation que pour les ondes de choc. Elles nous redonnent donc les équations (124') ou (127), dans lesquelles  $\delta'(\partial, p, q)$  sont simplement remplacés par

$$\delta' \left( \frac{\partial \partial}{\partial \omega}, \frac{\partial p}{\partial \omega}, \frac{\partial q}{\partial \omega} \right)$$

et, comme cas particuliers, les équations (130) et (131) dans les cas de symétrie de contexture et d'isotropie. Il est d'ailleurs facile de reconnaître que ces conclusions subsistent pour des ondes d'un ordre quelconque supérieur au second. Comme il en était déjà ainsi pour la surface à six paramètres, nous pouvons énoncer la proposition générale suivante :

*Les ondes d'accélération et d'ordre supérieur se propagent sur les surfaces élastiques suivant les mêmes lois que les ondes de choc.*

## TABLE DU MÉMOIRE

---

|                    | Pages. |
|--------------------|--------|
| INTRODUCTION ..... | 185    |

### CHAPITRE I. — Généralités.

|                                                                 |     |
|-----------------------------------------------------------------|-----|
| 1. Surface élastique à six paramètres .....                     | 188 |
| 2. Les douze fonctions caractéristiques de la déformation ..... | 190 |
| 3. Potentiel thermodynamique interne et viscosité. ....         | 191 |
| 4. Equations du mouvement. ....                                 | 193 |
| 5. Relation supplémentaire .....                                | 194 |
| 6. Surface élastique à trois paramètres .....                   | 195 |

### CHAPITRE II. — Les ondes au point de vue cinématique.

|                                                                                     |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 7. Préliminaires .....                                                              | 200 |
| 8. Ondes de choc sur la surface à six paramètres. ....                              | 201 |
| 9. Vitesses de propagation. ....                                                    | 203 |
| 10. Ondes d'accélération et d'ordre supérieur sur la surface à six paramètres ..... | 206 |
| 11. Ondes sur la surface à trois paramètres .....                                   | 208 |

### CHAPITRE III. — Propagation des ondes de choc sur la surface élastique à six paramètres.

|                                                      |     |
|------------------------------------------------------|-----|
| 12. Equation fondamentale .....                      | 211 |
| 13. Surface affectée de viscosité .....              | 215 |
| 14. Surface dénuée de viscosité. ....                | 216 |
| 15. Surface bonne conductrice de la chaleur .....    | 217 |
| 16. Surface mauvaise conductrice de la chaleur. .... | 219 |
| 17. Loi adiabatique dynamique. ....                  | 221 |

### CHAPITRE IV. — Propagation des ondes d'accélération et d'ordre supérieur sur la surface élastique à six paramètres.

|                                                                                                                         |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 18. Ondes du premier ordre par rapport aux cosinus directeurs et d'ordre supérieur<br>par rapport aux coordonnées. .... | 225 |
| 19. Ondes d'accélération avec viscosité .....                                                                           | 225 |
| 20. Ondes d'accélération sans viscosité. ....                                                                           | 227 |
| 21. Ondes d'ordre supérieur .....                                                                                       | 229 |

## CHAPITRE V. — Propagation des ondes sur la surface élastique à six paramètres.

|                                                                                                                        |     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 22. Equation fondamentale des ondes de choc.....                                                                       | 231 |
| 23. Surface affectée de viscosité.....                                                                                 | 236 |
| 24. Surface dénuée de viscosité et bonne conductrice de la chaleur.....                                                | 237 |
| 25. Surface dénuée de viscosité et mauvaise conductrice de la chaleur.....                                             | 239 |
| 26. Cas d'une substance présentant trois plans de symétrie de contexture.....                                          | 239 |
| 27. Cas d'une substance isotrope.....                                                                                  | 241 |
| 28. Loi adiabatique dynamique.....                                                                                     | 243 |
| 29. Ondes du premier ordre par rapport aux cosinus directeurs et d'ordre supérieur<br>par rapport aux coordonnées..... | 243 |
| 30. Ondes d'accélération et d'ordre supérieur avec viscosité.....                                                      | 244 |
| 31. Ondes d'accélération et d'ordre supérieur sans viscosité.....                                                      | 245 |

---