Annales de la faculté des sciences de Toulouse

H. Chipart

De l'influence que l'aimantation du milieu exerce sur les actions magnétiques

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 3e série, tome 13 (1921), p. 117-161
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1921_3_13__117_0>

DE L'INFLUENCE QUE L'AIMANTATION DU MILIEU EXERCE SUR LES ACTIONS MAGNÉTIQUES

PAR H. CHIPART.

INTRODUCTION

Lorsque des conducteurs électrisés sont plongés dans un liquide (1), leurs actions mutuelles apparentes sont inversement proportionnelles à la constante diélectrique ε de ce liquide. Cette loi énoncée par Maxwell (2), puis par Helmholtz (3), et que le physicien Silow (4) a vérifié il y a près de cinquante ans, est une conséquence immédiate du caractère équipotentiel des surfaces conductrices. Le théorème du flux d'induction apprend que l'induction diélectrique est indépendante de ε, tandis que le champ électrostatique h et le potentiel interne $\int \frac{\varepsilon h^2}{8\pi} d\varpi$ du système varient tous deux en raison inverse de ε. Désignant donc par $d\mathcal{T}_0$ et $d\mathcal{T}$ les travaux des actions mutuelles des conducteurs, suivant que ces corps se déplacent dans le vide ou dans le liquide diélectrique, on conclut de ce qui précède la relation

$$d\mathcal{T} = \frac{1}{\varepsilon} d\mathcal{T}_0.$$

Une loi d'actions mutuelles présentant un semblable caractère de simplicité est-elle applicable à des aimants permanents plongés dans un liquide magnétique?

(1) Dans ce qui va suivre nous entendrons par liquide un fluide incompressible, illimité dans toutes les directions, isotrope et homogène. Nous supposerons de plus que les quantités ε et μ sont indépendantes du champ.

(2) MAXWELL, *On physical lines of Force*.

(3) HELMHOLTZ, *Journal de Crelle*, tome 72, p. 117.

(4) SILOW, *Annales de Poggendorf*, 1875, tome 156, p. 389 à 396, « Uber die Dielektricitätsconstanten der Flüssigkeiten ». Silow a comparé les déviations de l'aiguille d'un électromètre dans l'air et dans l'huile de térébenthine.

A cette question, Boltzmann a répondu par l'affirmative : les actions mutuelles apparentes d'aimants permanents seraient, d'après Boltzmann, inversement proportionnelles à la perméabilité μ du liquide dans lequel ils sont plongés. Le travail effectué par ces forces au cours d'un déplacement élémentaire des aimants dans le liquide serait donc

$$d\mathcal{T} = \frac{1}{\mu} d\mathcal{T}_0.$$

Dans les idées de Boltzmann, idées dont on retrouve l'origine dans les premiers écrits de Maxwell, le champ magnétique total $\mathcal{H}$, somme du champ $\mathcal{H}_0$ créé par les aimants, et du champ créé par le liquide qui les entoure, vérifierait l'égalité

$$\overline{\mathcal{H}} = \frac{1}{\mu} \overline{\mathcal{H}_0}.$$

D'une manière plus précise, la plupart des traités modernes[1] donnent comme loi élémentaire des actions magnétiques la formule

$$F = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{mm'}{r^2}.$$

Ajoutons, et ceci est essentiel pour notre argumentation, que les partisans de la loi de Boltzmann admettent en même temps la validité du système d'équations qui résume la théorie classique du magnétisme fondée par Poisson, précisée et complétée par lord Kelvin, Helmholtz et Kirchhoff. Les objections jadis formulées contre cette théorie n'ayant pas résisté à une critique approfondie, les physiciens sont aujourd'hui unanimes à reconnaître que ce système d'équations fournit une représentation exacte des phénomènes d'équilibre magnétique.

Si l'on se rappelle que la démonstration de l'égalité $d\mathcal{T} = \frac{1}{\varepsilon} d\mathcal{T}_0$ est essentiellement subordonnée à l'existence de surfaces équipotentielles limitant les conducteurs, et si l'on observe que pareille propriété n'est jamais vérifiée pour un ensemble d'aimants permanents, on ne peut se défendre d'un certain scepticisme au sujet de la validité de la règle de Boltzmann. L'invraisemblance de cette règle apparaît d'une manière frappante au premier coup d'œil jeté sur les équations de l'équilibre magnétique : pour un aimant solénoïdal[2] le champ total dérive d'un potentiel de

---

(1) Boltzmann, *Vorlesungen über Maxwell's Theorie der Electricität und des Lichtes*, 2e Partie (éd. 1893), page 98. — Se reporter également aux traités de Drude, Chwolson, Ollivier, L. Bloch.

(2) C'est-à-dire un aimant dont l'aimantation J_0 vérifie la condition

$$\text{div. } J_0 = \frac{\partial J_{0x}}{\partial x} + \frac{\partial J_{0y}}{\partial y} + \frac{\partial J_{0z}}{\partial z} = 0.$$

simple couche astreint à vérifier, sur la surface de l'aimant, la condition classique[1]

$$\mu \frac{d\mathcal{V}}{d\nu_e} + \frac{d\mathcal{V}}{d\nu_i} - 4\pi(\nu_i \,.\, J_0) = 0.$$

Manifestement le champ magnétique, $\mathcal{H} = -$ gradient $\mathcal{V}$, ne saurait varier en raison inverse de μ comme le voudrait la règle de Boltzmann.

Si des doutes pouvaient subsister à cet égard, la résolution d'un problème élémentaire suffirait à les dissiper. Prenons le cas d'un ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

uniformément aimanté. Nous trouverons que le champ total $\mathcal{H}$, créé à la fois par l'aimantation permanente J_{0x}, J_{0y}, J_{0z} de l'ellipsoïde et par l'aimantation induite dans le liquide, est identique au champ magnétique créé par le même ellipsoïde portant une aimantation uniforme J_{ω}, de composantes

$$J_{\omega x} = \frac{J_{0x}}{\mu - \varkappa A}, \qquad J_{\omega y} = \frac{J_{0y}}{\mu - \varkappa B}, \qquad J_{\omega z} = \frac{J_{0z}}{\mu - \varkappa C}.$$

Dans ces formules $\varkappa = \frac{\mu - 1}{4\pi}$ représente le coefficient d'aimantation du liquide; A, B, C sont trois fonctions de a, b, c, que l'on rencontre dans l'étude du champ newtonien créé par un ellipsoïde homogène. On a $A + B + C = 4\pi$.

Les vecteurs J_{ω} et J_0 n'ayant pas même direction, on vérifie aisément qu'il en est de même des champs $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}_0$. Toute loi élémentaire rentrant dans le type

$$\overline{\mathcal{H}} = \varphi(\mu)\overline{\mathcal{H}_0}$$

doit donc être rejetée.

D'autres objections à la loi de Boltzmann peuvent être tirées de l'étude, soit théorique, soit expérimentale, des actions mutuelles de corps magnétiques.

La méthode à mettre en œuvre pour calculer ces actions a été exposée en 1881 par Helmholtz[2]. On applique l'équation du travail

$$d\mathcal{T}_e = d\mathcal{F},$$

---

(1) ν_i représente le vecteur « *unité* » dirigé suivant la normale intérieure à la surface de l'aimant. La notation (A . B) désignera le produit scalaire $A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$ des deux vecteurs A et B. $(\nu_i \,.\, J_0)$ est donc la projection de l'aimantation J_0 suivant la normale intérieure à la surface.

(2) HELMHOLTZ, *Wissenchaftliche Abhandlungen*, tome I, p. 805.

$\mathcal{F}$ désignant le potentiel interne. Pour les systèmes de solides et de liquides on a les formules classiques :

$$\mathcal{F} = \int \frac{\mathcal{H}^2}{8\pi} d\varpi + \int \frac{J^2}{2\varkappa} d\varpi = \int \frac{\mu \mathcal{H}^2}{8\pi} d\varpi.$$

Dans ces égalités $J = \varkappa\mathcal{H}$ représente l'aimantation induite. On convient de faire $\mu = 1$ dans la région occupée par les aimants permanents.

En 1902 Duhem [1] publiait une note intitulée *De l'influence que l'aimantation du milieu exerce sur les actions magnétiques*, dans laquelle il discute les deux lois fictives

$$\overline{\mathcal{H}} = \frac{1}{\mu}\overline{\mathcal{H}_0} \qquad \text{et} \qquad \overline{\mathcal{H}} = \mu\overline{\mathcal{H}_0},$$

qu'il attribue respectivement à Maxwell et à Helmholtz. Combinant l'une ou l'autre de ces lois avec les équations de l'équilibre magnétique et avec l'équation du travail $d\mathcal{C}_e = d\mathcal{F}$, il aboutit dans les deux cas à une contradiction. Ni l'une ni l'autre de ces deux lois ne peut donc être retenue.

L'analyse de Duhem ne paraît pas avoir attiré l'attention des physiciens; aussi n'est-il pas hors de propos de signaler qu'on retrouve ses conclusions en faisant appel aux travaux publiés, il y a plus de soixante-dix ans, par Edmond Becquerel : d'après Boltzmann, un aimant permanent ne devrait exercer aucune action sur un corps non magnétique, même quand ces deux solides se trouvent plongés dans un liquide polarisable. Or ceci est formellement contredit par les expériences d'Emond Becquerel : une petite sphère non magnétique plongée dans un liquide est repoussée par l'aimant si le liquide est paramagnétique, elle est attirée si le liquide est diamagnétique. Le raisonnement tout à fait élémentaire que nous venons de donner ne diffère pas, au fond, de celui qu'on peut lire dans la note de Duhem; il prouve en même temps que toute loi rentrant dans le type $d\mathcal{C} = \varphi(\mu)\, d\mathcal{C}_0$ est incompatible avec la théorie classique du magnétisme.

Ce premier résultat, de caractère purement négatif, auquel Duhem s'était limité, est loin d'épuiser la question. La loi de Boltzmann est décidément inacceptable; mais que peut-on mettre à sa place? Se limitant d'abord au cas asymptotique d'aimants permanents très éloignés, ne serait-il pas possible de comparer leurs actions mutuelles apparentes à celles s'exerçant entre d'autres aimants permanents, convenablement choisis, qui seraient placés dans le vide? Et, dans le cas général de corps placés à distance finie, ne pourrait-on faire correspondre au système formé par les aimants permanents et le liquide qui les baigne un système de solides placés dans

---

(1) Duhem, *Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, 6e série, tome II, pages 52 à 60.

le vide, et qui posséderaient à la fois de l'aimantation permanente et de l'aimantation induite? On sait que de tels corps magnétiques ont été envisagés par lord Kelvin (1), puis par H. Poincaré (2).

Je me propose de faire connaître ici les résultats que j'ai obtenus, dans cet ordre d'idées, en utilisant les indications qui m'ont été aimablement fournies par M. Liénard. Je commencerai par exposer l'ingénieuse méthode imaginée par M. Liénard pour résoudre le problème des aimants sphériques et je développerai les généralisations que j'ai successivement obtenues. Les cas asymptotiques se rapportant aux aiguilles aimantées et aux feuillets magnétiques méritent d'être signalés : contrairement aux affirmations de Drude (3), reproduites dans de nombreux traités, un feuillet se comporte toujours comme un courant linéaire. Qu'il s'agisse de systèmes de feuillets ou de systèmes de courants linéaires, le champ magnétique total est, dans l'un ou l'autre cas, indépendant de μ, tandis que les actions mutuelles sont proportionnelles à μ. Ainsi se trouve généralisée la célèbre proposition d'Ampère sur l'identité entre courants linéaires et feuillets magnétiques.

---

(1) Lord Kelvin, *Reprint of papers on Electrotatics and Magnetism*, page 548. « Inductive Susceptibility of a Polar Magnet » (étude faite en 1872).

(2) H. Poincaré, *Électricité et Optique*, p. 397. « Énergie électro-cinétique et énergie élastique d'un champ magnétique ».

(3) Drude, *Physik des Aethers.*

I. — Deux sphères uniformément aimantées placées à grande distance (1).

Énoncé du problème : Deux sphères, occupant les volumes U′, U″ limités par les surfaces S′, S″, sont plongées dans un liquide polarisable (2). Ce sont deux aimants permanents, uniformément aimantés, dont la distance des centres ($R = O'O''$) est très grande en comparaison des rayons des deux sphères. Dans un but de simplification, nous supposerons provisoirement que les aimantations J_0', J_0'' des deux sphères sont parallèles à la ligne des centres.

Pour maintenir ces deux solides en équilibre nous leur appliquerons certaines forces extérieures. Changeons le sens de ces vecteurs, nous obtiendrons les actions mutuelles apparentes des deux aimants plongés dans le liquide.

Au cours d'un déplacement élémentaire des deux aimants, le travail $d\mathcal{T}_e$ des forces extérieures est égal à la variation corrélative du potentiel interne $\mathcal{F}$ du système :

$$d\mathcal{T}_e = d\mathcal{F} = d\int \frac{\mu \mathcal{H}^2}{8\pi} d\varpi \qquad (\mu = 1 \text{ en tout point des aimants permanents}).$$

Transformons l'expression analytique de $\mathcal{F}$. Si l'on convient de poser $J_0 = 0$ en tout point du liquide, l'induction magnétique $\mathcal{B} = \mathcal{H} + 4\pi J$ vérifie, dans tout l'espace, l'égalité

$$\overline{\mathcal{B}} = \mu \overline{\mathcal{H}} + 4\pi \overline{J}_0.$$

D'ailleurs le produit scalaire $(\mathcal{B} . \mathcal{H})$ du vecteur solénoïdal $\mathcal{B}$ et du vecteur lamellaire $\mathcal{H}$ vérifie l'identité

$$\int (\mathcal{B} . \mathcal{H}) d\varpi = 0,$$

l'intégrale étant étendue à tout l'espace. On a donc

$$\int \mu \mathcal{H}^2 d\varpi + 4\pi \int (J_0 . \mathcal{H}) d\varpi = 0,$$

d'où l'équation du travail

$$d\mathcal{T}_e = d\mathcal{F}, \text{ avec } \mathcal{F} = -\frac{1}{2}\int (J_0 . \mathcal{H}) d\varpi = -\frac{1}{2}\int_{U'} (J_0' . \mathcal{H}) d\varpi' - \frac{1}{2}\int_{U''} (J_0'' . \mathcal{H}) d\varpi''.$$

---

(1) Comme je l'ai signalé dans l'Introduction, cette étude est due à M. Liénard.

(2) On supposera que le liquide magnétique est illimité et que son coefficient d'aimantation $\varkappa$ est indépendant de l'intensité du champ magnétique.

Dans cette dernière formule, le vecteur $\mathcal{H}$ représente le champ total créé, à la fois, par les aimantations permanentes J_0', J_0'' des deux solides, et par l'aimantation induite dans le liquide.

Pour calculer les actions mutuelles des deux aimants nous allons résoudre successivement les deux problèmes suivants :

1° Déterminer l'expression asymptotique du champ total $\mathcal{H}$ lorsque $R = O'O''$ est très grand.

2° Déterminer l'expression asymptotique du potentiel interne. Ce potentiel $\mathcal{F}$ est une fonction de R, qui admet, pour R suffisamment grand, le développement en série

$$\mathcal{F} = \text{constante} + \frac{A}{R^3} + \frac{B}{R^4} + \dots .$$

Nous négligerons, dans le calcul de $\mathcal{F}$, les puissances de $\frac{1}{R}$ supérieures à $\left(\frac{1}{R}\right)^3$.

1° *Expression asymptotique du champ total.* — Démontrons qu'un degré d'approximation admis le champ total $\mathcal{H}$ peut être considéré comme créé par deux aimants sphériques U', U'', uniformément aimantés parallèlement à la direction O'O''. Rapportons les sphères à un système d'axes trirectangles $Oxyz$, Ox étant parallèle à O'O''. Nous nous proposons d'établir la formule asymptotique

$$\overline{\mathcal{H}} = \overline{\mathcal{H}}' + \overline{\mathcal{H}}'',$$

avec

$$(1) \qquad \mathcal{H}' = -\,\text{grad.} \int_{U'} J_1' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'}\, d\varpi', \qquad \mathcal{H}'' = -\,\text{grad.} \int_{U''} J_1'' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x''}\, d\varpi''.$$

Nous vérifierons que les constantes, provisoirement indéterminées, J_1' et J_1'' peuvent être choisies de telle façon que la composante normale de l'induction magnétique soit continue à la traversée des surfaces S' et S''. Les autres conditions de l'équilibre magnétique sont manifestement vérifiées.

A cet effet, désignons par ν le vecteur unité dirigé suivant la normale extérieure à la surface S', et par $\mathcal{H}_i'$ et $\mathcal{H}_e'$ les valeurs du champ $\mathcal{H}'$ en deux points intérieur et extérieur infiniment voisins d'un point de S', valeurs qui vérifient les conditions classiques [1]

$$(2) \qquad (\nu \,.\, \mathcal{H}_i' + 4\pi J_1') = (\nu \,.\, \mathcal{H}_e'), \qquad [\nu \,.\, \mathcal{H}_i'] = [\nu \,.\, \mathcal{H}_e'].$$

[1] La notation [A . B] représentera le produit vectoriel des deux vecteurs A et B.

La continuité de la composante normale de l'induction $\mathcal{B}$ s'exprime par l'égalité

$$(\nu \,.\, \mathcal{H}_i' + \mathcal{H}'' + 4\pi J_0') = \mu(\nu \,.\, \mathcal{H}_e' + \mathcal{H}''), \quad \text{en tout point de } S'. \tag{3}$$

Il faut remplacer dans (3) $\mathcal{H}_i'$, $\mathcal{H}_e'$, $\mathcal{H}''$ par leurs valeurs tirées de (1).

On a d'abord

$$\mathcal{H}_i' = -\frac{4\pi}{3} J_1'. \qquad (\mathcal{H}_i' \text{ est parallèle à } O'O'').$$

De même, dans l'hypothèse admise (R très grand), le champ $\mathcal{H}''$ peut être assimilé, en tout point de la région U', à un champ uniforme : c'est le champ créé par le doublet $U''J_0''$ placé en O''; il est égal à

$$\mathcal{H}'' = \frac{2U''J_1''}{R^3}. \qquad (\mathcal{H}'' \text{ est parallèle à } O'O'')$$

Enfin $(\nu \,.\, \mathcal{H}_e')$ est donné par la première des égalités (2).

L'élimination de $(\nu \,.\, \mathcal{H}_e')$ entre (2) et (3) fournit la condition

$$(\nu \,.\, \mathcal{H}_i' + \mathcal{H}'' + 4\pi J_0') = \mu(\nu \,.\, \mathcal{H}_i' + \mathcal{H}'' + 4\pi J_1'); \tag{4}$$

et, comme les vecteurs $\mathcal{H}_i'$, $\mathcal{H}''$, J_0', J_1' sont tous les quatre parallèles à O'O'', cette condition équivaut à

$$\mu J_1' + \varkappa(\mathcal{H}_i' + \mathcal{H}'') - J_0' = 0. \tag{4'}$$

Remplaçant enfin dans (4') les champs $\mathcal{H}_i'$ et $\mathcal{H}''$ par leurs valeurs, nous obtenons l'équation de continuité (5') relative à la surface S'

$$\frac{2\mu + 1}{3} J_1' + \varkappa \frac{2U''J_1''}{R^3} = J_0', \tag{5'}$$

et pareillement pour S''

$$\frac{2\mu + 1}{3} J_1'' + \varkappa \frac{2U'J_1'}{R^3} = J_0''. \tag{5''}$$

Ce sont, au degré d'approximation admis, les équations du problème; elles déterminent les deux inconnues J_1' et J_1''. Faisons ce calcul en négligeant les puissances de $\frac{1}{R}$ supérieures à $\left(\frac{1}{R}\right)^3$. A cet effet, dans $\frac{1}{R^3} U_1'J_1'$ et $\frac{1}{R^3} U_1''J_1''$, remplaçons J_1' et J_1'' par les valeurs de première approximation obtenues en faisant $R = \infty$ dans les formules (5') et (5''), c'est-à-dire

$$J_1' \backsim \frac{3}{2\mu + 1} J_0', \qquad J_1'' \backsim \frac{3}{2\mu + 1} J_0'';$$

et nous obtenons, en désignant par $\mathcal{M}'$ et $\mathcal{M}''$ les moments magnétiques $U'J_0'$ et $U''J_0''$ des deux aimants, les valeurs cherchées (6) des constantes J_1' et J_1'' :

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} J_1' &= \frac{3}{2\mu+1}J_0' - \varkappa\left(\frac{3}{2\mu+1}\right)^2\frac{2\mathcal{M}''}{R^3},\\ J_1'' &= \frac{3}{2\mu+1}J_0'' - \varkappa\left(\frac{3}{2\mu+1}\right)^2\frac{2\mathcal{M}'}{R^3}.\end{aligned}\right.$$

Ces formules (6) fournissent, au degré d'approximation admis, la solution du problème de l'équilibre magnétique. Remplaçant J_1' et J_1'' par ces valeurs dans les égalités (1), on concluera le champ total $\mathcal{H}$.

2° *Expression asymptotique du potentiel* $\mathcal{F}$. — Calculons le produit scalaire $(J_0'.\mathcal{H})$ qui figure dans l'expression de $\mathcal{F}$. En tout point de la région U' on a, asymptotiquement,

$$\mathcal{H} = -\frac{4\pi}{3}J_1' + \frac{2U''J_1''}{R^3} = -\frac{4\pi}{3}J_1' + \frac{3}{2\mu+1}\cdot\frac{2\mathcal{M}''}{R^3},$$

ou, d'après (6),

$$\mathcal{H} = \frac{3}{2\mu+1}\left\{-\frac{4\pi}{3}J_0' + \frac{3\mu}{2\mu+1}\cdot\frac{2\mathcal{M}''}{R^3}\right\};$$

d'où résulte l'égalité

$$(J_0'.\mathcal{H}) = C^{te} + \mu\left(\frac{3}{2\mu+1}\right)^2\frac{2J_0'\mathcal{M}''}{R^3}.$$

On a pareillement

$$(J_0''.\mathcal{H}) = C^{te} + \mu\left(\frac{3}{2\mu+1}\right)^2\frac{2J_0''\mathcal{M}'}{R^3}.$$

En définitive, dans l'hypothèse où $\mathcal{M}'$ et $\mathcal{M}''$ sont parallèles à O'O'', l'expression asymptotique de $\mathcal{F}$ se réduit à

$$\mathcal{F} = C^{te} - \mu\left(\frac{3}{2\mu+1}\right)^2\frac{2\mathcal{M}'\mathcal{M}''}{R^3}.$$

ou

$$\mathcal{F} = C^{te} + \mu\left(\frac{3}{2\mu+1}\right)^2\mathcal{F}_0,$$

$\mathcal{F}_0$ désignant le potentiel interne du système des deux aimants placés dans le vide.

Ce résultat suffit pour calculer, dans ce cas particulier, les actions mutuelles de S' et S''. Raisonnons sur S'' : par raison de symétrie, les forces extérieures servant à immobiliser la sphère S″ sont réductibles à une résultante (X_e'', o, o) passant par O″; et l'équation du travail donne

$$X_e'' = \frac{d\mathcal{F}}{dR} = \mu\left(\frac{3}{2\mu+1}\right)^2 \frac{6\mathcal{M}'\mathcal{M}''}{R^4}.$$

L'action apparente de S′ sur S″ est une force, $X'' = -X_e$, qui varie proportionnellement à

$$\mu\left(\frac{3}{2\mu+1}\right)^2.$$

Ce résultat peut être généralisé. Au lieu de supposer J_0' et J_0'' parallèles à la ligne des centres, laissons arbitraires les directions de ces deux vecteurs. L'analyse qu'on vient de donner reste applicable : on vérifie que le champ total, créé par les deux sphères uniformément aimantées et par le liquide qui les baigne, est assimilable au champ magnétique créé par deux aimantations uniformes J_1' et J_1'' portées par les deux sphères. Bien que les vecteurs J_1', J_1'' ne coïncident, ni en grandeur ni en direction, avec les vecteurs J_0', J_0'', le potentiel interne du système (aimants + liquide) n'en vérifie pas moins l'égalité donnée plus haut[2] :

$$\mathcal{F} = C^{te} + \mu\left(\frac{3}{2\mu+1}\right)^2 \mathcal{F}_0,$$

$\mathcal{F}_0$ se rapportant aux deux aimants placés dans le vide.

En définitive : *les actions mutuelles de deux aimants sphériques, uniformément aimantés, plongés dans un liquide de perméabilité* μ, *sont proportionnelles à* $\mu\left(\frac{3}{2\mu+1}\right)^2$; *résultat en complet désaccord avec la règle de Boltzmann, qui les considère comme inversement proportionnelles à* μ.

La condition $\mu\left(\frac{3}{2\mu+1}\right)^2 > 1$ s'écrit $(4\mu-1)(\mu-1) < 0$.

Elle est vérifiée par tous les liquides diamagnétiques connus. Les actions mutuelles sont donc diminuées quand le liquide est paramagnétique, augmentées quand il est diamagnétique.

---

[1] Cette égalité est un cas particulier de celle démontrée au § II pour deux ellipsoïdes uniformément aimantés.

§ II. — Deux ellipsoïdes uniformément aimantés placés à grande distance.

Homologue d'un aimant permanent. — Supposons que le liquide ne baigne qu'un seul aimant permanent U. Si l'on désigne par J_0 l'aimantation permanente portée par U et par J l'aimantation induite dans le liquide, le champ magnétique total ($\mathcal{H} = -\operatorname{grad} \mathcal{V}$) est un champ newtonien dû aux masses :

$$\rho_0 d\varpi = -\operatorname{div}. J_0 d\varpi, \qquad \text{contenues dans U},$$

et

$$\sigma_0 d\omega + \sigma_i d\omega = -(\nu' . J_0) d\omega - (\nu . J) d\omega, \qquad \text{portées par S}.$$

ν et ν' désignent les vecteurs « *unité* » dirigés suivant les normales extérieure et intérieure.

On a les formules classiques :

$$\mathcal{V} = \int \frac{\rho}{r} d\varpi + \int \frac{\sigma}{r} d\omega, \qquad \rho = \begin{cases} \rho_0 \text{ dans U} \\ \text{zéro, à l'extérieur de U}, \end{cases}$$

$$\sigma = \sigma_0 + \sigma_i, \qquad \int_U \rho_0 d\varpi + \int_S \sigma_0 d\omega = 0, \qquad \operatorname{div}. J = 0, \qquad \int_S \sigma_i d\omega = 0.$$

Les charges $\rho_0 d\varpi$ et $\sigma d\omega = (\sigma_0 + \sigma_i) d\omega$, qui suffisent à définir le champ total $\mathcal{H}$, ont une somme égale à zéro. Ce champ $\mathcal{H}$ peut être considéré comme produit par un certain aimant permanent U_ω occupant même volume U que l'aimant considéré. C'est cet aimant que nous appellerons l'*homologue de l'aimant* U.

Le problème consistant à déterminer l'aimantation J_ω de l'aimant homologue est indéterminé, car les seules conditions que doit vérifier J_ω sont :

$$\operatorname{div}. J_\omega = \operatorname{div}. J_0, \qquad (\nu' . J_\omega) = (\nu' . J_0) + (\nu . J).$$

Le choix entre ces diverses solutions est indifférent dans l'étude qui nous occupe; il suffira de dire que l'aimant homologue est caractérisé par l'ensemble des charges $\rho_0 d\varpi$ et $(J_0 + \sigma_i) d\omega$.

Comme nous n'avons en vue que l'étude des actions mutuelles, l'indétermination du problème est encore plus grande qu'il ne résulte des considérations précédentes, car de telles actions ne dépendent que des valeurs prises par le champ magnétique à l'extérieur des aimants.

Homologue d'un ellipsoïde aimanté. — Soit l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0,$$

portant l'aimantation uniforme J_{0x}, J_{0y}, J_{0z}.

Continuant à désigner par $\mu = 1 + 4\pi\varkappa$ la perméabilité du liquide qui baigne cet aimant, je dis que l'un de ses homologues porte une aimantation uniforme J_ω dont les composantes sont

$$\text{(7)} \qquad J_{\omega x}=\frac{J_{0x}}{\mu-\varkappa A}, \qquad J_{\omega y}=\frac{J_{0y}}{\mu-\varkappa B}, \qquad J_{\omega z}=\frac{J_{0z}}{\mu-\varkappa C}.$$

Dans ces formules, les quantités A, B, C représentent les trois constantes de Poisson relatives à l'ellipsoïde, c'est-à-dire les trois constantes qui figurent dans l'identité

$$\int_U \frac{d\varpi}{r} = \text{constante} - \frac{1}{2}(Ax^2+By^2+Cz^2)$$

vérifiée en tout point (x, y, z) de l'ellipsoïde U. Ces trois constantes sont liées par la relation

$$A+B+C=4\pi$$

qui est une conséquence de l'identité de Poisson

$$\Delta\int_U \frac{d\varpi}{r}+4\pi=0.$$

Pour établir les formules (7) reportons-nous aux équations du champ magnétique créé par l'aimant U_ω, à savoir :

$$\mathcal{H} = -\text{grad.}\,\mathcal{V}, \qquad \mathcal{V}(x,y,z)=\int_U\left(J_{\omega x}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x'}+J_{\omega y}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y'}+J_{\omega z}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z'}\right)d\varpi'.$$

Exprimons que ce champ $\mathcal{H}$ est identique au champ total. A cet effet, nous assujettirons les trois constantes $J_{\omega x}, J_{\omega y}, J_{\omega z}$ à vérifier, sur la surface S de l'ellipsoïde, l'équation de continuité

$$\text{(8)} \qquad (\nu\,.\,\mathcal{H}_i+4\pi J_0)=\mu(\nu\,.\,\mathcal{H}_e).$$

Les autres conditions sont manifestement satisfaites.

Nous avons d'abord

$$(9) \qquad (\nu \, . \, \mathcal{H}_i + 4\pi J_\omega) = (\nu \, . \, \mathcal{H}_e);$$

et, d'autre part, la formule

$$\mathcal{V}_i(x, y, z) = A x J_{\omega x} + B y J_{\omega y} + C z J_{\omega z}$$

fournit les égalités

$$(10) \qquad \mathcal{H}_{ix} = -A J_{\omega x}, \qquad \mathcal{H}_{iy} = -B J_{\omega y}, \qquad \mathcal{H}_{iz} = -C J_{\omega z}.$$

Commençons par éliminer $(\nu \, . \, \mathcal{H}_e)$ entre (8) et (9); nous obtenons la condition, à vérifier en tout point de S,

$$(\nu \, . \, \mathcal{H}_i + 4\pi J_0) = \mu(\nu \, . \, \mathcal{H}_i + 4\pi J_\omega).$$

D'ailleurs, les champs vectoriels $\mathcal{H}_i$, J_0, J_ω étant tous trois uniformes, ceci entraîne l'égalité vectorielle

$$\mu \bar{J}_\omega + \varkappa \overline{\mathcal{H}}_i - \bar{J}_0 = 0.$$

De là découlent, en tenant compte de (10), les relations (7) écrites plus haut.

En définitive, le champ total est identique au champ créé par un ellipsoïde portant l'aimantation uniforme J_ω; cet ellipsoïde est un homologue de U.

Actions mutuelles de deux ellipsoïdes. — Ces préliminaires établis, passons à l'étude des actions de deux ellipsoïdes, aimantés uniformément, et plongés, à grande distance l'un de l'autre, dans le liquide μ. Nous désignerons par U′, U″ les régions occupées par ces deux ellipsoïdes, et par S′, S″ les surfaces qui les limitent. Nous les supposerons orientés d'une manière quelconque dans l'espace. Rapportons le système aux trois axes principaux $O'xyz$ de l'ellipsoïde U′, dont nous désignerons par A′, B′, C′, les constantes de Poisson. Nous déterminerons successivement les expressions asymptotiques du champ total et du potentiel interne [1].

1° *Expression asymptotique du champ total.* — $\overline{\mathcal{H}}$ peut être considéré comme dû à deux aimantations uniformes J_1' et J_1'' portées par U′ et U″, ces aimantations n'ayant pas en général mêmes directions que J_0' et J_0''.

---

[1] Pour ce calcul j'ai utilisé l'étude faite par M. Liénard dans le cas particulier où O′O″ est axe principal pour chacun des ellipsoïdes et où les aimantations J_0', J_0'' sont dirigés suivant des axes principaux parallèles.

Pour établir ce résultat on vérifiera qu'on peut déterminer les vecteurs auxiliaires $\overline{J}_1'$ et $\overline{J}_1''$ de telle sorte que le champ

$$\overline{\mathcal{H}} = \overline{\mathcal{H}}' + \overline{\mathcal{H}}'', \quad \begin{cases} \mathcal{H}' = -\operatorname{grad} \displaystyle\int_U \left(J'_{1x} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} + J'_{1y} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'} + J'_{1z} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'} \right) d\varpi', \\ \mathcal{H}'' = -\operatorname{grad} \displaystyle\int_U \left(J''_{1x} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x''} + \ldots\ldots \right) d\varpi'', \end{cases}$$

satisfasse à l'équation de continuité de $(\nu . \mathcal{B})$ sur les surfaces S′ et S″.

La condition relative à S′ s'écrit

$$(\nu . \mathcal{H}_i' + \mathcal{H}'' + 4\pi J_0') = \mu(\nu , \mathcal{H}_e' + \mathcal{H}'').$$

On a d'ailleurs

$$(\nu . \mathcal{H}_i' + 4\pi J_1') = (\nu . \mathcal{H}_e'),$$

d'où l'on conclut, comme précédemment, la relation

$$(4') \qquad \mu \overline{J}_1' + \varkappa(\overline{\mathcal{H}}_i' + \overline{\mathcal{H}}'') - \overline{J}_0' = 0.$$

Utilisant la formule $\mathcal{H}'_{ix} = - A' J'_{1x}$, on obtient finalement l'égalité

$$(12) \qquad (\mu - \varkappa A') J'_{1x} + \varkappa \mathcal{H}''_x - J'_{0x} = 0;$$

et deux égalités analogues pour J'_{1y} et J'_{1z}.

Quant aux égalités concernant U″, on les déduirait des précédentes par permutations, après avoir rapporté le système aux axes principaux de U″.

Résolvons ces six équations : $\mathcal{H}''$ étant comparable à $\frac{1}{R^3}$ en tout point de U′, on obtient en première approximation ($R = \infty$) :

$$\overline{J}'_1 \backsim \overline{J}'_\infty,$$

J'_∞ désignant l'aimantation de l'homologue de U′; et pareillement

$$\overline{J}''_1 \backsim \overline{J}''_\infty.$$

De là résulte, pour la région U′, en ne gardant que les termes en $\frac{1}{R^3}$,

$$\overline{\mathcal{H}}'' \backsim \overline{\mathcal{H}}''_\infty,$$

$\mathcal{H}''_\infty$ désignant le champ magnétique créé par l'homologue de U″.

Remplaçant $\mathcal{H}''$ par $\mathcal{H}''_\omega$ dans les équations (12) nous obtenons la formule asymptotique

$$J'_{1x} = J'_{\omega x} - \frac{\varkappa}{\mu - \varkappa A'} \mathcal{H}''_{\omega x}. \tag{13}$$

Le problème de l'équilibre magnétique est résolu. On remarquera que l'aimantation auxiliaire J'_1 diffère de l'aimantation J'_ω homologue de J'_0. Pareillement le champ total n'est pas égal à la somme des champs créés par les aimants homologues, car on a, pour la région U' par exemple :

$$\mathcal{H}_x = \mathcal{H}'_x + \mathcal{H}''_x = -A'J'_{1x} + \mathcal{H}''_{\omega x},$$

ou, en tenant compte de (13) :

$$\mathcal{H}_x = \mathcal{H}'_{\omega x} + \frac{\mu}{\mu - \varkappa A'} \mathcal{H}''_{\omega x}. \tag{14}$$

Ce sont les coefficients $\frac{\mu}{\mu - \varkappa A'}$ qui donnent à la loi des actions mutuelles sa forme toute particulière.

2° *Expression asymptotique du potentiel interne.* — Nous appliquerons, comme au § I, la formule :

$$\mathcal{F} = -\frac{1}{2}\int_{U'} (J_0' . \mathcal{H}) d\varpi' - \frac{1}{2}\int_{U''} (J_0'' . \mathcal{H}) d\varpi''.$$

Calculons le produit scalaire

$$(J_0' . \mathcal{H}) = J'_{0x}\mathcal{H}_x + J'_{0y}\mathcal{H}_y + J'_{0z}\mathcal{H}_z.$$

Les formules (14) donnent :

$$(J_0' . \mathcal{H}) = (J_0' . \mathcal{H}'_\omega) + \mu \left\{ \frac{J'_{0x}}{\mu - \varkappa A'} \mathcal{H}''_{\omega x} + \frac{J'_{0y}}{\mu - \varkappa B'} \mathcal{H}''_{\omega y} + \frac{J'_{0z}}{\mu - \varkappa C'} \mathcal{H}''_{\omega z} \right\},$$

ou

$$(J_0' . \mathcal{H}) = (J_0' . \mathcal{H}'_\omega) + \mu (J'_\omega . \mathcal{H}''_\omega) = C^{te} + \mu (J'_\omega . \mathcal{H}_\omega).$$

On a pareillement

$$(J''_0 . \mathcal{H}) = C^{te} + \mu (J''_\omega . \mathcal{H}_\omega).$$

Portant ces valeurs dans l'expression de F, nous aboutissons à la formule :

$$\mathcal{F} = C^{te} + \mu \mathcal{F}_\omega ,$$

$\mathcal{F}_\omega = -\frac{1}{2}\int_{U'+U''} (J_\omega . \mathcal{H}_\omega) d\varpi$ représentant le potentiel interne du système des deux aimants homologues.

D'où ce théorème :

Les actions mutuelles de deux ellipsoïdes uniformément aimantés, plongés à grande distance dans un liquide de perméabilité μ, *sont* μ *fois plus grandes que celles s'exerçant entre leurs homologues placés dans le vide.*

La même analyse s'étend manifestement à un nombre quelconque d'ellipsoïdes.

Applications. I. *Sphères uniformément aimantées.* — Pour la sphère, les trois constantes A, B, C sont égales entre elles, et par conséquent égales à $\frac{4\pi}{3}$. La formule :

$$J_{\omega x} = \frac{J_{0x}}{\mu - \varkappa A},$$

entraîne l'égalité vectorielle

$$\bar{J}_\omega = \frac{\bar{J}_0}{\mu - \frac{4\pi\varkappa}{3}} = \frac{3}{2\mu + 1}\bar{J}_0; \quad \text{d'où} \quad \overline{\mathfrak{M}}_\omega = \frac{3}{2\mu+1}\overline{\mathfrak{M}}_0.$$

Les actions mutuelles de deux sphères sont donc multipliées par $\mu\left(\frac{3}{2\mu+1}\right)^2$. C'est le résultat annoncé au § I.

II. *Aiguilles aimantées. Feuillets magnétiques.* — Nous considérerons l'aiguille aimantée comme cas limite d'un ellipsoïde uniformément aimanté suivant l'axe $2a$, cet axe conservant une longueur invariable tandis que les deux autres ($2b$ et $2c$) tendent vers zéro. De même nous considérerons le feuillet magnétique comme cas limite d'un ellipsoïde uniformément aimanté suivant l'axe $2a$, dont la longueur tend vers zéro tandis que les axes $2b$ et $2c$ restent invariables.

Cherchons ce que deviennent les quantités A, B, C lorsque l'une au moins des trois longueurs a, b, c tend vers zéro. A cet effet reportons-nous à l'identité qui définit A, B, C :

$$\int_U \frac{d\varpi}{r} = C^{te} - \frac{1}{2}(Ax^2 + By^2 + Cz^2).$$

Elle apprend que Aa, Bb, Cc sont les champs newtoniens aux trois sommets de l'ellipsoïde homogène, de densité $\rho = 1$. Or, le champ newtonien tendant vers zéro en même que le volume U, la condition $\lim U = 0$ entraîne les trois relations :

$$\lim Aa = 0, \qquad \lim Bb = 0, \qquad \lim Cc = 0.$$

D'autre part, dans les deux cas considérés, les deux composantes J_{0y} et J_{0z} sont nulles; et par suite il en est de même de $J_{\infty y}$ et $J_{\infty z}$. De là résultent les conséquences suivantes :

Pour l'*aiguille aimantée* ($a \neq 0$, $b = 0$, $c = 0$) la constante A est nulle, et l'on a

$$\bar{J}_\infty = \frac{\bar{J}_0}{\mu}.$$

L'homologue de l'aiguille aimantée possède un moment magnétique $\overline{\mathfrak{M}}_\infty = \frac{\overline{\mathfrak{M}}}{\mu}$.

Pour le *feuillet magnétique* ($a = 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$) les constantes B et C sont nulles, et par suite A est égal à 4π. On a

$$\bar{J}_\infty = \bar{J}_0.$$

L'homologue du feuillet magnétique possède un moment $\overline{\mathfrak{M}}_\infty = \overline{\mathfrak{M}}$.

Nous obtenons par conséquent ces trois lois, dont la première seule est d'accord avec la règle de Boltzmann :

1° *Les actions mutuelles (apparentes) de deux aiguilles aimantées plongées dans un liquide magnétique sont inversement proportionnelles à la perméabilité μ de ce liquide.*

2° *Les actions mutuelles de deux feuillets sont proportionnelles à μ.*

3° *L'action d'un feuillet sur une aiguille aimantée est indépendante de μ.*

L'égalité $\bar{J}_\infty = \frac{\bar{J}_0}{\mu}$ est encore vérifiée lorsque deux des axes ont une longueur finie, pourvu que l'aimantation J_0 soit contenue dans leur plan. Une plaque aimantée dans son plan se comporte comme une aiguille aimantée.

L'analyse qui vient de fournir ces résultats suppose les aimants placés à grande distance. Nous établirons plus loin que les trois lois précédentes restent valables lorsque les aiguilles et feuillets sont placés à distance finie.

III. — Supposant maintenant a, b, c finis, proposons-nous de discuter les actions mutuelles de deux ellipsoïdes uniformément aimantés suivant leurs axes a' et a''. Ces actions seront proportionnelles à

$$\frac{\mu}{(\mu - \varkappa A')(\mu - \varkappa A'')}, \quad \text{ou, dans l'hypothèse } \varkappa \text{ très petit, à} \quad 1 + (A' + A'' - 4\pi)\varkappa.$$

Pour qu'elles soient indépendantes du milieu il faut et il suffit que A' et A'' vérifient la relation

$$A' + A'' = 4\pi.$$

Avec deux ellipsoïdes de révolution semblables, aimantés suivant l'axe de révolution a, on trouve que le rapport $\frac{a}{b}$ des axes est le nombre, inférieur à l'unité, qui satisfait à l'équation :

$$\frac{1}{2}\left(1-\frac{a^2}{b^2}\right)+\frac{\text{arc tang}\sqrt{\frac{b^2}{a^2}-1}}{\sqrt{\frac{b^2}{a^2}-1}}=1.$$

La racine de cette équation est $\frac{a}{b}=\alpha=0{,}55088\ldots$.

Pour $\frac{a}{b}>\alpha$ l'effet d'un milieu paramagnétique est de diminuer les actions mutuelles; c'est le cas de deux aiguilles aimantées.

Pour $\frac{a}{b}<\alpha$ les actions mutuelles sont augmentées; c'est le cas de deux feuillets magnétiques.

§ III. — Deux aimants permanents quelconques placés à grande distance.

Dans l'étude des actions mutuelles d'aimants permanents quelconques nous pouvons, sans restreindre la généralité des résultats, nous borner aux aimants solénoïdaux (condition : divergence $J_0=0$). A tout aimant on peut en effet faire correspondre un aimant solénoïdal qui lui soit équivalent, c'est-à-dire un aimant produisant le même champ magnétique dans l'espace extérieur; et on ne change pas les actions mutuelles d'aimants lorsqu'on remplace ces corps par des aimants équivalents.

Moment magnétique de l'homologue d'un élément solénoïdal. — Soit $\sigma_0=-(\nu'.J_0)$ la densité superficielle qui caractérise l'aimant solénoïdal. Lorsque ce corps est seul plongé dans le liquide le champ total $\mathcal{H}$ dérive d'un potentiel de simple couche $\mathcal{V}(x, y, z)$ astreint à vérifier la condition

$$\mu\frac{d\mathcal{V}_e}{d\nu}+\frac{d\mathcal{V}_i}{d\nu'}+4\pi\sigma_0=0. \tag{15}$$

Ce potentiel peut s'écrire

$$\mathcal{V}(x, y, z)=\int\frac{\sigma_m}{r}d\omega,$$

et l'on a

$$\frac{d\mathcal{V}_e}{d\nu} + \frac{d\mathcal{V}_i}{d\nu'} + 4\pi\sigma_\omega = 0. \tag{16}$$

σ_ω désigne la densité superficielle qui caractérise l'aimant homologue.

Le moment magnétique d'un aimant quelconque, défini par son aimantation $\bar{J}_0(x, y, z)$ est le vecteur

$$\overline{\mathfrak{M}} = \int_U \bar{J}_0 d\varpi.$$

Des transformations connues donnent la formule

$$\mathfrak{M}_x = \int_U x\rho_0 d\varpi + \int_S x\sigma_0 d\omega,$$

qui se réduit, lorsque l'aimant est solénoïdal, à

$$\mathfrak{M}_x = \int_S x\sigma_0 d\omega.$$

Pareillement on aura pour l'aimant homologue, caractérisé par la densité superficielle σ_ω,

$$\mathfrak{M}_{\omega x} = \int_S x\sigma_\omega d\omega.$$

Proposons-nous de transformer cette expression :

De (15) et (16) on déduit

$$\mu\sigma_\omega = \sigma_0 - \varkappa \frac{d\mathcal{V}_i}{d\nu'},$$

d'où la nouvelle expression de $\mathfrak{M}_{\omega x}$

$$\mathfrak{M}_{\omega x} = \frac{1}{\mu}\int_S x\sigma_0 d\omega - \frac{\varkappa}{\mu}\int_S x\frac{d\mathcal{V}_i}{d\nu'} d\omega.$$

Transformons l'intégrale $\int_S x\frac{d\mathcal{V}_i}{d\nu'} d\omega$; nous écrirons d'abord :

$$\int_S x\frac{d\mathcal{V}_i}{d\nu'} d\omega = \int_S \mathcal{V}\frac{dx}{d\nu'} d\omega = -\int_S \mathcal{V}\frac{dx}{d\nu} d\omega = -\int_S \mathcal{V}\cos\alpha\, d\omega,$$

α, β, γ désignant les angles que fait la normale extérieure $\bar{\nu}$ avec les axes de coordonnées.

Introduisons à présent un potentiel de simple couche $f(x, y, z)$ défini par la condition (17'), qui doit être vérifiée en tout point de la surface S,

$$(17') \qquad \mu \frac{df_e}{d\nu} + \frac{df_i}{d\nu'} + 4\pi \cos\alpha = 0;$$

nous obtenons la suite d'égalités

$$4\pi \int_S x \frac{d\Upsilon_i}{d\nu'} d\omega = \int_S \Upsilon \left(\mu \frac{df_e}{d\nu} + \frac{df_i}{d\nu'}\right) d\omega = \int_S f\left(\mu \frac{d\Upsilon_e}{d\nu} + \frac{d\Upsilon_i}{d\nu'}\right) d\omega = -4\pi \int_S \sigma_0 . f . d\omega.$$

De là résultent les composantes du moment $\mathfrak{M}_m$:

$$(18) \quad \mathfrak{M}_{mx} = \int_S \frac{x + \varkappa f}{\mu} \sigma_0 d\omega, \quad \mathfrak{M}_{my} = \int_S \frac{y + \varkappa g}{\mu} \sigma_0 d\omega, \quad \mathfrak{M}_{mz} = \int_S \frac{z + \varkappa h}{\mu} \sigma_0 d\omega.$$

Dans ces formules les fonctions $g(x, y, z)$ et $h(x, y, z)$ sont deux potentiels de simple couche définis par les conditions (17'') et (17''') analogues à (17') :

$$(17'') \quad \mu \frac{dg_e}{d\nu} + \frac{dg_i}{d\nu'} + 4\pi \cos\beta = 0, \qquad (17''') \quad \mu \frac{dh_e}{d\nu} + \frac{dh_i}{d\nu'} + 4\pi \cos\gamma = 0.$$

$f(x, y, z)$, $g(x, y, z)$, $h(x, y, z)$ sont manifestement les trois composantes d'un champ vectoriel invariablement lié au solide S, c'est-à-dire indépendant du choix des axes de référence. Dans le cas particulier de l'ellipsoïde $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$, on vérifiera aisément que ce champ vectoriel a pour composantes

$$f(x, y, z) = -\frac{1}{\mu - \varkappa A} \frac{\partial}{\partial x} \int_U \frac{d\varpi}{r}, \qquad g(x, y, z) = -\frac{1}{\mu - \varkappa B} \frac{\partial}{\partial y} \int_U \frac{d\varpi}{r},$$
$$h(x, y, z) = -\frac{1}{\mu - \varkappa C} \frac{\partial}{\partial z} \int_U \frac{d\varpi}{r}.$$

formules qui deviennent pour la région intérieure à l'ellipsoïde

$$(19) \quad f_i(x, y, z) = \frac{Ax}{\mu - \varkappa A}, \quad g_i(x, y, z) = \frac{By}{\mu - \varkappa B}, \quad h_i(x, y, z) = \frac{Cz}{\mu - \varkappa C}.$$

Actions mutuelles de deux aimants solénoïdaux. — Soient deux tels aimants plongés, à grande distance l'un de l'autre, dans le liquide μ. Nous les caractériserons par les densités superficielles σ_0' et σ_0''. Appliquant la méthode donnée au § I, nous déterminerons les expressions asymptotiques du champ magnétique total et du potentiel interne :

1° *Expression asymptotique du champ total.* — Ce champ dérive d'un potentiel newtonien de simple couche $\mathfrak{V}(x, y, z)$ astreint à vérifier les deux conditions :

$$\mu \frac{d\mathfrak{V}_e}{d\nu} + \frac{d\mathfrak{V}_i}{d\nu'} + 4\pi\sigma_0' = 0 \text{ sur S}', \qquad \mu \frac{d\mathfrak{V}_e}{d\nu} + \frac{d\mathfrak{V}_i}{d\nu''} + 4\pi\sigma_0'' = 0 \text{ sur S}''.$$

Opérons par approximations successives :

Soit $V'(x, y, z)$ le potentiel de simple couche étendue sur la surface S, et astreint à vérifier la condition

$$\mu \frac{dV_e'}{d\nu} + \frac{dV_i'}{d\nu'} + 4\pi\sigma_0' = 0.$$

Soit de même $V''(x, y, z)$ le potentiel vérifiant sur S″ la condition

$$\mu \frac{dV_e''}{d\nu} + \frac{dV_i''}{d\nu''} + 4\pi\sigma_0'' = 0.$$

Écrivons $\mathfrak{V}(x, y, z) = V' + V'' + v$, et formons les deux conditions que doit vérifier le terme complémentaire v; ce sont, en tenant compte des deux égalités précédentes :

$$\mu \frac{dv_e}{d\nu} + \frac{dv_i}{d\nu} + 4\pi\varkappa \frac{dV''}{d\nu'} = 0 \text{ sur S}', \qquad \mu \frac{dv_e}{d\nu} + \frac{dv_i}{d\nu''} + 4\pi\varkappa \frac{dV'}{d\nu} = 0 \text{ sur S}''.$$

Opérons sur $v(x, y, z)$ comme nous venons de le faire sur $\mathfrak{V}$: écrivons $v = v' + v'' + w$, v' et v'' désignant deux potentiels de simple couche respectivement définis par l'une des deux conditions :

$$\mu \frac{dv_e'}{d\nu} + \frac{dv_i'}{d\nu'} + 4\pi\varkappa \frac{dV''}{d\nu} = 0 \text{ sur S}',$$

$$\mu \frac{dv_e''}{d\nu} + \frac{dv_i''}{d\nu''} + 4\pi\varkappa \frac{dV'}{d\nu} = 0 \text{ sur S}''.$$

Les deux sommes $(V' + V'')$ et $(v' + v'')$ représentent les deux premiers termes d'un développement en série, qui satisfait formellement aux conditions imposées à $\mathfrak{V}$, et dont nous étudierons la convergence au paragraphe suivant. Remarquons que V' et V'' représentent précisément les potentiels $\mathfrak{V}'_m$ et $\mathfrak{V}''_m$ des champs créés par les homologues de U′ et U″. Dans l'expression asymptotique que nous nous proposons d'évaluer le reste w n'intervient pas; et nous pouvons nous limiter à la formule

$$\mathcal{V}(x, y, z) = \mathcal{V}'_\infty + \mathcal{V}''_\infty + v' + v''.$$

Calculons $\mathcal{V}$ dans la région U' : v'' est négligeable; d'autre part $\mathcal{H}''_\infty$ est assimilable à un champ uniforme, et l'on a, à une constante additive près,

$$\mathcal{V}''_\infty = -(x\mathcal{H}''_{\infty x} + y\mathcal{H}''_{\infty y} + z\mathcal{H}''_{\infty z}).$$

Quant au potentiel $v'(x, y, z)$ il vérifie l'équation

$$\mu\frac{dv'_e}{d\nu} + \frac{dv'_i}{d\nu'} = -4\pi\varkappa\frac{d\mathcal{V}''_\infty}{d\nu} = 4\pi\varkappa(\mathcal{H}''_{\infty x}\cos\alpha + \mathcal{H}''_{\infty y}\cos\beta + \mathcal{H}''_{\infty z}\cos\gamma),$$

dont la solution est, en se reportant aux trois équations (17') (17'') (17'''),

$$v'(x, y, z) = -\varkappa(f\mathcal{H}''_{\infty x} + g\mathcal{H}''_{\infty y} + h\mathcal{H}''_{\infty z}).$$

En définitive, dans la région U', le potentiel $\mathcal{V}(x, y, z)$ a pour expression asymptotique

$$\mathcal{V}(x, y, z) = \mathcal{V}'_\infty - \left\{(x + \varkappa f)\mathcal{H}''_{\infty x} + (y + \varkappa g)\mathcal{H}''_{\infty y} + (z + \varkappa h)\mathcal{H}''_{\infty z}\right\}. \tag{20}$$

Le champ total n'est donc pas égal à la somme géométrique des champs $\mathcal{H}'_\infty$ et $\mathcal{H}''_\infty$ créés par les homologues de U' et U''; mais on a, dans la région U',

$$\mathcal{H}_x = \mathcal{H}'_{\infty x} + \mathcal{H}''_{\infty x} + \varkappa\left(\mathcal{H}''_{\infty x}\frac{\partial f}{\partial x} + \mathcal{H}''_{\infty y}\frac{\partial g}{\partial x} + \mathcal{H}''_{\infty z}\frac{\partial h}{\partial x}\right),$$

et deux expressions analogues pour $\mathcal{H}_y$ et $\mathcal{H}_z$.

Appliquons ces formules à l'ellipsoïde : nous retrouvons, en nous reportant aux formules (19), l'égalité (14) écrite plus haut :

$$\mathcal{H}_x = \mathcal{H}'_{\infty x} + \mathcal{H}''_{\infty x} + \frac{\varkappa A}{\mu - \varkappa A}\mathcal{H}''_{\infty x}. \tag{14}$$

2° *Expression asymptotique du potentiel interne.* — Commençons par transformer l'expression de $\mathcal{F}$ utilisée dans les deux paragraphes précédents. Dans la formule

$$\mathcal{F} = -\frac{1}{2}\int_{U'+U''}(J_0 \,.\, \mathcal{H})\,d\omega$$

remplaçons $\mathcal{H}$ par — grad $\mathcal{V}$, et intégrons par parties; nous obtenons la succession d'égalités :

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2}\int_{U'+U''}(J_0 \,.\, \mathrm{grad}\,\mathcal{V})\,d\varpi = -\frac{1}{2}\int_{U'+U''}\mathcal{V}\,\mathrm{div.}\,J_0\,d\varpi + \frac{1}{2}\int_{S'+S''}(\nu\,.\,J_0)\mathcal{V}\,d\omega.$$

Tenant compte des relations

$$\rho_0 = -\,\mathrm{div.}\,J_0, \qquad \sigma_0 = (\nu\,.\,J_0),$$

nous aboutissons à la formule de Helmholtz [1]

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2}\int \rho\mathcal{V}_0\,d\varpi + \frac{1}{2}\int \sigma\mathcal{V}_0\,d\omega.$$

Pour des aimants solénoïdaux ($\rho_0 = 0$) le potentiel interne se réduit à :

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2}\int_{S'+S''}\sigma_0\mathcal{V}\,d\omega = \frac{1}{2}\int_{S'}\sigma_0'\mathcal{V}\,d\omega + \frac{1}{2}\int_{S''}\sigma_0''\mathcal{V}\,d\omega.$$

C'est la formule dont nous allons faire usage : remplaçant $\mathcal{V}$ par sa valeur asymptotique (20), nous obtenons

$$\int_{S'}\sigma_0'\mathcal{V}\,d\omega = C^{te} - \Sigma\mathcal{H}''_{\infty x}\int_{S'}(x + \varkappa f)\sigma_0'\,d\omega = C^{te} - \mu(\mathcal{M}'_\infty \,.\, \mathcal{H}''_\infty),$$

et pareillement

$$\int_{S''}\sigma_0''\mathcal{V}\,d\omega = C^{te} - \mu(\mathcal{M}''_\infty \,.\, \mathcal{H}'_\infty).$$

De là nous déduisons l'expression asymptotique du potentiel interne

$$\mathcal{F} = C^{te} - \frac{1}{2}\mu\left\{(\mathcal{M}'_\infty \,.\, \mathcal{H}''_\infty) + (\mathcal{M}''_\infty \,.\, \mathcal{H}'_\infty)\right\}.$$

---

[1] HELMHOLTZ (*Wissenchaftliche Abhandlungen*, page 801) a donné l'expression équivalente

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2}\int_{U'+U''}\rho_0\mathcal{V}\,d\varpi + \frac{1}{2}\int_{S'+S''}\sigma_0\mathcal{V}\,d\omega.$$

On passe de cette dernière formule à celle du texte en appliquant la loi classique de réciprocité.

Remarquant que la quantité

$$-\frac{1}{2}\left\{(\mathfrak{M}'_\omega \cdot \mathcal{H}''_\omega) + (\mathfrak{M}''_\omega \cdot \mathcal{H}'_\omega)\right\}$$

représente le potentiel interne du système formé par les deux doublets $\mathfrak{M}'_\omega$, $\mathfrak{M}''_\omega$, nous aboutissons à l'égalité asymptotique

$$\mathcal{F} = C^{te} + \mu \mathcal{F}_\omega,$$

$\mathcal{F}_\omega$ désignant le potentiel interne de l'ensemble des aimants homologues.

La méthode s'applique à un nombre quelconque d'aimants; elle nous donne ce théorème :

« *Les actions mutuelles d'aimants permanents, plongés à grande distance dans un liquide de perméabilité μ, sont μ fois plus grandes que celles s'exerçant entre leurs homologues placés dans le vide.* »

Homologues d'un aimant permanent uniformément aimanté suivant des directions variables. Loi de l'ellipsoïde. — Dans le cas particulier où cet aimant est un ellipsoïde, le vecteur $\mathfrak{M}_\omega$ est, comme on l'a établi plus haut, relié au vecteur $\mathfrak{M}$ par les relations

$$\mathfrak{M}_{\omega x} = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathfrak{M}_x}, \qquad \mathfrak{M}_{\omega y} = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathfrak{M}_y}, \qquad \mathfrak{M}_{\omega z} = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathfrak{M}_z}; \tag{21}$$

$\Phi(\mathfrak{M}_x, \mathfrak{M}_y, \mathfrak{M}_z)$ désignant la forme quadratique

$$\Phi(\mathfrak{M}_x, \mathfrak{M}_y, \mathfrak{M}_z) = \frac{1}{2}\left\{\frac{\mathfrak{M}_x^2}{\mu - \varkappa A} + \frac{\mathfrak{M}_y^2}{\mu - \varkappa B} + \frac{\mathfrak{M}_z^2}{\mu - \varkappa C}\right\}.$$

Les constantes A, B, C étant comprises entre zéro et 4π, la forme Φ est définie positive toutes les fois que le liquide μ est paramagnétique.

Cette propriété reste vraie pour un aimant de forme quelconque portant une aimantation uniforme. Autrement dit, $\mathfrak{M}$ vérifie les formules (21) dans lesquelles Φ représente une forme quadratique définie positive toutes les fois que $\varkappa$ est positif.

Pour établir ce résultat reportons-nous aux formules qui définissent $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{M}_\omega$:

$$\mathfrak{M}_x = \int_S x\sigma_0 \, d\omega, \qquad \mathfrak{M}_{\omega x} = \int_S (x + \varkappa f)\sigma_0 \, d\omega.$$

Nous désignerons par U' la région occupée par l'aimant permanent et par U la région occupée par le liquide. ν et ν' seront comme précédemment les normales extérieure et intérieure à S.

Remplaçant σ_0 par sa valeur

$$\sigma_0 = J_{0x} \cos\alpha + J_{0y} \cos\beta + J_{0z} \cos\gamma,$$

nous obtenons les formules

$$\mathfrak{M}_{\omega x} = A_{11} J_{0x} + A_{12} J_{0y} + A_{13} J_{0z}, \qquad \mathfrak{M}_{\omega y} = A_{21} J_{0x} + \ldots, \qquad \mathfrak{M}_{\omega z} = A_{31} J_{0x} + \ldots$$

avec

$$A_{11} = \int_S \frac{x + \varkappa f}{\mu} \cos\alpha\, d\omega, \quad A_{12} = \int_S \frac{x + \varkappa f}{\mu} \cos\beta\, d\omega, \quad A_{21} = \int_S \frac{y + \varkappa g}{\mu} \cos\alpha\, d\omega \ldots$$

Transformons l'expression de A_{12} : Tenant compte de la condition

$$\mu \frac{dg_e}{d\nu} + \frac{dg_i}{d\nu'} + 4\pi \cos\beta = 0, \quad \text{et de l'identité} \quad \int_S x \cos\beta\, d\omega = 0,$$

nous obtenons

$$A_{12} = -\frac{\varkappa}{4\pi\mu} \int_S f \left(\mu \frac{dg_e}{d\nu} + \frac{dg_i}{d\nu'} \right) d\omega.$$

Enfin une transformation classique donne :

$$A_{12} = \frac{\varkappa}{4\pi\mu} \int_{U'} \sum \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial x}\, d\varpi + \frac{\varkappa}{4\pi} \int_U \sum \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial x}\, d\varpi, \tag{22}$$

$\sum \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial x}$ désignant la somme $\left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial g}{\partial z} \right)$.

De là résulte l'égalité $A_{12} = A_{21}$. Le moment magnétique $\mathfrak{M}_\omega$ est donc une fonction vectorielle linéaire symétrique de $\mathfrak{M}$. On a

$$\mathfrak{M}_{\omega x} = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathfrak{M}_x}, \qquad \Phi = \frac{1}{2} (\mathfrak{M} \cdot \mathfrak{M}_\omega).$$

En ce qui concerne A_{11} on obtient, en remarquant que $\int \varkappa \cos\alpha\, d\omega = U'$,

$$A_{11} = \frac{U'}{\mu} + \frac{\varkappa}{4\pi\mu} \int_{U'} \sum \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 d\varpi + \frac{\varkappa}{4\pi} \int_U \sum \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 d\varpi. \tag{22'}$$

Pour évaluer le produit scalaire $(\mathfrak{M}.\mathfrak{M}_\omega)$ introduisons le champ total $\mathcal{H}$. Ce champ dérive au potentiel $\mathcal{V}$ astreint à vérifier sur S la condition

$$\mu \frac{d\mathcal{V}_e}{d\nu} + \frac{d\mathcal{V}_i}{d\nu'} + 4\pi(J_{0x}\cos\alpha + J_{0y}\cos\beta + J_{0z}\cos\gamma) = 0.$$

Se reportant aux conditions (17) qui définissent f, g, h, on a la solution

$$\mathcal{V}(x, y, z) = fJ_{0x} + gJ_{0y} + hJ_{0z},$$

d'où

$$\mathcal{H}^2 = \sum \left(J_{0x}\frac{\partial f}{\partial x} + J_{0y}\frac{\partial f}{\partial y} + J_{0z}\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 = J^2_{0x}\sum\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + 2J_{0y}J_{0z}\sum\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial z} + \ldots.$$

La comparaison de cette égalité avec (22) et (22') conduit à l'égalité

$$\mu\Phi = \frac{\mu}{2}(\mathfrak{M}.\mathfrak{M}_\omega) = \frac{\mathfrak{M}^2}{2} + \varkappa\int_{U'+U}\frac{\mu\mathcal{H}^2}{8\pi}d\varpi, \tag{23}$$

dans laquelle on fera $\mu = 1$ en tout point de la région U'. La formule (23) peut encore s'écrire

$$\mu\Phi = \frac{\mathfrak{M}^2}{2} + \varkappa\mathcal{F},$$

$\mathcal{F}$ désignant le potentiel interne du système formé par l'aimant permanent U' et le liquide qui le baigne.

La quadrique $\Phi(x, y, z) - 1 = 0$ est donc un ellipsoïde lorsque ce liquide est paramagnétique. Cette propriété s'étend à tous les liquides diamagnétiques connus; car leur perméabilité est positive, et, d'autre part, $\frac{\mathfrak{M}^2}{2}$ est prépondérant vis-à-vis de $\varkappa\mathcal{F}$.

Les applications de la loi de l'ellipsoïde sont immédiates :

1° Si le corps possède au moins deux axes de symétrie principaux [1] la quadrique $\Phi(x, y, z) - 1 = 0$ est une sphère. Quelle que soit la direction de J_0, on a :

$$\overline{\mathfrak{M}_\omega} = K(\mu)\overline{\mathfrak{M}},$$

$K(\mu)$ désignant une fonction de μ, dont l'expression analytique dépend de la forme de la surface. Pour la sphère par exemple, on a $K = \frac{3}{2\mu + 1}$.

2° Si le corps possède un axe de symétrie principal, la quadrique est de révolution autour de cet axe.

---

[1] C'est-à-dire d'ordre supérieur à *deux* (axes ternaires, quaternaires, etc.).

3° D'une manière générale, pour un solide quelconque il existe trois directions principales suivant lesquelles $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{M}_\omega$ sont parallèles : ce sont les trois axes de la quadrique $\Phi(x, y, z) - 1 = 0$.

Comparons deux corps différents U′ et U″ dont nous ferons coïncider les directions principales : Si l'égalité

$$\mathfrak{M}'_\omega = \mathfrak{M}''_\omega$$

est vérifiée dans les trois cas particuliers

$$J_0 = (1, 0, 0), \qquad J_0 = (0, 1, 0), \qquad J_0 = (0, 0, 1),$$

elle restera vérifiée quelle que soit l'orientation du vecteur $|J_0| = 1$.

§ IV. — Sur la résolution du problème de l'équilibre magnétique et sur les actions mutuelles d'aiguilles aimantées et de feuillets magnétiques placés à distance finie.

La méthode imaginée par M. Liénard repose sur un procédé d'approximations, que nous n'avons fait qu'esquisser, et que nous allons étudier à présent de façon plus complète. Ce procédé s'applique à un nombre quelconque d'aimants plongés dans un liquide. Pour simplifier les écritures, considérons trois aimants U′, U″, U‴, que nous supposerons solénoïdaux. Comme nous l'avons rappelé au § III, cette dernière hypothèse ne restreint pas la généralité des résultats.

Désignant par σ_0', σ_0'', σ_0''' les densités superficielles caractérisant ces aimants, on sait que la recherche du champ total se ramène à la détermination d'un potentiel de simple couche $\mathcal{V}(x, y, z)$ astreint à vérifier les trois conditions (24) relatives aux surfaces S′, S″, S‴ limitant ces aimants [1]

$$\mu\frac{d\mathcal{V}}{d\nu} + \frac{d\mathcal{V}}{d\nu'} + 4\pi\sigma_0' = 0, \quad \mu\frac{d\mathcal{V}}{d\nu} + \frac{d\mathcal{V}}{d\nu''} + 4\pi\sigma_0'' = 0, \quad \mu\frac{d\mathcal{V}}{d\nu} + \frac{d\mathcal{V}}{d\nu'''} + 4\pi\sigma_0''' = 0. \tag{24}$$

C'est le problème de Neumann généralisé. Posant

$$\mathcal{V}(x, y, z) = \int_{S'+S''+S'''} \frac{\sigma(P)}{r}\, d\omega_P,$$

---

[1] Nous écrirons dorénavant $\frac{d\mathcal{V}}{d\nu}$ au lieu de $\frac{d\mathcal{V}_e}{d\nu}$ et $\frac{d\mathcal{V}}{d\nu'}$ au lieu de $\frac{d\mathcal{V}_i}{d\nu'}$.
ν représente la normale extérieure à l'une quelconque des surfaces S′, S″, S‴;
ν', ν'', ν''' représentent les normales intérieures à ces surfaces.

l'inconnue σ vérifie l'équation fonctionnelle (24'), établie par E. Picard,

$$(24') \qquad \sigma(M) = \lambda \int_{S'+S''+S'''} \frac{-\cos\Psi}{2\pi r^2}\sigma(P)\,d\omega_P + f(M);$$

avec

$$f(M) = \frac{2}{\mu+1}\sigma_0(M), \qquad \lambda = \frac{\mu-1}{\mu+1}.$$

L'angle Ψ, qui intervient dans (24'), désigne l'angle du vecteur $\overline{MP}$ avec la normale intérieure au point M.

La solution de l'équation (24') est donnée par la formule classique de Fredholm

$$(25) \qquad \sigma(M) = f(M) + \lambda \int_{S'+S''+S'''} \Gamma(M, P, \lambda) f(P)\,d\omega_P,$$

$\Gamma(M, P, \lambda)$ désignant la résolvante de Fredholm.

On suppose que λ ne fait point partie de la suite des nombres caractéristiques pour le système $S' + S'' + S'''$, c'est-à-dire, de la suite des racines du dénominateur $D(\lambda)$ de la résolvante. Si, au contraire, λ était nombre caractéristique pour $S' + S'' + S'''$, le problème n'admettrait pas de solution en général. Ce cas d'exception ne se présente pas lorsque le liquide est paramagnétique, car, dans cette éventualité $\frac{\mu-1}{\mu+1}$ est positif, et l'on sait que les racines de la résolvante sont réelles et comprises entre -1 et $-\infty$. Il ne se présente pas davantage avec les liquides diamagnétiques connus, $\varkappa$ étant toujours très petit en valeur absolue.

Pour parvenir aux lois asymptotiques vérifiées par les aimants placés à grande distance il est avantageux de recourir à une méthode, dont le domaine d'application est moins étendu (elle tombe en défaut pour des corps rapprochés), et qui consiste à exprimer $\Upsilon(x, y, z)$ sous forme d'un développement en série de potentiels de simple couche. Le calcul de ces potentiels est plus simple que celui qui est donné par la formule (25), car on les obtient en résolvant le problème de Neumann, non pas pour l'ensemble $S' + S'' + S'''$, mais seulement pour chacune de ces surfaces considérées séparément. Ce sont précisément les deux premiers termes de ce développement que nous avons utilisés au § III.

Une première condition de possibilité est évidemment que λ n'appartienne à aucune des trois suites de nombres caractéristiques (λ'), (λ''), (λ''') se rapportant à chacune des surfaces S', S'', S'''. Si cette condition est remplie, la méthode utilisée au § III prouve qu'on peut former une série de potentiels qui satisfasse formellement aux trois conditions (24). Reste à établir la convergence absolue et uniforme de cette série. Nous allons prouver qu'elle est assurée toutes les fois que la plus courte distance des surfaces S', S'', S''' est supérieure à une certaine longueur $R_0(\lambda)$.

R_0 est une fonction de λ, qui augmente indéfiniment lorsque λ tend vers un des nombres caractéristiques (λ'), (λ''), (λ'''), mais qui reste finie pour toute autre valeur de λ. D'où cette conclusion : si λ n'appartient pas aux suites (λ'), (λ''), (λ'''), il n'est pas davantage nombre caractéristique pour le système $S' + S'' + S'''$, pourvu que la plus courte distance des trois surfaces soit supérieure à $R_0(\lambda)$.

Supposons donc que λ ne fasse point partie des suites (λ'), (λ''), (λ''') : on pourra former les trois potentiels de simple couche V', V'', V''',

$$V'(x, y, z) = \int_{S'} \frac{\sigma'(P)}{r} d\omega_P, \quad V''(x, y, z) = \int_{S''} \frac{\sigma''(P)}{r} d\omega_P, \quad V'''(x, y, z) = \int_{S'''} \frac{\sigma'''(P)}{r} d\omega_P,$$

astreints à vérifier respectivement l'une des conditions

$$(26) \qquad \mu \frac{dV'}{d\nu} + \frac{dV'}{d\nu'} + 4\pi\sigma_0' = 0, \qquad \mu \frac{dV''}{d\nu} + \frac{dV''}{d\nu''} + 4\pi\sigma_0'' = 0,$$
$$\mu \frac{dV'''}{d\nu} + \frac{dV'''}{d\nu'''} + 4\pi\sigma_0''' = 0.$$

Posons à présent

$$\mathcal{V}(x, y, z) = V' + V'' + V''' + v = V + v,$$

et remplaçons $\mathcal{V}$ par $(V + v)$ dans (24). En tenant compte de (26) nous sommes ramené à un problème analogue au problème initial, à savoir : déterminer le potentiel $v(x, y, z)$ astreint à vérifier les trois conditions

$$(27) \quad \mu \frac{dv}{d\nu} + \frac{dv}{d\nu'} + 4\pi s' = 0, \quad \mu \frac{dv}{d\nu} + \frac{dv}{d\nu''} + 4\pi s'' = 0, \quad \mu \frac{dv}{d\nu} + \frac{dv}{d\nu'''} 4\pi s''' = 0;$$

s', s'', s''' désignant les quantités

$$(28) \qquad s' = \varkappa \frac{d(V - V')}{d\nu}, \qquad s'' = \varkappa \frac{d(V - V'')}{d\nu}, \qquad s''' = \varkappa \frac{d(V - V''')}{d\nu}.$$

Opérons ensuite sur v comme nous l'avons fait pour $\mathcal{V}$; posons

$$v = V_1' + V_1'' + V_1''' + v_1 = V_1 + v_1,$$

puis

$$v_1 = V_2' + V_2'' + V_2''' + v_2 = V_2 + v_2, \; \ldots\ldots, \text{etc.}$$

Nous aboutissons à la formule

$$\mathcal{V} = V + V_1 + V_2 + \ldots + V_q + v_q,$$

v_q désignant un potentiel de simple couche astreint à vérifier les trois conditions (29)

$$(29)\quad \mu\frac{dv_q}{d\nu}+\frac{dv_q}{d\nu'}+4\pi s_q'=0,\quad \mu\frac{dv_q}{d\nu}+\frac{dv_q}{d\nu''}+4\pi s_q''=0,\quad \mu\frac{dv_q}{d\nu}+\frac{dv_q}{d\nu'''}+4\pi s_q'''=0;$$

avec les relations (30) :

$$(30)\quad \begin{cases} s_q'=\varkappa\dfrac{d(V_q-V_q')}{d\nu}, & s_q''=\varkappa\dfrac{d(V_q-V_q'')}{d\nu}, \qquad s_q'''=\varkappa\dfrac{d(V_q-V_q''')}{d\nu}, \\ V_q'=\displaystyle\int_{S'}\frac{\sigma_q'}{r}d\omega, & \mu\dfrac{dV_q'}{d\nu}+\dfrac{dV_q'}{d\nu'}+4\pi s'_{q-1}=0. \end{cases}$$

La série

$$\mho=V+V_1+V_2+\ldots+V_q+\ldots$$

satisfait formellement aux conditions (24). Démontrons qu'on peut déterminer une longueur $R_0(\lambda)$ telle que la convergence absolue et uniforme de la série soit certainement assurée toutes les fois que la plus courte distance R des surfaces S', S'', S''' reste supérieure à R_0. Ce résultat découle des propositions suivantes :

Proposition I. — *Soit* $V_q'=\displaystyle\int_{S'}\frac{\sigma_q'(P)}{r}d\omega_P$ *le potentiel vérifiant la condition*

$$\mu\frac{dV_q'}{d\nu}+\frac{dV_q'}{d\nu'}+4\pi s'_{q-1}=0,$$

les maxima Σ'_q *et* S'_{q-1} *des modules de* σ'_q *et* s'_{q-1} *satisfont à l'inégalité*

$$\frac{\Sigma'_q}{S'_{q-1}}<B(\lambda),\qquad \text{et l'on a pareillement}\qquad \frac{\Sigma''_q}{S''_{q-1}}<B(\lambda),\quad \frac{\Sigma'''_q}{S'''_{q-1}}<B(\lambda);$$

$B(\lambda)$ *étant indépendant du nombre* q, *ainsi que des paramètres géométriques* α *qui définissent les positions relatives des solides* S', S'', S'''.

Cette proposition est une conséquence de la formule de Fredholm :

$$\sigma'_q(M)=f(M)+\lambda\int_{S'}\Gamma(M,P,\lambda)f(P)d\omega_P,\quad \text{avec}\quad f(M)=\frac{2}{\mu+1}s'_{q-1}(M).$$

Soit en effet A' le maximum de la quantité

$$|\lambda|\int_{S'}|\Gamma(M,P,\lambda)|d\omega_P$$

pour la valeur de λ envisagée [1]. La formule de résolution, ci-dessus rappelée, fournit l'inégalité

$$\frac{\Sigma'_q}{S'_{q-1}} < \left|\frac{2}{\mu+1}\right|(1+A'), \qquad \text{ce qui entraîne la proposition.}$$

PROPOSITION II. — R *désignant la plus courte distance des surfaces* S', S'', S''', *on a les inégalités*

$$\frac{S_q'}{\Sigma_q'' + \Sigma_q'''} < \frac{C(\lambda)}{R^2}; \qquad \frac{S_q''}{\Sigma_q' + \Sigma_q'''} < \frac{C(\lambda)}{R^2}, \qquad \frac{S_q'''}{\Sigma_q' + \Sigma_q''} < \frac{C(\lambda)}{R^2};$$

$C(\lambda)$ *étant indépendant du nombre* q *et des paramètres* $\varkappa$.

La première de ces inégalités est en effet la conséquence de la formule

$$s_q' = \varkappa \frac{d(V_q - V_q')}{d\nu} = \varkappa \frac{dV_q''}{d\nu} + \varkappa \frac{dV_q'''}{d\nu} = \varkappa \int_{S''} \sigma_q'' \frac{d\frac{1}{r}}{d\nu} d\omega + \varkappa \int_{S'''} \sigma_q''' \frac{d\frac{1}{r}}{d\nu} d\omega.$$

PROPOSITION III. — *Les modules de* s_q', s_q'', s_q''' *sont inférieurs à*

$$\left(\frac{R_0}{R}\right)^{2q+2} \frac{\Sigma_0}{B},$$

Σ_0 *désignant le maximum des modules de* σ_0' σ_0'' σ_0''',

R_0 *désignant la longueur* $\sqrt{2BC}$ (et, plus généralement, $\sqrt{nBC}$ pour $(n+1)$ aimants).

Cette proposition est la conséquence des deux précédentes :

On a

$$S_q' < \frac{C}{R^2}(\Sigma_q'' + \Sigma_q'''), \qquad \Sigma_q'' < BS''_{q-1}, \qquad \Sigma'''_q < BS'''_{q-1};$$

d'où résulte, en désignant par S_q la plus grande des quantités S_q', S_q'', S_q''', l'inégalité

$$S_q < \left(\frac{R_0}{R}\right)^2 S_{q-1}.$$

D'autre part l'inégalité

$$S' < \frac{C}{R^2}(\Sigma_0' + \Sigma_0'')$$

donne

$$S < \frac{2C}{R^2}\Sigma_0 = \left(\frac{R_0}{R}\right)^2 \frac{\Sigma_0}{B}, \qquad \text{d'où la proposition III.}$$

---

[1] A' augmente indéfiniment lorsque λ tend vers un des nombres λ'_i.

Proposition IV. — *Les modules de V_q', V_q'', V_q''' sont inférieurs à*

$$\left(\frac{R_0}{R}\right)^{2q} D\Sigma_0,$$

D *désignant une quantité indépendante de λ, de q et des paramètres α.*

Car, en représentant par D le maximum des trois potentiels

$$\int_{S'} \frac{d\omega}{r}, \qquad \int_{S''} \frac{d\omega}{r}, \qquad \int_{S'''} \frac{d\omega}{r},$$

et, tenant compte de l'égalité

$$V_q' = \int_{S'} \frac{\sigma_q'}{r} d\omega,$$

on a

$$|V_q'| < \int_{S'} \frac{\Sigma_q'}{r} d\omega < D\Sigma_q' < BDS'_{q-1} < \left(\frac{R_0}{R}\right)^{2q} D\Sigma_0.$$

Cette dernière proposition fournit la démonstration du théorème : les trois séries de potentiels de simple couche

$$V' + V_1' + V_2' + \ldots, \qquad V'' + V_1'' + V_2'' + \ldots, \qquad V''' + V_1''' + V_2''' + \ldots,$$

sont absolument et uniformément convergentes toutes les fois que la plus courte distance R des surfaces S', S'', S''' est supérieure à $R_0(\lambda)$.

Ainsi se trouvent justifiées les méthodes asymptotiques faisant appel à la notion d'aimants homologues. On observera que les premiers termes V', V'', V''' des trois développements précédents sont précisément les potentiels $\mathcal{V}_\omega'$, $\mathcal{V}_\omega''$, $\mathcal{V}_\omega'''$ des champs magnétiques créés par les homologues S_ω', S_ω'', S_ω''' des trois aimants S', S'', S'''.

Potentiel interne d'un système d'aimants plongés dans un liquide magnétique. — Lorsque λ appartient à l'une des suites (λ'), (λ''), (λ'''), la notion d'homologue disparaît, puisque le problème de Neumann relatif à S' par exemple n'admet pas en général de solution lorsque λ est égal à l'un des nombres λ'. La méthode précédente tombe en défaut bien que le problème admette une solution ; car, réserve faite de la valeur $\lambda = -1$ qui est commune à tous les systèmes, les nombres (λ') ne sont pas, en général, nombres caractéristiques pour le système $S' + S'' + S'''$.

Supposons à présent, ce qui est le cas usuel, que λ ne soit nombre caractéristique pour aucun des quatre systèmes S', S'', S''' et $S' + S'' + S'''$, et proposons-nous de transformer l'expression du potentiel interne

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \int_{S'+S''+S'''} \sigma_0 \mathcal{V} d\omega.$$

Reportons-nous aux conditions (24), (26), (27), (28); nous en déduirons la suite d'égalités suivantes [1] :

$$(31)\qquad \int_{S'+S''+S'''} s\mathcal{V}\,d\omega = \int_{S'+S''+S'''} \sigma_0 v\,d\omega,$$

$$(32)\qquad \sigma_0' = \mu\sigma' + \varkappa\frac{dV'}{d\nu'},$$

$$(33)\qquad \int_{S'} (V''+V''')\frac{dV'}{d\nu'}\,d\omega = \int_{S'} V'\frac{d(V''+V''')}{d\nu'}\,d\omega,$$

$$(33')\qquad \int_{S'} V'\frac{dV'}{d\nu'}\,d\omega = -\int_{U'} (\operatorname{grad} V')^2 d\varpi = -\int_{U'} \mathcal{H}'^2_\omega\,d\varpi = C^{te},$$

$$(33'')\qquad \int_{S'} (V''+V''')\frac{d(V''+V''')}{d\nu'}\,d\omega = -\int_{U'} \{\operatorname{grad}(V''+V''')\}^2 d\varpi = -\int_{U'} (\overline{\mathcal{H}}''_\omega + \overline{\mathcal{H}}'''_\omega)^2 d\varpi.$$

Dans ces égalités $\mathcal{H}_\omega'$, $\mathcal{H}_\omega''$, $\mathcal{H}_\omega'''$ représentent les champs magnétiques créés par les homologues S_ω', S_ω'', S_ω'''.

Appliquons ces formules à la transformation du potentiel interne $\mathcal{F}$, nous avons

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2}\int \sigma_0\mathcal{V}\,d\omega = \frac{1}{2}\int \sigma_0(V+v)\,d\omega,$$

c'est-à-dire, en utilisant la loi de réciprocité (31),

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2}\int \sigma_0 V\,d\omega + \frac{1}{2}\int s\mathcal{V}\,d\omega.$$

Nous avons ensuite

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2}\int \sigma_0 V\,d\omega + \frac{1}{2}\int s(V+v)\,d\omega = \frac{1}{2}\int sv\,d\omega + \frac{1}{2}\int (\sigma_0+s)V\,d\omega,$$

et, par application de (32) qui donne

$$\sigma_0' + s' = \mu\sigma' + \varkappa\frac{dV'}{d\nu'} - \varkappa\frac{d(V''+V''')}{d\nu'},$$

nous obtenons

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2}\mu\int \sigma V\,d\omega + \frac{1}{2}\int sv\,d\omega + \frac{\varkappa}{2}\sum\int_{S'} (V'+V''+V''')\left\{\frac{dV'}{d\nu'} - \frac{d(V''+V''')}{d\nu'}\right\}d\omega.$$

---

[1] La loi de réciprocité (31) est une conséquence de (24), de (27) et de la formule de Green. La formule (32) est la conséquence de (26) et de l'égalité $\frac{dV'}{d\nu} + \frac{dV'}{d\nu'} + 4\pi\sigma' = 0$.

Tenant compte des relations (33), (33'), (33'') et remarquant que $\mathcal{F}_\omega$ est égal à $\frac{1}{2}\int \sigma V d\omega$, nous aboutissons finalement à la formule

$$(34)\qquad \mathcal{F} = \mu\mathcal{F}_\omega + \frac{1}{2}\int s v d\omega + \frac{\varkappa}{2}\left\{\int_{U'}(\overline{\mathcal{H}''}_\omega + \overline{\mathcal{H}'''}_\omega)^2 d\varpi + \int_{U''}(\overline{\mathcal{H}'}_\omega + \overline{\mathcal{H}'''}_\omega)^2 d\varpi + \int_{U'''}(\overline{\mathcal{H}'}_\omega + \overline{\mathcal{H}''}_\omega)^2 d\varpi\right\}.$$

L'extension de cette formule à un nombre quelconque d'aimants est intuitive. Donnons-en quelques applications.

Applications. — 1° *Nouvelle démonstration de la loi des homologues.* — L'analyse développée dans ce paragraphe prouve que la méthode exposée au § III est applicable, toutes les fois que la plus courte distance R des aimants est supérieure à la limite R_0. Dans cette hypothèse, nous préciserons l'énoncé de la loi des homologues en établissant que la différence $\mathcal{F} - \mu\mathcal{F}_\omega$ est comparable à $\frac{1}{R^6}$.

Tout d'abord, dans la région U', le champ $\overline{\mathcal{H}''}_\omega + \mathcal{H}'''_\omega$ est comparable à $\frac{1}{R^3}$; et, par conséquent, le coefficient de $\varkappa$ dans le second membre de (34) est comparable à $\frac{1}{R^6}$.

Évaluons en second lieu le terme $\int s v d\omega$. En tout point de S' la densité s' :

$$s' = \varkappa\left(\frac{dV''}{d\nu} + \frac{dV'''}{d\nu}\right) = -\varkappa(\nu \,.\, \mathcal{H}''_\omega + \mathcal{H}'''_\omega)$$

est comparable à $\frac{1}{R^3}$; et il résulte des propositions I à IV, appliquées à la fonction v, que ce potentiel est également de l'ordre de $\frac{1}{R^3}$. Bref le produit sv est comparable à $\frac{1}{R^6}$, d'où résulte la propriété annoncée.

2° *Actions mutuelles d'aiguilles aimantées et de feuillets placés à distance finie.* — Admettons à présent que l'une au moins des dimensions des aimants soit infiniment petite. Dans l'égalité (34) les trois intégrales de volume disparaissent, et $\mathcal{F}$ se réduit à

$$\mathcal{F} = \mu\mathcal{F}_\omega + \frac{1}{2}\int s v d\omega.$$

Je dis que l'intégrale $\int_{S'} s' v d\omega$ est nulle pour un feuillet magnétique; en effet, en deux points correspondants des feuillets les densités s'

$$s' = -\varkappa(\nu \,.\, \mathcal{H}''_\omega + \mathcal{H}'''_\omega)$$

qui sont finies, sont égales et de signes contraires, on a donc $\int_{S'} s' v d\omega = 0$.

La même conclusion s'étend à toute plaque courbe aimantée suivant une direction arbitraire; elle s'étend également à l'aiguille aimantée.

En définitive, toutes les fois que l'une au moins des dimensions de chacun des aimants en présence tend vers zéro, la loi des homologues reste rigoureusement vérifiée, quelles que soient leurs distances et positions relatives.

§ V. — Aimants placés à distance finie.

L'étude des cas asymptotiques vient de prouver que la loi fictive introduite par Boltzmann (actions mutuelles en raison inverse de μ) ne peut être conservée. Parmi les énoncés généraux que fournit la théorie classique de Poisson il en est trois qui paraissent devoir retenir plus particulièrement l'attention. Je vais les exposer successivement.

PREMIÈRE RÈGLE

Soient U', U'', U''', ..., des aimants permanents, des aimants temporaires, et même, plus généralement, des corps magnétiques affectés d'hystérésis. Ces corps étant supposés plongés dans un liquide polarisable μ, imaginons qu'on ait résolu le problème de l'équilibre magnétique. A ce système de solides U', U'', U''', ..., faisons correspondre un système auxiliaire formé de solides U_1', U_1'', U_1''', ..., ayant respectivement mêmes dimensions que U', U'', U''', ..., et occupant les mêmes positions relatives, mais placés dans le vide. Ils seront définis comme suit : pour la configuration considérée du système, le solide U_1' dérivera de U' en solidifiant l'aimantation de U_1' et en fixant sur sa surface S' les charges superficielles de polarisation induite dans le liquide.

Dans les deux systèmes les champs magnétiques sont évidemment identiques. Comparons les actions subies par le système U', U'', U''', ... et celles qui s'exercent entre les aimants permanents U_1', U_1'', U_1''', ... La théorie de Poisson fournit la règle suivante, qui généralise la loi asymptotique donnée au § III :

Première règle. — *Les actions subies par les corps* U', U'', U''', ..., *plongés dans un liquide magnétique illimité de perméabilité* μ, *sont* μ *fois plus grandes que les actions mutuelles des corps* U_1', U_1'', U_1''', ... *placés dans le vide.*

Démonstration. — Nous ne restreignons pas la généralité des résultats en nous limitant à l'étude des aimants permanents solénoïdaux. Soient donc les aimants solénoïdaux U', U'', U''', ... caractérisés par les densités superficielles de magnétisme σ_0', σ_0'', σ_0''', ... que portent les surfaces S', S'', S''', ... Désignons par U la région extérieure aux aimants, et par S l'ensemble des surfaces S', S'', S''', ...

Le champ total créé par le système U′, U″, U‴, ..., U dérive d'un potentiel de simple couche $\mathcal{V}$

$$\mathcal{V}(x, y, z) = \int_S \frac{\sigma(P)}{r} d\omega_P.$$

Ce potentiel vérifie les conditions

$$(35) \qquad \mu \frac{d\mathcal{V}}{d\nu} + \frac{d\mathcal{V}}{d\nu_i} + 4\pi\sigma_0 = 0 \quad \text{sur chacune des surfaces } S', S'', S''', \ldots .$$

De la comparaison de (35) avec la relation classique

$$\frac{d\mathcal{V}}{d\nu} + \frac{d\mathcal{V}}{d\nu_i} + 4\pi\sigma = 0$$

résulte la relation

$$(36) \qquad \sigma_0 = \mu\sigma + \varkappa \frac{d\mathcal{V}}{d\nu_i}.$$

On en déduit les égalités

$$\int_{S'} \sigma \, d\omega = 0, \qquad \int_{S''} \sigma \, d\omega = 0, \ \ldots,$$

qu'on obtiendrait encore en appliquant le théorème du flux d'induction.

La fonction $\mathcal{V}(x, y, z)$ est donc assimilable à un potentiel créé par des aimants solénoïdaux U_1', U_1'', U_1''', ... Ces derniers sont caractérisés par les densités superficielles σ, sommes des densités σ_0 et des densités superficielles de polarisation induite dans le liquide. Le champ créé par U_1', U_1'', U_1''', ... est identique au champ total créé par U′, U″, U‴, ... et U.

Je dis que, pour la configuration considérée, les actions mutuelles apparentes de U′, U″, U‴, ... sont μ fois plus grandes que les actions mutuelles de U_1', U_1'', U_1''', ... Pour démontrer cette propriété j'utiliserai l'équation du travail.

Au cours d'un déplacement élémentaire des aimants U′, U″, U‴, ... plongés dans le liquide μ, le travail des actions extérieures appliquées à ces solides vérifie l'égalité

$$d\mathcal{T}_e = \delta\mathcal{F}, \qquad \text{avec} \qquad \mathcal{F} = \frac{1}{2}\int_S \sigma_0 \mathcal{V} \, d\omega;$$

$\delta\mathcal{F}$ désignant la variation totale de $\mathcal{F}$ calculée dans l'hypothèse où les conditions (35) restent satisfaites.

Au contraire, au cours d'un déplacement élémentaire des aimants permanents U_1', U_1'', U_1''', ..., le travail des forces extérieures vérifie l'égalité

$$d\mathcal{T}_{1e} = \delta_1\mathcal{F}_1, \qquad \text{avec} \qquad \mathcal{F}_1 = \frac{1}{2}\int_S \sigma\mathcal{V} \, d\omega;$$

le symbole δ_1 désignant, cette fois, une variation partielle, que l'on calculera en supposant les charges σ invariablement liées aux solides.

Il s'agit d'établir l'identité

$$\delta\mathcal{F} = \mu.\delta_1\mathcal{F}_1.$$

Nous avons tout d'abord :

$$\delta_1\mathcal{F}_1 = \frac{1}{2}\int_S \sigma\,\delta_1\mathcal{V}\,d\omega, \qquad \text{avec} \qquad \delta_1\mathcal{V} = \int_S \sigma(\mathrm{P})\,\delta\frac{1}{r}\,d\omega_\mathrm{P}.$$

Passons au calcul de $\delta\mathcal{F}$. Après avoir remplacé σ_0 par la valeur (36), nous obtenons

$$\delta\mathcal{F} = \frac{\mu}{2}\int \sigma\delta\mathcal{V}\,d\omega + \frac{\mu}{2}\int \mathcal{V}\,\delta\sigma\,d\omega + \frac{\varkappa}{2}\delta\int \mathcal{V}\frac{d\mathcal{V}}{d\nu_i}\,d\omega.$$

Tenant compte de l'égalité

$$\delta\mathcal{V} = \delta_1\mathcal{V} + \int \frac{\delta\sigma(\mathrm{P})}{r}\,d\omega_\mathrm{P},$$

le terme $\int \sigma\,\delta\mathcal{V}\,d\omega$ devient

$$\int \sigma\,\delta\mathcal{V}\,d\omega = \int \sigma\,\delta_1\mathcal{V}\,d\omega + \int\int \frac{\sigma(\mathrm{M})\,\delta\sigma(\mathrm{P})}{r}\,d\omega_\mathrm{M}\,d\omega_\mathrm{P} = \int \sigma\,\delta_1\mathcal{V}\,d\omega + \int \mathcal{V}\,\delta\sigma\,d\omega.$$

De même, en utilisant la loi de réciprocité

$$\int \delta\mathcal{V}\,\frac{d\mathcal{V}}{d\nu_i}\,d\omega = \int \mathcal{V}\,\delta\left(\frac{d\mathcal{V}}{d\nu_i}\right)d\,\omega,$$

nous avons

$$\frac{1}{2}\delta\int \mathcal{V}\,\frac{d\mathcal{V}}{d\nu_i}\,d\omega = \int \mathcal{V}\,\delta\left(\frac{d\mathcal{V}}{d\nu_i}\right)d\omega.$$

De là résulte la succession d'égalités :

$$\delta\mathcal{F} = \mu\delta_1\mathcal{F}_1 + \int \mathcal{V}\,\delta\left(\mu\sigma + \varkappa\frac{d\mathcal{V}}{d\nu_i}\right)d\omega = \mu\delta_1\mathcal{F}_1 + \int \mathcal{V}\,\delta\sigma_0\,d\omega = \mu\delta_1\mathcal{F}_1;$$

ce qui démontre le théorème.

On observera que cette première règle contient comme cas limite la loi asymptotique relative aux corps placés à grande distance; car dans cette hypothèse les distributions σ ont pour limites les distributions portées par les aimants homologues.

SECONDE RÈGLE

Pour énoncer la seconde règle nous ferons intervenir la notion d'aimant polarisable.

Un *aimant polarisable* U' est, par définition, un corps qui possède à la fois de l'aimantation permanente J_0' et de l'aimantation induite J_i'. Nous admettrons que cette dernière vérifie la loi de Poisson $J_i' = \varkappa' \mathcal{H}'$. A l'intérieur d'un tel aimant l'induction magnétique $\mathcal{B}' = \mathcal{H}' + 4\pi J$ peut s'écrire, en remplaçant $J' = J_0' + J_i'$ par $J' = J_0' + \varkappa' \mathcal{H}'$,

$$\mathcal{B}' = (1 + 4\pi\varkappa')\mathcal{H}' + 4\pi J_0' = \mu' \mathcal{H}' + 4\pi J_0'.$$

La quantité $\mu' = 1 + 4\pi\varkappa'$ s'appellera la *perméabilité* de l'aimant polarisable.

Les formules

$$\mathcal{F} = \int \frac{\mu \mathcal{H}^2}{8\pi} d\varpi = C^{te} - \int \frac{\mathcal{B}^2}{8\pi\mu} d\varpi,$$

restent valables pour les systèmes d'aimants polarisables et de liquides.

Pour le démontrer utilisons la formule

$$\mathcal{F} = \int \frac{\mathcal{H}^2}{8\pi} d\varpi + \int \frac{(J - J_0)^2}{2\varkappa} d\varpi$$

valable pour les systèmes considérés. Tenant compte de la relation $J = J_0 + \varkappa \mathcal{H}$ nous obtenons la première expression de $\mathcal{F}$. La seconde, qui est due à M. Liénard, est la conséquence de l'égalité

$$\frac{\mathcal{B}^2}{\mu} - 2(\mathcal{B} . \mathcal{H}) + \mu \mathcal{H}^2 = \frac{16\pi^2 J_0^2}{\mu},$$

utilisée concurremment avec l'égalité $\int (\mathcal{B} . \mathcal{H}) d\varpi = 0$.

Des deux expressions de $\mathcal{F}$ c'est la seconde,

$$\mathcal{F} = C^{te} - \int \frac{\mathcal{B}^2}{8\pi\mu} d\varpi,$$

qui présente le plus grand caractère de généralité. Comme l'a établi M. Liénard, elle reste encore valable lorsque les aimants polarisables U', U'', U''', ... sont le siège de courants uniformes.

De ces formules, combinées avec les relations d'homogénéité, nous allons déduire une seconde règle de calcul des actions mutuelles :

Commençons par rappeler les équations de la distribution magnétique pour le système S formé par le liquide U et les solides U', U'', ... On a :

1° dans la région U les conditions

$$\operatorname{curl} \mathcal{H} = 0, \quad \operatorname{div}. \mathcal{B} = 0, \quad \mathcal{B} = \mu \mathcal{H}, \quad \lim R^2 \mathcal{H} \text{ fini ou nul pour } R = \infty;$$

2° dans le solide U' les conditions

$$\operatorname{curl} \mathcal{H}' = 0, \qquad \operatorname{div}. \mathcal{B}' = 0, \qquad \mathcal{B}' = \mu' \mathcal{H}' + 4\pi J_0';$$

3° sur la surface de séparation de U et U' les conditions

$$[\nu . \mathcal{H}] + [\nu' . \mathcal{H}'] = 0, \qquad (\nu . \mathcal{B}) + (\nu' . \mathcal{B}') = 0.$$

Ce sont les conditions nécessaires et suffisantes de l'équilibre magnétique.

Ces équations sont homogènes par rapport à $\mu, \mu', \mu'', \dots, J_0', J_0'', \dots, \mathcal{B}, \mathcal{B}', \mathcal{B}'', \dots$; elles restent vérifiées quand on divise toutes ces quantités par un même nombre α, tout en laissant invariables $\mathcal{H}, \mathcal{H}', \mathcal{H}''$, ... Désignons par S_α le nouveau système ainsi défini, et comparons les actions subies respectivement par S et S_α. Observant que $d\mathcal{T}_e = -d\int \frac{\mathcal{B}^2}{8\pi\mu} d\varpi$ est homogène du premier degré par rapport à l'ensemble des $\mathcal{B}$ et des μ, nous obtenons ce théorème :

Théorème. — *Quand on passe du système d'aimants polarisables* S *au nouveau système* S_α, *le champ magnétique n'est pas modifié, tandis que l'induction magnétique ainsi que les actions mutuelles sont multipliées par* α.

En particulier, pour $\alpha = \mu$, nous obtenons la règle que nous nous proposions d'établir :

Seconde règle : *Pour calculer les actions mutuelles d'aimants polarisables plongés dans un liquide illimité, de perméabilité* μ, *on commencera par faire ce calcul dans l'hypothèse où ces mêmes corps sont placés dans le vide, et possèdent des aimantations permanentes et des perméabilités* μ *fois plus petites. On multipliera finalement par* μ *les résultats obtenus.*

En appliquant cette règle il ne faut pas perdre de vue que les aimants permanents du système donné doivent être, conformément à l'énoncé précédent, remplacés par des aimants polarisables possédant une aimantation permanente $\frac{J_0}{\mu}$ et une perméabilité $\frac{1}{\mu}$.

TROISIÈME RÈGLE (1)

Pour l'intelligence de ce second énoncé nous commencerons par rappeler succinctement les énoncés qui se rapportent à la loi élémentaire de Coulomb, écrite dans un système quelconque d'unités :

$$F = \frac{1}{\beta} \cdot \frac{mm'}{r^2}, \qquad \beta \text{ désignant une constante universelle.}$$

On sait que le choix des définitions comporte un très large arbitraire. Dans la démonstration que nous avons en vue il sera commode de poser les définitions qui vont suivre.

Définitions et théorèmes. — 1° Le *moment magnétique* d'un doublet, formé de deux masses $-m$ et $+m$ placées à la distance l, est le vecteur $\overline{\mathcal{M}} = m\bar{l}$, dirigé de la masse $-m$ vers la masse $+m$.

2° L'*intensité d'aimantation* $\bar{J}$, caractérisant le volume élémentaire $D\varpi$, est définie par l'égalité vectorielle

$$\bar{J} = \frac{\Sigma \overline{\mathcal{M}}}{D\varpi},$$

la sommation étant étendue à tous les doublets contenus dans le volume $D\varpi$.

3° Le *champ magnétique* $\mathcal{H}$ est, par définition, le vecteur $\mathcal{H} = -$ gradient $\mathcal{V}$. On a

$$\mathcal{V} = \frac{1}{\beta}\left(\frac{m}{r} - \frac{m}{r'}\right) = \frac{1}{\beta}\frac{\mathcal{M}\cos\theta}{r^2}, \quad \text{pour un doublet;}$$

et

$$\mathcal{V} = \frac{1}{\beta}\int_U \left(J'_x \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} + J'_y \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'} + J'_z \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'}\right) d\varpi', \quad \text{pour un aimant U.}$$

L'intégration par parties fournit une seconde expression du potentiel $\mathcal{V}$:

$$\mathcal{V} = \frac{1}{\beta}\int_U \frac{\rho'}{r} d\varpi' + \frac{1}{\beta}\int_S \frac{\sigma'}{r} d\omega', \qquad \text{avec} \quad \rho = -\,\text{div.}\, J, \quad \sigma = -(\nu_i \,.\, J).$$

---

(1) Une règle analogue a été donnée par Duhem (*Traité d'Electricité et de Magnétisme*, tome II, page 381) pour les systèmes de conducteurs électrisés et de diélectriques parfaitement doux plongés dans un liquide diélectrique. Duhem a exclu les diélectriques portant des charges permanentes ainsi que les diélectriques présentant une polarisation permanente. Les considérations développées ci-dessous s'appliquent à ce cas plus général. Les deux premières règles trouvent de même leur équivalent en électrostatique.

4° De cette dernière expression de $\mathcal{V}$ on déduit les égalités :

$$\operatorname{div}.\mathcal{H} = -\Delta\mathcal{V} = \frac{4\pi\rho}{\beta} = -\frac{4\pi}{\beta}\operatorname{div}.\mathrm{J},$$

$$(\nu_i.\mathcal{H}_i) + (\nu_e.\mathcal{H}_e) = \frac{4\pi\sigma}{\beta} = -\frac{4\pi}{\beta}(\nu_i.\mathrm{J}).$$

Ces égalités prouvent que le vecteur

$$\overline{\mathcal{B}} = \beta\overline{\mathcal{H}} + 4\pi\overline{\mathrm{J}}$$

est solénoïdal dans tout l'espace; elles donnent en effet :

$$\operatorname{div}.\mathcal{B} = 0, \qquad (\nu_i.\mathcal{B}_i) + (\nu_e.\mathcal{B}_e) = 0.$$

Nous convenons de conserver à ce vecteur $\mathcal{B}$ la dénomination d'*induction magnétique* (¹).

5° A l'intérieur d'un aimant polarisable isotrope U', l'aimantation totale J est la somme de l'aimantation permanente J_0' et de l'aimantation induite $\varkappa'_\beta\mathcal{H}'$:

$$\overline{\mathrm{J}}' = \overline{\mathrm{J}}_0' + \varkappa'_\beta\overline{\mathcal{H}}'.$$

$\varkappa'_\beta$ est le *coefficient d'aimantation de l'aimant polarisable.*

Dans un tel corps l'induction magnétique a pour valeur

$$\overline{\mathcal{B}}' = \beta\overline{\mathcal{H}}' + 4\pi\overline{\mathrm{J}}' = \mu'_\beta\overline{\mathcal{H}}' + 4\pi\overline{\mathrm{J}}_0'; \qquad \text{avec} \qquad \mu'_\beta = \beta + 4\pi\varkappa'_\beta.$$

μ'_β est, par définition, la *perméabilité de l'aimant polarisable.*

6° Lorsqu'un doublet $\mathcal{M}$ se déplace dans un champ magnétique extérieur invariable $\mathcal{H}_e$, le travail des forces de Coulomb, appliquées à ce doublet, est égal à la variation du produit scalaire $(\mathcal{M}.\mathcal{H}_e)$.

(¹) Ces définitions, commodes pour la comparaison que nous nous proposons d'établir, ne s'imposent nullement. Dans un exposé systématique de la théorie du magnétisme, où l'on introduirait une constante universelle β, on simplifierait notablement les formules de la magnétostatique en écrivant :

$$\overline{\mathcal{M}} = m\overline{l}, \qquad \overline{\mathrm{J}} = \frac{1}{\beta}\cdot\frac{\Sigma\mathcal{M}}{\mathrm{D}\varpi}, \qquad \mathcal{V} = \int\left(\mathrm{J}'_x\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x'} + \ldots\right)d\varpi', \qquad \overline{\mathcal{B}} = \overline{\mathcal{H}} + 4\pi\overline{\mathrm{J}}.$$

Avec ces définitions, tout aussi acceptables que celles du texte, les trois vecteurs $\mathcal{B}$, $\mathcal{H}$, J auraient mêmes dimensions.

Pareillement lorsque plusieurs aimants permanents U′, U″, U‴ se déplacent dans le vide, leurs actions mutuelles effectuent un travail

$$d\mathcal{T} = d\frac{1}{2}\int_{U'}(J'\,.\,\mathcal{H}'' + \mathcal{H}''')d\varpi + d\frac{1}{2}\int_{U''}(J''\,.\,\mathcal{H}' + \mathcal{H}''')d\varpi + d\frac{1}{2}\int_{U'''}(J'''\,.\,\mathcal{H}' + \mathcal{H}'')d\varpi,$$

$\mathcal{H}'$, $\mathcal{H}''$, $\mathcal{H}'''$ désignant les champs magnétiques respectivement créés par les aimantations J′, J″, J‴.

Tenant compte des égalités évidentes

$$\int_{U'}(J'\,.\,\mathcal{H}')d\varpi = C^{te}, \qquad \int_{U''}(J''\,.\,\mathcal{H}'')d\varpi = C^{te}, \qquad \int_{U'''}(J'''\,.\,\mathcal{H}''')d\varpi = C^{te},$$

on a la formule

$$d\mathcal{T} = d\frac{1}{2}\int_{U'+U''+U'''}(J\,.\,\mathcal{H})d\varpi, \quad \mathcal{H} \text{ désignant le champ total } \mathcal{H}' + \mathcal{H}'' + \mathcal{H}'''.$$

Au cours de ce changement de configuration du système U′, U″, U‴, les forces extérieures qu'il faut appliquer à ces solides pour les maintenir en équilibre effectuent un travail $d\mathcal{T}_e$ qui vérifie l'égalité

$$d\mathcal{T}_e + d\mathcal{T} + d\mathcal{T}_i' + d\mathcal{T}_i'' + d\mathcal{T}_i''' = 0;$$

$d\mathcal{T}_i'$, $d\mathcal{T}_i''$, $d\mathcal{T}_i'''$ désignant les travaux des forces intérieures à chacun des solides considérés. Chacun de ces travaux $d\mathcal{T}_i$ étant nul (égalité de l'action et de la réaction), on a la formule

$$d\mathcal{T}_e = -d\frac{1}{2}\int_{U'+U''+U'''}(J\,.\,\mathcal{H})d\varpi = -d\frac{1}{2}\int_{U+U'+U''+U'''}(J\,.\,\mathcal{H})\,d\varpi,$$

qu'on peut encore écrire, en remplaçant J par $\dfrac{\mathcal{B} - \beta\mathcal{H}}{4\pi}$,

$$d\mathcal{T}_e = d\int\frac{\beta\mathcal{H}^2}{8\pi}, \quad \text{l'intégrale étant étendue à tout l'espace.}$$

7° Supposons maintenant que les solides en présence soient des corps magnétiques dont l'aimantation est susceptible de varier suivant une loi quelconque. Nous ne changerons pas le travail élémentaire des forces d'origine magnétique si nous solidifions l'aimantation sur chacun de ces corps. L'équation du travail s'écrit donc

$$d\mathcal{T}_e = \delta\int\frac{\beta\mathcal{H}^2}{8\pi}\,d\varpi,$$

δ désignant, cette fois, une variation calculée dans l'hypothèse où les corps magnétiques considérés sont remplacés par des aimants permanents.

Transformons cette expression en y faisant intervenir les variations véritables $d\mathcal{H}$ et $d\mathrm{J}$. On a :

$$d\overline{\mathcal{H}} = \delta\overline{\mathcal{H}} + \delta'\overline{\mathcal{H}}, \qquad d\overline{\mathcal{B}} = \delta\overline{\mathcal{B}} + \delta'\overline{\mathcal{B}};$$

$\delta'\mathcal{H}$ et $\delta'\mathcal{B}$ désignant les variations partielles, calculées en supposant que les aimants sont immobiles, et que l'aimantation passe de sa valeur initiale $\overline{\mathrm{J}}$ à sa valeur finale $\overline{\mathrm{J}} + d\overline{\mathrm{J}}$. Comme le vecteur $\mathcal{H}$ est lamellaire tandis que $\delta'\mathcal{B}$ est solénoïdal, on a l'identité

$$\mathrm{o} = \int (\mathcal{H} \,.\, \delta'\mathcal{B})\, d\varpi,$$

ou, en remplaçant $\delta'\mathcal{B}$ par sa valeur $\delta'\mathcal{B} = \beta\delta'\mathcal{H} + 4\pi d\mathrm{J}$,

$$\mathrm{o} = \int \beta(\mathcal{H} \,.\, \delta'\mathcal{H})\, d\varpi + 4\pi \int (\mathcal{H} \,.\, d\mathrm{J})\, d\varpi.$$

On observera que dans le produit scalaire $(\mathcal{H} \,.\, d\mathrm{J})$, le vecteur $d\mathrm{J}$ doit être rapporté à des axes invariablement liés à l'aimant considéré.

Tenant compte de cette dernière identité, l'équation du travail

$$d\mathcal{T}_e = (d - \delta') \int \frac{\beta\mathcal{H}^2}{8\pi}\, d\varpi = d \int \frac{\beta\mathcal{H}^2}{8\pi}\, d\varpi - \int \frac{\beta(\mathcal{H} \,.\, \delta'\mathcal{H})}{4\pi}\, d\varpi$$

devient :

$$d\mathcal{T}_e = d \int \frac{\beta\mathcal{H}^2}{8\pi}\, d\varpi + \int (\mathcal{H} \,.\, d\mathrm{J})\, d\varpi = -d\frac{\mathrm{I}}{2} \int (\mathrm{J} \,.\, \mathcal{H})\, d\varpi + \int (\mathcal{H} \,.\, d\mathrm{J})\, d\varpi.$$

Le travail des forces extérieures est égal à la différentielle $d \int \frac{\beta\mathcal{H}^2}{8\pi} d\varpi$, augmentée de la quantité $\int (\mathcal{H} \,.\, d\mathrm{J})\, d\varpi$. Lorsque le système de solides invariables éprouve une succession de transformations isothermiques infiniment lentes formant un cycle fermé, le travail des forces extérieures

$$\mathcal{T}_e = \int\int (\mathcal{H} \,.\, d\mathrm{J})\, d\varpi$$

représente la chaleur dégagée par hystérésis.

8° Étudions les corps magnétiques dépourvus d'hystérésis : l'intégrale précédente doit être nulle pour tout cycle fermé, ce qui exige que $(\mathcal{H} . dJ)$ soit la différentielle d'une fonction $\Phi(J_x, J_y, J_z)$. On parvient ainsi aux formules de Kirchhoff

$$\mathcal{H}_x = \frac{\partial\Phi}{\partial J_x}, \qquad \mathcal{H}_y = \frac{\partial\Phi}{\partial J_y}, \qquad \mathcal{H}_z = \frac{\partial\Phi}{\partial J_z}.$$

Pour les systèmes de corps dépourvus d'hystérésis l'équation du travail s'écrit :

$$d\mathcal{C}_e = d\mathcal{F},$$

$\mathcal{F}$ désignant le potentiel interne (1)

$$(37) \qquad \mathcal{F} = -\frac{1}{2}\int (J . \mathcal{H})\, d\varpi + \int \Phi\, d\varpi = \int \frac{\beta\mathcal{H}^2}{8\pi} d\varpi + \int \Phi\, d\varpi.$$

Pour un corps isotrope polarisable la fonction Φ est égale à $\frac{\left(\overline{J - J_0}\right)^2}{2\varkappa_\beta}$, et le potentiel interne a pour expression :

$$\mathcal{F} = \int \frac{\beta\mathcal{H}^2}{8\pi} d\varpi + \int \frac{\left(\overline{J - J_0}\right)^2}{2\varkappa_\beta} d\varpi = \int \frac{\mu_\beta \mathcal{H}^2}{8\pi} d\varpi = C^{te} - \int \frac{\mathcal{B}^2}{8\pi\mu_\beta} d\varpi.$$

Application à l'étude des actions mutuelles. — Ces préliminaires rappelés, établissons la troisième règle. Lorsqu'on introduit dans la formule de Coulomb une constante universelle β, l'étude de l'équilibre magnétique et des actions mutuelles de corps placés dans le vide se ramène au système d'équations :

vide U : $\operatorname{curl}\mathcal{H} = 0, \quad \operatorname{div}.\mathcal{B} = 0, \quad \overline{\mathcal{B}} = \beta\overline{\mathcal{H}}, \quad \lim_{R=\infty} R^3\mathcal{H}$ finie ou nulle.

aimant U′ : $\operatorname{curl}\mathcal{H}' = 0, \quad \operatorname{div}.\mathcal{B}' = 0, \quad \overline{\mathcal{B}'} = \mu'_\beta\overline{\mathcal{H}'} + 4\pi\overline{J}_0', \quad \mu'_\beta = \beta + 4\pi\varkappa'_\beta.$

surface limitant U′ : $[\nu . \mathcal{H}] + [\nu' . \mathcal{H}'] = 0, \qquad (\nu . \mathcal{B}) + (\nu' . \mathcal{B}') = 0.$

équation du travail : $d\mathcal{C}_e + d\int_U \frac{\mathcal{B}^2}{8\pi\beta} d\varpi + d\int_{U'} \frac{\mathcal{B}'^2}{8\pi\mu'_\beta} d\varpi + \ldots = 0.$

Comparons ce système d'équations à celui qu'on obtient, dans le système électromagnétique ($\beta = 1$), pour les mêmes solides U′, U″, U‴, ... plongés dans un

(1) On remarquera que la formule (37) n'est démontrée que pour des systèmes de solides invariables. Son extension aux systèmes de solides et de liquides constitue un postulat implicitement admis par Helmholtz, postulat que Kirchhoff (*Vorlesungen über Electricität and Magnetismus*, 1891, p. 174) et Duhem (*Traité d'Electricité et de Magnétisme*, tome II, pages 162 à 172) ont tenté de justifier.

liquide illimité U, de perméabilité $\mu = 1 + 4\pi\varkappa$. Nous avons, dans ce cas, les équations précédemment écrites :

liquide U : $\quad \operatorname{curl} \mathcal{H} = 0, \quad \operatorname{div.} \mathcal{B} = 0, \quad \overline{\mathcal{B}} = \mu \overline{\mathcal{H}}, \quad \lim_{R=\infty} R^3 \mathcal{H}$ finie ou nulle.

aimant U' : $\quad \operatorname{curl} \mathcal{H}' = 0, \quad \operatorname{div.} \mathcal{B}' = 0, \quad \overline{\mathcal{B}}' = \mu' \overline{\mathcal{H}}' + 4\pi \bar{J}_0', \quad \mu' = 1 + 4\pi\varkappa'$.

surface limitant U' : $\quad [\nu \,.\, \mathcal{H}] + [\nu' \,.\, \mathcal{H}'] = 0, \qquad (\nu \,.\, \mathcal{B}) + \nu' \,.\, \mathcal{B}') = 0.$

équation du travail : $\quad d\mathcal{C}_e + d \int_U \frac{\mathcal{B}^2}{8\pi\mu} d\varpi + d \int_{U'} \frac{\mathcal{B}'^2}{8\pi\mu'} d\varpi + \ldots = 0.$

L'analogie que présentent ces deux systèmes d'équations devient une identité lorsqu'on convient de donner à la constante β la valeur $\beta = \mu$ au lieu de la valeur $\beta = 1$ qu'elle possède dans le système E.M ; et lorsque, de plus, on convient d'écrire

$$\varkappa'_\beta = \varkappa' - \varkappa.$$

Dans ces conditions μ'_β devient égal à μ', car on a

$$\mu'_\beta = \mu + 4\pi(\varkappa' - \varkappa) = 1 + 4\pi\varkappa'.$$

Mais, écrire $\beta = \mu$ équivaut à appliquer aux solides U', U'', ..., plongés dans le liquide U, la loi fictive de Boltzmann. Nous parvenons donc à cet énoncé :

Troisième règle. — *Pour calculer les actions mutuelles de corps plongés dans un liquide illimité, de perméabilité* $\mu = 1 + 4\pi\varkappa$, *on peut faire abstraction de ce liquide et appliquer la loi de Boltzmann, à condition d'attribuer en même temps à chaque corps un coefficient fictif d'aimantation* $(\varkappa' - \varkappa)$ *égal à l'excès de son coefficient véritable* $\varkappa'$ *sur celui du liquide considéré.*